

УДК 539.3

ИЗГИБ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский

(Москва — Новосибирск)

Рассматриваются первая и вторая краевые задачи теории изгиба пластин для упругой изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий. Для искоемых аналитических функций Колосова — Мусхелишвили записываются представления, автоматически удовлетворяющие условию периодичности усилий и моментов в решетке. Задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов в этих представлениях. Приведены результаты расчетов изгибающих моментов вдоль края отверстия для нескольких вариантов геометрии решетки и нагрузок на нее.

§ 1. Пусть центры отверстий образуют систему конгруэнтных точек $P = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm \dots$) с основными периодами $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2le^{i\alpha}$, радиус отверстий равен λ и начало координат совмещено с точкой $P = 0$ (рисунок). Окружность с центром в точке $P = m\omega_1 + n\omega_2$ обозначим через $L_{m,n}$.

Предположим, что на контурах отверстий задана одинаковая для всех $L_{m,n}$ система самоуравновешенных изгибающих моментов и обобщенных перерезывающих сил. Тогда, очевидно, усилия и моменты в рассматриваемой двоякопериодической решетке есть двоякопериодические функции.

Имеем представления усилий и моментов через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ [4]

$$M_x + M_y = -4D(1 + \mu) \operatorname{Re} \Phi(z); \quad N_x - N_y = -4D\Phi'(z); \quad (1.1)$$

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1 - \mu) [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

где M_x , M_y , N_x и N_y — соответствующие компоненты изгибающих моментов и поперечных сил; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ — цилиндрическая жесткость; h — толщина пластины; E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

В силу двоякой периодичности задачи представления для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ имеют вид [1, 3, 5]*

$$\Phi(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)!};$$

* Здесь, как и в работах [1, 5], рассматриваются только симметричные задачи; в общем случае не возникает принципиальных затруднений.

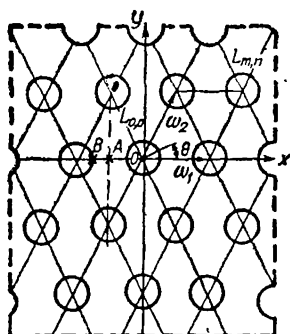
$$\Psi(z) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{2k+1}(z)}{(2k+1)!}; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k} = \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Здесь

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z-P)^2} - \frac{1}{P^2} \right];$$

$$Q(z) = \sum_{m,n} \left[\frac{\bar{P}}{(z-P)^2} - 2z \frac{\bar{P}}{P^3} - \frac{\bar{P}}{P^2} \right];$$



$\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса;
 $Q(z)$ — специальная мероморфная функция [3, 5].

Постоянные α_{2k+2} и β_{2k+2} должны быть определены из краевых условий на контуре $L_{0,0}$.

величины α_0 и β_0 находятся из статических условий в пределах параллелограмма периодов, которые в двоякопериодической задаче являются аналогами условий на бесконечности.

Запишем выражения для главного вектора и главного момента усилий, действующих вдоль произвольной дуги AB [4]

$$P_z^* = 2iD [\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}]_A^B; \quad (1.3)$$

$$M_x^* + iM_y^* = [D(1 - \mu)(z\bar{\Phi} + \bar{\Psi}) - (3 + \mu)D\Phi(z) - 2Dz(\Phi - \bar{\Phi})]_A^B = F(z)_A^B.$$

При этом P_z^* — главный вектор поперечных сил, действующих вдоль дуги AB ; M_x^* и M_y^* — соответствующие компоненты главного момента всех сил, приложенных к AB ; $\Phi(z) = \varphi'(z)$;

$$\Psi(z) = \psi'(z).$$

Если дугу AB провести так, чтобы она соединяла две конгруэнтные точки z и $z + \omega_1$ (z и $z + \omega_2$), то статические условия в пределах параллелограмма периодов с учетом (1.3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\Phi(z + \omega_1) - \Phi(z)] &= 0; & \operatorname{Im} [\Phi(z + \omega_2) - \Phi(z)] &= 0; \\ F(iy + \omega_1) - F(iy) &= 0; & F(x + \omega_2) - F(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Учитывая представления (1.2) и свойства функций $Q(z)$ [5], из уравнений (1.4) для определения величин α_0 , β_0 получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (K_0 \alpha_2 + K_1 \beta_2) \lambda^2; & \beta_0 &= (k_2 \alpha_2 + K_3 \beta_2) \lambda^2; \\ K_0 &= \frac{\delta_1}{\omega_1} - 2K; & K_1 &= -\frac{2K}{n-1}; & n &= \frac{3 + \mu}{1 - \mu}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$K_2 = \frac{\gamma_1 - \delta_1}{\omega_1} - 2K(n-1); \quad K_3 = K_0; \quad K = \frac{\pi i}{\omega_1(\omega_2 - \bar{\omega}_2)} = \frac{\pi}{2S}.$$

Здесь $\delta_1 = 2\zeta(\omega_1/2)$; $\gamma_1 = 2Q(\omega_1/2) - \bar{\omega}_1 \wp(\omega_1/2)$; $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса; S — площадь параллелограмма периодов.

Краевое условие первой основной задачи запишем так [4]:

$$-n\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\tau\overline{\Phi'(\tau)} + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = f_1 + if_2, \quad (1.6)$$

где

$$\tau \in L, \quad L = UL_{m,n} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{D(1-\mu)} \left\{ m - i \int_0^s p ds \right\}; \quad p = \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + N_{ns}; \quad m = M_n.$$

В результате выполнения представлениями (1.2) всех условий периодичности задачи достаточно удовлетворить краевому условию (1.6) лишь на контуре $L_{0,0}$.

Разложив $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$ и $\Psi(z)$, а также правую часть условия (1.6) в ряды Фурье на контуре $L_{0,0}$, приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов α_{2k+2} и β_{2k+2} . Эта система по структуре идентична бесконечной системе уравнений соответствующей плоской двоякопериодической задачи и здесь не приводится. Укажем лишь, что она квазирегулярна при любой близости отверстий друг к другу.

§ 2. В случае второй основной задачи для решетки на кромках отверстий должны быть заданы прогибы и углы поворотов. Однако они не должны быть совсем произвольными, так как рассматривается двоякопериодическое распределение усилий и моментов в решетке. Для того, чтобы это распределение имело место, необходимо наложить на заданные прогибы условия квазипериодичности, а на заданные углы поворотов — условия периодичности.

Краевое условие второй основной задачи имеет вид

$$\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\tau\overline{\Phi'(\tau)} + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = f_1 + if_2, \quad (2.1)$$

где

$$f_1 + if_2 = e^{i\theta} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - i \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Представления (1.2) и формулы (1.5) остаются в силе. Бесконечная система уравнений относительно величин α_{2k+2} и β_{2k+2} может быть получена тем же путем, что и для случая первой основной задачи. Она, естественно, также квазирегулярна.

§ 3. Если на бесконечности решетка загружена моментами

$$M_x^0 = M_1, \quad M_y^0 = M_2, \quad (3.1)$$

то функции Колосова — Мусхелишвили запишем так:

$$\Phi_s(z) = -\frac{M_1 + M_2}{4D(1+\mu)} + \Phi(z); \quad \Psi_s(z) = \frac{M_2 - M_1}{2D(1-\mu)} + \Psi(z), \quad (3.2)$$

причем для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ справедливы представления (1.2).

Приводим результаты расчетов некоторых задач. 1. Решетка правильная треугольная; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$; отверстия свободны от сил. Чистый

изгиб на бесконечности; $M_1 = M_2 = 1$. Значения окружного изгибающего момента M_θ на контуре отверстия в функции от относительного радиуса отверстия даны в табл. 1.

2. Решетка правильная треугольная, отверстия свободны от сил, чистое кручение на бесконечности; $M_1 = -M_2 = 1$. Значения M_θ на контуре отверстия приведены в табл. 2.

Таблица 1

$\theta^\circ \backslash \lambda$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0	2,075	2,343	3,020	5,236	10,0
15	2,075	2,339	2,970	4,782	7,62
30	2,075	2,336	2,919	4,365	6,50
45	2,075	2,339	2,970	4,782	7,62
60	2,075	2,343	3,020	5,236	9,255
75	2,075	2,339	2,970	4,782	7,62
90	2,075	2,336	2,919	4,365	6,50

Таблица 2

$\theta^\circ \backslash \lambda$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0	-1,64	-1,88	-2,58	-5,07	-10,1
15	-1,42	-1,41	-2,15	-3,93	-7,07
30	-0,82	-0,90	-1,06	-1,45	-1,92
45	0,00	0,04	0,23	0,98	2,23
60	0,82	0,94	1,29	2,48	5,05
75	1,41	1,58	1,92	2,95	4,84
90	1,63	1,80	2,12	2,90	3,84

3. Решетка квадратная; $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$; отверстия свободны от сил. Чистый изгиб на бесконечности; $M_1 = M_2 = 1$. Значения M_θ показаны в табл. 3.

4. Решетка квадратная, отверстия свободны от сил. Чистое кручение на бесконечности. Значения M_θ помещены в табл. 4.

Таблица 3

$\theta^\circ \backslash \lambda$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0	2,066	2,315	2,974	5,268	10,15
15	2,066	2,301	2,880	4,606	7,52
30	2,064	2,274	2,705	3,630	4,65
45	2,063	2,260	2,623	3,269	3,74
60	2,064	2,274	2,705	3,630	4,65
75	2,066	2,301	2,880	4,606	7,52
90	2,066	2,315	2,974	5,268	10,15

Таблица 4

$\theta^\circ \backslash \lambda$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0	-1,646	-1,911	-2,640	-5,133	-10,23
15	-1,425	-1,653	-2,253	-4,134	-7,19
30	-0,823	-0,951	-1,264	-2,082	-3,10
45	0	0	0	0	0
60	0,823	0,951	1,264	2,082	3,10
75	1,425	1,653	2,253	4,134	7,19
90	1,646	1,911	2,640	5,133	10,23

5. Решетка правильная треугольная. В отверстия впаены абсолютно жесткие шайбы; $M_1 = M_2 = 1$. Значения окружного M_θ и радиального M_r изгибающих моментов в точках A и B (см. рисунок) в функции от λ даны в табл. 5.

6. Решетка правильная треугольная. В отверстия впаены абсолютно жесткие шайбы; $M_1 = -M_2 = 1$. Значения M_θ и M_r в точках A и B приведены в табл. 6.

Таблица 5

λ	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
M_r^A	1,01	1,04	1,09	1,19	1,37
M_r^B	1,51	1,43	1,38	1,39	1,44
M_θ^A	0,95	0,81	0,61	0,47	0,43
M_θ^B	0,45	0,43	0,43	0,42	0,40

Таблица 6

λ	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
M_r^A	0,89	0,75	0,74	0,52	0,12
M_r^B	4,85	3,09	1,49	0,57	0,15
M_θ^A	-0,51	0,27	0,54	0,22	-0,60
M_θ^B	1,45	0,93	0,45	0,17	-0,74

7. Решетка квадратная. В отверстия впаены абсолютно жесткие шайбы; $M_1 = M_2 = 1$. Значения M_θ и M_r в точках A и B представлены в табл. 7.

8. Решетка квадратная. В отверстия впаены жесткие шайбы; $M_1 = -M_2 = 1$. Значения M_θ и M_r записаны в табл. 8.

Таблица 7

λ	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
M_r^A	1,02	1,07	1,17	1,40	1,75
M_r^B	1,51	1,48	1,53	1,67	1,94
M_θ^A	0,95	0,80	0,63	0,56	0,62
M_θ^B	0,45	0,45	0,45	0,50	0,58

Таблица 8

λ	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
M_r^A	0,97	0,99	1,17	1,49	1,85
M_r^B	4,78	3,27	2,22	1,79	2,02
M_θ^A	-0,54	0,17	0,56	0,62	0,65
M_θ^B	1,43	0,98	0,66	0,54	0,61

Из таблиц видно, что максимальные напряжения слабо зависят от типа перфорации и для больших λ определяются, в основном, средними напряжениями в решетке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Куршин Л. М., Фильштинский Л. А., Об одном методе решения двоякопериодических задач теории упругости, Прикладная механика, т. 1, в. 1, 1965.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., Физматгиз, 1951.
3. Натанзон В. Я., О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке, Математический сборник, т. 42, № 5, 1935.
4. Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, М., ГИТТЛ, 1951.
5. Фильштинский Л. А., Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий, Прикл. матем. и мех., т. XXVIII, в. 3, 1964.

Поступила
17. XI 1966 г.