

ДЕФОРМИРОВАННАЯ СУММА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

А.И. Олемской, С.С. Борисов, И.А. Шуда*

Институт прикладной физики НАН Украины, ул. Петропавловская, 58, г. Сумы, 40030

**Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, 40007*

В соответствии с правилом деформированного сложения найдена сумма геометрической прогрессии q . Исследованы свойства обобщённых биномиальных коэффициентов 15 , определяющих эту сумму. Сравнение аналитических данных с численными показывает их полное соответствие.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается значительный прогресс в исследовании сложных систем, к которым относятся ферромагнетики, спиновые стекла, двумерная электронная плазма в турбулентном режиме, системы с аномальной диффузией Леви, гранулированные системы, твердые тела, подвергнутые ионной бомбардировке, гравитационные системы, солнечные нейтрино, черные дыры, элементарные частицы, сталкивающиеся с высокой энергией, квантовые системы, проявляющие эффекты запутывания и многие другие [1,2]. В отличие от простых систем фазовое пространство сложных статистических объектов разделено на изолированные области, иерархически соподчинённые друг другу. Они распределены таким образом, что при переходе на более глубокий уровень иерархии статистический ансамбль разделяется на более мелкие подансамбли, которые, в свою очередь, состоят из ещё более мелких субансамблей следующего уровня, и т.д. В результате иерархически соподчинённые системы образуют ультраметрическое пространство, геометрическим образом которого является дерево Кейли с узлами, отвечающими частично перекрывающимся статистическим (под)ансамблям [3]. Эволюция таких систем сводится к процессу аномальной диффузии в ультраметрическом пространстве [4], в результате чего устанавливается стационарное распределение по иерархическим уровням, сводящееся к степенному закону Цаллиса [1]:

$$p_l = \frac{\exp_q(-\varepsilon_l/T)}{\sum_l \exp_q(-\varepsilon_l/T)}. \quad (1)$$

Здесь ε_l – энергия l -го уровня; T – температура, измеренная в энергетических единицах; при заданном параметре деформации $q \leq 1$ экспонента Цаллиса и обратный ей логарифм задаются выражениями [1]

$$\begin{aligned} \exp_q(x) &:= [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, & [y]_+ &\equiv \max(0, y); \\ \ln_q(x) &:= \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, & x &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Легко убедиться, что для произвольных аргументов $x, y > 0$ функции (2) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \exp_q(x+y) &= \exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y), & \exp_q(x)\exp_q(y) &= \exp_q(x \oplus_q y); \\ \ln_q(xy) &= \ln_q(x) \oplus_q \ln_q(y); & \ln_q(x) + \ln_q(y) &= \ln_q(x \otimes_q y), \end{aligned} \quad (3)$$

которые обобщают обычные правила, отвечающие пределу $q \rightarrow 1$. Характерная особенность равенств (3) состоит в использовании деформированных суммы/разности и произведения/частного

$$\begin{aligned} x \oplus_q y &:= x + y + (1-q)xy, & x \bar{\oplus}_q y &:= \frac{x-y}{1+(1-q)y}, & y &\neq \frac{-1}{1-q}; \\ x \otimes_q y &:= \left[x^{1-q} + y^{1-q} - 1 \right]_{+}^{\frac{1}{1-q}}, & x \bar{\otimes}_q y &:= \left[x^{1-q} - y^{1-q} + 1 \right]_{+}^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Определения (4) приводят к деформированной алгебре и отвечающему ей интегро-дифференциальному исчислению [5]. В частности, оказывается [2], что определение вероятности зарождения регулярной иерархической структуры требует знания деформированной суммы геометрической прогрессии. Решению этой задачи посвящена предлагаемая работа.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Как обычно, член геометрической прогрессии $x_m = ar^m$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ задаётся множителем a и знаменателем r . В отсутствие деформации суммирование приводит к обычному выражению

$$s_n \equiv \sum_{m=0}^{n-1} r^m = \frac{1-r^n}{1-r}. \quad (5)$$

Предположим, что деформированная сумма

$$S_n := \underbrace{a \oplus_q ar \oplus_q ar^2 \oplus_q \dots \oplus_q ar^{n-1}}_n \quad (6)$$

представляется рядом

$$S_n \equiv a \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_n^m [(1-q)a]^m \quad (7)$$

с основанием $(1-q)a$ и неизвестными коэффициентами σ_n^m .

Для их определения запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &:= S_n \oplus_q (ar^n) = (S_n + ar^n) + (1-q)S_n(ar^n) = \\ &= \left[a(\sigma_n^0 + r^n) + a \sum_{m=1}^{n-1} [(1-q)a]^m \sigma_n^m \right] + (1-q)a(ar^n) \sum_{m=0}^{n-1} [(1-q)a]^m \sigma_n^m = \\ &= a\sigma_{n+1}^0 + a \sum_{l=0}^{n-2} [(1-q)a]^{l+1} \sigma_n^{l+1} + a[(1-q)a]r^n \sum_{m=0}^{n-1} [(1-q)a]^m \sigma_n^m = \\ &= a\sigma_{n+1}^0 + a \sum_{l=0}^{n-2} [(1-q)a]^{l+1} (\sigma_n^{l+1} + r^n \sigma_n^l) + a[(1-q)a]^n \sigma_n^{n-1} r^n = \\ &= a\sigma_{n+1}^0 + a \sum_{m=1}^{n-1} [(1-q)a]^m (\sigma_n^m + r^n \sigma_n^{m-1}) + a[(1-q)a]^n \sigma_n^{n-1} r^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое из них следует из определения (6), второе – из первого равенства (4), в третьем использовано предположение (7); первый член следующего выражения записан с учётом (5), во втором введен индекс суммирования $l = m - 1$; при переходе к предпоследнему выражению из суммы по m выделено слагаемое $m = n - 1$, а две оставшиеся суммы объединены; и наконец, последнее равенство предполагает возврат к индексу суммирования $m = l + 1$. Проводя переобозначение $n + 1$ на n , приходим к выражению

$$S_n = as_n + a \sum_{m=1}^{n-1} [(1-q)a]^m (\sigma_{n-1}^m + r^{n-1} \sigma_{n-1}^{m-1}) + a[(1-q)a]^{n-1} \sigma_n^{n-2} r^{n-1}. \quad (9)$$

Сравнение его членов с рядом (7) даёт равенства:

$$\sigma_n^0 = s_n; \quad (10a)$$

$$\sigma_n^m = \sigma_{n-1}^m + \sigma_{n-1}^{m-1} r^{n-1}, \quad m \in [1, n-2]; \quad (10b)$$

$$\sigma_n^{n-1} = \sigma_{n-1}^{n-2} r^{n-1}. \quad (10c)$$

Первое из них выражает искомые коэффициенты низшего порядка, которые, как и следовало ожидать, сводятся к недеформированному случаю.

Определение высших коэффициентов σ_n^m достигается использованием рекуррентных соотношений (10b), которые, как будет показано ниже, обеспечивают и равенство (10c). Нетрудно убедиться, что условие (10b) удовлетворяется подстановкой

$$\sigma_n^m = \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^{m-1} r^l, \quad (11)$$

итерация которой даёт выражение

$$\sigma_n^m = \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^{m-1} r^l = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l-1} \sigma_k^{m-2} r^{l+k} = \dots = \sum_{l_{m-1}=0}^{n-1} r^{l_{m-1}} \sum_{l_{m-2}=0}^{l_{m-1}-1} r^{l_{m-2}} \dots \sum_{l_0=0}^{l_1-1} \sigma_{l_0}^0 r^{l_0}. \quad (12)$$

Однако его использование затруднено тем, что предел каждой внутренней суммы совпадает со степенью слагаемых последующей. Поэтому возвратимся к определению (11), согласно которому при различных m имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_n^1 &= \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^0 r^l = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1-r^l}{1-r} r^l = r \frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})}{(1-r)(1-r^2)}, \\ \sigma_n^2 &= \sum_{l=0}^{n-1} \sigma_l^1 r^l = r \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(1-r^l)(1-r^{l-1})}{(1-r)(1-r^2)} r^l = r^3 \frac{(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидная закономерность этих выражений состоит в том, что числители дробных составляющих коэффициентов σ_n^m содержат множители $1 - r^{n-l}$, $l = 0, 1, \dots, m$, степень которых спадает с ростом m , а показатели множителей $1 - r^{l+1}$, $l = 0, 1, \dots, m$, стоящих в знаменателе,

наоборот, нарастают. Поэтому можно полагать, что искомые коэффициенты имеют вид

$$\sigma_n^m := C_n^{m+1}(r) r^{\sum_{k=1}^m k} = C_n^{m+1}(r) r^{\frac{m(m+1)}{2}}, \quad (14)$$

где обозначено

$$C_n^m(r) \equiv \prod_{l=0}^{m-1} \frac{1-r^{n-l}}{1-r^{l+1}}. \quad (15)$$

С учётом (5) при $m = 0$ равенства (14), (15) дают (10а). Подстановка (14), (15) в (10b) при $m \in [1, n-2]$ приводит к цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \sigma_n^m &= r^{\sum_{k=1}^m k} \prod_{l=0}^m \frac{1-r^{(n-1)-l}}{1-r^{l+1}} + r^{\sum_{k=1}^{m-1} k} \prod_{l=0}^{m-1} \frac{1-r^{(n-1)-l}}{1-r^{l+1}} r^{n-1} = \\ &= r^{\sum_{k=1}^m k} \prod_{l=0}^m \frac{1-r^{n-1-l}}{1-r^{l+1}} \left(1 + \frac{1-r^{m+1}}{1-r^{n-m-1}} r^{n-m-1} \right) = r^{\sum_{k=1}^m k} \frac{\prod_{l=1}^{m+1} (1-r^{n-l})}{\prod_{l=0}^m (1-r^{l+1})} \frac{1-r^n}{1-r^{n-m-1}} = \\ &= r^{\sum_{k=1}^m k} \frac{\prod_{l=0}^m (1-r^{n-l}) \frac{1-r^{n-(m+1)}}{1-r^n}}{\prod_{l=0}^m (1-r^{l+1})} \frac{1-r^n}{1-r^{n-m-1}} = r^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{l=0}^m \frac{1-r^{n-l}}{1-r^{l+1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Первое из них представляет результат указанной подстановки, после которой первый член вынесен как множитель; после сложения членов, стоящих в больших скобках второй строки, в произведении, стоящем в числителе, проведена замена $l+1$ на l ; затем в это произведение включён множитель $1-r^n$, отвечающий $l=0$, и выделен член $1-r^{n-(m+1)}$ при $l=m+1$; сокращение дроби, появляющейся после такого выделения, приводит к последнему выражению (16), совпадение которого с предположением (14), (15) оправдывает его вид. При $m=n-1$ знаменатель последней дроби в (16) содержит сомножители $1-r$, $1-r^2$, ..., $1-r^n$ в прямой последовательности, а числитель – в обратной. В результате предположения (14), (15) удовлетворяют и равенству (10с), а последний коэффициент ряда (7) принимает наиболее простой вид

$$\sigma_n^{n-1} = r^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (17)$$

Таким образом, можно заключить, что равенство (14) применимо при всех значениях $m \in [0, n-1]$, и его подстановка в (7) приводит к окончательному выражению деформированной суммы (6)

$$S_n = a \sum_{m=0}^{n-1} C_n^{m+1}(r) r^{\frac{m(m+1)}{2}} [(1-q)a]^m. \quad (18)$$

Совместно с коэффициентами (15) равенство (18) представляет основной результат нашей работы. Откладывая исследование указанных коэффициентов до следующего раздела, проведём сравнение результатов, следующих из найденных формул, с численными данными, полученными из определения (6) и правила сложения (4). Такое сравнение проведено на рис.1, который показывает полное совпадение аналитических и численных результатов при различных значениях параметров a , r и q .

Характерно, что рост всех указанных параметров способствует увеличению суммы (18).

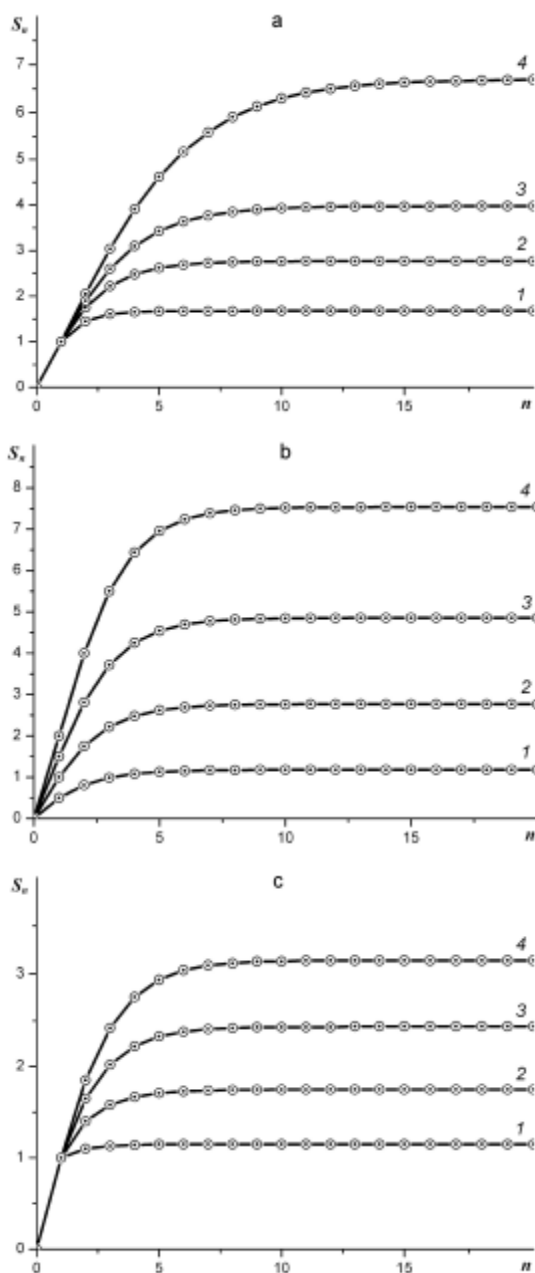


Рисунок 1 – Зависимость деформированной суммы (6) от числа членов геометрической прогрессии при: $a = 1$, $q = 1/2$ и различных знаменателях r , кривые 1–4 отвечают $r = 0,3, 0,5, 0,6, 0,7$, (a); $r = 1/2$, $q = 1/2$ и различных множителях a , кривые 1–4 отвечают $a = 0,5, 1,0, 1,5, 2,0$, (b); $a = 1$, $r = 0,5$ и различных параметрах деформации q , кривые 1–4 отвечают $q = 0,2, 0,5, 0,7, 1,5$, (c). Точками отмечены аналитические данные, определённые равенствами (18) и (15); полые кружки отвечают численным данным, полученным из определения (6) и правила сложения (4)

2. ОБСУЖДЕНИЕ

Деформированная сумма геометрической прогрессии (18) представляет ряд по степеням $(1-q)a$ с коэффициентами (15), значения которых определяют величину этой суммы. Из рис.2, на котором показана зависимость коэффициентов $C_n^m(r)$ от знаменателя геометрической прогрессии r при различных значениях m и n , видно, что при $r = 0$ все коэффициенты (15) принимают значение 1, а с ростом r величины коэффициентов $C_n^m(r)$ возрастают тем в большей степени, чем выше значения индексов m , n . Характерно, что при $r = 1$ величины $C_n^m(r)$ сводятся к биномиальным коэффициентам.

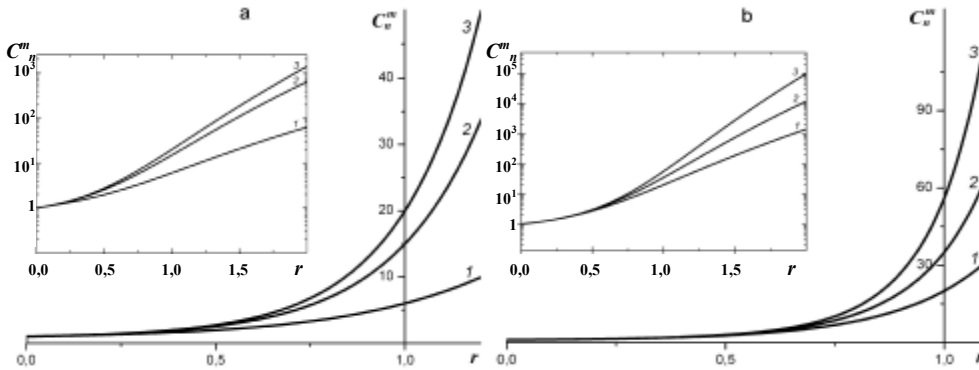


Рисунок 2 – Зависимость коэффициентов $C_n^m(r)$ от знаменателя геометрической прогрессии r при: $n = 6$ и $m = 1, 2, 3$, кривые 1–3 соответственно (a); $m = 3$ и $n = 6, 7, 8$, кривые 1–3 соответственно (b)

Покажем, что при произвольном знаменателе r коэффициенты $C_n^m(r)$, определённые равенством (15), обобщают биномиальные коэффициенты $C_n^m = n! / m!(n-m)!$. Действительно, в пределе $r \rightarrow 1$ выражение (15) даёт

$$\lim_{r \rightarrow 1} C_n^m(r) = \lim_{r \rightarrow 1} \prod_{l=0}^m \frac{1 - r^{n-l}}{1 - r^{l+1}} = \prod_{l=0}^{m-1} \frac{n-l}{l+1} \equiv \frac{n!}{m!(n-m)!} := C_n^m \quad (19)$$

Данный вывод подтверждается рекуррентным соотношением (10b), которое при $r = 1$, когда $\sigma_n^m = C_n^{m+1}$, принимает форму

$$C_n^{m+1} = C_{n-1}^{m+1} + C_{n-1}^m, \quad (20)$$

присущую биномиальным коэффициентам [6].

При $r = 1$ деформированная сумма (18) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= a \sum_{m=0}^{n-1} C_n^{m+1} [(1-q)a]^m \equiv \frac{\sum_{m=0}^{n-1} C_n^{m+1} [(1-q)a]^{m+1}}{1-q} = \\ &= \frac{\sum_{l=0}^n C_n^l [(1-q)a]^l - 1}{1-q} = \frac{[1 + (1-q)a]^n - 1}{1-q}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь предпоследнее равенство содержит переход от суммирования по m к $l = m + 1$, а в последнем выполнено суммирование бинома Ньютона. Результат (21) сразу следует из определения деформированной суммы (6), если учесть, что при $r = 1$ она трансформируется в произведение n одинаковых членов [5]:

$$S_n = n \times a := \frac{[1 + (1 - q)a]^n - 1}{1 - q}. \quad (22)$$

В отсутствие деформации предел $q \rightarrow 1$ приводит равенство (22) к результату $S_n = na$, очевидно следующему из определения (6) при $r = 1, q = 1$.

Из выражения (15), записанного по аналогии с определением биномиальных коэффициентов,

$$C_n^m(r) = \frac{\prod_{l=1}^n (1 - r^l)}{\prod_{l=1}^m (1 - r^l) \prod_{l=1}^{n-m} (1 - r^l)} = \frac{\prod_{l=(n-m)+1}^n (1 - r^l)}{\prod_{l=1}^m (1 - r^l)} \quad (23)$$

видно, что при фиксированном индексе $n \geq 2$ увеличение m от 1 до целого значения $[n/2]$ приводит к росту числа сомножителей и в числителе, и в знаменателе. Поскольку в первом случае показатели степеней в этих сомножителях спадают, а во втором возрастают, то с дальнейшим ростом индекса $m \geq [n/2]$ в обеих частях дроби (23) появляются одинаковые сомножители, и она упрощается, принимая в обратном порядке значения, отвечающие $m \leq [n/2]$. В результате выполняется условие

$$C_n^m(r) = C_n^{n-m}(r), \quad (24)$$

обобщающее соответствующее правило для биномиальных коэффициентов [6]. Более того, ненулевые коэффициенты (23) выстраиваются в треугольник Паскаля

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & C_2^1(r) & & 1 \\ & & & & 1 & & C_3^1(r) & & C_3^1(r) & & 1 \\ & & & & 1 & & C_4^1(r) & & C_4^2(r) & & C_4^1(r) & & 1 \\ & & & & 1 & & C_5^1(r) & & C_5^2(r) & & C_5^2(r) & & C_5^1(r) & & 1 \\ & & & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}, \quad (25)$$

в котором строки отвечают индексам $n = 0, 1, 2, \dots$, а стоящие в них члены – значениям $m = 0, 1, 2, \dots, n$ (поскольку при $m = n$ равенство (23) даёт $C_n^n = 1$, а при $m = 0$ оно не определено, то, следуя условию симметрии (24), мы положили $C_n^0 := 1$). Благодаря этому предположению при любом выборе индексов выполняется обобщённая теорема сложения (см. [6])

$$C_n^m(r) = C_{n-1}^m(r) + C_{n-1}^{m-1}(r) r^{n-m}, \quad (26)$$

следующая из (10b) и (14) после замены $m + 1$ на m . Использование равенства (26) позволяет понижать значения индексов в коэффициентах правой части. Так, m -кратное итерирование коэффициентов, стоящих перед степенями множителя r^{n-m} , приводит к ряду

$$C_n^m(r) = \sum_{l=0}^m C_{n-(l+1)}^{m-l}(r) r^{(n-m)l}, \quad (27)$$

выражающему коэффициенты старших порядков через младшие. Как и следовало ожидать, при $r = 1$ равенство (27) даёт, наряду с (20), теорему сложения биномиальных коэффициентов [6].

SUMMARY

DEFORMED SUM OF GEOMETRICAL PROGRESSION

A.I. Olemskoy, S.S. Borisov, I.A. Shuda

*Institute of Applied Physics of Academy of Sciences of Ukraine;
Sumy State University*

In accordance with the deformed rule (4) the sum (18) of the geometrical progression (6) is found. Probabilities of generalized binomial coefficients (15) are studied to determine this sum. Analytical results are compared with numerical ones to demonstrate their coincidence.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gell-mann M., Tsallis C. Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications. -- Oxford: Oxford University Press, 2004.
2. Олемской А.И. Коллективное поведение сложных систем. -- М.: Едиториал УРСС, 2008.
3. R. Rammal, G. Toulouse, M.A. Virasoro. Ultrametricity for physicists // Rev. Mod. Phys. – 1986. – Vol. 58. – P. 765-788.
4. A.I. Olemskoi. Hierarchical pattern of superdiffusion // JETP Letters. – 2000. – Vol. 71. – P. 285-288.
5. E.P. Borges. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics // Physica A. – 2004. – Vol. 340. – P. 95-101.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1980.

Олемской А.И., доктор физ.-мат. наук, профессор;
Борисов С.С., студент;
Шуда И.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Поступила в редакцию 5 декабря 2008 г.