УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

(*Новосибирск*)

Описывается операторная схема построения решений в теории пологих оболочек. Рассматриваются цилиндрическая, сферическая и псевдосферическая оболочки. Решения имеют вид рядов по степеням некоторого дифференциального оператора, действующих на произвольную бигармоническую (гармоническую) функцию.

Различные частные решения в теории пологих оболочек построены в явном виде в [1, 2]. Здесь осуществляется построение точных решений иным способом.

1. Согласно [3], интегрируем уравнение

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\,\partial\zeta^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-2\delta\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial\zeta}-\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}=0,\qquad \delta=\frac{1+\alpha}{1-\alpha},\qquad \alpha=\frac{R}{R_1}\tag{1.1}$$

где $F(z,\zeta)$ — комплексная комбинация напряжений и прогиба, R, R_1 — соответствующие радиусы кривизны

$$z=\beta\sqrt{I}(x+Iy)\,/\,a,\qquad \zeta=\beta\sqrt{I}(x-Iy)\,/\,a$$

x, y, a — декартовы координаты и характерный линейный размер на поверхности оболочки, β — известная постоянная.

Если ввести новые переменные t, τ по формулам

$$z=\sqrt{h}\,t,\qquad \zeta=\tau\sqrt{h},\qquad h=I\beta^2=\frac{I(1-\alpha)\varepsilon}{16},\qquad \varepsilon=\frac{a^2\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Rh}\tag{1.2}$$

то уравнение (1.1) можно представить в форме

$$\partial^4 F\,/\,\partial t^2\,\partial\tau^2=h\Lambda F\tag{1.3}$$

Здесь дифференциальный оператор Λ имеет вид

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Будем разыскивать решение уравнения (1.3) в виде операторного ряда

$$F(z, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \Lambda^m F_m(z, \zeta) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3), приходим к системе бигармонических уравнений, определяющих функции $F_m(z, \zeta)$

$$\frac{\partial^4 F_0}{\partial t^2\, \partial \tau^2} = 0, \qquad \frac{\partial^4 F_{m+1}}{\partial t^2\, \partial \tau^2} = F_m, \qquad m=0,1,\ldots \tag{1.5}$$

Оператор Λ можно представить в нескольких формах

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + 2(\delta - 1)\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \tau} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \tau}, \qquad x_* = \frac{x}{a} \tag{1.6}$$

Соответственно Λ^m имеет вид

$$\Lambda^m = \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{4\alpha}{1-\alpha}\right)^j C_m^j \frac{\partial^{2m-2j}}{\partial x_*^{2m-2j}} \left(\frac{\partial^{2j}}{\partial t^j\, \partial \tau^j}\right) = \tag{1.7}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (2\delta)^j C_m^j \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)^{m-j} \frac{\partial^{2j}}{\partial t^j\, \partial \tau^j}, \qquad C_m^j = \frac{m!}{j!\,(m-j)!}$$

Операторный ряд (1.4) можно записать так:

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x_*^{2m}} \sum_{j=0}^{\infty} C_{m+j}^j \left(\frac{4\alpha h}{1-\alpha}\right)^j \frac{\partial^{2j} F_{j+m}}{\partial t^j\, \partial \tau^j} \tag{1.8}$$

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)^m \sum_{j=0}^{\infty} (2\delta h)^j C_{m+j}^j \frac{\partial^{2j} F_{j+m}}{\partial t^j\, \partial \tau^j} \tag{1.9}$$

Согласно (1.5), функция $F_0(z, \zeta)$ является решением бигармонического уравнения, остальные $F_m(z, \zeta)$ разыскиваются как частные решения неоднородного бигармонического уравнения. Легко видеть, что F_m — соответствующие полигармонические функции.

Таким образом, если записать бигармоническую функцию $F_0(z, \zeta)$ через четыре произвольные аналитические функции, затем выразить через них в квадратурах полигармонические функции $F_m(z, \zeta)$, $m = 1, 2 \ldots$. и подставить последние в выражения (1.4), то можно получить интегральные представления всех решений уравнения (1.1). В них будут входить четыре произвольные аналитические функции. Не будем заниматься выводом этих представлений, так как они получены в [3].

2. Полигармонические функции F_m можно взять в виде

$$F_m = \frac{(t\tau)^{2m+1}}{[(2m+1)!]^2} = \frac{r^{4m+2}}{[(2m+1)!]^2}, \qquad r = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \tag{2.1}$$

если положить, что $F_0 = t\tau$.

Соответствующее решение F имеет вид

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x_*^{2m}} \sum_{j=0}^{\infty} C_{m+j}^j \left(\frac{4\alpha h}{1-\alpha}\right)^j \frac{r^{4m+2j+2}}{[(2m+j+1)!]^2} = \tag{2.2}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} h^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)^m \sum_{j=0}^{\infty} C_{m+j}^j (2\delta h)^j \frac{r^{4m+2j+2}}{[(2m+j+1)!]^2}$$

Можно показать, что функция (2.2) совпадает с функцией Римана G_1 уравнения (1.1). Функция $G_0 = \partial^2 G_1 / \partial t \partial \tau$ является вторым ядром в представлении общего решения этого уравнения.

Для цилиндрической оболочки ($\alpha = 0$) получаем

$$G_0 = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \frac{\partial^{2m}}{\partial x_*^{2m}} \frac{r^{4m}}{[(2m)!]^2} \tag{2.3}$$

Так как

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x_*^{2m}} \frac{r^{4m}}{[(2m)!]^2} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2x_*)^{2k}}{(2k)!} \frac{r^{2m-2k}}{[(m-k)!]^2} \tag{2.4}$$

Имеем

$$G_0 = 1 + h(r^2 + 2x_*^2) + h^2 \left(\frac{r^4}{4} + 2r^2 x_*^2 + \frac{2}{3} x_*^4 \right) + \ldots =$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{x_*}{2} \sqrt{I\varepsilon} \right) I_0 \left(\frac{r}{2} \sqrt{I\varepsilon} \right) \tag{2.5}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная цилиндрическая функция первого рода нулевого порядка.

В случае сферической оболочки ($\alpha = 1$) получаем из (2.2) с учетом (1.2)

$$G_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{I\varepsilon}{4} \right)^j \frac{r^{2j}}{j!j!} = I_0(r\sqrt{I\varepsilon}) \tag{2.6}$$

Наконец, для псевдосферы ($\alpha = -1$) имеем

$$G_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{I\varepsilon}{8} \right)^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)^m \frac{r^{4m}}{[(2m)!]^2} \tag{2.7}$$

Здесь следует отметить, что $\partial^2 / \partial t^2 + \partial^2 / \partial \tau^2$ — оператор гиперболического типа. Подобно тому как были получены ядра G_0 и G_1, можно построить полную систему регулярных решений, рассматривая их как отображения бигармонических и аналитических функций

$$F_0 = \frac{t^m}{m!}, \qquad F_0 = \frac{\tau^n}{n!}, \qquad F_0 = \frac{t^m \tau}{m!}, \qquad F_0 = \frac{\tau^n t}{n!} \tag{2.8}$$

Если положим

$$F_0 = t\tau \ln \sqrt{t\tau} \tag{2.9}$$

то получим одно из возможных фундаментальных решений уравнения (1.1).

Поступила 24 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Об одной полной системе решений в теории пологих оболочек. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.

2. Фильштинский Л. А. Полные системы частных решений в теории пологих оболочек. ПММ, 1970, т. 33, вып. 4.

3. Фильштинский Л. А. Интегральные представления решений в теории пологих оболочек. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 6.