

ТЕОРИЯ УПРУГОГО ЛИНЕЙНО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

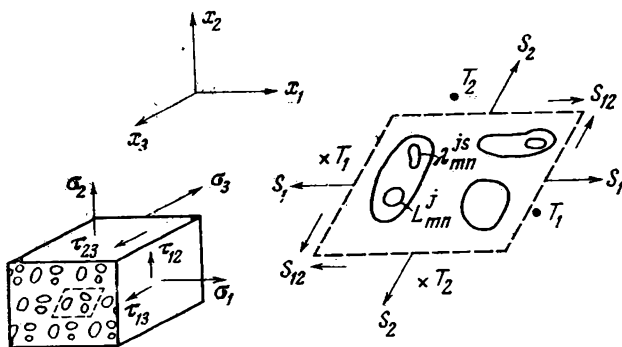
М. Г. Грингауз, Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Изучаются упругие волокнистые композиционные материалы с произвольной микроструктурой ячейки. Развивается процедура определения напряженного состояния и макроскопических свойств таких материалов. Дается строгое обоснование полученных алгоритмов. Приводятся результаты расчетов.

Композиционные материалы с простейшей микроструктурой ячейки изучались в [1], а также методом работы [2] в [3]. Общие методы исследования упругих неоднородных структур содержатся в [4,5].

1. Расчетная схема композиционного материала. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерную изотропную среду, армированную двоякопериодической (в смысле геометрии и упругих характеристик) системой групп



Фиг. 1

прямолинейных волокон с цилиндрическими полостями (фиг. 1). Геометрические и упругие свойства такой среды полностью описываются микроструктурой периодически повторяющейся (фундаментальной) ячейки. Будем предполагать, что волокна посажены в среду с некоторым поперечным натягом, одинаковым в конгруэнтных точках и постоянным вдоль длины волокна. Сопряжение среды и волокон такое, что при переходе через границу контакта вектор усилий изменяется непрерывно, а вектор смещения претерпевает скачок, обусловленный поперечным натягом.

Считаем, что в массиве реализовано следующее напряженное состояние:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1(x_1, x_2), \quad \sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2), \quad e_3 = \text{const} \\ \tau_{12} &= \tau_{12}(x_1, x_2), \quad \tau_{13} = \tau_{13}(x_1, x_2), \quad \tau_{23} = \tau_{23}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ — компоненты тензора напряжения, $e_1, e_2, e_3, \gamma_{12}/2, \gamma_{13}/2, \gamma_{23}/2$ — компоненты тензора деформации.

Система (1.1) распадается на два линейно-независимых напряженных состояния: «обобщенную плоскую деформацию» и «продольный сдвиг»

$$(1.2) \quad \sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2), \quad \sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2), \quad e_3 = \text{const} \\ \tau_{12} = \tau_{12}(x_1, x_2), \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$

$$(1.3) \quad \tau_{13} = \tau_{13}(x_1, x_2), \quad \tau_{23} = \tau_{23}(x_1, x_2), \quad \sigma_1 = \sigma_2 = e_3 = \tau_{12} = 0$$

Для описания напряженного состояния (1.2) используем регулярные функции Колосова — Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, определяющие напряжения и смещения по формулам [6]

$$(1.4) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_2 - \sigma_1 + 2i\tau_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad \kappa = 3 - 4\nu \\ 2G(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) - 2Ge_3\nu z$$

В дополнение к (1.4) имеем из (1.2) и закона Гука

$$(1.5) \quad \sigma_3 = 2G(1 + \nu)e_3 + \nu(\sigma_1 + \sigma_2), \quad w = e_3x_3$$

Напряжения и смещения, соответствующие (1.3), выразим через регулярную функцию $F(z)$ [6]

$$(1.6) \quad \tau_{13} - i\tau_{23} = G[2F'(z) - ciz] \\ u = -cx_2x_3, \quad v = cx_1x_3, \quad w = F(z) + \overline{F(z)}$$

В (1.4) — (1.6) u, v, w — компоненты вектора смещения, G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала среды, c — некоторая вещественная постоянная.

Таким образом, задача о теоретическом описании композиционного материала сводится к двумерным задачам теории упругости. Соответственно этому будем рассматривать плоскую среду $x_3 = \text{const}$, усиленную двоякопериодической системой групп инородных многосвязных включений.

Пусть ω_1 и ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = 0, \text{Im } \omega_2 / \omega_1 > 0$) — основные периоды структуры. Каждый параллелограмм периодов $\Pi_{m,n}$ ($m, n = 0, \pm 1, \dots$) содержит группу включений с упругими характеристиками G_j и ν_j , заполняющих конечные многосвязные области $D_{m,n}^j$ ($j = 1, 2, \dots, k$). Контуры отверстий обозначим через $\lambda_{m,n}^{j,s}$ ($s = 1, 2, \dots, r_j$), конечные односвязные континуумы, ограниченные контурами $\lambda_{m,n}^{j,s}$, — через $d_{m,n}^{j,s}$, границу раздела включения и среды — через $L_{m,n}^j$, неограниченную область, занятую средой, — через D (фиг. 1).

Ниже используем следующие обозначения:

$$l_{m,n} = \bigcup_j L_{m,n}^j, \quad \Lambda_{m,n}^j = \bigcup_s \lambda_{m,n}^{j,s}, \quad \lambda_{m,n} = \bigcup_j \Lambda_{m,n}^j, \quad l_{00}^{*j} = l_{0,0} \setminus L_{0,0}^j$$

Будем предполагать, что каждый из контуров $L_{m,n}^j, \lambda_{m,n}^{j,s}$ имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гельдера.

Положим, что в среде имеют место средние по основным периодам напряжения $S_1, S_2, S_{12}, T_1, T_2$ (на фиг. 1 усилия S_1, S_2, S_{12} лежат в плоскости

чертежа, а усилия T_1, T_2 перпендикулярны ей, точка при T_1, T_2 соответствует направлению от плоскости креста, крестик — по направлению к этой плоскости), что обеспечивает двоякопериодичность тензора напряжений и квазипериодичность функций

$$(1.7) \quad g(z) = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad \chi(z) = G [2\text{Im}F(z) - c |z|^2 / 2]$$

Отсюда следуют тождества

$$(1.8) \quad \begin{aligned} g(z + \omega_1) - g(z) &= -l_1 [i(S_{12} + S_2 \cos \theta) - S_2 \sin \theta] \\ g(z + \omega_2) - g(z) &= l_2 [i(S_{12} \cos \theta + S_1) - S_{12} \sin \theta] \\ \chi(z + \omega_1) - \chi(z) &= l_1 T_2, \quad \chi(z + \omega_2) - \chi(z) = l_2 T_1 \\ l_1 &= |\omega_1|, \quad l_2 = |\omega_2|, \quad \theta = \arg \omega_2 \end{aligned}$$

Проинтегрировав первое из соотношений (1.6) по границе основного параллелограмма периодов, получим

$$(1.9) \quad c = 0$$

Из (1.4) — (1.6), (1.8) и (1.9) и периодичности тензора напряжения следует квазипериодичность функций $\varphi(z), F(z)$, комбинации $\bar{z} \varphi'(z) + \psi(z)$ и смещений u, v, w .

Суммируя сказанное, приходим к задаче об определении функций $\varphi(z), \psi(z), F(z)$ и $\varphi_j(z), \psi_j(z), F_j(z)$, регулярных соответственно в областях D и $D_{0,0}^j (j = 1, 2, \dots, k)$ из системы краевых условий

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= \varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} \\ \frac{1}{2G} [\kappa \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] - \nu e_3 t &= \\ = \frac{1}{2G_j} [\kappa_j \varphi_j(t) - t \overline{\varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)}] - \nu_j e_3 t + h_j(t), \quad t \in L_{0,0}^j \\ \varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} &= C_{j,s}, \quad t \in \lambda_{0,0}^{j,s} \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad \begin{aligned} F(t) + \overline{F(t)} &= F_j(t) + \overline{F_j(t)} \\ G [F(t) - \overline{F(t)}] &= G_j [F_j(t) - \overline{F_j(t)}] \quad t \in L_{0,0}^j \\ F_j(t) - \overline{F_j(t)} &= i C_{j,s}^* \quad t \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\ s &= 1, 2, \dots, r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

Здесь $h_j(t)$ — известные скачки смещения, $C_{j,s}, C_{j,s}^*$ — подлежащие определению постоянные.

К (1.10), (1.11) необходимо присовокупить условия существования в среде заданных средних напряжений (1.8).

2. Обобщенная плоская деформация композиционного материала. При построении общих представлений решения краевой задачи (1.10) воспользуемся результатами работ [5,7]. Запишем

$$(2.1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} p(t) \zeta(t-z) dt + Az$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} [\varepsilon(t) \overline{p(t)} + \mu(t) \overline{q(t)} - \overline{t} p'(t)] \zeta(t-z) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} p(t) \rho_1(t-z) dt + Bz, \quad z \in D \\ \varphi_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \frac{q(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \frac{\omega(t)}{t-z} dt \\ \Psi_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \frac{\alpha_j \overline{p(t)} + \beta_j \overline{q(t)} - \overline{t} q'(t)}{t-z} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \frac{\overline{\omega(t)} - \overline{t} \omega'(t)}{t-z} dt + \sum_{s=1}^{\tau_j} \frac{b_{j,s}}{z - z_{j,s}}, \quad z \in D_{0,0}^j \\ j &= 1, 2, \dots, k \\ \rho_1(z) &= \sum_{m,n} \left\{ \frac{\overline{P}}{(z-P)^2} - 2z \frac{\overline{P}}{P^3} - \frac{\overline{P}}{P^2} \right\}, \quad P = m\omega_1 + n\omega_2 \\ p(t) &= \{p_j(t) \mid t \in L_{0,0}^j\} \quad q(t) = \{q_j(t), \quad t \in L_{0,0}^j\} \\ \omega(t) &= \{\omega_{j,s}(t), \quad t \in \lambda_{0,0}^{j,s}\} \end{aligned}$$

Здесь $\zeta(z)$ — ζ -функция Вейерштрасса [8], $\rho_1(z)$ — специальная мероморфная функция [9], $p(t)$, $q(t)$, $\omega(t)$ — подлежащие определению функции, $z_{j,s} \in d_{0,0}^{j,s}$, $b_{j,s}$ — функционалы, задаваемые соотношениями [7]

$$b_{j,s} = i \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} [\omega(t) \overline{dt} - \overline{\omega(t)} dt]$$

Для кусочно-постоянных $\varepsilon(t) = \{\varepsilon_j, t \in L_{0,0}^j\}$, $\mu(t) = \{\mu_j, t \in L_{0,0}^j\}$ и постоянных α_j и β_j ($j = 1, 2, \dots, k$) положим [5]

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1 + \kappa}{\lambda_j - 1}, \quad \beta_j = \frac{1 + \kappa_j \lambda_j}{1 - \lambda_j} \\ \varepsilon_j &= \frac{\kappa + \lambda_j}{\lambda_j - 1}, \quad \mu_j = \frac{(1 + \kappa_j) \lambda_j}{1 - \lambda_j}, \quad \lambda_j = \frac{G}{G_j} \end{aligned}$$

Используя свойства функции $\rho_1(z)$ [2]

$$\begin{aligned} \rho_1(z + \omega_v) - \rho_1(z) &= \overline{\omega}_v \rho(z) + \gamma_v \\ \gamma_v &= 2\rho_1\left(\frac{\omega_v}{2}\right) - \overline{\omega}_v \rho\left(\frac{\omega_v}{2}\right), \quad v = 1, 2 \end{aligned}$$

($\rho(z)$ — ρ -функция Вейерштрасса [8]) и квазипериодичность ζ -функции Вейерштрасса, нетрудно показать, что представления (2.1) обеспечивают двоякопериодическое распределение напряжений в D .

Постоянные A и B , фигурирующие в (2.1), определяем из условий (1.8). Вычисляя левые части в первых двух тождествах (1.8) при помощи функции $g(z)$ из (1.7) и (2.1), получаем систему двух уравнений относительно $\operatorname{Re} A$ и B . Разрешая систему в предположении, что условие ее совместности

$$(2.2) \quad \operatorname{Im} a = 0$$

выполняется [5], имеем

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} A_L + 1/4 (\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle) \\
 & B = B_L + 1/2 (\langle \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle + 2i \langle \tau_{12} \rangle) \\
 & \operatorname{Re} A_L = \operatorname{Re} \left(\frac{\pi}{2S} a + \frac{\pi}{S} b - \frac{b\delta_1}{\omega_1} \right) \\
 & B_L = \frac{\delta_1 - \gamma_1}{\omega_1} b - \frac{2\pi}{S} \operatorname{Re} b - \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\delta_1}{\omega_1} \right) \operatorname{Re} a \\
 & a = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}^j} [\varepsilon(t) \overline{p(t)} + \mu(t) \overline{q(t)}] dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}^j} p(t) \overline{dt} \\
 & b = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}^j} p(t) dt, \quad \delta_1 = 2\zeta \left(\frac{\omega_1}{2} \right), \quad S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2
 \end{aligned}$$

Здесь $\langle \sigma_1 \rangle$, $\langle \sigma_2 \rangle$, $\langle \tau_{12} \rangle$ — средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям. Формулы преобразования компонентов тензора напряжения при повороте системы координат даны в [6].

Поскольку $\operatorname{Im} A$ не влияет на напряженное состояние [6], полагаем $\operatorname{Im} A = 0$.

Сведем теперь краевую задачу (1.10) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций $p(t)$, $q(t)$, $\omega(t)$. Переходя в (2.1) с помощью формул Сохоцкого — Племяля [10] к предельным значениям, подставляя их в (1.10) и полагая [7]

$$(2.4) \quad C_{j,s} = - \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} \omega(t) ds$$

получаем искомую систему

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & p(t_0) - M_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} = P_j(t_0), \quad t_0 \in L_{0,0}^j \\
 & q(t_0) - N_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} = Q_j(t_0), \quad t_0 \in L_{0,0}^j \\
 & \omega(t_0) - R_{j,s} \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} = 0, \quad t_0 \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\
 & s = 1, 2, \dots, r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \\
 & M_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \left\{ p(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} + \right. \\
 & \left. + \frac{\mu_j}{\varepsilon_j} q(t) d \ln \frac{t-t_0}{\sigma(t-t_0)} \right\} - \frac{1}{2\pi i \varepsilon_j} \int_{l_{0,0}^j} \overline{p(t)} \times \\
 & \times d \{ (t-t_0) \overline{\zeta(t-t_0)} - \overline{\zeta_1(t-t_0)} \} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}^j} \left\{ p(t) \times \right. \\
 & \left. \times \left[\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_j} \overline{\zeta(t-t_0)} \overline{dt} - \zeta(t-t_0) dt \right] + \frac{\mu(t)}{\mu_j} q(t) \overline{\zeta(t-t_0)} \overline{dt} \right\} + \\
 & + \frac{\mu_j}{\varepsilon_j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \frac{\omega(t)}{t-t_0} dt + t_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_j} \right) \operatorname{Re} A_L + \frac{\bar{t}_0}{\varepsilon_j} \bar{B}_L \\
 & N_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \left\{ \frac{\alpha_j}{\beta_j} p(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{t-t_0} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} - \frac{\overline{q(t)}}{\beta_j} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \Big\} - \frac{1}{2\pi i} \times \\
& \times \int_{i_{0,0}}^{\alpha_j} \frac{\alpha_j}{\beta_j} p(t) \zeta(t-t_0) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \left\{ \omega(t) \left[\frac{dt}{t-t_0} - \frac{\overline{dt}}{\beta_j(t-t_0)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\overline{\omega(t)}}{\beta_j} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \right\} + \frac{1}{\beta_j} \sum_{s=1}^{r_j} \frac{b_{j,s}}{t_0 - z_{j,s}} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} t_0 \operatorname{Re} A_L \\
R_{j,s} \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \left\{ \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} - \right. \\
& \left. - \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \left\{ q(t) \left(\frac{dt}{t-t_0} - \frac{\beta_j \overline{dt}}{t-t_0} \right) - \right. \\
& \left. - \alpha_j p(t) \frac{\overline{dt}}{t-t_0} - \overline{q(t)} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \right\} + \sum_{s=1}^{r_j} \frac{b_{j,s}}{t_0 - z_{j,s}} - C_{j,s} \\
\zeta_1(z) & = - \int_0^z \rho_1(z) dz, \quad \frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \zeta(z) \\
P_j(t_0) & = t_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_j} \right) \frac{\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle}{4} + \frac{t_0}{\varepsilon_j} \frac{\langle \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle - 2i \langle \tau_{12} \rangle}{2} - \\
& - \frac{2G}{\kappa + \lambda_j} [(v - \nu_j) e_3 t_0 + h_j(t_0)] \\
Q_j(t_0) & = -t_0 \frac{\alpha_j}{\beta_j} \frac{\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle}{4} - \frac{2G}{1 + \kappa_j \lambda_j} [(v - \nu_j) e_3 t_0 + h_j(t_0)]
\end{aligned}$$

Предполагаем, что функции $h_j(t)$ дифференцируемы и их первые производные удовлетворяют условию Гёльдера. Этого достаточно, чтобы решения $p(t)$, $q(t)$, $\omega(t)$ обладали тем же свойством [10].

Заметим, что всякое решение системы (2.5) удовлетворяет условию совместности (2.2) [5]. Тем самым обеспечивается действие в среде заданных средних напряжений.

Используя [7, 5], можно доказать, что система (2.5) разрешима при любой правой части, причем единственным образом. Следовательно, система (2.5) совместно с представлениями (2.1) определяет решение исходной краевой задачи.

3. Продольный сдвиг композиционного материала. Будем разыскивать решение краевой задачи (1.11) в классе регулярных квазипериодических функций. Тем самым будет обеспечено двоякопериодическое распределение напряжений в D .

Положим

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad F(z) & = I(z), \quad z \in D; \quad F_j(z) = I(z), \quad z \in D_{0,0}^j, \quad j=1, 2, \dots, k \\
I(z) & = \frac{1}{2\pi i} \int_{i_{0,0}} im(t) \zeta(t-z) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_{0,0}} in(t) \zeta(t-z) dt + Ez
\end{aligned}$$

Здесь $m(t)$, $n(t)$ — подлежащие определению вещественные функции

$$m(t) = \{m_j(t), t \in L_{0,0}^j\}, \quad n(t) = \{n_{j,s}(t), t \in \lambda_{0,0}^{j,s}\}$$

Постоянную E в (3.1) найдем из условий (1.8). Вычисляя левую часть в последнем тождестве (1.8) при помощи функции $\chi(z)$ из (1.7), (1.9) и (3.1), получаем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} E &= \frac{\langle \tau_{13} \rangle}{2G} + \frac{1}{2\pi \sin \theta} \operatorname{Im} \left[f \left(\frac{\delta_2}{l_2} - \frac{\delta_1}{l_1} \cos \theta \right) \right] \\ \operatorname{Im} E &= -\frac{\langle \tau_{23} \rangle}{2G} + \frac{\operatorname{Im}(f\delta_1)}{2\pi l_1} \\ f &= \int_{l_{0,0}} m(t) dt + \int_{\lambda_{0,0}} n(t) dt, \quad \delta_1 = 2\zeta \left(\frac{\omega_1}{2} \right), \quad \delta_2 = 2\zeta \left(\frac{\omega_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Здесь $\langle \tau_{13} \rangle$ и $\langle \tau_{23} \rangle$ — средние сдвигающие напряжения на площадках, перпендикулярных осям координат x_1 и x_2 . Связь между T_1 , T_2 и $\langle \tau_{13} \rangle$, $\langle \tau_{23} \rangle$ очевидна.

Краевые условия (1.11) выполним за счет неизвестных пока функций $m(t)$, $n(t)$.

Подставив вычисленные с помощью формул Сохоцкого — Племяля [10] предельные значения функций (3.1) в (1.11) и положив, как это принято [7]

$$(3.3) \quad C_{j,s}^* = - \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} n(t) ds$$

приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно $m(t)$ и $n(t)$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} m(t_0) - G_*^j V \{m(t), n(t), t_0\} &= \\ &= \frac{G_*^j}{G} (\langle \tau_{13} \rangle \operatorname{Im} t_0 - \langle \tau_{23} \rangle \operatorname{Re} t_0), \quad t_0 \in L_{0,0}^j \\ n(t_0) - V \{m(t), n(t), t_0\} + C_{j,s}^* &= \\ &= \frac{1}{G} (\langle \tau_{13} \rangle \operatorname{Im} t_0 - \langle \tau_{23} \rangle \operatorname{Re} t_0), \quad t_0 \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\ V \{m(t), n(t), t_0\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} m(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} n(t) \times \\ &\times d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} + \frac{\operatorname{Im}(f\delta_1) \operatorname{Re} t_0}{\pi l_1} + \frac{\operatorname{Im} t_0}{\pi \sin \theta} \operatorname{Im} \left[f \left(\frac{\delta_2}{l_2} - \frac{\delta_1}{l_1} \cos \theta \right) \right] \\ G_*^j &= (G - G_j) / (G + G_j), \quad s = 1, 2, \dots, r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

Решения $m(t)$ и $n(t)$ системы (3.4) удовлетворяют условию Гёльдера вместе со своими первыми производными [10].

Докажем разрешимость полученной системы. Рассмотрим для этого соответствующую (3.4) однородную систему, решение которой обозначим через $m_0(t) = \{m_j^\circ(t), t \in L_{0,0}^j\}$ и $n_0(t) = \{n_{j,s}^\circ(t), t \in \lambda_{0,0}^{j,s}\}$. Всем функционалам и функциям, отвечающим этому решению, будем приписывать индекс нуль.

Очевидно, что однородная система соответствует краевой задаче (1.11) при равных нулю средних напряжениях $\langle \tau_{13} \rangle$ и $\langle \tau_{23} \rangle$.

Используя интегральную формулу Дирихле [8], можно показать, что решение этой однородной краевой задачи

$$(3.5) \quad F^\circ(z) = \text{const}, \quad F_j^\circ(z) = \text{const}, \quad j=1, 2, \dots, k \\ \text{Re}F^\circ(z) = \text{Re}F_j^\circ(z), \quad \text{GIm}F^\circ(z) = G_j \text{Im}F_j^\circ(z)$$

Переходя в (3.4) к предельным значениям и учитывая при этом (3.5), выводим, что $n_{j,s}^\circ(t)$ являются граничными значениями некоторых регулярных в $D_{0,0}^{j,s}$ функций. Отсюда в силу теоремы единственности решения задачи Дирихле [9] следует:

$$(3.6) \quad n_{j,s}^\circ(t) = \text{const}, \quad j=1, 2, \dots, k, \quad s=1, 2, \dots, r_j$$

Согласно формуле Сохоцкого — Племеля, имеем для (3.1)

$$F_j(t) - F(t) = im_j(t), \quad j=1, 2, \dots, k$$

Подставляя функции (3.5) в последнее соотношение, получаем

$$(3.7) \quad m_j^\circ(t) = \text{const}, \quad j=1, 2, \dots, k$$

Вычисляя (3.1) при помощи (3.7), (3.6) и учитывая (3.5), находим

$$(3.8) \quad F^\circ(z) = 0, \quad F_j^\circ(z) = 0, \quad C_{j,s}^{\circ\circ} = 0, \quad m_0(t) = 0, \quad t \in l_{0,0}$$

Возвращаясь к функции $n_0(t)$ и используя равенства (3.3), (3.6) и (3.8), имеем

$$(3.9) \quad n_0(t) = 0, \quad t \in \lambda_{0,0}$$

Следовательно, система (3.4) разрешима при любой правой части и причем единственным образом. Этим доказана корректность представлений (3.1).

Система (3.4) и представления (3.1) полностью определяют решение краевой задачи (1.11).

4. Макроскопическая модель композиционного материала.

Определение. Под макроскопической моделью композиционного материала будем понимать однородную анизотропную среду, обладающую тем свойством, что при одинаковых средних напряжениях, действующих в материале и в среде, их средние деформации совпадают. При этом полагаем $h_j(t) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

Средние деформации определяются следующим образом:

$$(4.1) \quad \langle e_1 \rangle = \frac{u(z + \omega_1) - u(z)}{l_1}, \quad \langle e_3 \rangle = e_3 \\ \langle e_2 \rangle = \frac{v(z + \omega_2) - v(z)}{l_2 \sin \theta} - \frac{v(z + \omega_1) - v(z)}{l_1} \text{ctg } \theta \\ \langle \gamma_{12} \rangle = \frac{u(z + \omega_2) - u(z)}{l_2 \sin \theta} + \frac{v(z + \omega_1) - v(z)}{l_1} - \\ - \frac{u(z + \omega_1) - u(z)}{l_1} \text{ctg } \theta \\ \langle \gamma_{13} \rangle = \frac{w(z + \omega_1) - w(z)}{l_1} \\ \langle \gamma_{23} \rangle = \frac{w(z + \omega_2) - w(z)}{l_2 \sin \theta} - \frac{w(z + \omega_1) - w(z)}{l_1} \text{ctg } \theta$$

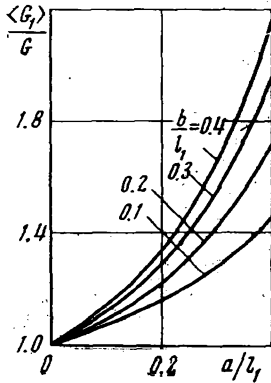
Вводя среднее напряжение

$$(4.2) \quad \langle \sigma_3 \rangle = \frac{1}{S} \iint_{\Pi_{0,0}} \sigma_3 dx_1 dx_2, \quad S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2$$

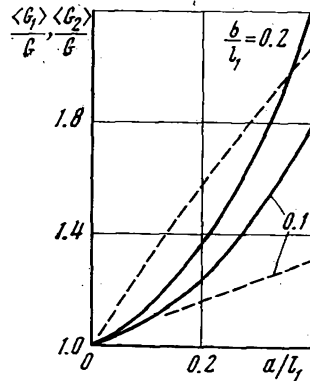
и вычисляя правые части (4.1), (4.2) при помощи формул (1.4) — (1.6), (2.1), (2.3) — (2.5), (3.1) — (3.4), запишем (4.1) в виде

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \langle \epsilon_k \rangle &= c_{k1} \langle \sigma_1 \rangle + c_{k2} \langle \sigma_2 \rangle + c_{k3} \langle \sigma_3 \rangle + c_{k6} \langle \tau_{12} \rangle, \quad k=1, 2, 3 \\ \langle \gamma_{23} \rangle &= c_{44} \langle \tau_{23} \rangle + c_{45} \langle \tau_{13} \rangle \\ \langle \gamma_{13} \rangle &= c_{54} \langle \tau_{23} \rangle + c_{55} \langle \tau_{13} \rangle \\ \langle \gamma_{12} \rangle &= c_{61} \langle \sigma_1 \rangle + c_{62} \langle \sigma_2 \rangle + c_{63} \langle \sigma_3 \rangle + c_{66} \langle \tau_{12} \rangle \end{aligned}$$

где c_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) — макроскопические упругие параметры композиционного материала, зависящие лишь от упругих характеристик компонентов композиции и ее геометрии.



Фиг. 2



Фиг. 3

Например, для $i, j = 4, 5$ выражения c_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} c_{44} &= \frac{1}{G} - \frac{2 \operatorname{Im} f_2}{S}, & c_{55} &= \frac{1}{G} - \frac{2 \operatorname{Re} f_1}{S} \\ c_{45} &= -\frac{2 \operatorname{Im} f_1}{S}, & c_{54} &= -\frac{2 \operatorname{Re} f_2}{S} \end{aligned}$$

$$f = f_1 \langle \tau_{13} \rangle + f_2 \langle \tau_{23} \rangle, \quad S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2$$

Здесь функционалы f_1, f_2 определяются соотношением (3.2) при $\langle \tau_{13} \rangle = 1, \langle \tau_{23} \rangle = 0$ и $\langle \tau_{13} \rangle = 0, \langle \tau_{23} \rangle = 1$ соответственно.

Важно подчеркнуть, что c_{ij} зависят от решений соответствующих двоякопериодических задач функциональным образом, для вычисления c_{ij} достаточно иметь лишь несколько функционалов. Это обстоятельство открывает пути для различных приближенных подходов к описанию макросвойств композиционных материалов.

Матрица коэффициентов c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 6$) симметрична и энергетически допустима [5]. Аналогично [5] можно показать, что последнее утверждение распространяется на c_{ij} ($i, j = 4, 5$). Следовательно, (4.3) допустимо трактовать как закон Гука для искомой модельной среды.

Рассмотрим в качестве примера продольный сдвиг композиционного материала типа боралюминия (отношение модуля сдвига материала волокна к модулю сдвига материала среды равно 6,46) [11] со сплошными волокнами эллиптического сечения, расположенными в вершинах прямоугольной решетки ($\omega_1 = l_1$, $\omega_2 = il_2$).

На фиг. 2, 3 приведены кривые изменения макроскопических параметров $(Gc_{55})^{-1} = \langle G_1 \rangle / G$ и $(Gc_{44})^{-1} = \langle G_2 \rangle / G$ (G — модуль сдвига материала среды) в функции от относительных размеров области a / l_1 , b / l_1 . В рассматриваемом случае коэффициенты $c_{45} = c_{54} = 0$. Фиг. 2 соответствует квадратной решетке $l_2 / l_1 = 1$, фиг. 3 — прямоугольной решетке $l_2 / l_1 = 0.5$ (сплошные линии соответствуют $\langle G_1 \rangle$, пунктирные — $\langle G_2 \rangle$). Предполагается, что полуоси эллипса a и b направлены вдоль координатных осей x_1 и x_2 соответственно.

В частном случае $a = b$, $l_1 = l_2$ приведенные на фиг. 2 результаты совпадают с соответствующими результатами [3].

Заметим, что при выводе (4.3) осреднение напряжений и смещений проводилось в пределах параллелограмма периодов, размеры которого для большинства композиционных материалов не превышают 1 мм. Поэтому замена в расчетной практике композиционного материала однородной анизотропной средой, управляемой законом (4.3), по-видимому, приведет к удовлетворительным результатам.

Поступила 9 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Григояк Э. И., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие изотропной плоскости с двоякопериодической системой выключений. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 9.
2. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. Болотин В. В. Теория стохастически армированных материалов. В сб.: Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.
5. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
6. Музелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
7. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
8. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., «Наука», 1968.
9. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. Матем. сб., 1935, т. 42, № 5.
10. Музелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
11. Современные композиционные материалы (под ред. Л. Браутмана и Р. Крока). М., «Мир», 1970.