

УДК 62—505:536.212.2

В. И. Бутырин, Л. А. Фильштинский

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ В СТЕРЖНЕ ПРИ ПРОГРАММНОМ ИЗМЕНЕНИИ ЗОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

При моделировании натуральных условий работы различного рода систем, в которых происходит перекачка сильно теплопроводящих жидкостей, важно обеспечить форсированный (оптимальный по быстродействию) перевод системы из начального в заданный (эксплуатационный) тепловой режим. При этом необходимо исходить из энергетических возможностей испытательной установки, т. е. накладывать ограничения на управляющие тепловые потоки.

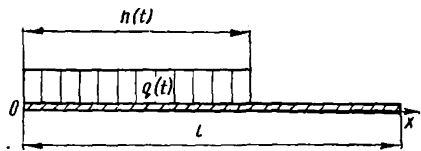


Рис. 1.

Особенность этих задач заключается также в том, что уровень жидкости, а следовательно, и зона смоченной поверхности системы может изменяться во времени по заранее заданной программе. Последнее обстоятельство усложняет условия для оптимального управления тепловым режимом системы.

В настоящей работе рассматривается модельная задача об оптимальном по быстродействию управлении температурой в стержне за счет потоков, облучающих стержень вдоль участка, длина которого изменяется во времени по заданной программе. На ряде примеров иллюстрируются возможности развиваемого подхода.

§ 1. Рассмотрим задачу теплопроводности для стержня, описываемую системой соотношений [3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{c\gamma} q(x, t); \tag{1.1}$$

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad T(0, t) = T(l, t) = 0, \quad a = \frac{\lambda}{c\gamma},$$

где l , λ и γ — длина, коэффициент теплопроводности и удельный вес; c — удельная теплоемкость материала стержня.

Поток $q(x, t)$ будем считать управляющим и зададим его в форме

$$q(x, t) = q(t) \eta[h(t) - x]; \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $0 < x \leq h(t)$ — участок «смоченной» поверхности стержня (рис. 1); функция $h(t)$ считается заданной, она реализует изменение «смоченной» поверхности по заданной программе.

Решение задачи (1.1) при условии (1.2) имеет вид

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n + \frac{2}{\pi n c \gamma} \int_0^t e^{-\omega_n^2 \tau} q(\tau) \left[1 - \cos \frac{\pi n h(\tau)}{l} \right] d\tau \right\} e^{-\omega_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}; \tag{1.3}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}; \quad \varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

§ 2. Поставим задачу об оптимальном по быстродействию переводе стержня из начального температурного состояния $\varphi(x)$ в заданное конечное состояние $\psi(x)$.

Управляющую функцию $q(t)$ будем разыскивать в пространстве L^2 и наложим на нее «энергетическое» ограничение

$$\|q(t)\|_{L^2} \leq \Lambda. \quad (2.1)$$

Пусть $t = t_0$ — наименьшее возможное, совместимое с ограничением (2.1) время перевода стержня из состояния $\varphi(x)$ в состояние $\psi(x)$. Тогда

$$T(x, t_0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (2.2)$$

Подставляя представление (1.3) в формулу (2.2) и сравнивая члены при $\sin \pi n x/l$, приходим к счетной системе моментных равенств

$$a_n = \int_0^{t_*} q(\tau) e^{\omega_n^2 \tau} \left[1 - \cos \frac{\pi n h(\tau)}{l} \right] d\tau \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (2.3)$$

$$a_n = \frac{\pi n}{2} (\psi_n e^{\omega_n^2 t_0} - \varphi_n).$$

Урежая полученную проблему моментов и удерживая в ней N первых равенств, приходим к следующей экстремальной задаче [1]: Найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_N} \int_0^{t_*} \left[\sum_{n=1}^N \xi_n e^{\omega_n^2 t} \left(1 - \cos \frac{\pi n h(t)}{l} \right) \right]^2 dt =$$

$$= \int_0^{t_*} \left[\sum_{n=1}^N \xi_n^0 e^{\omega_n^2 t} \left(1 - \cos \frac{\pi n h(t)}{l} \right) \right]^2 dt \geq \Lambda^{-2} \quad (2.4)$$

при условии, что

$$\sum_{n=1}^N \xi_n^0 a_n = 1. \quad (2.5)$$

Значение t_* , при котором минимум интеграла в формуле (2.4) равен Λ^{-2} , и есть наименьшее возможное время управления t_0 , причем оптимальное управление $q(t)$ имеет вид [2]

$$q(t) = \Lambda^2 \sum_{n=1}^N \xi_n^0 f_n(t); \quad f_n(t) = e^{\omega_n^2 t} \left[1 - \cos \frac{\pi n h(t)}{l} \right]. \quad (2.6)$$

В момент времени $t = t_0$ получаем наилучшее приближение к температурному полю $\psi(x)$.

§ 3. В данной работе принята следующая схема численной реализации алгоритма (2.4), (2.5). Задается некоторое значение t_0 . После этого экстре-

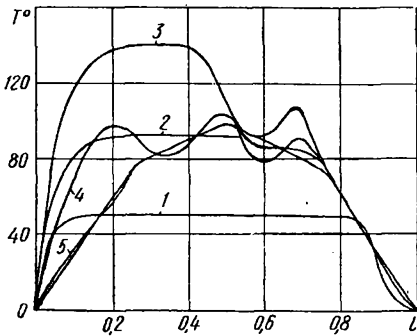
мальная задача (2.4), (2.5) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_{N-1}^0)$

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_{jk} \xi_k^0 = c_j \quad (j = 1, 2, \dots, N-1);$$

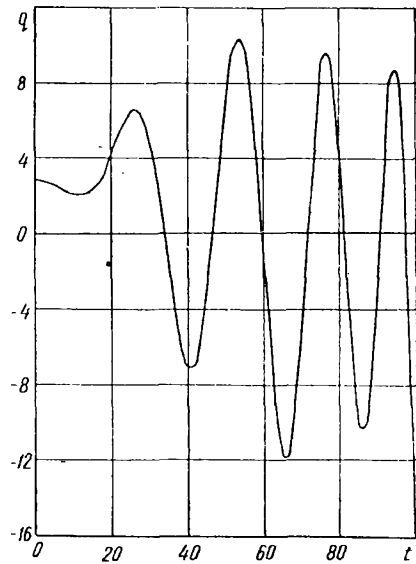
$$b_{jk} = \int_0^{t_0} \left[f_j(\tau) f_k(\tau) + \frac{a_j a_k}{a_1^2} f_1^2(\tau) - \frac{a_j}{a_1} f_k(\tau) f_1(\tau) - \frac{a_k}{a_1} f_j(\tau) f_1(\tau) \right] d\tau; \quad (3.1)$$

$$c_j = \int_0^{t_0} \left[\frac{a_j}{a_1^2} f_1^2(\tau) - \frac{1}{a_1} f_j(\tau) f_1(\tau) \right] d\tau.$$

Найденные значения ξ_k^0 ($k = 1, 2, \dots, N$) подставляются в экстремальное равенство (2.4) и вычисляется значение Λ , соответствующее выбранному оптимальному времени t_0 . Оптимальный управляющий поток определяется по формуле (2.6), (1.2). Перебирая в цикле значения t_0 , можно построить кривую, выражающую зависимость оптимального времени управления t_0 от величины ограничения Λ .



Р и с. 2.



Р и с. 3.

§ 4. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих возможности данного подхода.

а) Пусть алюминиевый стержень единичной длины имеет начальное распределение температуры $\varphi(x) = 0$, на концах его выдерживается нулевая температура. Уровень «смоченной» поверхности стержня $h(t)$ изменяется по линейному закону, причем $h(0) = l, h(t_0) = 0, 1$ l. Ограничение $\Lambda = 61,2$. Требуется за наименьшее возможное время (совместное с заданным значением ограничения Λ) довести эпюру температур в стержне до кусочно-линейного распределения ($\psi(0) = \psi(l) = 0, \psi(l/4) = \psi(3l/4) = 75^\circ \text{C}, \psi(l/2) = 100^\circ \text{C}$). Соответствующие результаты приведены на рисунках 2, 3.

В этом случае оптимальное время управления $t_0 = 100$ сек. Изменение управляющего потока $q(t)$ во времени приведено на рис. 3, а динамика изменения температурного поля в стержне за промежуток $0 \leq t \leq t_0$

иллюстрируется рис. 2, где кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют моментам времени $t=20, 40, 60, 80, 100$ сек.

б) Изменим теперь программу $h(t)$, положив, что «смоченная» поверхность стержня возрастает со временем по линейному закону, причем $h(0)=0,1 l$, $h(t_0)=l$. Начальное и конечное распределение температур возьмем таким же, как и в предыдущем примере, ограничение $\Lambda=91,5$.

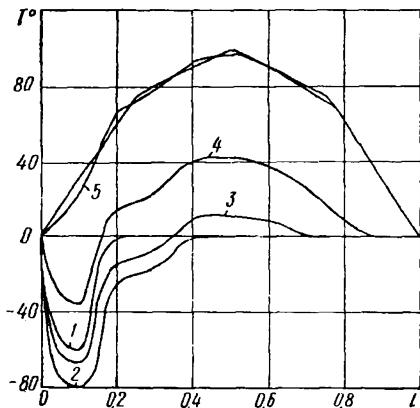


Рис. 4.

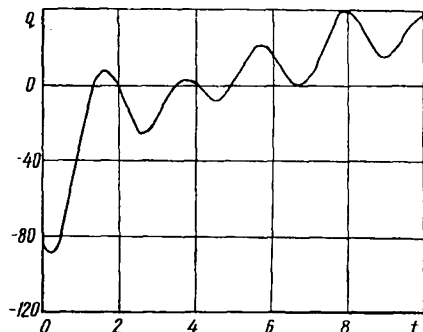


Рис. 5.

В этом случае $t_0=10$ сек. Соответствующие результаты приведены на рисунках 4,5. Позиции 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют моментам времени $t=2, 4, 6, 8, 10$ сек.

Отметим, что во всех расчетах удерживалось 10 моментных равенств ($N=10$), что привело, как это видно из рисунков, к вполне удовлетворительным результатам.

Указанную в работе схему можно распространить без принципиальных усложнений на задачи оптимального управления температурными полями в многоэлементных сложных системах.

В заключение авторы благодарят Ю. И. Бадрухина за участие в обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, ГОНТИ, 1938, 254 с.
2. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965, 586 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966, 679 с.

Поступила
6.XI 1974 г.