

УДК 539.3

В. Н. Максименко, Л. А. Фильштинский

О ПЕРЕДАЧЕ УСИЛИЙ ОТ СТРИНГЕРА ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ К АРМИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКЕ

Исследованию подкрепленных ребрами оболочек посвящена обширная литература. Обзор последних работ в этой области содержится в работе [2]. Строгие решения, использующие методы теории интегральных уравнений, приведены, например, в работе [3].

Представляет интерес обобщение этих подходов на усиленные стрингерами оболочки из композиционных материалов. В первом приближении такую оболочку можно рассматривать как анизотропную.

В данной статье рассматривается упругое поведение анизотропной оболочки, усиленной стрингерами переменного сечения.

§ 1. Предварительные результаты. Оболочка под действием сосредоточенных нагрузок. Будем исходить из дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для пологих анизотропных оболочек, составленных из нечетного числа однородных анизотропных слоев [1]

$$\sum_{k=1}^3 L_{jk} u_k = p_j \quad (k, j = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

где u_j , p_j — компоненты векторов перемещений и внешней нагрузки; L_{jk} — известные операторы.

Оператор $B^* = \det [L_{jk}]$ имеет вид

$$B^* = FL \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) = F \left[L_0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + a_9 L_1 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]. \quad (1.2)$$

Здесь

$$F = \frac{D_{11} A_{22}}{R_2^8} [(C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{66} + 2C_{12} C_{16} C_{26} - C_{11} C_{26}^2 - C_{22} C_{16}^2];$$

$$L_0 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) = \sum_{j=0}^8 a_j \frac{\partial^8}{\partial \alpha^{8-j} \partial \beta^j}; \quad L_1 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta} \right) = \\ = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2\lambda \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4};$$

величины C_{jk} , D_{jk} , A_{jk} связаны с упругими параметрами анизотропии; α и β — безразмерные декартовы координаты; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

В уравнениях (1.2) коэффициенты первой квадратичной формы поверхности A и B , фигурирующие в (1.1), полагаем равными R_2 , $\lambda = R_2/R_1$.

Из формулы (1.1), (1.2) следует, что задача о действии сосредоточенной силы на оболочку приводится к определению фундаментального решения оператора L .

Построим T -периодическое по β фундаментальное решение оператора L

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right)E(\alpha, \beta) = \delta(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\beta - nT), \quad (1.3)$$

где $\delta(\alpha)$ — дельта-функция Дирака.

В силу соотношения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\beta - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega\beta} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

функцию $E(\alpha, \beta)$ разыскиваем в виде

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\alpha) e^{in\omega\beta}. \quad (1.4)$$

Подставляя выражение (1.4) в (1.3) и приравнявая в полученном уравнении коэффициенты при одинаковых степенях $e^{in\omega\beta}$, приходим к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений для определения $c_n(\alpha)$

$$l_n(c_n) = \delta(\alpha); \quad l_n = l_n^0 + a_9 l_n^1;$$

$$l_n^0 = \sum_{j=0}^8 a_j (in\omega)^j \frac{d^{8-j}}{d\alpha^{8-j}}; \quad (1.5)$$

$$l_n^1 = \frac{d^4}{d\alpha^4} + 2\lambda (in\omega)^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \lambda^2 (in\omega)^4 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

С помощью преобразования Фурье получим

$$c_0(\alpha) = \frac{1}{2a_9} \left\{ \frac{|\alpha|^3}{3!} + \text{Im} [(z_1^{(0)})^{-3} e^{iz_1^{(0)}|\alpha|}] \right\};$$

$$c_n(\alpha) = \frac{1}{(in\omega)^7} \sum_{\nu=1}^4 \frac{e^{ik\omega z_\nu^{(n)}\alpha}}{\Delta'_n(z_\nu^{(n)})} \quad (\alpha > 0; n = 1, 2, 3, \dots); \quad (1.6)$$

$$c_{-n}(\alpha) = c_n(-\alpha) = \overline{c_n(\alpha)}; \quad \Delta'_n(z) = \frac{d\Delta_n}{dz}; \quad z_1^{(0)} = Vi\sqrt{a_9};$$

$$\Delta_n(z) = \sum_{j=0}^8 a_j z^{8-j} + \frac{a_9}{(n\omega)^4} (z^4 + 2\lambda z^2 + \lambda^2) = \Pi(z - z_\nu^{(n)})(z - \overline{z_\nu^{(n)}}).$$

Главную часть фундаментального решения E дает фундаментальное решение E_0 соответствующего однородного оператора L_0 . Аналогично находим

$$E_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\alpha) e^{in\omega\beta};$$

$$g_0(\alpha) = \frac{|\alpha|^7}{7}; \quad g_n(\alpha) = \frac{1}{(in\omega)^7} \sum_{\nu=1}^4 \frac{e^{in\omega z_\nu \alpha}}{\Delta'(z_\nu)} \quad (\alpha > 0; n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\Delta(z) = \sum_{j=0}^8 a_j z^{8-j} = \prod_{\nu=1}^4 (z - z_\nu)(z - \bar{z}_\nu).$$
(1.7)

В формулах (1.6), (1.7) считаем $z_\nu^{(n)}$ и z_ν простыми и $\text{Im}(z_\nu^{(n)}) > 0$, $\text{Im}(z_\nu) > 0$, что справедливо для существенно анизотропной оболочки.

Выражения для усилий, перемещений и деформаций в случае загрузки по линиям получаются наложением соответствующих решений от сосредоточенной силы. Например, продольная деформация в точке (α, β) от действия усилий интенсивности q , распределенных по T -периодической по β системе линий l_s ($s=0, 1, 2, \dots, \omega-1$) и направленных вдоль оси α , имеет вид

$$\varepsilon_1(\alpha, \beta) = \int_{l_0} q(\alpha_l, \beta_l) \varepsilon(\alpha - \alpha_l, \beta - \beta_l) dl;$$
(1.8)

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = -\frac{1}{FR_2^2} \left(\frac{\partial B_{11}}{\partial \alpha} + \lambda B_{13} \right) E = \sum_{j=0}^6 A_j \frac{\partial^7 E}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} + \sum_{j=0}^3 B_j \frac{\partial^8 E}{\partial \alpha^{3-j} \partial \beta^j},$$

где оператор B_{jk} является алгебраическим дополнением в матрице $[L_{jk}]$.

§ 2. Выделение главной части фундаментального решения. Исследование сходимости полученных рядов. Построенные ряды для фундаментального решения $E(\alpha, \beta)$ плохо сходятся в точке $\alpha=0$, $\beta=0$. Поэтому имеет смысл выделить из $E(\alpha, \beta)$ главную часть фундаментального решения $E_0(\alpha, \beta)$. Ряды для последней могут быть просуммированы и выписаны в явном виде, например,

$$\frac{\partial^7 E_0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} = \frac{1}{T} \sum_{\nu=1}^4 \text{Re} \left[i \frac{z_\nu^{7-j}}{\Delta'(z_\nu)} \text{ctg} \frac{\omega}{2} (z_\nu \alpha + \beta) \right].$$
(2.1)

Оставшаяся часть фундаментального решения будет представлена сходящимися рядами*.

* Соответствующее доказательство для случая изотропной оболочки было развито в докторской диссертации В. М. Толкачева, выполненной в НИИ технического стекла и любезно предоставленной автором в наше распоряжение (Толкачев В. М. Некоторые контактные задачи теории оболочек. Автореф. докт. дис., М., МГУ, 1973, 24 с.).

В самом деле, используя выражения (1.6), (1.7), $E(\alpha, \beta)$ запишем в виде

$$E(\alpha, \beta) = E_0(\alpha, \beta) + E_1(\alpha, \beta); \quad E_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\alpha) e^{in\alpha\beta};$$

$$f_n(\alpha) = c_n(\alpha) - g_n(\alpha). \quad (2.2)$$

Функция $E(\alpha, \beta)$ в силу (2.2), (1.3) удовлетворяет уравнению

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) E_1(\alpha, \beta) = -a_9 L_1\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) E_0(\alpha, \beta). \quad (2.3)$$

После разделения переменных из формул (2.3), (1.5) получим

$$l_n(f_n) = -a_9 l_n^1(g_n) = a_9 K_n(\alpha);$$

$$K_n(\alpha) = -\frac{1}{(in\omega)^3} \sum_{\nu=1}^4 \frac{z_\nu^4 + 2\lambda z_\nu^2 + \lambda^2}{\Delta'(z_\nu)} e^{in\omega z_\nu \alpha}; \quad (2.4)$$

$$K_n(-\alpha) = K_{-n}(\alpha) = \overline{K_n(\alpha)} \quad (\alpha > 0, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Частное решение (2.4) записываем в виде

$$f_n(\alpha) = a_9 \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\alpha - \alpha_1) c_n(\alpha_1) d\alpha_1. \quad (2.5)$$

Отсюда находим интегральное уравнение

$$f_n(\alpha) = a_9 \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_n(\alpha - \alpha_1) f_n(\alpha_1) d\alpha_1 + F_n(\alpha) \right], \quad (2.6)$$

где

$$F_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\alpha - \alpha_1) g_n(\alpha_1) d\alpha_1.$$

Уравнение (2.6) позволяет установить верхнюю оценку для модуля $f_n(\alpha)$ в зависимости от геометрических и физических параметров оболочки и характер убывания членов ряда для $E_1(\alpha, \beta)$.

После некоторых выкладок получим, что при

$$n > \omega^{-1} \sqrt[4]{a_9 B} \quad (2.7)$$

справедлива оценка

$$|f_n(\alpha)| < \frac{A}{(n\omega)^{11}} \frac{a_9}{1 - a_9 B \cdot (n\omega)^{-4}};$$

$$B = \frac{2}{a} \sum_{\nu=1}^4 \left| \frac{z_\nu^4 + 2\lambda z_\nu^2 + \lambda^2}{\Delta'(z_\nu)} \right|; \quad A = B \sum_{\nu=1}^4 \frac{1}{|\Delta'(z_\nu)|}; \quad (2.8)$$

$$a = \min_{\nu} (\text{Im } z_\nu).$$

§ 3. Передача усилий от стрингеров переменного сечения к анизотропной оболочке. Рассмотрим замкнутую по β оболочку, которая вдоль конгруэнтных отрезков $-l/2 \leq \alpha_s \leq l/2$, $\beta_s = sT$ ($s=0, 1, \dots, \omega-1$) усилена тонкими стрингерами переменного сечения $F_0(\alpha)$. Стрингера рассматриваем в виде одномерного упругого континуума с нулевой изгибной жесткостью.

Исследуем закон распределения усилий вдоль отрезков контакта стрингеров с оболочкой, когда к концу каждого стрингера приложена сосредоточенная сила P , направленная вдоль его оси (рис. 1). Эта зада-

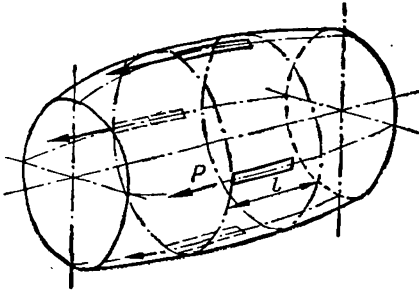


Рис. 1.

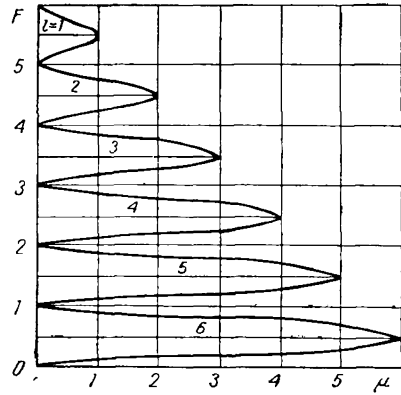


Рис. 2.

ча для случая стрингеров постоянного поперечного сечения и изотропной оболочки была поставлена и решена в работе [3].

Пусть $q(\alpha)$ — неизвестное погонное усилие, действующее на оболочку вдоль линии ее соединения со стрингером. Условие совместности деформаций оболочки и стрингера по линии контакта имеет вид

$$-\int_{\alpha}^{l/2} q(\alpha) d\alpha = \frac{E_0 F_0(\alpha)}{R_2} \varepsilon_1(\alpha, 0), \quad (3.1)$$

где E_0 , $F_0(\alpha)$ — модуль упругости и площадь поперечного сечения стрингера; $\varepsilon_1(\alpha, 0)$ — деформация оболочки (1.8) на линии контакта от действия усилий $q(\alpha)$.

Используя представления (2.1), (2.2) и вводя в (3.1) замену переменных $\alpha = lx/2$, приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + A \int_{-1}^1 \Phi(x-t) \varphi(t) dt + B(x) \int_x^1 \varphi(t) dt = 0. \quad (3.2)$$

Здесь

$$\varphi(x) = q\left(\frac{lx}{2}\right); \quad \Phi(x) = \sum_{j=1}^3 \Phi_j\left(\frac{lx}{2}\right); \quad F(x) = F_0\left(\frac{lx}{2}\right);$$

$$A = -\omega l \left(4i \sum_{\nu=1}^4 \frac{d(z_\nu)}{z_\nu} \right)^{-1}; \quad B(x) = -R_2 T A (E_0 F(x))^{-1};$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2} \left(A_0 - \frac{B_0}{a_0} \right) \operatorname{Re} \left\{ e^{iz_0^{(0)}|x|} - 1 \right\}; \\ \Phi_2(x) &= \sum_{\nu=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ i \left(\operatorname{ctg} \frac{\omega z_\nu x}{2} - \frac{2}{\omega z_\nu x} \right) d(z_\nu) \right\}; \\ \Phi_3(x) &= 2 \operatorname{sgn}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^4 \left[d_n(z_\nu^{(n)}) + \frac{p_n(z_\nu^{(n)})}{(n\omega)^4} \right] e^{in\omega z_\nu^{(n)}|x|} - d(z_\nu) e^{in\omega z_\nu|x|} \right\}; \\ d_n(z) &= \frac{\sum_{j=0}^6 A_j z^{7-j}}{\Delta'_n(z)}; \quad d(z) = \frac{\sum_{j=0}^6 A_j z^{7-j}}{\Delta'(z)}; \quad p_n(z) = \frac{\sum_{j=0}^3 B_j z^{3-j}}{\Delta'_n(z)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты A_j, B_j определены в формулах (1.8).

Таким образом, задача приводится к решению уравнения (3.2), к которому необходимо присоединить дополнительное соотношение

$$\int_{-1/2}^{1/2} q(\alpha) d\alpha = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt = -\frac{P}{R_2}, \quad (3.3)$$

вытекающее из условия равновесия стрингера.

Для численной реализации полученного алгоритма целесообразно воспользоваться одной из процедур прямого решения сингулярного интегрального уравнения [5, 6, 9]. Ниже для решения (3.2) применяется обобщение метода Мультиппа [6].

Методами, аналогичными работам [3, 8], можно показать, что искомая функция

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (3.4)$$

где $\varphi_0(x)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$.

Аналогично [6] выводим квадратурные формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} &= \frac{1}{n \sin \vartheta} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos m\vartheta_\nu \sin m\vartheta; \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi(x-t) \varphi(t) dt &= \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^n \Phi(\cos \vartheta - \cos \vartheta_\nu) \varphi_\nu^0; \\ \frac{1}{2\pi} \int_x^1 \varphi(t) dt &= \frac{1}{\pi n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu^0 \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\cos m\vartheta_\nu \sin m\vartheta}{m} + \frac{\vartheta}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь

$$x = \cos \vartheta; \quad x_\nu = \cos \vartheta_\nu; \quad \varphi_\nu^0 = \varphi_0(x_\nu); \quad \vartheta_\nu = \frac{2\nu-1}{2n} \pi \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Выражения (3.5) позволяют заменить уравнения (3.2), (3.3) системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в узловых точках.

После некоторых преобразований эта система примет вид

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_{m\nu} \varphi_{\nu}^0 = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n);$$

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \vartheta_m} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_m + (-1)^{|m-\nu|} \vartheta_{\nu}}{2} + A \Phi(\cos \vartheta_m - \cos \vartheta_{\nu}) + \right. \\ \left. + \frac{2B(\cos \vartheta_m)}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos j \vartheta_{\nu} \sin j \vartheta_m}{j} + \frac{\vartheta_m}{2} \right) \right]; \quad (3.6)$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu}^0 = -\frac{2}{l} \frac{P}{R_2}.$$

Построение алгоритма закончено.

§ 4. Равнопрочный стрингер. Эта задача имеет значение при создании подкрепленных тонкостенных конструкций и является обратной задачей, рассмотренной в § 3.

В случае пластины аналогичные вопросы рассмотрены в работе [4]. Для изотропных цилиндрических безмоментных оболочек задачи такого круга рассматривались в [7] и последующих работах этих авторов.

Полагая

$$F_0(\alpha) = F_0 F(\alpha); \quad F\left(-\frac{l}{2}\right) = 1 \quad (4.1)$$

и используя условие равнопрочности стрингера $\sigma_0 = c = \text{const}$, получаем связь между усилиями $q(\alpha)$ и функцией $F(\alpha)$

$$q(\alpha) = \frac{E_0 F_0 c}{R_2} F'(\alpha); \quad F'(\alpha) = \frac{dF}{d\alpha}. \quad (4.2)$$

Подставляя выражение для $q(\alpha)$ из (4.2) в (3.1), сводим задачу к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + A \int_{-1}^1 \Phi(x-t) \varphi(t) dt = B_1. \quad (4.3)$$

где

$$\varphi(x) = F'\left(\frac{l}{2}x\right); \quad \Phi(x) = \sum_{j=1}^3 \Phi_j\left(\frac{l}{2}x\right);$$

$$A = \frac{la}{2}; \quad B_1 = \frac{Ta}{E_0 F_0},$$

$$a = - \left[\frac{2i}{\omega} \sum_{\nu=1}^4 \frac{d(z_{\nu})}{z_{\nu}} \right]^{-1};$$

$\Phi_j(x)$ и $d(z_{\nu})$ определяются формулами (3.2).

Повторяя процедуру § 3 и сохраняя прежние обозначения, приходим к следующей системе уравнений относительно приближенных значений искомой функции $\varphi_0(x) = \varphi(x) \sqrt{1-x^2}$ в чебышевских узлах:

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_{m\nu} \varphi_{\nu}^0 = \frac{B_1}{2\pi} \quad (m = 1, 2, \dots, n); \quad \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu}^0 = -\frac{2}{l}. \quad (4.4)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_{m\nu}$ находятся по формулам (3.6), если в них положить $B(\cos\vartheta_{\nu}) = 0$.

Согласно данным работы [6] для больших n последовательность построенных решений системы (4.4) равномерно сходится к искомому решению.

§ 5. Результаты расчетов. Расчеты проводились на ЭЦВМ М-222. В системе (4.4) величина n полагалась равной 35, что отвечает разбиению интервала на 35 чебышевских узлов.

На рис. 2 представлены результаты расчетов $F\left(\mu - \frac{l}{2}\right)$ ($0 < \mu < l$) для цилиндрической оболочки из стеклопластика АГ-4С ($E_1 = 2,1 \cdot 10^4$ Мн/м²; $E_2 = 1,6 \cdot 10^4$ Мн/м²; $G = 4,1 \cdot 10^3$ Мн/м²; $\nu_2 = 0,07$; $l = 1, 2, \dots, 6$), при этом количество стрингеров ω полагалось равным 6;

$$u = E_1 R_2^2 (E_0 F_0)^{-1} = 2 \cdot 10^2; \quad R_2 h^{-1} = 10^2.$$

Расчеты показывают выигрыш в весе по сравнению со стрингерами постоянного сечения той же длины примерно на 50%.

Для проверки сходимости в системе (4.4) последовательно принималось $n=7, 15, 23, 35$. Результаты расчетов показали, что соответствующие $n=23$ и $n=35$ значения $\varphi_0(x)$ отличаются в четвертом знаке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961, 384 с.
2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. К., «Наук. думка», 1973, 246 с.
3. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О передаче усилий от ребер жесткости к цилиндрической оболочке.— В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию академика Л. И. Седова). М., «Наука», 1969, с. 177—181.
4. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Передача усилий от стрингера переменного сечения к пластине.— Проблемы прочности, 1971, № 9, с. 71—74.
5. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных уравнений. К., «Наук. думка», 1968, 287 с.
6. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973, 304 с.
7. Моссаковский В. И., Вергейчик Л. В., Бинкевич Е. В. О рациональном распределении материала в элементах продольного набора оболочки.— Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 8, Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1968, с. 49—54.
8. Муки, Стернберг, Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине.— Труды амер. о-ва инж.-механиков, Прикл. механика, 1968, 35, № 4, с. 124—135.
9. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммарными ядрами.— Прикл. мат. и мех., 1970, 34, в. 4, с. 603—619.