Аналітична геометрія

О.А. Борисенко

Зміст

Розділ 1

Векторна алгебра

1.1 Декартові координати на прямій, площині і в просторі.

Віссю називається пряма, на якій обрано початок відліку, додатний напрям і одиницю довжини (масштаб). Відрізок, обмежений двома довільними точками осі, називається *напрямленим*, якщо вказано, яка з двох вибраних точок є початок, а яка — кінець. Напрямлений відрізок, обмежений точками A і B, початком якого є точка A, позначається $\overline{AB}$. Напрямком відрізка вважається напрямок від початку до кінця.

Величиною напрямленого відрізка деякої осі називається число, що дорівнює довжині цього відрізка, взятої зі знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі співпадають, і зі знаком мінус, коли напрями протилежні. Величина напрямленого відрізка $\overline{AB}$ позначається через AB (без риски). Відстанню між точками A і B є модуль величини напрямленого відрізка $\overline{AB}$, тобто $|AB|$. Якщо початок і кінец напрямленого відрізка співпадають, то його величина дорівнює нулю, а сам відрізок називається нульовим.

Очевидно, що для будь-яких трьох точок A, B, C деякої осі, величини напрямлених відрізків $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$ зв'язані співвідношенням

$$AB + BC = AC \tag{1.1}$$

Вкажемо спосіб, за допомогою якого положення точок на довільно вибраній прямій можна визначити заданням чисел. Нехай дана довільна пряма. Відмітимо на ній яку-небудь точку O і оберемо додатний напрям та одиницю довжини (тим самим перетворимо пряму у вісь).

Декартовою координатою точки M на осі називається число x, що дорівнює величині напрямленого відрізка $\overline{OM}$. Точка O називається *початком координат.* Запис $M(x)$ означає, що точка M має координату x.

Твердження 1.1.1. *Для будь-яких двох точок $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$ деякої осі справедлива рівність $M_1M_2 = x_2 - x_1$.*

Доведення. На підставі тотожності (1.1) $M_1M_2 = OM_2 - OM_1$, звідки $M_1M_2 = x_2 - x_1$, що й потрібно довести.

■

Твердження 1.1.2. *Якщо $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ — довільні точки осі, то відстань між ними $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$.*

Доведення. Згідно з попереднім твердженням $M_1M_2 = x_2 - x_1$, але відстань між точками M_1, M_2 є модуль величини напрямленого відрізка $\overline{M_1M_2}$, отже $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$.

■

Якщо на прямій введена координатна система, то кожна точка цієї прямої має одну певну координату; навпаки, яке б дійсне число x ми не взяли, на прямій завжди знайдеться одна цілком визначена точка з координатою x.

Якщо вказано спосіб, що дозволяє визначити положення точок площини заданням впорядкованних наборів з двох дійсних чисел, то кажуть, що на площині введено систему координат. Розглянемо найпростішу і найбільш вживану систему координат, яка називається декартовою прямокутною.

Декартова прямокутна система координат визначається заданням двох взаємно перпендикулярних осей із спільним масштабом, що занумеровані в певному порядку. Точка перетину осей називається *початком координат*, а самі вісі — *координатними осями*, причому першу з них називають віссю *абсцис*, а другу — віссю *ординат.*

Позначимо початок координат буквою O, а вісь абсцис — буквами Ox, вісь ординат — буквами Oy. Нехай M — довільна точка площини. Опустимо з точки M перпендикуляри на координатні вісі. Основи цих перпендикулярів позначимо через M_x та M_y (рис. 1).

Координатами точки M в заданій системі координат називаються числа $x = OM_x$, $y = OM_y$, де OM_x — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_x}$ осі абсцис; OM_y — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_y}$ осі ординат. Число x називається *першою координатою, або абсцисою точки*

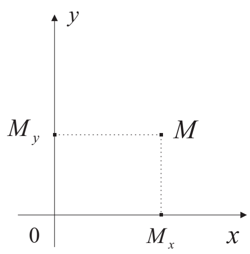


*Рис.*1

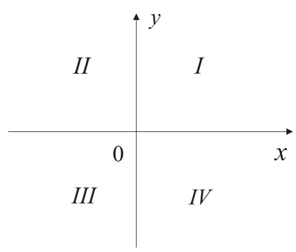


*Рис.*2

M, число y називається *другою координатою, або ординатою точки* M. Запис $M(x, y)$ означає, що точка M має абсцису x і ординату y.

Якщо задана система декартових прямокутних координат, то кожна точка площини в цій системі має одну цілком визначену пару координат (x, y). Навпаки, які б не були два дійсні числа x, y, на площині знайдеться одна цілком визначена точка, абсцисою якої в даній системі є x, а ординатою – y. Щоб побудувати точку по її координатах (x, y), потрібно на осі абсцис відкласти від початку координат напрямлений відрізок $\overline{OM_x}$, величина якого дорівнює x, а на осі ординат — напрямлений відрізок $\overline{OM_y}$, величина якого дорівнює y, провести через M_x пряму, паралельну осі y, через M_y — пряму, паралельну осі x, і знайти точку M як точку перетину проведених прямих.

Дві координатні осі разом розділяють площину на чотири частини, які називаються *координатними четвертями*, або *квадрантами*, і нумерують за певним правилом, яке показано на рис. 2.

Нехай M — деяка точка з координатами (x, y). Якщо

$x > 0, y > 0$, то M лежить в першому квадранті;

$x < 0, y > 0$, то M лежить в другому квадранті;

$x < 0, y < 0$, то M лежить в третьому квадранті;

$x > 0, y < 0$, то M лежить в четвертому квадранті.

Коли вказано спосіб, що дозволяє визначити положення точок простору заданням впорядкованих наборів з трьох дійсних чисел, то кажуть, що в просторі введено систему координат.

Декартова прямокутна система координат в просторі визначається заданням трьох взаємно перпендикулярних осей із спільним масштабом, занумерованих в якому-небудь порядку.

Точка перетину осей називається початком координат, а самі вісі — координатними осями, причому перша з них називається віссю абсцис, друга — віссю ординат, третя — віссю аплікат. Початок координат позначимо буквою O, вісь абсцис — буквами Ox, вісь ординат — буквами Oy, вісь аплікат — буквами Oz. Нехай M — довільна точка простору; M_x, M_y, M_z — основи перпендикулярів, що опущені з точки M на осі Ox, Oy, Oz, відповідно (рис. 3).

Координатами точки M в заданій системі називаються числа $x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$, де OM_x — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_x}$ осі абсцис; OM_y — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_y}$ осі ординат і OM_z — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_z}$ осі аплікат. Число x називається *першою координатою, або абсцисою точки* M, y — *другою координатою, або ординатою точки* M, z —*третьою координатою, або аплікатою точки* M. Запис $M(x, y, z)$ означає, що точка M має абсцису x, ординату y та аплікату z.

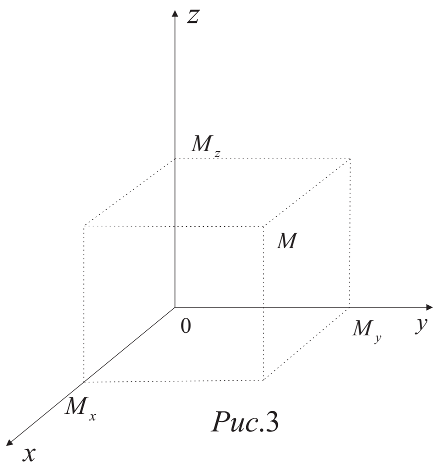


*Рис.*3

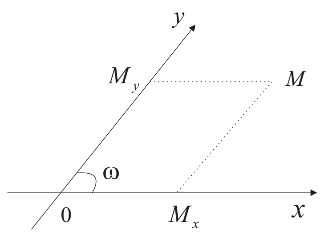


*Рис.*4

Якщо задана система декартових прямокутних координат, то кожна точка простору в цій системі має одну цілком визначену впорядковану трійку координат (x, y, z). Навпаки, які б не були три дійсні числа x, y, z, в просторі знайдеться одна цілком визначена точка, абсцисою якої є x, ординатою — y, аплікатою — z. Щоб побудувати точку M по її координатах (x, y, z), потрібно на осі абсцис відкласти від початку координат напрямлений відрізок $\overline{OM_x}$, величина якого дорівнює x, на осі ординат — відрізок $\overline{OM_y}$, величина якого дорівнює y, на осі аплікат — відрізок $\overline{OM_z}$, величина якого дорівнює z, провести через M_x площину, що перпендикулярна до осі Ox, через M_y — площину, що перпендикулярна до осі Oy, через M_z — площину, що перпендикулярна до осі Oz, і знайти точку M як точку перетину проведених площин.

Площина, що проходить через прямі Ox, Oy, називається координатною площиною xy. Дві інші площини, що проходять через вісі координат, називаються координатними площинами xz та yz. Три площини xy, xz, yz разом поділяють простір на вісім частин, які називаються координатними *октантами.*

Зауваження. *На прямій, площині і в просторі можна ввести інші системи координат.*

Наприклад, на площині *косокутна декартова система координат* визначається заданням двох осей Ox, Oy із спільним масштабом, що перетинаються в точці O під будь-яким кутом, крім 0^o та 180^o. Нехай M — довільна точка площини. Проведемо через M прямі, що паралельні осям Ox, Oy, і позначимо точки їх перетину з цими осями відповідно через M_x і M_y (рис. 4). Координатами точки M в заданій системі називаються числа $x = OM_x$, $y = OM_y$, де OM_x — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_x}$ осі Ox, OM_y — величина напрямленого відрізка $\overline{OM_y}$ осі Oy. Прямокутна система координат є окремим випадком косокутної системи.

Аналогічно можна ввести косокутну декартову систему координат в просторі.

В подальшому, коли не сказано інакше, ми будемо розглядати тільки прямокутні декартові системи координат, тому слово «прямокутні» часто будемо пропускати.

1.2 Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині.

1.2.1 Відстань між точками.

Нехай на площині xy (система координат декартова) дані дві точки $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$. Виразимо відстань між точками A_1, A_2 через координати цих точок. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, що паралельні осям координат Oy і Ox, відповідно, вони перетнуться в точці A (рис. 5). Тоді

$$|A_1A| = |y_2 - y_1|, \quad |AA_2| = |x_2 - x_1|.$$

За теоремою Піфагора

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Вправи.

1) Довести, що остання формула справедлива, якщо

   1) $x_1 = x_2,\ \ y_1 \neq y_2;$ 2) $x_1 \neq x_2,\ \ y_1 = y_2;$ 3) $x_1 = x_2,\ \ y_1 = y_2.$

2) Довести, що відстань між двома точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ простору, в якому введена декартова система координат, обчислюється за формулою

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3) Знайти відстань між двома точками площини, які задані своїми координатами в косокутній декартовій системі координат.

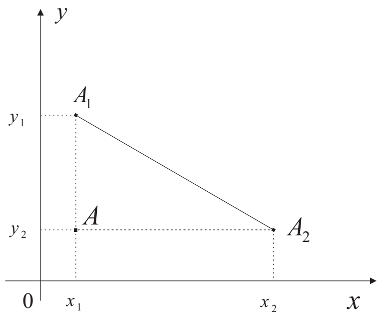


*Рис.*5

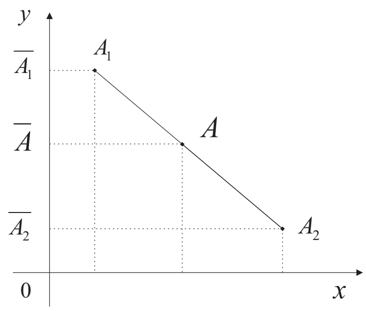


*Рис.*6

1.2.2 Поділ відрізка у даному відношенні.

Нехай на площині xy (система координат декартова) є дві різні точки $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$. Знайдемо координати (x, y) точки A, що ділить відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda_2 : \lambda_1$.

Нехай відрізок A_1A_2 не паралельний осі Ox (рис. 6.). Спроектуємо точки A, A_1, A_2 на вісь Oy. Одержимо

$$\frac{\bar{A}_1\bar{A}}{\bar{A}\bar{A}_2} = \frac{A_1A}{AA_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

звідси

$$\frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

і

$$y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (1.2)$$

Якщо відрізок A_1A_2 паралельний осі Ox, то $y = y_1 = y_2$. Той же результат дає формула (1.2), яка, таким чином, справедлива при будь-якому розташуванні точок A_1, A_2.

Аналогічно знаходиться абсциса x точки A:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (1.3)$$

Отже, ми отримали наступні формули для координат точки A:

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (1.4)$$

Якщо A — середина відрізка A_1A_2, то $\lambda_1 = \lambda_2$ і $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Зауваження. *Очевидно, що координата x точки A, що ділить відрізок A_1A_2 на прямій у відношенні $\lambda_2 : \lambda_1$ (рис.6.1.) знаходиться за формулою (1.3), де $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$.*

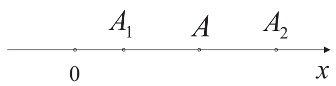


*Рис.*6.1.

Вправа. Нехай $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — дві різні точки простору (система координат косокутна декартова). Довести, що координати $(x,\ y,\ z)$ точки A, що ділить відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda_2 : \lambda_1$ виражаються за допомогою формул

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (1.5)$$

У частковому випадку, коли A — середина відрізка A_1A_2 формули (1.5) мають вигляд

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

1.3 Паралельний перенос.

Введемо на площині декартові координати x, y. Перетворення при якому довільна точка (x, y) переходить у точку $(x + a,\ y + b)$, де a і

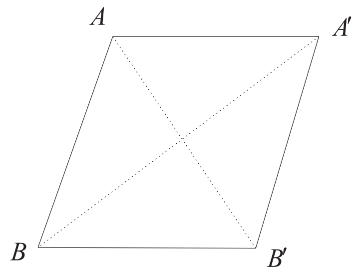


*Рис.*7

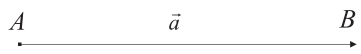


*Рис.*8

b — сталі, називається *паралельним переносом.* Паралельний перенос задається формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$, де (x', y') — координати точки, в яку переходить точка (x, y) при паралельному переносі. Паралельний перенос точки A в точку A' будемо позначати так: $A \to A'$.

Властивості паралельного переносу.

1. Паралельний перенос зберігає відстань між відповідними точками.

   Дійсно, нехай $A \to A'$, $B \to B'$ і нехай $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

   Тоді
   $$A'(x_1 + a,\ y_1 + b), \quad B'(x_2 + a,\ y_2 + b)$$
   і
   $$|A'B'|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |AB|^2.$$

2. При паралельному переносі точки пересуваються по паралельних прямих на одну і ту ж відстань.

   Дійсно, нехай $A \to A'$, $B \to B'$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, тоді $A'(x_1 + a,\ y_1 + b)$, $B'(x_2 + a,\ y_2 + b)$.

   Розглянемо випадок, коли чотирикутник $AA'B'B$ не вироджується у відрізок (рис. 7.) Середина відрізка AB' має координати
   $$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

   Ті ж координати має і середина відрізка $A'B$, тому діагоналі чотирикутника $AA'B'B$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Звідси $AA'B'B$ — паралелограм. Отже, відрізки AA', BB' паралельні і рівні, що і доводить дане твердження.

   Зазначимо, що AB і $A'B'$ також паралельні. Отже, має місце наступна властивість.

3. При паралельному переносі кожна пряма переходить в паралельну пряму.

   Вправа. Довести властивості 2, 3 у випадку виродження чотирикутника $AA'B'B$ у відрізок.

4. Які б не були дві точки A і A' існує, і притому єдиний, паралельний перенос, при якому точка A переходить в точку A'.

   Доведення. Доведемо існування. Нехай $A(a,b)$, $A'(a',b')$. Паралельний перенос, що задається формулами $x' = x + a' - a$, $y' = y + b' - b$, переводить точку A в A'.

   Доведемо єдиність. Припустимо, що паралельний перенос $x' = x+\alpha$, $y' = y + \beta$, також переводить точку $A(a,b)$ в точку $A'(a',b')$. Тоді $a' = a + \alpha$, $b' = b + \beta$, звідки $\alpha = a' - a$, $\beta = b' - b$, і єдиність доведена.

   ■

   Перетворення f називається *тотожним* (позначається через id), коли $f(A) = A$ для будь-якої точки A площини.

   Композицією двох відображень f і g (позначається через $g \circ f$) площини на себе, називається послідовне виконання двох перетворень: $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

   Нехай f — відображення площини на себе. *Оберненим* відображенням (позначається через f^{-1}) називається таке відображення, що $f^{-1} \circ f = id$.

5. Композиція двох паралельних переносів є паралельний перенос.

6. Тотожне перетворення є паралельний перенос.

7. Перетворення, обернене до паралельного переносу, є паралельний перенос.

8. Композиція паралельних переносів (як взагалі композиція перетворень) підкоряється асоціативному закону, тобто $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ для будь-яких паралельних переносів f, g, h.

9. Якщо f, g — паралельні переноси, то $g \circ f = f \circ g$.

   Властивість 9 означає, що композиція паралельних переносів комутативна.

   Вправа. Довести властивості 5, 6, 8, 9.

Паралельним переносом в просторі називається таке перетворення, при якому довільна точка (x, y, z) переходить в точку $(x+a,\ y+b,\ z+c)$, де a, b, c — сталі. Паралельний перенос в просторі задається формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$.

Властивості паралельного переносу в просторі доводяться так само, як і на площині. Новою для паралельного переносу в просторі є властивість

10. При паралельному переносі в просторі кожна площина переходить або в себе, або в паралельну їй площину.

Вправи.

1. Довести властивість 10.

2. Нехай $A_1A_2A_3A_4$ — довільний чотирикутник; B_1, B_2 — середини его діагоналей. Довести, що $|A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A_4|^2 + |A_4A_1|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_2A_4|^2 + 4|B_1B_2|^2$.

1.4 Вектори.

1.4.1 Абсолютна величина і напрям вектора.

Два промені називаються *співнапрямленими*, коли їх можна сумістити паралельним переносом. Два промені на одній прямій називаються *доповняльними*, коли вони мають єдину спільну точку.

Два промені l та l_1 називаються *протилежно напрямленими*, коли промінь l співнапрямлений з променем l_2, що є доповняльним до променя l_1.

Промені, які лежать на прямих, що перетинаються, на площині (в просторі) або на мимобіжних прямих простору, не є ні співнапрямленими, ні протилежно напрямленими.

Відрізок, обмежений точками A, B, називається напрямленим, коли сказано, яка з цих точок є початком відрізка, а яка — кінцем. Напрямком відрізка вважається напрямок від початку до кінця.

Вектором називається напрямлений відрізок. Початок вектора називається точкою його прикладення.

Зображається вектор відрізком зі стрілкою, що розташована біля кінця вектора (рис. 8). Позначається вектор через $\overrightarrow{AB}$ чи $\overline{AB}$ (коли хочуть підкреслити, що A — початок вектора, а B — його кінець) або через $\overrightarrow{a}$,

$\bar{a}$, $\boldsymbol{a}$, коли в даному контексті точка прикладення вектора значення не має.

Напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$ називається напрям променя AB, тобто променя з початком A, який має в собі точку B.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина напрямленого відрізка $\overline{AB}$.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *однаково напрямленими (співнапрямленими)*, коли промені AB і CD співнапрямлені. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *протилежно напрямленими*, коли протилежно напрямлені промені AB і CD.

Два вектори називаються *рівними*, коли вони суміщаються паралельним переносом.

Рівні вектори мають однакові довжини і однакові напрями. Справедливе і протилежне: якщо вектори мають однакові напрями і довжини, то вони дорівнюють один одному.

Вектор, у якого початок і кінец співпадають, називається *нульовим* і позначається через $\vec{0}$. Нульовий вектор не має певного напряму. Абсолютна величина нульового вектора вважається рівною нулю. Всі нульові вектори рівні між собою.

Із властивостей паралельного переносу випливає, що з будь-якої точки можна відкласти вектор, рівний даному вектору, і притому тільки один. Отже, якщо задана система координат на площині або в просторі, то кожний вектор можна відкласти від початку координат O. Таким чином, виникає природна відповідність між точками площини (простору) і векторами: $A \to \overrightarrow{OA}$ (рис. 9).

Вектор $\overrightarrow{OA}$ називається *радіус-вектором* точки A.

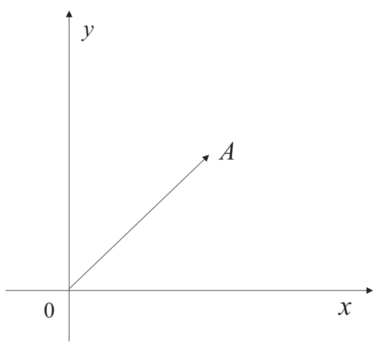


*Рис.*9

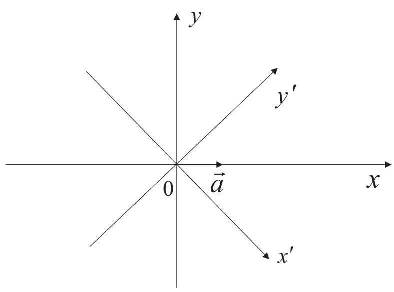


*Рис.*10

1.4.2 Координати вектора.

Введемо на площині (в просторі) косокутну декартову систему координат. Нехай в просторі дані дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Тоді *координатами* вектора $\overrightarrow{AB}$ називається набір чисел:

$$a^1 = x_2 - x_1, \quad a^2 = y_2 - y_1, \quad a^3 = z_2 - z_1, \quad \overrightarrow{AB} = (a^1, a^2, a^3).$$

Перевіримо коректність визначення: *рівні вектори мають рівні координати.*

Дійсно, нехай вектор $\overrightarrow{\widetilde{A}\widetilde{B}}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектори рівні, коли вони суміщаються паралельним переносом. Тому $A(x_1+c_1, y_1+c_2, z_1+c_3)$ і $B(x_2+c_1, y_2+c_2, z_2+c_3)$. Отже $\widetilde{a^1} = (x_2+c_1) - (x_1+c_1) = x_2 - x_1 = a^1$. Аналогічно $\widetilde{a^2} = a^2$, $\widetilde{a^3} = a^3$

Вірне і обернене твердження: *якщо у векторів рівні відповідні координати, то рівні і самі вектори.*

Вправи.

1. Перевірити, що координати нульового вектора дорівнюють нулю.
2. Перевірити, що координати радіус-вектора точки A співпадають з координатами точки A.
3. Якщо вектор $\boldsymbol{a}$ заданий своїми координатами в прямокутній декартовій системі координат, $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, то $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.

Зауваження. *Координати вектора залежать від вибору системи координат.*

Приклад. Нехай в системі координат Oxy вектор $\boldsymbol{a} = (1, 0)$. Тоді в системі координат $Ox'y'$ (рис. 10), вектор $\boldsymbol{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Виникає питання: як зв'язані між собою координати вектора в різних системах координат? Ми дамо відповідь на це питання пізніше.

1.4.3 Застосування векторів.

Нехай потрібно вивчити траєкторію L руху точки A (рис. 11). Координати точки A співпадають з координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ — радіус-вектор цієї точки. Позначимо $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — час, радіус-вектор довільної точки

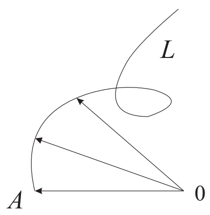


Рис.11

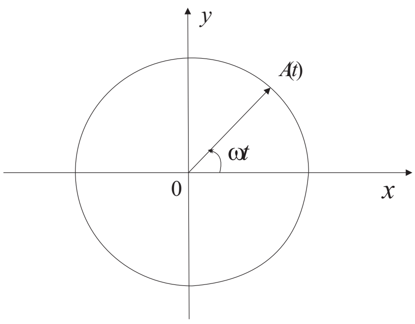


Рис.12

кривої L ($\vec{r} = \vec{r}(t)$ називається *вектор-функцією*). Вивчаючи властивості вектор-функції $\vec{r}(t)$ можна досліджувати траєкторію руху точки A.

Приклад. Точка рухається по колу радіуса R зі сталою кутовою швидкістю ω. Знайдемо радіус-вектор цієї матеріальної точки (рис.12).

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \text{ тобто } \; r(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t).$$

1.4.4 Лінійні операції над векторами.

Нехай дано два вектори $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ і $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$. *Сумою векторів* $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називається вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3)$.

Операція додавання векторів підкоряється законам:

1. *Комутативному:* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

2. *Асоціативному:* $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

   Для доведення досить порівняти відповідні координати векторів, що стоять в правій і лівій частинах рівностей.

   Для операції додавання векторів мають місце наступні правила.

3. *Правило трикутника:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 13).

   Доведення. Нехай $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Тоді $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2)$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = \overrightarrow{AC}$.

   ■

4. *Правило паралелограма:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 14).

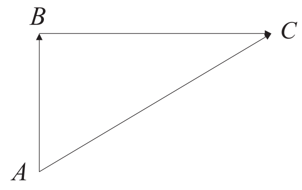


*Рис.*13

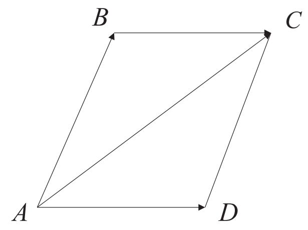


*Рис.*14

Доведення. За властивістю 3 буде $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, але $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. ■

Фізична інтерпретація властивості 4 — знаходження рівнодіючої сили, коли на матеріальну точку діє кілька сил.

Різницею векторів $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,a^3)$ і $\boldsymbol{b}=(b^1,b^2,b^3)$ називається такий вектор $\boldsymbol{c}=(c^1,c^2,c^3)$, який в сумі з вектором $\boldsymbol{b}$ дає вектор $\boldsymbol{a}$, тобто $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$. Звідси знайдемо координати вектора $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Отже, $c^1=a^1-b^1$, $c^2=a^2-b^2$, $c^3=a^3-b^3$, тобто $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$ $=(a^1-b^1,\ a^2-b^2,\ a^3-b^3)$.

5. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ (рис. 15). Довести самостійно.

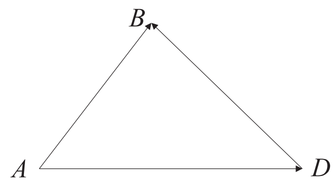


*Рис.*15

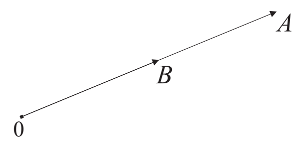


*Рис.*16

Добутком вектора $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,a^3)$ *і числа* λ називається вектор $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda=(\lambda a^1,\lambda a^2,\lambda a^3)$.

Властивості множення вектора на число.

1. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
2. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;
3. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, що стоять в правій і лівій частинах рівностей.

4. $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$. Причому напрям вектора $\lambda \boldsymbol{a}$ співпадає з напрямом вектора $\boldsymbol{a}$, коли $\lambda > 0$, і протилежний напряму вектора $\boldsymbol{a}$, коли $\lambda < 0$.

Доведення. 1) Нехай $0 < \lambda < 1$. На промені OA разглянемо точку B, яка ділить відрізок $\overline{OA}$ у відношенні $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ (рис. 16). Нехай $O(0,0,0)$, $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$. Тоді за формулами поділу відрізка у даному відношенні (1.5)

$$b^1 = \frac{(1-\lambda)0 + \lambda a^1}{\lambda + 1 - \lambda} = \lambda a^1,$$

аналогічно

$$b^2 = \lambda a^2, \quad b^3 = \lambda a^3,$$

тобто, $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$, де $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$.

2) Нехай $\lambda > 1$. На промені OB розглянемо точку A, яка ділить відрізок $\overline{OB}$ у відношенні $\frac{1}{\lambda-1}$ (рис. 17).

Нехай $O(0,0,0)$, $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$. Тоді за формулами (1.5)

$$a^1 = \frac{(\lambda-1)0 + 1b^1}{\lambda - 1 + 1} = \frac{b^1}{\lambda},$$

звідки $b^1 = \lambda a^1$, аналогічно $b^2 = \lambda a^2$, $b^3 = \lambda a^3$, тобто $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$, де $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$.

3) Випадок $\lambda < 0$ розглянути самостійно.

$\blacksquare$

Таким чином, ми з'ясували геометричний зміст множення вектора на число.

1.4.5 Колінеарні вектори.

Два вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Із властивості 4 множення вектора на число випливає, що два вектори колінеарні, коли їх координати пропорційні.

Покажемо, що вірне і обернене твердження: якщо два вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ колінеарні, то їх координати пропорційні.

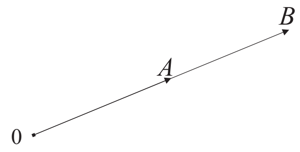


*Рис.*17

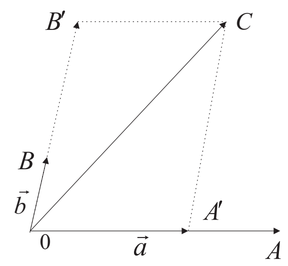


*Рис.*18

Доведення. Якщо $\boldsymbol{a} = 0$, то $\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{b}$. Нехай $\boldsymbol{a} \neq 0$. Через те, що $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ колінеарні, вони лежать на одній або на паралельних прямих. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ лежать на одній прямій. Розглянемо два випадки.

1. $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ співнапрямлені. Введемо вектор $\boldsymbol{c} = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, що співнапрямлений з $\boldsymbol{a}$ і для якого $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}|$. Отже, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Тому $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, де $\lambda = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$.

2. $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ протилежно напрямлені. Розглянемо вектор $\boldsymbol{c} = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{c}$ співнапрямлений з $\boldsymbol{b}$ і $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}|$, тому $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Звідси $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, де $\lambda = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. ■

Отже, має місце

Твердження 1.4.1. *Вектори* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні:* $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Вправи.

1. Довести, що медіани трикутника, в свою чергу, можуть задавати сторони деякого трикутника.

2. Нехай задано радіус-вектори вершин трикутника. Знайти радіус-вектори точки перетину медіан і точки перетину бісектрис трикутника.

3. Задано правильний n-кутник $A_1, \ldots, A_n$, центр якого розташований у точці O. Довести, що
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

4. В просторі задано замкнений опуклий многогранник. Позначимо через S_i і $\boldsymbol{n}_i$ відповідно площу і одиничну нормаль i-ї грані, що напрямлена зовні. Довести:
$$S_1\boldsymbol{n}_1 + S_2\boldsymbol{n}_2 + \ldots + S_k\boldsymbol{n}_k = \boldsymbol{0}$$

1.4.6 Розкладання вектора по двох неколінеарних векторах.

Твердження 1.4.2. *Якщо вектори* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *неколінеарні, то кожний вектор* $\mathbf{c}$*, що розташований в площині* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$*, допускає, і притому єдине, представлення:* $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$

Доведення. Якщо $\boldsymbol{c} = 0$, то $\boldsymbol{c} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b}$. Нехай вектор $\boldsymbol{c}$ ненульовий. З кінця вектора $\boldsymbol{c}$ проведемо прямі, що паралельні $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. Ці прямі перетинають прямі OA і OB в деяких точках A' і B' (рис. 18). За правилом паралелограма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Але $\overrightarrow{OA'}$ і $\overrightarrow{OA}$ колінеарні, тому $\overrightarrow{OA'} = \lambda\boldsymbol{a}$. Аналогічно, $\overrightarrow{OB'} = \mu\boldsymbol{b}$. Отже, $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

Доведемо єдиність розкладання. Нехай є два розкладання: $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \mu_1\boldsymbol{b}$. Віднімаючи ці рівності почленно, одержимо

$$0 = (\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{a} + (\mu - \mu_1)\boldsymbol{b}.$$

Але ці рівності можливі лише при умові $\lambda - \lambda_1 = 0$, $\mu - \mu_1 = 0$, оскільки, вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ неколінеарні. Єдиність доведено.

∎

1.4.7 Розкладання вектора по трьох некомпланарних векторах.

Три вектори в просторі називаються *компланарними*, якщо рівні їм вектори із спільним початком лежать в одній площині.

Зауваження.

1. *Якщо вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *некомпланарні, то ніякі два з них неколінеарні.*
2. *Якщо* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *— неколінеарні вектори, а вектор* $\mathbf{c}$ *лежить в площині цих векторів, то* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *компланарні.*

Твердження 1.4.3. *В просторі кожний вектор* $\mathbf{d}$ *розкладається по трьох некомпланарних векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$*, причому це розкладання єдине:*

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$$

Доведення. Прикладемо до довільної точки O чотири вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$, що рівні векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$ відповідно, і позначимо через

α площину, в якій лежать вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ (рис. 19). Якщо точка D лежить на прямій OC, то $\overrightarrow{OD} = \nu\overrightarrow{OC}$. Звідси $\boldsymbol{d} = \nu\boldsymbol{c}$.

Якщо точка D не лежить на прямій OC, то проведемо пряму, паралельну прямій OC. Вона перетне площину α в деякій точці D'. Вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{D'D}$ колінеарні. Тому $\overrightarrow{D'D} = \nu\overrightarrow{OC}$. Вектор $\overrightarrow{OD'}$ лежить в площині α з векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$. Тому $\overrightarrow{OD'} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Оскільки $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$, то $\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$, або $\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}$. Існування розкладання вектора $\boldsymbol{d}$ доведено.

Доведемо єдиність розкладання. Припустимо, що існує інше розкладання $\boldsymbol{d} = \lambda'\boldsymbol{a} + \mu'\boldsymbol{b} + \nu'\boldsymbol{c}$. Тоді $(\lambda - \lambda')\boldsymbol{a} + (\mu - \mu')\boldsymbol{b} + (\nu - \nu')\boldsymbol{c} = 0$. Через те, що $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ некомпланарні, остання рівність можлива лише при $\lambda = \lambda', \mu = \mu', \nu = \nu'$.

■

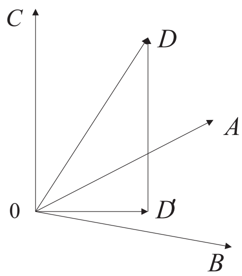


*Рис.*19

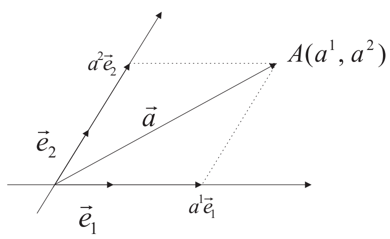


*Рис.*20

Дамо нову інтерпретацію координат вектора (розглянемо випадок площини). Нехай дано косокутну систему координат, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ — одиничні вектори, що мають напрями координатних осей; $\boldsymbol{a}$ — довільний вектор. Тоді $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2$ (рис. 20). Координати вектора, що визначені раніш, не що інше, як коефіцієнти в розкладенні вектора $\boldsymbol{a}$ по векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Аналогічне твердження правильне для випадку простору.

Введемо позначення $\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{e}_i = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3$. В подальшому, коли індекс стоїть зверху і знизу, він означає підсумовування; у випадку площини індекс i змінюється від 1 до 2, а у випадку простору - від 1 до 3.

1.4.8 Деякі відомості з лінійної алгебри.

Нехай G — деяка множина, елементи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in G$, $\mathbf{R}$ — поле дійсних чисел, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$.

1. На множині G введено операцію додавання: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, тобто задано відображення декартового добутку $G \times G \to G$, яке парі елементів $(\vec{a},\vec{b}) \in G \times G$ ставить у відповідність елемент $\vec{c} \in G$.

   Операція додавання задовольняє двом умовам:

   а) *комутативному:* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

   б) *асоціативному:* $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

2. Є нульовий елемент, що задовольняє умові $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

3. Для кожного елемента $\vec{a}$ є обернений елемент, який позначають $(-\vec{a})$ і який задовольняє умові $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

   Властивості 1.– 3. означають, що множина G є комутативною групою відносно операції додавання.

4. Введено операцію множення чисел на елементи множини G, тобто задано відображення $G \times \mathbf{R} \to G$, яке парі $(\vec{a},\lambda) \in G \times \mathbf{R}$ ставить у відповідність елемент $\lambda\vec{a} \in G$.

Операція множення (на число) задовольняє наступним аксіомам:
а) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
б) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$
в) $\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$
г) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Множина G, на якій задано ці операції, що задовольняють переліченим умовам, називається дійсним *лінійним (векторним)* простором.

Елементи векторного простору називаються векторами.

Приклади.

1. Вектори на площині (в просторі) утворюють лінійний (векторний) простір.

2. Розглянемо поліноми від одного змінного, степінь яких $\leqslant n$. Їх можна додавати, множити на дійсне число. Ці поліноми утворюють лінійний простір.

3. Множина всіх неперервних функцій на відрізку [0, 1] утворює лінійний простір. Операція додовання функцій задається додованням їх значень в кожній точці: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, аналогічно задається множення на число: $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$, де $x \in [0,1]$.

Вправа. В прикладах 1.–3. перевірити виконання аксіом лінійного простору.

Нехай G — лінійний простір, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \ldots$ — його елементи. Вираз $\lambda^1\boldsymbol{e}_1 + \lambda^2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda^n\boldsymbol{e}_n = \lambda^i\boldsymbol{e}_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$ називається *лінійною комбінацією елементів* $\boldsymbol{e}_i$, де $i = \overline{1, n}$.

Елементи $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ простору G називаються *лінійно незалежними*, коли з того, що лінійна комбінація цих елементів $\lambda^i\boldsymbol{e}_i = 0$, $i = \overline{1, n}$ витікає, що $\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^n = 0$.

Елементи $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ лінійного простору G називаються *базисом*, коли вони лінійно незалежні і кожний вектор із цього простору є лінійна комбінація елементів $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Кількість векторів, що входять в базис, називається *вимірністю* лінійного простору.

Приклади.

1. Із твердження 1.4.1 виходить, що неколінеарні вектори лінійно залежні.

2. Із тверджень 1.4.2, 1.4.3 випливає, що кожні два неколінеарні вектори площини є базис площини; кожні три лінійно незалежні вектори є базис простору; кожні чотири вектори простору лінійно залежні.

3. Базисом простору поліномів від одного змінного степеня $\leqslant n$ є $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Дійсно, якщо $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$, то $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Отже, вимірність цього простору дорівнює $n + 1$.

4. Простір всіх неперервних функцій на відрізку [0, 1] (позначається через $C[0, 1]$) — нескінченновимірний.

Аналітична геометрія вивчає лінійні простори вимірності 2 і 3 над полем дійсних чисел, в яких введено скалярний добуток векторів.

1.5 Скалярний добуток векторів.

Нехай в просторі задано прямокутну декартову систему координат.

Скалярним добутком векторів $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ і $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$ (позначається через $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$) називається число

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3.$$

Властивості скалярного добутку.

1. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = |\boldsymbol{a}|^2$;
2. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$;
3. $\langle \lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$;
4. $\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$;

Справедливість властивостей безпосередньо витікає із визначення скалярного добутку.

Доведемо коректність визначення, тобто незалежність його від вибору системи координат. Дійсно,

$$\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle,$$

звідси

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2}{2} - \frac{|\boldsymbol{a}|^2}{2} - \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{2}.$$

Таким чином, скалярний добуток $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ виражається через довжини векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, і тому не залежить від вибору системи координат.

Висвітлимо **геометричний зміст скалярного добутку**.

Оскільки скалярний добуток не залежить від вибору системи координат, виберемо її спеціальним способом: додатний напрям осі x співпадає з напрямом $\boldsymbol{a}$; площина xy співпадає з площиною, що натягнута на вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$; додатний напрям осі y вибрано так, щоб вектор $\boldsymbol{b}$ лежав у півплощині $y \geqslant 0$; вісь z перпендикулярна до площини xy (рис. 21). В цій системі координат $\boldsymbol{a} = (|\boldsymbol{a}|, 0, 0)$, $\boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{b}|\cos\varphi, |\boldsymbol{b}|\sin\varphi, 0)$, де φ — кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто кут між променями, що задають напрями векторів і які виходять із однієї точки. Тоді

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

Звідси витікає, що вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$. Перпендикулярні вектори часто називаються *ортогональними*.

Фізичний зміст скалярного добутку.

1. $A = \langle \overline{F}, \overline{S} \rangle$, де A — робота, $\overline{F}$ — сила, $\overline{S}$ — прямолінійний шлях, що пройдено під дією цієї сили.
2. $E = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{m}{2}\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, де E — кінетична енергія, $\bar{v}$ — швидкість.

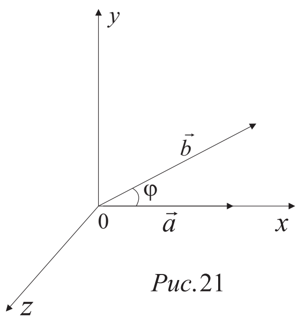


*Рис.*21

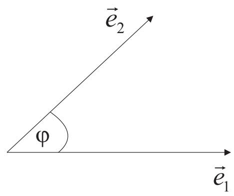


*Рис.*22

Знайдемо вираження скалярного добутку через координати векторів в косокутній системі координат. Можна вважати, що базисні вектори косокутної системи координат, в свою чергу, задані своїми координатами в деякій прямокутній системі координат. Тому всі властивості скалярного добутку для векторів в косокутній системі координат лишаються вірними. Розглянемо двовимірний випадок (рис. 22).

Нехай $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2.$

Тоді

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2, \;\; b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 \rangle =$$
$$= a^1b^1\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle + a^1b^2\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle + a^2b^1\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle + a^2b^2\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle =$$
$$= \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle a^i b^j.$$

Позначимо $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = g_{ij}$, тоді $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = g_{ij}a^ib^j$, де матриця $G = \;(g_{ij})$ має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{e}_1|^2 & |\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos\varphi \\ |\boldsymbol{e}_2||\boldsymbol{e}_1|\cos\varphi & |\boldsymbol{e}_2|^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо базисні вектори $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ одиничні і ортогональні, то матриця G — одинична, тобто $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Самостійно зробити те ж саме для тривимірного простору.

Розглянемо прямокутну систему координат. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — одиничні вектори, що мають напрями осей координат. Тоді

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

де δ_{ij} називається *символом Кронекера.*

Нехай вектор $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3$. З'ясуємо геометричний зміст a^1, a^2, a^3:

$a^1 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1 \rangle = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi_1,$
$a^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2 \rangle = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi_2,$
$a^3 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3 \rangle = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi_3,$
де $\varphi_i = (\boldsymbol{a} \hat{} \boldsymbol{e}_i)$ — кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 23).

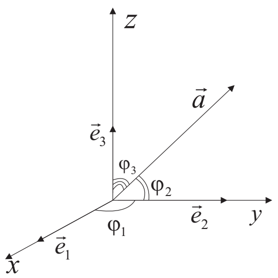


*Рис.*23

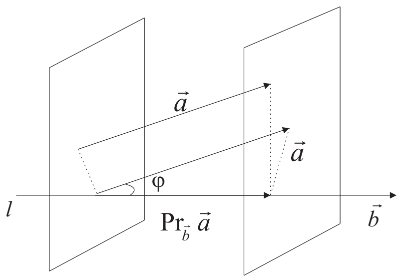


*Рис.*24

Косинуси кутів φ_i називаються *напрямними косинусами* вектора $\boldsymbol{a}$. Легко бачити, що $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$.

1.5.1 Проекція вектора на вісь.

Нехай вектор $\boldsymbol{b}$ задає напрям осі в просторі, $\boldsymbol{a}$ — довільний вектор простору.

Ортогональною проекцією вектора **a** *на вісь* l (позначається через $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$) називається вектор, який одержується так: із початку і кінця вектора $\boldsymbol{a}$ опускаємо перпендикуляри на вісь l, одержуємо відповідні точки початку і кінця вектора проекції $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$ (рис. 24).

Відкладемо вектор, що дорівнює вектору $\boldsymbol{a}$, від основи перпендикуляра, який опущено з початку вектора $\boldsymbol{a}$ на вісь l. Проекція цього вектора на вісь співпадає з проекцією вектора $\boldsymbol{a}$.

Тому

$$|Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}| |\cos \varphi|, \quad \varphi = (\boldsymbol{a} \hat{} \boldsymbol{b}).$$

$$Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \pm |\boldsymbol{a}| |\cos \varphi| \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

В останній формулі береться знак (+) , коли вектори $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ співнапрямлені. Але тоді $\cos \varphi \geqslant 0$ і $|\cos \varphi| = \cos \varphi$. Знак $(-)$ береться, коли вектори $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ протилежно напрямлені, але тоді $\cos \varphi < 0$ і $|\cos \varphi| = -\cos \varphi$. Тому $Pr_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{a}| \cos \varphi}{|\boldsymbol{b}|} \boldsymbol{b}$. Помножимо чисельник і знаменник останньої формули на $|\boldsymbol{b}|$, одержимо

$$Pr_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle}\boldsymbol{b}$$

Вправа. Довести, що

1.) $Pr_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_n) = Pr_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}_1 + \ldots + Pr_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}_n$;

2.) $Pr_{\boldsymbol{b}}(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha Pr_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$

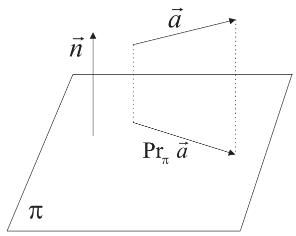


*Рис.*25

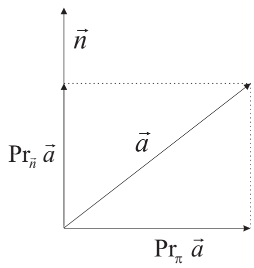


*Рис.*26

1.5.2 Проекція вектора на площину.

Ортогональною проекцією вектора **a** *на площину* π (позначається через $Pr_{\pi}\boldsymbol{a}$) називається вектор, початок і кінець якого співпадають відповідно з основами перпендикулярів, що опущені з початку і кінця вектора $\boldsymbol{a}$ на площину π (рис. 25). Нехай n — пряма, що перпендикулярна до площини π, вона називається *нормаллю.* Легко бачити, що $Pr_{\pi}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - Pr_n\boldsymbol{a}$ (рис. 26). Напрямлений вектор нормалі, який називається *нормальним* вектором, будемо позначати через $\boldsymbol{n}$.

Отже,

$$Pr_{\pi}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle}{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle}\boldsymbol{n}.$$

Вправа. Довести, що $Pr_{\pi}(\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_n) = Pr_{\pi}\boldsymbol{a}_1 + \ldots + Pr_{\pi}\boldsymbol{a}_n$.

1.6 Орієнтація площини і простору.

Нехай на площині (або в просторі) задано два базиси

$$\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}, \quad \boldsymbol{e}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\} \quad (\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}, \quad \boldsymbol{e}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}).$$

В базисі важливий порядок векторів: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ і $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1\}$ — різні базиси площини.

Будь-який вектор площини є лінійна комбінація базисних векторів, тому

$$\boldsymbol{e}'_1 = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + a_1^2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = a_2^1\boldsymbol{e}_1 + a_2^2\boldsymbol{e}_2. \tag{1.6}$$

Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$, рядки якої — координати векторів $\boldsymbol{e}_1$ і $\boldsymbol{e}_2$ в базисі $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$. Матриця A називається *матрицею переходу* від першого базису до другого.

Введемо поняття *визначника (детермінанта)* матриці A, він позначається через $\det A$ або $|A|$. Якщо $A = (a)$, то $\det A = a$, якщо $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$, то $\det A = a_1^1a_2^2 - a_1^2a_2^1$. Пишуть ще

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}.$$

Якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

то $\quad \det A = a_1^1\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_1^2\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}.$

Зауваження. *Якщо* $\mathbf{e}$ *і* $\mathbf{e}'$ *— базиси, то визначник матриці переходу від першого базису до другого* $\det A \neq 0$.

Доведення. Розглянемо двовимірний випадок. Припустимо, що $\det A = 0$. Тоді рядки матриці A пропорційні, тобто

$$a_2^1 = \lambda a_1^1, \quad a_2^2 = \lambda a_1^2. \tag{1.7}$$

Підставимо (1.7) в другу рівність системи (1.6), одержимо

$$\boldsymbol{e}'_2 = \lambda(a_1^1\boldsymbol{e}_1 + a_1^2\boldsymbol{e}_2) = \lambda\boldsymbol{e}'_1,$$

тобто вектори $\boldsymbol{e}'_1$ і $\boldsymbol{e}'_2$ колінеарні, а це суперечить тому, що $\boldsymbol{e}'_1$ і $\boldsymbol{e}'_2$ утворюють базис площини. Одержана суперечність доводить, що $\det A \neq 0$.

■

Справедливість зауваження в тривимірному випадку випливає із властивостей визначників.

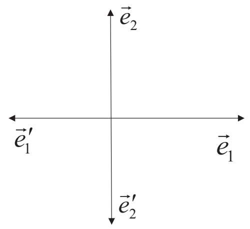


*Рис.*27

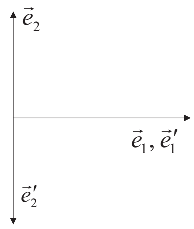


*Рис.*28

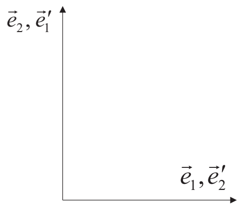


*Рис.*29

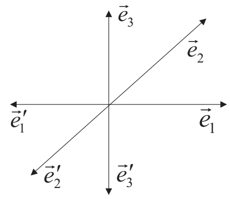


*Рис.*30

Отже, визначник матриці переходу від одного базису до іншого завжди відрізняється від нуля, але він може бути як додатним так і від'ємним.

Приклади.

1. $\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_2$ (рис. 27).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

2. $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_2$ (рис. 28).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

3. $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1$ (рис. 29).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

4. $\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_3$ (рис. 30).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

5. $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3' = -\boldsymbol{e}_3$ (рис. 31).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

6. $\boldsymbol{e}_1' = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2' = -\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3$ (рис. 32).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

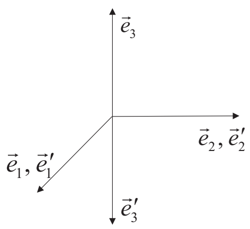


*Рис.*31

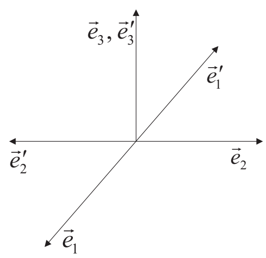


*Рис.*32

Два базиси $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e}'$ називаються *еквівалентними* ($\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}'$), якщо визначник матриці переходу від першого базизу до другого додатний.

1.6.1 Деякі відомості з алгебри.

Нехай є деяка множина. Кажуть, що на цій множині задано *відношення еквівалентності* ($\sim$) між її елементами $a, b, c, \ldots$, коли виконуються вимоги:

1. $a \sim a$ — *рефлексивність*,

2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ — *симетричність*,

3. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ — *транзитивність*.

Якщо на множині задано відношення еквівалентності, то всі елементи такої множини поділяються на неперетинні класи еквівалентних один одному елементів.

Приклади.

1. Розглянемо множину всіх прямих на площині. Відношення еквівалентності задано так: дві прямі еквівалентні, якщо вони паралельні або співпадають. Множина всіх прямих на площині розпадається на класи паралельних прямих.

2. Класи однаково напрямлених променів задають напрям вектора.

Нехай є дві квадратні матриці $A = (a_i^k)$, $B = (b_s^j)$ n-го порядку. Добутком двох квадратних матриць називається така матриця $C = (c_i^k)$, елементи якої $c_i^k = a_i^s b_s^k$, де підсумовування проводиться по s. Пишуть $AB = C$.

Приклад. Нехай $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$, тоді

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 & \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ -\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Властивості добутку матриць.

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

2. Для кожної матриці A, такої, що $\det A \neq 0$, існує *обернена матриця* A^{-1}, тобто така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E — *одинична матриця*, $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, і $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вправа. Користуючись визначенням оберненої матриці ($AA^{-1} = A^{-1}A = E$), знайти матрицю, що обернена до матриці

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Повернемося до базисів і перевіримо, чи задовольняє введене вище визначення еквівалентності базисів вимогам рефлексивності, симетричності і транзитивності.

1. *Рефлексивність.* Перехід від базису $\boldsymbol{e}$ до базису $\boldsymbol{e}$ здійснюється за допомогою матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad detA = 1 > 0$. Тому $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}$.

2. *Симетричність.* Зауважимо, що коли A — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до базису $\boldsymbol{e}'$, то A^{-1} — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}'$ до базису $\boldsymbol{e}$. Нехай $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}'$, тоді $\det A > 0$, де A — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до базису $\boldsymbol{e}'$. Але A^{-1} — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}'$ до базису $\boldsymbol{e}$ і $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} > 0$. Отже, доведено, що із $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}'$ випливає $\boldsymbol{e}' \sim \boldsymbol{e}$.

3. *Транзитивність.* Нехай A — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до базису $\boldsymbol{e}'$, B — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}'$ до базису $\boldsymbol{e}''$. І нехай $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}' \sim \boldsymbol{e}''$, тобто $\det A > 0$, $\det B > 0$.

   Покажемо, що матриця C переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до базису $\boldsymbol{e}''$ дорівнює BA. Проведемо обчислення для двовимірного випадку.

   Нехай $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}$, тоді $\boldsymbol{e}_1' = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + a_1^2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = a_2^1\boldsymbol{e}_1 + a_2^2\boldsymbol{e}_2$; $\quad \boldsymbol{e}_1'' = b_1^1\boldsymbol{e}_1' + b_1^2\boldsymbol{e}_2'$, $\quad \boldsymbol{e}_2'' = b_2^1\boldsymbol{e}_1' + b_2^2\boldsymbol{e}_2'$.

   Підставимо вирази $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, що дані першою системою, у другу, одержимо $\boldsymbol{e}_1'' = c_1^1\boldsymbol{e}_1 + c_1^2\boldsymbol{e}_2$, $\quad \boldsymbol{e}_2'' = c_2^1\boldsymbol{e}_1 + c_2^2\boldsymbol{e}_2$, $\quad$ де $\quad c_i^k$ — елементи матриці BA.

   Але $\det(AB) = \det A \det B > 0$, тому $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}''$. Отже, доведено, що із $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}' \sim \boldsymbol{e}''$ випливає $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{e}''$.

Таким чином, всі базиси розділяються на два неперетинні класи. Якщо зафіксувати деякий базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то всі базиси, перехід від $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ до яких здійснюється за допомогою матриці з додатним визначником, утворюють один клас; всі базиси, перехід до яких здійснюється за допомогою матриці з від'ємним визначником, утворюють другий клас.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}''$ — два таких базиса, що детермінанти матриць переходу A, B від фіксованого базису $\boldsymbol{e}$ до базисів $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}''$ мають один і той же знак, тобто $\det A \det B > 0$. Тоді матриця переходу від $\boldsymbol{e}'$ до $\boldsymbol{e}''$ є матриця $C = BA^{-1}$, детермінант якої $\det C = \frac{\det B}{\det A} > 0$ Отже, базиси $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}''$ належать одному класу еквівалентності.

■

Зауваження. *Задати орієнтацію на площині або в просторі — це означає вибрати базиси із одного класу.*

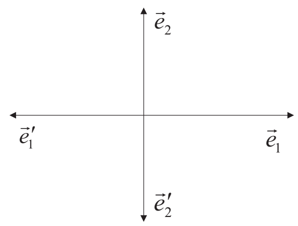


*Рис.*33

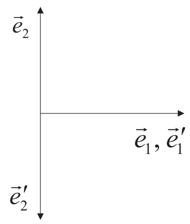


*Рис.*34

Приклади.

1. Базиси $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e}'$ належать одному класу, тобто задають одну і ту ж орієнтацію площини. (рис. 33).
2. Базиси $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e}'$ належать різним класам, тобто задають різні орієнтації площини. (рис. 34).
3. Базиси $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e}'$ задають різні орієнтації площини. (рис. 35).

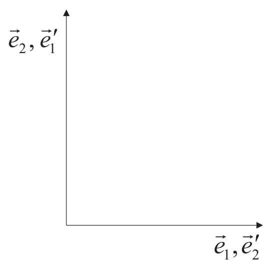


*Рис.*35

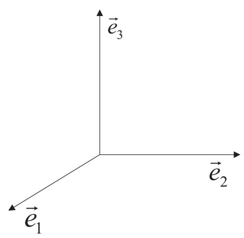


*Рис.*36

Якщо базиси задають одну і ту ж орієнтацію площини, то напрям найкоротшого оберту від першого вектора до другого один і той же.

Умовимося, що коли найкоротший оберт від першого вектора базису до другого здійснюється проти годинникової стрілки, то базис задає додатну орієнтацію площини; якщо ж цей оберт здійснюється за годинниковою стрілкою, то базис задає від'ємну орієнтацію. Звичайно, при цьому фіксуємо півпростір, з якого ми дивимося на базис.

Розглянемо просторовий випадок. Нехай у просторі задано базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ і трійку некомпланарних векторів $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$, $\boldsymbol{c} = (c^1, c^2, c^3)$. Щоб з'ясувати, чи задає базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ту ж орієнтацію, що і базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, потрібно записати матрицю переходу від базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ до базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix};$$

якщо $\det A > 0$, то базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ задає ту ж орієнтацію, що й $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$; якщо $\det A < 0$, то базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ задає протилежну орієнтацію.

Нехай впорядкована трійка векторів задовольняє так званому правилу правої руки, тобто з кінця третього вектора найкоротший оберт від першого до другого видно проти годинникової стрілки. Часто таку трійку векторів використовують для задання додатньої орієнтації простору (рис. 36).

Впорядковані трійки векторів, що одержуються із трійки $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ за допомогою циклічної перестановки векторів, задають одну і ту ж орієнтацію простору. Тобто або всі трійки $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1\}$, $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ задають додатну орієнтацію простору, або всі — від'ємну.

Запишемо, наприклад, матрицю переходу A від базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ до базису $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1$:

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

Базиси $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2\}$, $\{\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1\}$ задають орієнтацію протилежну тій, яку задає базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Запишемо, наприклад, матрицю переходу A від базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ до базису $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1.$$

1.7 Векторний добуток. Змішаний добуток.

1.7.1 Векторний добуток.

Задамо в просторі додатню орієнтацію.

Векторним добутком векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називають вектор $\boldsymbol{c}$ (позначається через $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, або $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, або $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$), який задовольняє наступним умовам:

1. $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin(\boldsymbol{a} \hat{\ } \boldsymbol{b})$, тобто модуль вектора $\boldsymbol{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

2. $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{c}$ напрямлений перпендикулярно до площини цього паралелограма;

3. впорядкована трійка векторів $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ задає додатну орієнтацію простору.

Із визначення випливає, що вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$; зокрема $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Нехай орієнтацію задає базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, що складається із взаємно ортогональних і одиничних векторів. Такий базис називається *ортонормованим.* Тоді

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 = -(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1), \;\; \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 = -(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2), \;\; \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 = -(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3).$$

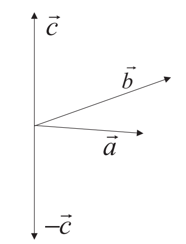


*Рис.*37

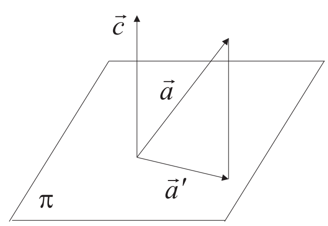


*Рис.*38

Властивості векторного добутку.

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ — кососкомутативність (рис. 37).

   Доведення. Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат, і нехай $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, отже вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ задають додатну орієнтацію простору. Тому, якщо

   $$\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3), \quad \boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3), \quad \boldsymbol{c} = (c^1, c^2, c^3),$$

   то
   $$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} > 0.$$

   Оскільки $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \perp \boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \perp \boldsymbol{a}$ і $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, то $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{c}$, де $\lambda = \pm 1$. Вектори $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ задають додатну орієнтацію простору, тобто
   $$0 < \begin{vmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ \lambda c^1 & \lambda c^2 & \lambda c^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

   Але $\begin{vmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} < 0, \quad$ тому $\quad \lambda = -1.$

   Отже, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

   ∎

2. $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

   Довести самостійно.

3. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Доведення. Якщо $\boldsymbol{c} = 0$, то властивість має місце. Нехай $\boldsymbol{c} \neq 0$. Не втрачаючи загальності (по властивості 2), будемо вважати, що $|\boldsymbol{c}| = 1$.

Позначимо через π площину, що перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{c}$, а через $\boldsymbol{a}'$ — проекцію вектора $\boldsymbol{a}$ на площину π (рис. 38). Площа паралелограма, натягнутого на вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{c}$, дорівнює площі паралелограма, натягнутого на вектори $\boldsymbol{a}'$ і $\boldsymbol{c}$, тому $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}|$. Вектори $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ перепендикулярні до однієї і тієї ж площини. Найкоротший оберт від вектора $\boldsymbol{a}$ до вектора $\boldsymbol{c}$, і від $\boldsymbol{a}'$ до вектора $\boldsymbol{c}$ видно проти годинникової стрілки з однієї і тієї ж сторони. Отже, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$.

Довести, що напрями векторів $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ співпадають, можливо аналітично. Виберемо в просторі прямокутну декартову систему координат так, щоб $\boldsymbol{c} = (0, 0, 1)$. Введемо позначення: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$. Тоді $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\boldsymbol{d} = (d^1, d^2, d^3)$ і

$$0 < \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ d^1 & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = a^2 d^1 - a^1 d^2 \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{a}' = (a^1, a^2, 0), \quad \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{d}, \quad \lambda = \pm 1.$$

Але вектори $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ задають додатну орієнтацію простору, отже

$$0 < \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda d^1 & \lambda d^2 & \lambda d^3 \end{vmatrix} = -\lambda(a^1 d^2 - a^2 d^1) \tag{1.9}$$

Із (1.8), (1.9) випливає, що $\lambda = 1$, тобто доведено, що напрями $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ співпадають. Аналогічно можливо показати, що $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$ і $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c}$.

Доведемо, що $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}'|$, $|\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}'|$, $|(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c}| = |(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})'|$. Вектор $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ одержується із вектора $\boldsymbol{a}'$ обертом останнього на кут $\pi/2$ в площині, перепендикулярній до вектора $\boldsymbol{c}$, і з кінця вектора $\boldsymbol{c}$ оберт від вектора $\boldsymbol{a}'$ до вектора $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ видно по годинниковій стрілці; тобто трійка $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ задає додатну орієнтацію простору. Аналогічне твердження вірне для векторів $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$ і $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c}$, тобто паралелограм, натягнутий на вектори $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, обертається на кут $\pi/2$ в площині, що перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{c}$, і займає положення паралелограма, натягнутого на вектори $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$. Отже, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}$.

Оскільки $\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})' \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, то $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Твердження лишається істинним і у випадку, коли хоч один із векторів $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ колінеарний вектору $\boldsymbol{c}$.

■

Знайдемо вираження векторного добутку через координати векторів. Нехай ортонормований базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ задає додатну орієнтацію простору і $\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b} = b^1 \boldsymbol{e}_1 + b^2 \boldsymbol{e}_2 + b^3 \boldsymbol{e}_3$. Тоді із властивостей векторного добутку випливає, що

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3) \times (b^1 \boldsymbol{e}_1 + b^2 \boldsymbol{e}_2 + b^3 \boldsymbol{e}_3) =$$

$$= (a^1b^2 - a^2b^1)\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + (a^1b^3 - a^3b^1)\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 + (a^2b^3 - a^3b^2)\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 =$$
$$= (a^2b^3 - a^3b^2)\boldsymbol{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\boldsymbol{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\boldsymbol{e}_3,$$

тобто $\quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a^2b^3 - a^3b^2; \quad a^3b^1 - a^1b^3; \quad a^1b^2 - a^2b^1)$.

Остання формула записується у вигляді символічного визначника так:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

Якщо векторний добуток дорівнює нулю, то координати векторів пропорційні, тобто вектори колінеарні.

Зауваження.

1. *Векторний добуток не є справжній вектор, це так званий псевдовектор.*

   Справа в тому, що векторний добуток залежить від орієнтації простору; якщо змінити орієнтацію простору, то векторний добуток змінить напрям на протилежний. Наприклад, псевдовектором є вектор напруги магнітного поля в електродинаміці, вектор моментів в механіці.

2. *Скалярний і векторний добуток — пов'язані з однією операцією над кватерніонами.*

   Кватерніон — четвірка чисел з трьома уявними одиницями:

   $$a^0 + ia^1 + ja^2 + ka^3, \quad a^0, a^1, a^2, a^3 \in R, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
   $$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

   Розглянемо добуток двох чисто уявних кватерніонів:

   $$(a^1i + a^2j + a^3k)(b^1i + b^2j + b^3k) = (a^2b^3 - a^3b^2)i + (a^3b^1 - a^1b^3)j +$$
   $$+ (a^1b^2 - a^2b^1)k - (a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3),$$

   але $a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$ — скалярний добуток векторів (a^1, a^2, a^3) *і* (b^1, b^2, b^3), а $(a^2b^3 - a^3b^2, \quad a^3b^1 - a^1b^3, \quad a^1b^2 - a^2b^1)$ — векторний добуток тих же векторів.

Приклад. Розглянемо обертання твердого тіла навколо осі з кутовою швидкістю ω. Тоді лінійна швидкість v точки твердого тіла, що знаходиться на відстані $|\boldsymbol{r}|$ від осі обертання, де $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точки, дорівнює $v = \boldsymbol{r} \times \omega$ (рис. 39).

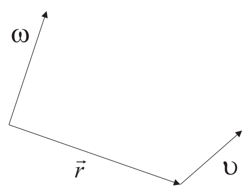


*Рис.*39

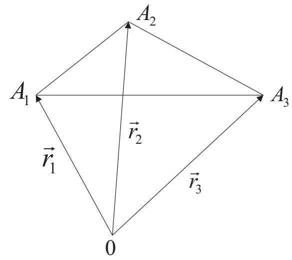


*Рис.*40

1.7.2 Геометричні застосування векторного добутку.

Нехай $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ — радіус-вектори вершин $\triangle A_1A_2A_3$ (рис. 40). Тоді

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

і

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)|.$$

Формула Лагранжа:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2.$$

Доведення.

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\varphi = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\varphi) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2.$$

■

Вправа. Довести ***формулу Лапласа:***

$$\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що формула Лагранжа — окремий випадок формули Лапласа. Вектор $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ називається *подвійним векторним добутком.*

Для будь-яких векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ справедлива формула

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle - \boldsymbol{c}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle. \tag{1.11}$$

Дійсно, виберемо в просторі спеціальну декартову систему координат: вісь Oz направимо вздовж вектора $\boldsymbol{c}$, а вісь Oy візьмемо у площині векторів $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$.

Тоді $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{b} = (0, y', z')$, $\boldsymbol{c} = (0, 0, z'')$. За формулою (1.10)

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (y'z'', 0, 0), \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (0, zy'z'', -yy'z'').$$

З іншого боку, оскільки $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle = zz''$, $\quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = yy' + zz'$, то

$$\boldsymbol{b}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle = (0, y'zz'', z'zz''), \quad \boldsymbol{c}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = (0, 0, yy'z'' + zz'z'').$$

Із одержаних рівностей випливає формула (1.11).

Вправи.

1. Довести, що $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.
2. Довести ***тотожність Якобі***

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Тривимірний векторний простір з операцією векторного добутку, що задовольняє тотожності Якобі, є найпростіший приклад алгебри Лі.

1.7.3 Змішаний добуток.

Змішаним добутком векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ (позначається через $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$) називається $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$.

Якщо в просторі задано ортонормований базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, який має додатну орієнтацію, і координати векторів $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в цьому базисі дорівнюють відповідно $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$, $\boldsymbol{c} = (c^1, c^2, c^3)$, то

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right),$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = c^1 \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} - c^2 \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} + c^3 \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що якщо вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарні, то $\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ до базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Отже, якщо базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ задає додатну орієнтацію, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$, від'ємну — $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$. Обернене також істинне.

Вправа. Довести, що

1) $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle$;

2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$.

1.7.4 Геометричний зміст змішаного добутку.

За означенням

$$\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \cos\varphi,$$

де $\varphi = ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\hat{\ } \boldsymbol{c})$.

Розглянемо паралелепіпед, що натягнений на вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (рис.41). Площа основи паралелепіпеда $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, а висота $H = |\boldsymbol{c}||\cos\varphi|$. Звідси об'єм паралелепіпеда, натягненого на вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, дорівнює $V = |(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})|$.

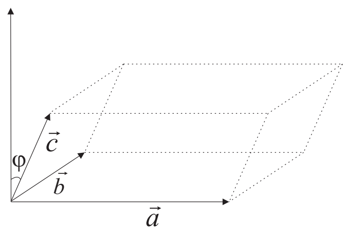


*Рис.*41

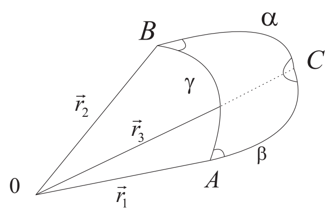


*Рис.*42

Зауважимо, що $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V$, якщо базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ задає додатну орієнтацію простору; $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -V$, коли базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ задає від'ємну орієнтацію простору.

Нагадаємо, що рівність нулю скалярного добутку є критерій ортогональності двох векторів. Рівність нулю векторного добутку — критерій колінеарності векторів. Рівність нулю змішаного добутку трьох векторів є необхідною і достатньою умовою компланарності цих векторів.

Зауваження.

1. *Скалярний добуток двох векторів — це скаляр. Змішаний добуток трьох векторів — це так званий псевдоскаляр, оскільки змішаний добуток залежить від орієнтації простору.*

2. *Векторний добуток — це бівектор.*

   Дві пари векторів $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ називаються еквівалентними, якщо вони задають одну і ту ж площину, однакову орієнтацію на ній і рівні площі паралелограмів, що натягнені на вектори a, b і c, d. Відповідні класи еквівалентності називаються *бівекторами.* Бівектори в тривимірному просторі утворюють тривимірний простір, що дає нам можливість ставити у відповідність кожному бівектору вектор.

3. *Змішаний добуток* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *— це тривектор.*

   Точніше, трійки векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ і $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$ еквівалентні, коли вони задають одну і ту ж орієнтацію простору і мають рівні об'єми відповідних паралелепіпедів. Сукупність еквівалентних трійок векторів утворює клас еквівалентності, який називається *тривектором.* Тривектори в тривимірному просторі утворюють одновимірний лінійний простір (кожній трійці векторів ставиться у взаємну однозначну відповідність число). Тривектори в 4-вимірному просторі утворюють 4-вимірний простір (кожній трійці векторів ставиться у відповідність вектор по аналогії із векторним добутком в тривимірному просторі).

Геометричні застосування змішаного добутку.

1. Розглянемо плоский трикутник, заданий координатами своїх вершин у деякій прямокутній системі координат:

$$A_1(x_1, x_2), A_2(y_1, y_2), A_3(z_1, z_2),$$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|;$$

$$\overline{A_1A_2} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2), \quad \overline{A_1A_3} = (z_1 - x_1, z_2 - x_2)$$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\ \ abs\begin{vmatrix} y_1 - x_1 & y_2 - x_2 \\ z_1 - x_1 & z_2 - x_2 \end{vmatrix}.$$

   Знайдемо площу $\triangle A_1A_2A_3$ використовуючи змішаний добуток. Перенесемо паралельно $\triangle A_1A_2A_3$, так, щоб він лежав у площині $z = 1$. Тоді $A_1(x_1, x_2, 1)$, $A_2(y_1, y_2, 1)$, $A_3(z_1, z_2, 1)$. Користуючись відомою формулою для обчислення об'єму V_T тетраедра, $V_T = \frac{1}{3}Sh$, де S — площа основи (в даному випадку S — площа $\triangle A_1A_2A_3$), а h — висота (в даному випадку $h = 1$), маємо $V_T = \frac{1}{3}S$. Звідси одержуємо формулу для обчислення об'єму V_P паралелепіпеда, натягнутого на вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$,

$$V_P = 6V_T = 2S.$$

Оскільки V_P обчислюється і за допомогою змішаного добутку:

$$V_P = (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}),$$

то

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \ abs \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

2. Розглянемо тетраедр, радіус-вектори вершин якого є $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$. Тоді $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_1$ — вектори, що задають ребра тетраедра. Об'єм V_T тетраедра, враховуючи сказане вище, обчислюється за формулою
$$V_T = \frac{1}{6} \left|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1)\right|.$$

Вправи.

1. Довести, що
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \\ \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \rangle & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

2. Знайти формулу для обчислення об'єму тетраедра, заданого координатами своїх вершин, аналогічну формулі (1.12).

1.7.5 Основні формули сферичної тригонометрії.

Розглянемо сферу одиничного радіуса із центром в точці O. Нехай A, B, C — довільні точки сфери; $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ — їх радіус-вектори; α, β, γ — довжини дуг BA, CA, AB, відповідно, (кожна з дуг висікається на сфері площиною, що проходить через точку O і кінці дуги) (рис. 42). Кутом між дугами великих кіл на сфері будемо називати кут між їх довжинами. Тоді $|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| = \sin\gamma$, $|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3| = \sin\beta$; вектор $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ перпендикулярний до площини OAB, вектор $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3$ перпендикулярний до площини OAC. Тому
$$\langle \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 \rangle = \sin\gamma \sin\beta \cos A,$$
де A — внутрішній кут сферичного трикутника ABC. З іншого боку, за формулою Лапласа

$$\langle \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 \rangle = |\boldsymbol{r}_1|^2 \langle \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \rangle \langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 \rangle = \cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta.$$

Порівнюючи дві останні формули, ми одержимо *теорему косинусів сферичної тригонометрії*:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

За формулою (1.11)

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_1\big\langle \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 \big\rangle - \boldsymbol{r}_3\big\langle \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1 \big\rangle.$$

Використовуючи властивості змішаного добутку, одержимо

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3).$$

Тому $|(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3)| = |(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)|$. З іншого боку, $|(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3)| = \sin\gamma\sin\beta\sin A$. Порівнюючи дві останні рівності, одержуємо

$$\sin\gamma\sin\beta\sin A = |(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)|.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$\sin\alpha\sin\gamma\sin B = |(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)|, \quad \sin\alpha\sin\beta\sin C = |(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)|.$$

З останніх трьох рівностей випливає *теорема синусів сферичної тригонометрії*:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

1.8 Перетворення координат.

1.8.1 Перетворення координат вектора при переході до нового базису.

Нехай $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ і $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3$ — два базиси, не обов'язково ортонормовані.

Розкладемо вектори $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 &= c_1^1\boldsymbol{e}_1 + c_1^2\boldsymbol{e}_2 + c_1^3\boldsymbol{e}_3 = c_1^j\boldsymbol{e}_j,\\
\widetilde{\boldsymbol{e}}_2 &= c_2^1\boldsymbol{e}_1 + c_2^2\boldsymbol{e}_2 + c_2^3\boldsymbol{e}_3 = c_2^j\boldsymbol{e}_j,\\
\widetilde{\boldsymbol{e}}_3 &= c_3^1\boldsymbol{e}_1 + c_3^2\boldsymbol{e}_2 + c_3^3\boldsymbol{e}_3 = c_3^j\boldsymbol{e}_j.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Отже, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = c_i^j\boldsymbol{e}_j$.

Довільний вектор $\boldsymbol{a}$ можна розкласти як по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, так і по базису $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3$:

$$\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3 = a^j \boldsymbol{e}_j \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{a} = \widetilde{a}^1 \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 + \widetilde{a}^2 \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 + \widetilde{a}^3 \widetilde{\boldsymbol{e}}_3 = \widetilde{a}^i \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.15}$$

Розглянемо як зв'язані між собою координати a^j і $\widetilde{a}^i$ $(j, i = 1, 2, 3)$.

Підставимо у (1.15) вираз для $\widetilde{\boldsymbol{e}}_i$ із (1.13) і одержимо

$$\boldsymbol{a} = \widetilde{a}^i c_i^j \boldsymbol{e}_j = (c_i^j \widetilde{a}^i) \boldsymbol{e}_j \tag{1.16}$$

Вирази (1.14) і (1.16) — це розкладання вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Але вектор по данному базису розкладається єдиним способом. Тому

$$a^j = c_i^j \widetilde{a}^i. \tag{1.17}$$

Отже, одержано формули перетворення координат вектора при переході до нового базису:

$$\begin{aligned} a^1 &= c_1^1 \widetilde{a}^1 + c_2^1 \widetilde{a}^2 + c_3^1 \widetilde{a}^3, \\ a^2 &= c_1^2 \widetilde{a}^1 + c_2^2 \widetilde{a}^2 + c_3^2 \widetilde{a}^3, \\ a^3 &= c_1^3 \widetilde{a}^1 + c_2^3 \widetilde{a}^2 + c_3^3 \widetilde{a}^3. \end{aligned}$$

Позначимо через C матрицю переходу від базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ до базису $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2, \widetilde{\boldsymbol{e}}_3$:

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що $\det C \neq 0$ (див. 1.6).

Перехід від нових координат $\widetilde{a}^i$ до старих a^j здійснюється за допомогою транспонованої матриці

$$C^t = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix}, \quad \det C^t \neq 0.$$

Системи (1.13), (1.17) в матричній формі записуються відповідно

$$\widetilde{\boldsymbol{e}} = C \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{a} = C^t \widetilde{\boldsymbol{a}}.$$

Перехід від старих координат a^j до нових $\widetilde{a}^i$ здійснюється за допомогою матриці $(C^t)^{-1}$, оберненої до матриці C^t:

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = (C^t)^{-1} \boldsymbol{a}.$$

1.8.2 Поняття коваріантних та контраваріантних координат вектора.

Вектор у просторі можна визначити як впорядкований набір трьох чисел, який при переході до нової системи координат змінюється по закону (1.17). Зауважимо, що векторний добуток має інший закон перетворення при переході до нової системи координат.

Розглянемо поряд з базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *дуальний (взаємний)* базис, вектори якого

$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{(\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{(\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3)}$$

перепендикулярні до площин тригранного кута з ребрами, що напрямлені по векторах $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Базис $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$ задає ту ж орієнтацію, що і $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Зауважимо, що коли базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ортонормований, то $\boldsymbol{e}^i$ співпадають з $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Довільний вектор $\boldsymbol{a}$ можна розкласти як по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$: $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i$, так і по базису $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$: $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}^i$, $(i = 1, 2, 3)$. З'ясуємо геометричний зміст a_i $(i = 1, 2, 3)$. Зауважимо, що $\left\langle \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \delta^i_j$. Дійсно,

$$\left\langle \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)},\ \boldsymbol{e}_1 \right\rangle = 1, \quad \left\langle \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)},\ \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = 0,$$

аналогічно для інших значень індексів.

Будемо вважати, що вектори $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ одиничні. Розглянемо скалярний добуток $\left\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle = \left\langle a_1 \boldsymbol{e}^1 + a_2 \boldsymbol{e}^2 + a_3 \boldsymbol{e}^3,\ \boldsymbol{e}_1 \right\rangle = a_1$. Оскільки $\boldsymbol{e}_1$ — одиничний вектор, a^1 — величина ортогональної проекції вектора $\boldsymbol{a}$ на вісь, що має напрям вектора $\boldsymbol{e}_1$ (рис. 43).

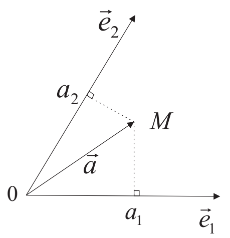


*Рис.*43

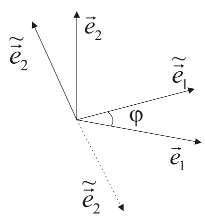


*Рис.*44

Числа a^1, a^2, a^3 називаються *контраваріантними* координатами вектора $\boldsymbol{a}$; числа a_1, a_2, a_3 називаються *коваріантними* координатами вектора $\boldsymbol{a}$.

Коваріантні координати вектора можна визначити після введення в лінійному просторі операції скалярного добутку.

Знайдемо зв'язок між коваріантними і контраваріантними координатами одного і того ж вектора:

$$a_k = \left\langle a^i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \right\rangle = a^1 \left\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_k \right\rangle + a^2 \left\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_k \right\rangle + a^3 \left\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_k \right\rangle.$$

Позначимо $\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle$ через g_{ij}, очевидно, що $g_{ij} = g_{ji}$. Тоді

$$a_k = g_{1k} a^1 + g_{2k} a^2 + g_{3k} a^3.$$

Таким чином, шуканий зв'язок задається формулою $a_k = g_{ik} a^i$. Нехай $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — довільні вектори: $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}^j$;

$$\left\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \right\rangle = \left\langle a^i \boldsymbol{e}_i, b_j \boldsymbol{e}^j \right\rangle = a^i b_j \left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j \right\rangle = a^i b_j \delta_i^j = a^i b_i. \tag{1.18}$$

Розглянемо, чим відрізняється ко- і контраваріантні координати вектора. При переході до нового базису контраваріантні координати змінюються за формулою (1.17). Коваріантні змінюються за іншим законом. Знайдемо його. Із формул (1.18) випливає, що

$$\left\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \right\rangle = a_k b^k = \widetilde{a}_i \widetilde{b}^i. \tag{1.19}$$

За формулами перетворення контраваріантних координат вектора (1.17):

$$b^k = c_i^k \widetilde{b}^i. \tag{1.20}$$

Підставимо вираз (1.20) у формулу (1.19):

$$(a_k c_i^k) \widetilde{b}^i = \widetilde{a}_i \widetilde{b}^i.$$

Звідси з огляду на довільність вектора $\boldsymbol{b}$ одержимо формули перетворення коваріантних координат вектора $\widetilde{a}_i = c_i^k a_k$.

1.8.3 Перетворення координат вектора при переході від ортонормованного до ортонормованного базисів.

Зупинимося більш докладно на випадку, коли базиси $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ і $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_3$, ортонормовані, тобто виконуються умови:

$$\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \delta_{ij}, \quad \left\langle \widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \right\rangle = \delta_{ij}.$$

де $\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array} \right.$. У цьому випадку на коефіцієнти матриці C накладаються умови:

$$(c_1^1)^2+(c_1^2)^2+(c_1^3)^2 = 1, \quad (c_2^1)^2+(c_2^2)^2+(c_2^3)^2 = 1, \quad (c_3^1)^2+(c_3^2)^2+(c_3^3)^2 = 1,$$

оскільки $\left\langle \widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \right\rangle = 1, \quad i = 1, 2, 3;$

$$c_1^1c_2^1 + c_1^2c_2^2 + c_1^3c_2^3 = 0, \quad c_1^1c_3^1 + c_1^2c_3^2 + c_1^3c_3^3 = 0, \quad c_2^1c_3^1 + c_2^2c_3^2 + c_2^3c_3^3 = 0,$$

оскільки $\left\langle \widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \right\rangle = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3.$

В матричному вигляді ці умови записуються так: $CC^t = E$, де E — одинична матриця. Матриця C, що задовольняє рівностям $CC^t = C^tC = E$, називається *ортогональною.*

Розглянемо двовимірний випадок. Нехай $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ і $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1,\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2$ — ортонормовані базиси;

C — матриця переходу від $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ до $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1,\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2$,

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді $(c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 = 1, \quad (c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 = 1, \quad c_1^1c_2^1 + c_1^2c_2^2 = 0$, тобто чотири коефіцієнти матриці C зв'язані трьома рівняннями.

Нехай $\varphi = (\boldsymbol{e}_1 \hat{\ } \boldsymbol{e}_1)$. Коефіцієнти $c_1^1,\ c_1^2$ — це координати вектора $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1$ в базисі $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$, тому $c_1^1 = \cos\varphi,\ c_1^2 = \sin\varphi$ (рис. 44).

Коефіцієнти $c_2^1,\ c_2^2$ можна знайти із системи рівнянь $c_2^1\cos\varphi + c_2^2\sin\varphi = 0$, $(c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 = 1$.

Система має два розв'язки:

1) $c_2^1 = -\sin\varphi,\ c_2^2 = \cos\varphi$; 2) $c_2^1 = \sin\varphi,\ c_2^2 = -\cos\varphi$.

У першому випадку базис $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2$, задає ту ж орієнтацію, що базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, у другому — протилежну.

Справді, у першому випадку

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det C = 1 > 0,$$

у другому випадку

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det C = -1 < 0,$$

Нехай на площині задано вектор $\boldsymbol{a}$. Тоді відносно базису $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ вектор $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2$, а відносно $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1,\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2$ вектор $\boldsymbol{a} = \widetilde{a}^1\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 + \widetilde{a}^2\widetilde{\boldsymbol{e}}_2$.

Нехай матриця переходу від базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ до базису $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тоді $C^t = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ і перехід від нових координат $\widetilde{a}^i$ до старих a^j запишеться так:

$$\begin{cases} a^1 = \cos\varphi\, \widetilde{a}^1 - \sin\varphi\, \widetilde{a}^2 \\ a^2 = \sin\varphi\, \widetilde{a}^1 + \cos\varphi\, \widetilde{a}^2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно a^1, a^2 одержимо формули переходу від старих координат до нових:

$$\begin{cases} \widetilde{a}^1 = \cos\varphi a^1 + \sin\varphi a^2 \\ \widetilde{a}^2 = -\sin\varphi a^1 + \cos\varphi a^2. \end{cases}$$

1.8.4 Перетворення координат точок при переході до нової системи координат.

Нехай на площині задано дві косокутні системи координат і деяка точка P, координати якої дорівнюють в старій системі координат (x^1, x^2), в новій — $(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2)$ (рис. 45). З'ясуємо, як зв'язані між собою старі і нові координати точки:

$$\overline{OP} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2; \quad \overline{\widetilde{O}P} = \widetilde{x}^1\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 + \widetilde{x}^2\widetilde{\boldsymbol{e}}_2; \quad \overline{OP} = \overline{O\widetilde{O}} + \overline{\widetilde{O}P}. \qquad (1.21)$$

Нехай в системі координат x^1Ox^2 буде $\widetilde{O}(b^1, b^2)$, або $\overline{O\widetilde{O}} = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2$ і $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 = c_1^1\boldsymbol{e}_1 + c_1^2\boldsymbol{e}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_2 = c_2^1\boldsymbol{e}_1 + c_2^2\boldsymbol{e}_2$. Підставляючи знайдені вирази у формулу (1.21), одержимо

$$x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + \widetilde{x}^1(c_1^1\boldsymbol{e}_1 + c_1^2\boldsymbol{e}_2) + \widetilde{x}^2(c_2^1\boldsymbol{e}_1 + c_2^2\boldsymbol{e}_2),$$

де c_i^j — коефіцієнти матриці C, причому $\det C \neq 0$. Звідси шукані формули мають вигляд

$$x^1 = c_1^1\widetilde{x}^1 + c_2^1\widetilde{x}^2 + b^1,$$

$$x^2 = c_1^2\widetilde{x}^1 + c_2^2\widetilde{x}^2 + b^2.$$

Самостійно записати аналогічні формули для тривимірного простору.

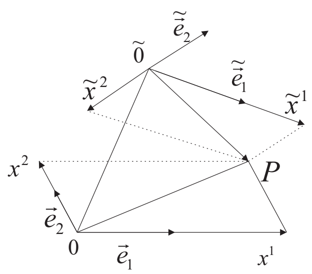


*Рис.*45

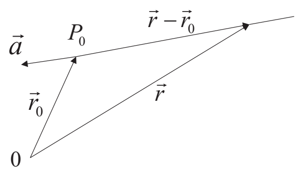


*Рис.*46

Розглянемо окремий випадок, коли старий і новий базиси ортонормовані. Тоді, якщо обидва базиси задають одну і ту ж орієнтацію площини, буде

$$x^1 = \widetilde{x}^1 \cos\varphi - \widetilde{x}^2 \sin\varphi + b^1,$$
$$x^2 = \widetilde{x}^1 \sin\varphi + \widetilde{x}^2 \cos\varphi + b^2. \tag{1.22}$$

Якщо базиси задають протилежну орієнтацію, то

$$x^1 = \widetilde{x}^1 \cos\varphi + \widetilde{x}^2 \sin\varphi + b^1,$$

$$x^2 = \widetilde{x}^1 \sin\varphi - \widetilde{x}^2 \cos\varphi + b^2.$$

Запишемо формули переходу від старих координат до нових у випадку, коли базиси задають однакову орієнтацію. Для цього досить в рівняннях (1.22) замінити φ на $-\varphi$ (при умові, що b^1 і b^2 перенесені в ліві частини рівностей):

$$\widetilde{x}^1 = (x^1 - b^1)\cos\varphi + (x^2 - b^2)\sin\varphi;$$

$$\widetilde{x}^2 = -(x^1 - b^1)\sin\varphi + (x^2 - b^2)\cos\varphi.$$

Заміна φ на $-\varphi$ зв'язана з тим, що ми міняємо місцями стару і нову системи координат і тепер найменший оберт від першого вектора старої системи координат до першого вектора нової системи координат буде на кут $-\varphi$.

Розділ 2

Прямі і площини

2.1 Рівняння прямої і площини.

При вивченні прямих і площин ми будемо виходити із аналогії між прямою на площині і площиною в просторі.

Нехай задано пряму в просторі. Одержимо її рівняння. Нехай $\boldsymbol{a}$ — *напрямний вектор прямої* (тобто ненульовий вектор, що паралельний прямій), $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор довільної точки P прямої, $\boldsymbol{r}_0$ — радіус-вектор деякої фіксованої точки P_0, що лежить на прямій (рис. 46). Тоді вектори $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ і $\boldsymbol{a}$ колінеарні, тобто $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{a}$, $t \in R$, причому якщо точка P пробігає всі точки прямої, то параметр t приймає всі можливі значення $(-\infty < t < +\infty)$, і навпаки.

Рівняння

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{2.1}$$

називається *параметричним рівнянням прямої.*

Запишемо його в координатному вигляді.

Нехай

$$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3), \quad \boldsymbol{r} = (x, y, z).$$

Тоді (2.1) покоординатно записується у вигляді

$$\begin{cases} x = x_0 + a^1 t, \\ y = y_0 + a^2 t, \\ z = z_0 + a^3 t. \end{cases} \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) називаються *параметричними рівняннями прямої.* Такий же вигляд мають рівняння прямої і в косокутній системі координат, оскільки ми при доведенні ніде не використовували прямокутність системи координат.

2.1.1 Механічний зміст прямої.

Якщо в початковий момент часу матеріальна точка має швидкість v і на неї не діє сила, то точка рухається рівномірно і прямолінійно.

Оскільки вектори $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ і $\boldsymbol{a}$ колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x-x_0}{a^1}=\frac{y-y_0}{a^2}=\frac{z-z_0}{a^3}. \tag{2.3}$$

Рівності (2.3) називаються *рівняннями прямої в канонічному вигляді.* Це символічний запис, якщо деякі a^i обертаються на нуль. Якщо деякі a^i дорівнюють нулю, то рівняння (2.3) утрачають зміст і їх потрібно розуміти символічно, точніше, запис $\frac{x-x_i}{0}$ означає $x=x_i$ і т.п.

Рівняння (2.3) можна переписати так:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a^1}=\frac{y-y_0}{a^2}, \\ \\ \frac{y-y_0}{a^2}=\frac{z-z_0}{a^3}. \end{cases}$$

Нехай $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радіус-вектори двох різних фіксованих точок, що лежать на прямій; тоді $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ — напрямний вектор прямої. Рівняння (2.1) приймає вигляд

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1).$$

Одержане рівняння називається *рівнянням прямої, що проходить через дві точки.*

Якщо $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$, то $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, і рівняння прямої, що проходить через дві точки, можна записати так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.4}$$

Розглянемо випадок площини, на якій задано прямокутну декартову систему координат.

Тоді $\frac{x-x_0}{a^1}=\frac{y-y_0}{a^2}$ — рівняння прямої в канонічному вигляді на площині.

При $a^1\neq 0$ із цього рівняння випливає, що

$$y-y_0=\frac{a^2}{a^1}(x-x_0), \quad \frac{a^2}{a^1}=\operatorname{tg}\varphi,$$

де φ — кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ (рис. 47).

Вправа. Записати рівняння прямої на площині, що відтинає на осях координат відрізки, які мають величини $a\neq 0$ і $b\neq 0$. Воно називається *рівнянням прямої у відрізках на осях.*

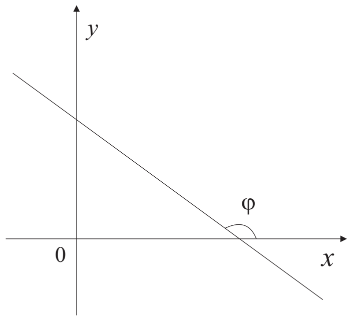


*Рис.*47

2.1.2 Загальне рівняння площини у просторі і прямої на площині.

Розглянемо площину в просторі (пряму на площині), в якому задана прямокутна декартова система координат. Нехай $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор довільної точки площини (прямої на площині), $\boldsymbol{r}_0$ — радіус-вектор деякої фіксованої точки площини (прямої на площині), $\boldsymbol{n}$ — напрямний вектор прямої, яка перпендикулярна до площини (до прямої на площині) (рис. 48). Ця пряма називається *нормаллю*, а вектор $\boldsymbol{n}$ — *вектором нормалі або нормальним вектором.*

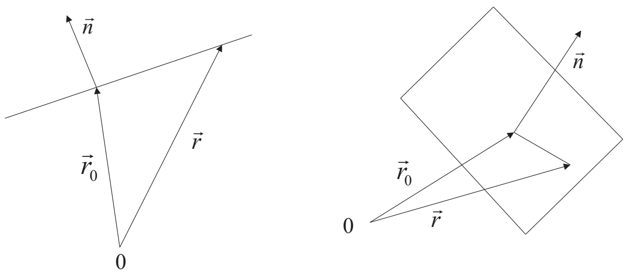


*Рис.*48

Оскільки вектор $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ належить площині (прямій), то $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ перпендикулярний до $\boldsymbol{n}$, і тому

$$\left\langle \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle = 0 \qquad (2.5)$$

Одержане рівняння є рівнянням площини в просторі (прямої на площині).

1. **Розглянемо випадок простору.**

Нехай $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{n} = (n^1, n^2, n^3)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Тоді рівняння (2.5) набуде вигляду

$$n^1(x - x_0) + n^2(y - y_0) + n^3(z - z_0) = 0,$$

або, якщо ввести позначення $c = -n^1x_0 - n^2y_0 - n^3z_0$,

$$n^1x + n^2y + n^3z + c = 0. \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) називається *загальним рівнянням площини у просторі.*

2. **Розглянемо випадок площини.**

   Нехай $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{n} = (n^1, n^2)$, $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Тоді рівняння (2.5) набуде вигляду

$$n^1(x - x_0) + n^2(y - y_0) = 0,$$

   або, якщо ввести позначення $c = -n^1x_0 - n^2y_0$,

$$n^1x + n^2y + c = 0 \tag{2.7}$$

   Рівняння (2.7) називається *загальним рівнянням прямої на площині.*

Таким чином, ми показали, що кожна площина в просторі (кожна пряма на площині) має рівняння вигляду

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (ax + by + c = 0),$$

де $a,\ b,\ c,\ d$ — сталі.

Доведемо обернене **твердження**:

кожне рівняння вигляду $ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ($ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$), є рівняння деякої площини в просторі (прямої на площині).

Доведення.

Розглянемо випадок простору.

Нехай є рівняння $ax+by+cz+d = 0$ і $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Нехай x_0, y_0, z_0 — який-небудь розв'язок цього рівняння: $ax_0+by_0+cz_0+d = 0$. За допомогою останнього співвідношення наше рівняння можливо перетворити так: $ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0 = 0$, або $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$. Останнє рівняння являє собою рівняння площини, що проходить через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$.

Отже, ми довели, що рівняння вигляду $ax + by + cz + d = 0$, де $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, є рівняння деякої площини, а коефіцієнти a, b, c являють собою координати вектора, що перпендикулярний до площини.

$\blacksquare$

Замітимо, що і в косокутній системі координат рівняння площини у просторі (прямої на площині) буде також лінійним. Це зразу випливає з того, що координати точок в різних декартових системах координат зв'язані лінійними залежностями.

Розглянемо лінійну функцію трьох змінних: $f(x, y, z) = ax + by + cz$. Тоді площина — множина точок, на яких функція f приймає деяке стале значення h. Множина точок простору $\{(x, y, z) : ax + by + cz = h\}$ називається *поверхнею рівня функції* f.

Аналогічно пряма на площині — це *лінія рівня* лінійної функції двох змінних $f(x, y) = ax + by$.

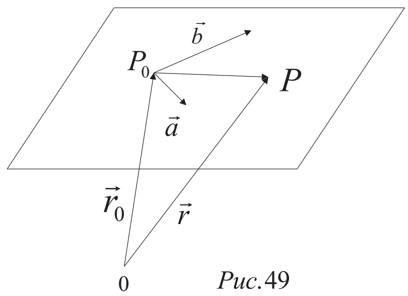


*Рис.*49

2.1.3 Параметричне рівняння площини.

Нехай задано деяку площину в просторі. Нехай $\boldsymbol{r}_0$ — радіус-вектор деякої фіксованої точки P_0, що належить площині; $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор довільної точки P площини; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — неколінеарні вектори, що лежать у площині (рис. 49). Тоді вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ утворюють базис площини, а вектор $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ лежить в площині, тому $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$. Якщо точка P пробігає всі точки площини, то параметри u, v приймають всі можливі значення $(-\infty < u < \infty,\ -\infty < v < \infty)$, і навпаки.

Рівняння $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$, де $-\infty < u < \infty,\ -\infty < v < \infty$, називається *параметричним рівнянням площини.*

Нехай в просторі задано прямокутну декартову систему координат.

Якщо $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$, то останнє рівняння можна записати в координатному вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua^1 + vb^1, \\ y = y_0 + ua^2 + vb^2, \\ z = z_0 + ua^3 + vb^3. \end{cases}$$

Запишемо рівняння цієї ж площини у векторному вигляді. Вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ являє собою нормальний вектор площини. Отже,

$$\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \right\rangle = 0, \text{ тобто } \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

— рівняння площини, що проходить через точку P_0 і яка паралельна неколінеарним векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. В координатному вигляді останнє рівняння записується так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.1.4 Рівняння площини, що проходить через три точки.

Нехай задано площину в просторі, в якому введено прямокутну декартову систему координат. Нехай точки P_1, P_2, P_3 належать площині і не лежать на одній прямій, $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — радіус-вектор точки P_i, $i = 1, 2, 3$. Тоді вектори $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ і $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$ лежать в одній площині і неколінеарні. Позначимо через $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ радіус-вектор довільної точки площини. Тоді її рівняння можна записати так:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0.$$

Це *рівняння площини, що проходить через три точки.*

В координатному вигляді це рівняння записуєтся наступним чином:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.1.5 Загальне рівняння прямої в просторі.

Нехай в просторі задано пряму. Проведемо через неї дві різні площини: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Тоді рівняння прямої записується у вигляді:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Навпаки, система (2.8) задає деяку пряму в просторі, коли нормальні вектори площин $\boldsymbol{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ і $\boldsymbol{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ неколінеарні, тобто $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \neq \boldsymbol{0}$.

Система рівнянь (2.8) називається *загальними рівняннями прямої в просторі.*

Розглянемо перехід від канонічних рівнянь прямої в просторі до загальних:

$$\frac{x - x_0}{m^1} = \frac{y - y_0}{m^2} = \frac{z - z_0}{m^3}$$

— канонічні рівняння.

Їх можна розглядати як систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m^1} = \frac{y-y_0}{m^2}, \\ \\ \frac{x-x_0}{m^1} = \frac{z-z_0}{m^3}. \end{cases}$$

Одержана система — рівняння прямої в загальному вигляді. Площини, що задають пряму, паралельні осям координат: перша площина паралельна осі Oz, друга — осі Oy.

Розглянемо перехід від рівнянь прямої у загальному вигляді до канонічних рівнянь.

Нехай

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

— загальні рівняння прямої, $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \neq \boldsymbol{0}$. Щоб записати канонічне рівняння прямої, потрібно знати координати точки, що лежить на прямій, і напрямний вектор прямої.

Напрямний вектор ми знаємо: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$. Координати точки, що лежить на прямій, знайдемо, розв'язавши систему рівнянь (2.9). Якщо, наприклад, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, поклавши в (2.9) $z = 0$, знайдемо x_1, y_1, що являють собою розв'язок системи (2.9), і точка $(x_1, y_1, 0)$ — точка, що лежить на прямій.

Приклад. Нехай загальні рівняння прямої є $x = 0, y - 1 = 0$. Запишемо рівняння цієї ж прямої в канонічному вигляді:

$$\boldsymbol{n}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{n}_2 = (0,1,0), \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}.$$

Точка $M(0,1,0)$ лежить на прямій.

Тому

$$\frac{x}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$$

— канонічне рівняння нашої прямої;

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ z = t. \end{cases}$$

— параметричні рівняння прямої.

2.2 Відстань від точки до прямої і площини. Відстань між прямими.

Визначення 2.2.1. *Відстанню від точки до площини (прямої)* називається довжина перпендикуляра, опущеного із даної точки на площину (пряму).

2.2.1 Відстань від точки до площини (прямої на площині).

Нехай у просторі задано площину $n^1x + n^2y + n^3z + c = 0$ (на площині пряму $n^1x + n^2y + c = 0$).

$$\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle = 0$$

— рівняння тієї ж площини (прямої) у векторному вигляді, де

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z), \quad \boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \boldsymbol{n} = (n^1, n^2, n^3),$$

$$\text{або} \quad \boldsymbol{r} = (x, y), \quad \boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \boldsymbol{n} = (n^1, n^2).$$

Нехай $P_1(x_1, y_1, z_1)$ — деяка точка простору ($P_1(x_1, y_1)$ — точка площини); $\boldsymbol{r}_1$ — радіус-вектор точки P_1 (рис. 50).

Нехай нормаль $\boldsymbol{n}$ одинична: $|\boldsymbol{n}| = 1$. Тоді

$$|\overline{P_1P}| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0||\cos\varphi| = |\left\langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle|$$

(де φ — кут між векторами $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ і $\boldsymbol{n}$). Якщо нормаль напрямлена в той же півпростір, в якому лежить точка P_1, то $\cos\varphi > 0$; якщо в протилежний, то $\cos\varphi < 0$.

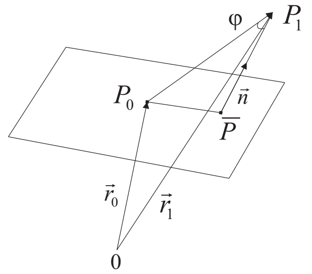


*Рис.*50

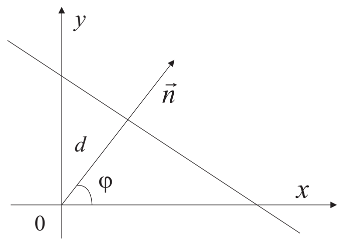


*Рис.*51

Таким чином, відстань від точки до площини (прямої)

$$d = |\big\langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}\,\big\rangle|,$$

якщо $|\boldsymbol{n}| = 1$.

Якщо в рівнянні площини (прямої) $\big\langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}\,\big\rangle = 0$ нормаль $\boldsymbol{n}$ не одинична, то

$$d = \left|\langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\rangle\right|.$$

Для точок півпростору, в який напрямлена нормаль, $h = \langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\rangle > 0$; для другого півпростору $h < 0$; h називається *відхиленням* точки P_1 від площини (прямої), заданої рівнянням $\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}\rangle = 0$.

Повернемося до координатного запису. Відстань d від точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини $n^1x + n^2y + n^3z + c = 0$ дорівнює

$$d = \left|\frac{n^1x_1 + n^2y_1 + n^3z_1 + c}{\sqrt{(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2}}\right|.$$

Аналогічно відстань від точки $P_1(x_1, y_1)$ до прямої $n^1x + n^2y + c = 0$ на площині

$$d = \left|\frac{n^1x_1 + n^2y_1 + c}{\sqrt{(n^1)^2 + (n^2)^2}}\right|.$$

Приклад. Знайти відхилення початку координат O від площини $x + y + z - 1 = 0$ і відстань від O до цієї площини.

Розв'язування. Початок координат $O(0, 0, 0)$, відхилення

$$h = \frac{x_1 + y_1 + z_1 - 1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0,$$

відстань

$$d = |\frac{x_1 + y_1 + z_1 - 1}{\sqrt{3}}| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Нехай $n^1x + n^2y + h = 0$ — загальне рівняння прямої на площині, причому $(n^1)^2 + (n^2)^2 = 1$. Тоді $n^1 = \cos\varphi$, $n^2 = \sin\varphi$ (рис. 51). Напрямимо нормаль у ту півплощину, де не лежить початок координат. Тоді відхилення h початку координат від прямої від'ємне. Позначимо через d відстань від початку координат до прямої, $d = -h$.

Рівняння $x\cos\varphi + y\sin\varphi = d$ називається *нормальним рівнянням прямої.*

Розглянемо площину $n^1x+n^2y+n^3z+h = 0$, де $(n^1)^2+(n^2)^2+(n^3)^2 = 1$. Якщо нормаль напрямлена у півпростір, що не має в собі початку координат, то відхилення початку координат $O(0,0,0)$ від площини $h < 0$. Позначимо через d відстань від точки $O(0,0,0)$ до площини, $d = -h$, $d > 0$. Якщо φ_1, φ_2, φ_3 — кути, які утворює нормаль відповідно з осями Ox, Oy, Oz, то $n^1 = \cos\varphi_1$, $n^2 = \cos\varphi_2$, $n^3 = \cos\varphi_3$. Рівняння $x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_2 + z\cos\varphi_3 = d$ називається *нормальним рівнянням площини.*

Зауваження. *Щоб знайти відстань між паралельними площинами (прямими), потрібно взяти довільну точку однієї площини (прямої) і знайти її відстань до другої площини (прямої).*

2.2.2 Відстань від точки до прямої в просторі.

Нехай у просторі задано пряму з напрямним вектором $\boldsymbol{a}$ і точку P_1 з радіус-вектором $\boldsymbol{r}_1$ (рис. 52). Знайдемо відстань d від точки P_1 до прямої. Нехай P_0 — деяка точка на прямій, $\boldsymbol{r}_0$ — радіус-вектор точки P_0. Площа паралелограма, натягненого на вектори $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$ дорівнює $|\boldsymbol{a}| \cdot d = |(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{a}|$ (рис. 52). Звідси

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

2.2.3 Відстань між мимобіжними прямими.

Мимобіжними називаються прямі, які не паралельні і не перетинаються.

Відстанню d між мимобіжними прямими l_1 і l_2 називається

$$d = \inf_{P \in l_1,\ Q \in l_2} |PQ|$$

Зауваження. *Відстань між двома множинами не завжди досягається. Якщо точка P належить гіперболі, а точка Q — асимптоті, то* $\inf|PQ| = 0$, *але не існує точок, де ця відстань досягається.*

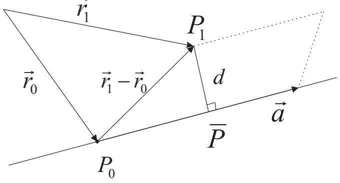


*Рис.*52

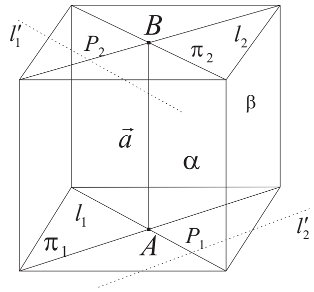


*Рис.*53

Повернемося до мимобіжних прямих l_1, l_2. Нехай $P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$. Через точку P_1 проведемо пряму l_2', паралельну прямій l_2. Через прямі l_1, l_2' проведемо площину π_1. Через точку P_2 проведемо пряму l_1', паралельну прямій l_1, а через прямі l_2, l_1' — площину π_2. Площини π_1 і π_2 паралельні (рис. 53). Відстань між цими паралельними площинами π_1 і π_2 є відстань між мимобіжними прямими l_1, l_2.

Через пряму l_1 і нормаль $\boldsymbol{n}$ до площини π_1 проведемо площину α. Через пряму l_2 і нормаль $\boldsymbol{n}$ проведемо площину β. Площини α і β перетинаються по прямій a, яка перетинає пряму l_1 в точці A, пряму l_2 — в точці B. Пряма a перпендикулярна до паралельних площини π_1 і π_2, отже, пряма a перпендикулярна до прямих l_1 і l_2.

Доведемо, що довжина відрізка AB є відстань між мимобіжними прямими l_1, l_2. Введемо у просторі прямокутну систему координат наступним чином. Точку A приймемо за початок координат, вісь x напрямимо по прямій l_1, площину π_1 приймемо за координатну площину xy, додатний напрям осі z задамо вектором $\overline{AB}$. Тоді точки прямої l_1 мають координати $(t, 0, 0)$, при $t = 0$ одержуємо точку A. Точки прямої l_2 мають координати $(\alpha\tau, \beta\tau, c)$, де $c = |AB|$, при $\tau = 0$ одержимо точку B. Оскільки l_1, l_2 — мимобіжні прямі, $\beta \neq 0$.

Відстань між довільними точками прямих l_1 і l_2 задовольняє нерівності $\sqrt{(\alpha\tau - t)^2 + (\beta\tau)^2 + c^2} \geqslant c = |AB|$, причому рівність досягається лише коли $\alpha\tau - t = 0$, $\beta\tau = 0$, тобто коли $\tau = t = 0$. Таким чином, відстань між прямими l_1, l_2 досягається в точках A і B.

Нехай $\boldsymbol{r}_1$ — радіус-вектор точки P_1, $\boldsymbol{r}_2$ — радіус-вектор точки P_2, $\boldsymbol{e}$ — напрямний вектор прямої l_1, $\boldsymbol{f}$ — напрямний вектор прямої l_2. Розглянемо паралелепіпед натягнутий на вектори $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ (рис. 54).

Об'єм паралелепіпеда можна обчислити двома способами:

$$V = |(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})|, \quad V = S_{osn}h,$$

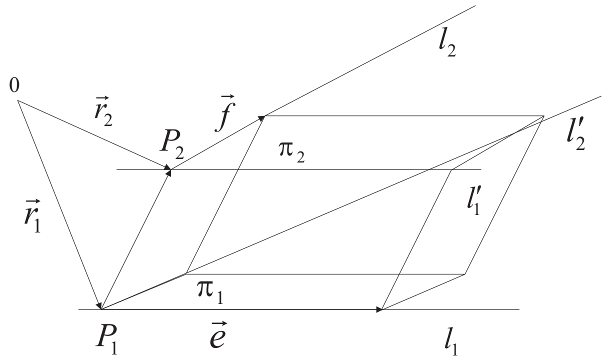


*Рис.*54

де $S_{osn} = |\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}|$, $h = d$.

Звідси

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})|}{|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}|}.$$

Вправа. Записати останню формулу в координатному вигляді.

2.2.4 Рівняння загального перпендикуляру двох мимобіжних прямих.

Загальний перпендикуляр до мимобіжних прямих l_1 і l_2 — це пряма перетину площин α і β. Рівняння площини α буде

$$\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}) \times \boldsymbol{e} \right\rangle = 0,$$

оскільки $(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}) \times \boldsymbol{e}$ — вектор нормалі до площини α і площина проходить через точку P_1.

Аналогічно рівняння площини β буде $\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}) \times \boldsymbol{f} \right\rangle = 0$.

Отже, рівняння загального перпендикуляру до мимобіжних прямих є

$$\begin{cases} \left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}) \times \boldsymbol{e} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}) \times \boldsymbol{f} \right\rangle = 0. \end{cases}$$

За допомогою змішанного добутку ці рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{cases} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{e}) = 0, \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, \quad \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{f}) = 0. \end{cases}$$

2.3 Кути між прямими і площинами.

2.3.1 Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Нехай у просторі задано дві прямі l_1, l_2. Перенесемо паралельно прямі l_1, l_2 так, щоб їх образи l'_1, l'_2 проходили через початок координат. *Кутом φ між прямими* l_1, l_2 називається менший з кутів, що утворені прямими l'_1, l'_2, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Якщо $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2, b^3)$ — напрямні вектори прямих l_1, l_2, то

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ — умова перпендикулярності прямих; $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ — умова паралельності прямих (окремий випадок паралельності — співпадання прямих).

2.3.2 Кут між площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин.

Кутом між площинами $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ називається кут φ між їх нормалями:

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|},$$

де $\boldsymbol{n}_i = (a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1, 2)$ — напрямний вектор нормалі, $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle = 0$ — умова перпендикулярності площин; $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = 0$ — умова паралельності площин.

Вправа. Записати умови збіжності площин, заданих рівностями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Зауважимо, що коли $z = 0$, одержимо умову збіжності прямих на площині.

2.3.3 Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Кутом між прямою і площиною називається кут $\frac{\pi}{2} - \varphi$, де φ — кут між нормаллю до площини і прямою.

Нехай $\boldsymbol{n} = (n^1, n^2, n^3)$ — вектор нормалі до площини, $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ — напрямний вектор прямої. Кут β між прямою і площиною знаходимо з умови

$$\sin\beta = \frac{|\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a} \rangle|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{a}|},$$

$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ — умова паралельності прямої і площини(окремий випадок паралельності — пряма лежить в площині); $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} = 0$ — умова перпендикулярності прямої і площини.

2.4 Жмуток прямих (площин). В'язка прямих (площин).

Жмуток прямих на площині — сукупність всіх прямих, що проходять через фіксовану точку.

Жмуток площин в просторі — сукупність всіх площин, що проходять через фіксовану пряму.

В'язка прямих в просторі — сукупність всіх прямих, що проходять через фіксовану точку.

В'язка площин в просторі — сукупність всіх площин, що проходять через фіксовану точку.

Розглянемо жмуток прямих на площині (рис. 55).

Нехай $a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ — дві неспівпадаючі прямі жмутка; $\boldsymbol{n}_1 = (a_1, b_1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (a_2, b_2)$ — вектори їх нормалей; P_0 — точка перетину прямих. Будь-яка пряма жмутка задається рівнянням

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \tag{2.10}$$

де

$$\lambda_1, \lambda_2 \in R; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0.$$

Доведення. Рівняння (2.10) лінійне, отже, це рівняння деякої прямої на площині. Координати точки P_0 задовольняють рівнянню (2.10), тому що вони задовольняють рівнянням $a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2 = 0$, отже, пряма (2.10) є пряма жмутка. Покажемо, що рівняння (2.10) задає всі прямі жмутка, коли λ_1, λ_2 пробігають дійсні значення, які одночасно не дорівнюють нулю. Вектор $\boldsymbol{n} = \lambda_1\boldsymbol{n}_1 + \lambda_2\boldsymbol{n}_2$ — вектор нормалі прямої (2.10); вектори $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ утворюють базис площини, отже, кожен вектор площини є лінійна комбінація цих векторів. Якщо λ_1, λ_2 пробігають всі можливі значення, то $\boldsymbol{n}$ пробігає всі вектори площини. Таким чином, рівняння (2.10) задає всі прямі жмутка.

■

Жмуток прямих на площині — однопараметрична множина прямих.

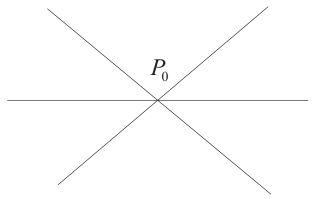


*Рис.*55

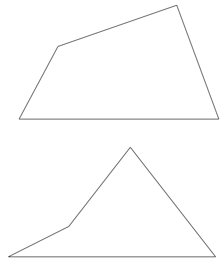


*Рис.*56

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x+y=1$, $2x+3y=2$ перпендикулярно до прямої $x+y=0$.

Розв'язування. $\lambda_1(x+y-1)+\lambda_2(2x+3y-2)=0$ — всі прямі, що проходять через точку перетину прямих $x+y=1$, $2x+3y=2$. Виберемо із цього жмутка пряму, що перпендикулярна до прямої $x+y=0$. Умова перпендикулярності — $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle = 0$, де $\boldsymbol{n}_1 = (\lambda_1+2\lambda_2, \lambda_1+3\lambda_2)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1,1)$. Звідси $\lambda_1 = -\frac{5}{2}\lambda_2$. Після підстановки λ_1 в рівняння жмутка одержимо шукане рівняння: $x-y=1$.

Самостійно розглянути жмуток площин в просторі.

Розглянемо в'язку прямих в просторі.

Нехай $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, через яку проходять всі прямі в'язки; $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ — одиничний напрямний вектор прямої. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} x = x_0 + a^1 t, \\ y = y_0 + a^2 t, \\ z = z_0 + a^3 t. \end{cases}$$

де a^i приймають всі можливі значення $(i = 1, 2, 3)$, але такі, що

$$(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 1,$$

задає в'язку прямих в просторі. В'язка прямих в просторі — двопараметрична множина.

Самостійно розглянути в'язку площин в просторі.

Розділ 3

Опуклі множини

3.1 Приклади опуклих множин.

Опуклою множиною на площині чи в просторі називається така множина, яка разом з довільними двома різними точками, що належать множині, має в собі відрізок, що їх з'єднує.

Приклади.

1. Відрізок є опукла множина.
2. Трикутник є опукла множина. Тілесний трикутник — фігура, що складається із трикутника і обмеженої ним частини площини.
3. Чотирикутник може бути опуклим або неопуклим (рис. 56).

Введемо деякі топологічні поняття.

Околом точки на площині називається внутрішність кола з центром у цій точці. *Околом точки в просторі* називається внутрішність кулі із центром у цій точці.

Точка P називається *граничною* точкою деякої множини M, коли в будь-якому околі цієї точки є як точки, що належать M, так і точки, що M не належать.

Множина, що має в собі всі граничні точки, називається *замкненою.*

Точка називається *внутрішньою* точкою множини, якщо разом з нею множині належить деякий її окіл.

Множина, всі точки якої суть внутрішні, називається *відкритою.*

Порожня множина вважається відкритою.

Далі ми будемо розглядати опуклі множини, які є або відкритими, або замкненими.

Приклади.

1. Розглянемо круг. Точки круга, що не належать колу, яке його обмежує, є внутрішні точки.

2. Внутрішність квадрата з двома суміжними вершинами, очевидно, не буде опуклою множиною.

Сукупність граничних точок утворює *границю* множини.

Множина називається *обмеженою*, коли вона розміщується в деякій кулі досить великого радіуса.

Нехай задано дві точки P_1 і P_2 з радіус-векторами відповідно $\boldsymbol{r}_1$ і $\boldsymbol{r}_2$. Рівняння прямої, що проходить через точки P_1, P_2

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Якщо $t = 0$, то $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1$, якщо $t = 1$, то $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$. Отже, рівняння відрізка P_1P_2 буде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Перепишемо останнє рівняння в більш симетричній формі. Для цього введемо позначення: $1 - t = \lambda_1$, $t = \lambda_2$. Рівняння (3.1) набуде вигляду

$$\boldsymbol{r} = \lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ і $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Якщо в точках P_1, P_2 розташувати відповідно маси λ_1, λ_2, де $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то $\boldsymbol{r} = \lambda_1 \boldsymbol{r}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{r}_2$ — радіус-вектор центра мас. Міняючи маси λ_1, λ_2, але лишаючи $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, одержимо, що центр мас пробігає всі точки відрізка P_1P_2.

Нагадаємо, що для заданної прямої на площині дві точки лежать в одній півплощині тоді і тільки тоді, коли відрізок, що з'єднує ці точки, не перетинає задану пряму.

Доведемо, що *півплощина і півпростір є опуклі множини.* Пряма на площині (площина в просторі) задається рівнянням $\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle = 0$. Півплощину (півпростір) можна задати нерівностями $\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle \geqslant 0$. Нехай точки P_1, P_2 з радіус-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ належать нашій множині.

Тоді $\left\langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle \geqslant 0$ і $\left\langle \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle \geqslant 0$. Потрібно довести, що кожна точка відрізка P_1P_2 належить нашій множині, тобто її радіус-вектор задовольняє нерівності $\left\langle \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle \geqslant 0$.

Радіус-вектор довільної точки відрізка P_1P_2 має вигляд $\boldsymbol{r} = \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2$, де $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ і $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Розглянемо вираз

$$\left\langle \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{n} \right\rangle = \left\langle \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{n} \right\rangle =$$

$$= \lambda_1\left\langle \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle + \lambda_2\left\langle \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n} \right\rangle \geqslant 0,$$

це і значить, що точки відрізка лежать на півплощині (на півпросторі).

Перетином множин U_1 і U_2 (позначається через $U_1 \bigcap U_2$) називається сукупність точок, що належать множині U_1 і множині U_2.

Лема 3.1.1. *Перетин опуклих множин — опукла множина.*

Доведення. Нехай V_1, V_2 — опуклі множини. Нехай точки P, Q належать множині $V_1 \bigcap V_2$, тобто $P \in V_1$ і $P \in V_2$, $Q \in V_1$ і $Q \in V_2$. Тому відрізок PQ належить і V_1 і V_2, тобто належить перетину.

■

Із леми 3.1.1 випливає, що множина, координати точок якої задовольняють системі нерівностей

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ - - - - - - - - - - - - \\ a_ix + b_iy + c_iz + d_i \geqslant 0 \end{array} \right.$$

є опуклою, оскільки кожна нерівність $a_kx + b_ky + c_kz + d_k \geqslant 0$ задає півпростір і множина є перетин цих півпросторів.

Приклади.

1. Пряма, промінь, відрізок — це всі опуклі множини на прямій.

2. Розглянемо всі опуклі множини площини, які задаються системою нерівностей

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

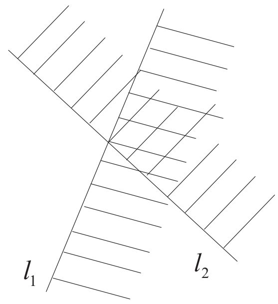


*Рис.*57

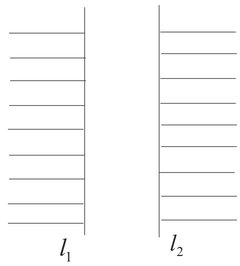


*Рис.*58

1. Прямі l_1, l_2, що задані відповідно рівностями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, перетинаються. Розв'язок системи (3.2) — тілесний кут (рис. 57).

2. Прямі l_1, l_2 паралельні і не збігаються. Тоді можливі три випадки:

   а) розв'язок системи (3.2) — пуста множина (рис. 58);

   б) розв'язок системи (3.2) — півплощина (рис. 59);

   в) розв'язок системи (3.2) — полоса (рис. 60).

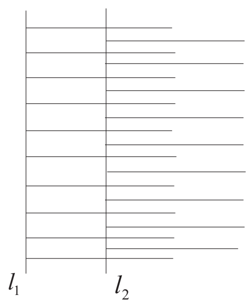


*Рис.*59

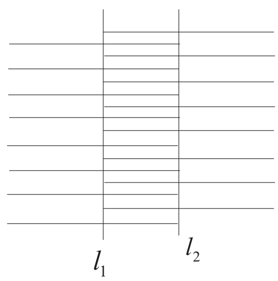


*Рис.*60

3. Прямі l_1, l_2 збігаються. Можливі два випадки:

   а) розв'язок системи (3.2) — півплощина (рис. 61);

   б) розв'язок системи (3.2) — пряма (рис. 62).

Вправи.

1. Які множини на площині можуть бути розв'язками системи $a_ix+b_iy+c_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$?

2. Які множини в просторі можуть бути розв'язками системи

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2;\ i = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3, 4)?$$

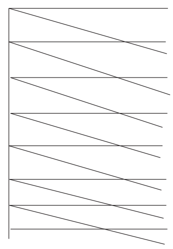


*Рис.*61

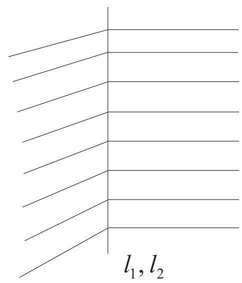


*Рис.*62

Нехай X і Y — деякі множини на площині (в просторі).

Околом $U_\delta(P)$ *точки* P *множини* X називається перетин відкритого круга (відкритої кулі) $D_\delta(P)$ радіуса δ із центром в точці P з множиною X, тобто $U_\delta(P) = D_\delta(P) \cap X$.

Відображення f називається *неперервним у точці* P, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : f(U_\delta(P)) \subset U_\varepsilon(f(P)).$$

Відображення, неперервне в кожній точці своєї області визначення, називається *неперервним.*

Відображення $f : X \to Y$ називається *гомеоморфізмом* (або *топологічним*), якщо: 1) f — взаємно-однозначне, 2) f і f^{-1} — неперервні відображення.

Вправа. Показати, що відношення гомеоморфності є відношенням еквівалентності.

Приклад. Покажемо, що відкритий інтервал гомеоморфний прямій.

1. Відкритий інтервал гомеоморфний відкритому півколу. Відображення можна задати, наприклад, так: $x = \cos t, \quad y = \sin t$ $(0 < t < \pi)$. Самостійно довести, що виписані формули задають гомеоморфізм.

2. Відкрите півколо гомеоморфне прямій. Відображення задається так, як показано на рис. 63: $f(P) = Q$. Самостійно довести, що f — гомеоморфізм.

Оскільки відношення гомеоморфності є транзитивним, то з 1.2. випливає, що відкритий інтервал гомеоморфний прямій.

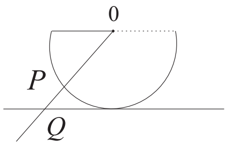


*Рис.*63

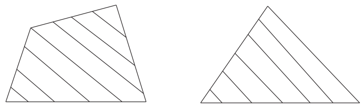


*Рис.*64

Вправа. Довести, що внутрішність круга гомеоморфна площині.

Вказівка. Відобразити внутрішність круга на відкриту півсферу, потім відобразити відкриту півсферу на площину.

Зауваження. *В елементарній геометрії рівні фігури — це фігури, які суміщаються рухом. У топології множини топологічно еквівалентні, коли вони гомеоморфні. Це (як і будь-яке інше) відношення еквівалентності визначає розбиття множин, що розглядаються, на класи, що не перетинаються.*

Опуклою кривою на площині називається границя опуклої множини, що має внутрішні точки. *Опуклою поверхнею* називається границя опуклої множини, що має внутрішні точки в просторі.

Зауваження. *Границя опуклої множини не завжди є опукла множина.*

Вправа. Знайти всі різні топологічні типи опуклих кривих на площині, опуклих поверхонь в просторі. Криві, поверхні належать одному топологічному типу, коли вони гомеоморфні між собою.

3.2 Опукла оболонка.

Опуклою оболонкою множини M (позначається через $\mathrm{conv}M$) називається перетин усіх опуклих множин, що містять в собі M, тобто $\mathrm{conv}M$ — це така опукла множина, яка лежить в будь-якій опуклій множині, що має в собі M.

Приклади.

1. M — дві точки A і B; $\mathrm{conv}M$ — відрізок AB.

2. M — три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій; $\mathrm{conv}M$ — тілесний трикутник ABC.

3. M — чотири точки площини, ніякі три з яких не лежать на одній прямій; conv$M$ — або опуклий тілесний чотирикутник, або тілесний трикутник (рис. 64).

4. M — коло і точка A, що лежить поза колом; conv$M$ зображена на рис. 65, де AB і AC — дотичні до кола.

5. M — коло і точки A, B, розташовані в різних півпросторах відносно площини, в якій лежить коло; conv$M$ — два тілесних конуси, що склеєні основами, якщо основи перпендикулярів, що опущені з точок A, B на площину кола, попадають в середину круга (рис. 66).

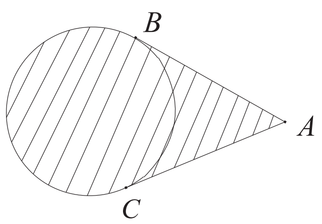


*Рис.*65

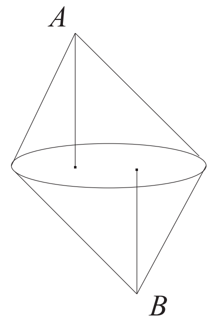


*Рис.*66

Нехай M — опукла множина, A — точка. *Конусом* з вершиною в точці A і основою M (позначається через $C(M, A)$) називається сукупність всіх відрізків, що з'єднують точку A з точками множини M.

Лема 3.2.1. *Якщо M — опукла множина, то опукла оболонка множини, що складається з множини M і точки A, є конус $C(M, A)$, тобто*

$$conv(M, A) = C(M, A).$$

Доведення. Конус $C(M, A)$ лежить в опуклій оболонці, оскільки M і A належать опуклій оболонці, а тому відрізки, що з'єднують точку A з точками множини M, також належать опуклій оболонці.

Лишилося показати, що конус $C(M, A)$ — опукла множина. Нехай P, Q — довільні точки конуса $C(M, A)$. Значить, P, Q лежать на відрізках, що з'єднують точку A з точками $\overline{P}$, $\overline{Q}$ множини M (рис. 67). Але множина M опукла, тому відрізок PQ належить M. Відрізки, що з'єднують точку A з точками відрізка $\overline{P}\,\overline{Q}$, належать конусу $C(M, A)$, отже, тілесний трикутник $\overline{P}A\overline{Q}$ належить $C(M, A)$, таким чином, відрізок PQ

належить конусу $C(M, A)$. Оскільки конус $C(M, A)$ — опукла множина, він має в собі опуклу оболонку. Таким чином, конус $C(M, A)$ є опукла оболонка.

■

Нехай на площині або в просторі є скінченна кількість точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з радіус-векторами відповідно $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$. Знайдемо опуклу оболонку цієї множини точок; тобто, знаючи $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, знайдемо $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор будь-якої точки опуклої оболонки точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Згадаємо, що рівняння відрізка A_1A_2 є $\boldsymbol{r} = \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Кажучи іншими словами, остання рівність задає радіус-вектор довільної точки опуклої оболонки двох точок A_1, A_2.

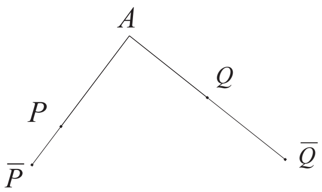


*Рис.*67

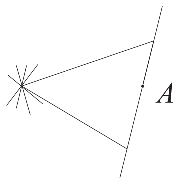


*Рис.*68

Теорема 3.2.1. *Опуклою оболонкою скінченної кількості точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ буде множина точок, радіус-вектор яких може бути записаний у вигляді*

$$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{r}_n,$$

де $\lambda_i \geqslant 0, \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції.

1) Для $n = 2$ твердження справедливе, оскільки рівняння відрізка A_1A_2 — опуклої оболонки точок A_1, A_2, є $\boldsymbol{r} = \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \lambda_2\boldsymbol{r}_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

2) Припустимо, що твердження правильне для $n-1$ точок $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, тобто
$$\boldsymbol{R} = \mu_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + \mu_{n-1}\boldsymbol{r}_{n-1} \tag{3.3}$$
$$(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1} \geqslant 0, \ \mu_1 + \ldots + \mu_{n-1} = 1),$$
де $\boldsymbol{R}$ — радіус-вектор довільної точки опуклої оболонки точок $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Доведемо, що твердження правильне для n точок $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Нехай $\operatorname{conv}(A_1, \ldots, A_{n-1}) = M$.

За лемою 3.2.3. $\mathrm{conv}(M, A_n) = C(M, A_n)$. Нехай $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор деякої точки конуса. Тоді $\boldsymbol{r} = \alpha\boldsymbol{R} + \beta\boldsymbol{r}_n$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Підставимо в останню рівність вираз (3.3). Одержимо

$$\boldsymbol{r} = \alpha(\mu_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + \mu_{n-1}\boldsymbol{r}_{n-1}) + \beta\boldsymbol{r}_n.$$

Позначимо: $\alpha\mu_1 = \lambda_1, \ldots, \alpha\mu_{n-1} = \lambda_{n-1}$, $\beta = \lambda_n$. Тоді

$$\boldsymbol{r} = \lambda_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{r}_n, \quad \lambda i \ \geqslant \ 0 \ \ (i = 1, \ldots, n);$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_{n-1} = \alpha(\mu_1 + \ldots + \mu_{n-1}) + \beta = \alpha + \beta = 1.$$

Таким чином, із правильності твердження для $k = n - 1$ випливає його істинність для $k = n$. Отже, твердження теореми справедливе для будь-якого $n \geqslant 2$.

■

Механічний зміст опуклої оболонки. Якщо в точках $A_1, \ldots, A_n$ розташувати маси $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ відповідно, то точка A з радіус-вектором $\boldsymbol{r}$ — центр мас точок $A_1, \ldots, A_n$.

Опуклою оболонкою скінченної кількості точок $A_1(\boldsymbol{r}_1), \ldots, A_n(\boldsymbol{r}_n)$ є геометричне місце центрів будь-яких розподілень мас $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, що розташовані в цих точках, якщо $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$.

3.3 Опорна пряма та опорна площина.

Нехай M — опукла множина на площині.

Визначення 3.3.1. *Опорною прямою множини M називаеться така пряма, яка*

1. *має з межею множини M спільні точки;*

2. *M повністю лежить в замкненій півплощині, що обмежена цією прямою.*

Самостійно дати визначення опорної площини множини, розташованої в просторі.

Приклад. Нехай M — тілесний трикутник, що зображено на рис. 68. Через точку A проходить єдина опорна пряма. Через вершини трикутників проходить нескінченно багато опорних прямих (рис. 68).

Теорема 3.3.1. *Через кожну межову точку опуклої множини на площині (в просторі) проходить опорна пряма (площина).*

Доведення. Розглянемо випадок площини. Нехай P — деяка фіксована межова точка опуклої множини M. Розглянемо сукупність усіх променів, що виходять з точки P і проходять через внутрішні точки множини M (рис. 69). Назвемо цю сукупність променів конусом CP.

Доведемо, що множина CP опукла. Нехай промені l_1, l_2 належать CP, на цих променях розташовані точки Q_1, Q_2 — внутрішні точки множини M. Оскільки M — опукла множина, відрізок Q_1Q_2 належить M; оскільки Q_1, Q_2 — внутрішні точки M, то круги досить малого радіуса з центрами в точках Q_1, Q_2 належать M; оскільки M — опукла множина, то досить вузька смуга, всередині якої розташований відрізок Q_1Q_2, належить M. Значить, всі точки відрізка Q_1Q_2 є внутрішні точки множини M, отже, конусу CP належать всі промені, які проходять через точку P і точки відрізка Q_1Q_2, тобто тілесний плоский кут Q_1PQ_2 належить CP. Таким чином, якщо довільні точки X_1, X_2 належать CP, то тілесний кут X_1PX_2 належить CP, отже, відрізок X_1X_2 належить CP, і опуклість CP доведено.

Оскільки CP — опуклий кут на площині та менше або дорівнює π. Таким чином, множина M лежить у опуклому куті CP з вершиною в точці P. Через вершину кута, який менше або дорівнює π, проходить опорна пряма l. Вона є опорною прямою множини M в точці P (рис. 70). Самостійно довести теорему для просторового випадку.

■

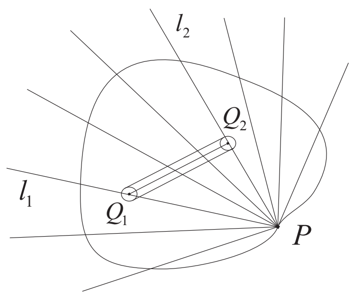


*Рис.*69

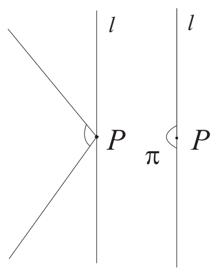


*Рис.*70

Наведена теорема при природних обмеженнях допускає обернення.

Теорема 3.3.2. *Замкнена множина M на площині (в просторі) з непустою внутрішністю, у якої через кожну межову точку проходить хоча б одна опорна пряма (площина), є опуклою.*

Доведення. Розглянемо плоский випадок. Кожна опорна пряма множини M визначає замкнену півплощину, що має в собі M. Нехай $\overline{M}$ — перетин всіх таких півплощин; $\overline{M}$ — замкнена, опукла множина, що має в собі M. Покажемо, що M і $\overline{M}$ співпадають. Припустимо протилежне. Нехай точка P_1 належить $\overline{M}$, але не належить M, P_2 — внутрішня точка M. Всередині відрізка P_1P_2 є межова точка P_0 множини M. За умовою теореми через P_0 проходить опорна пряма l_0, яка не співпадає з прямою P_1P_2. Множина M лежить у замкненій півплощині, що визначається прямою l_0 і якій належить точка P_2. За визначенням множини $\overline{M}$ вона лежить у тій же півплощині. Ми прийшли до суперечності з припущенням, що точка P_1 належить $\overline{M}$ і не належить M.

■

Доведення в просторовому випадку практично дослівно повторює сказане. Із доведених теорем випливає, що опуклі множини можна визначити двома способами.

I. Множина M опукла, якщо з того, що точки P, Q належать M, випливає, що відрізок PQ лежить в M.

II. Замкнена множина M опукла, коли через кожну межову точку проходить опорна пряма (площина).

Півплощина задається лінійною нерівністю. Система лінійних нерівностей задає опуклу множину. Навпаки, кожна замкнена опукла множина на площині може бути задана системою нерівностей (взагалі кажучи, нескінченною).

Приклад. Круг не можна задати скінченною кількістю лінійних нерівностей.

Нехай $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — довільний базис в тривимірному евклідовому просторі, утворений одиничними векторами;

$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}, \quad \boldsymbol{e}^3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}$$

— дуальний базис.

Дуальність базисів відповідає двом способам задання опуклих множин.

Розглянемо тригранний тілесний кут, який утворено базисними одиничними векторами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Цей тілесний кут на одиничній сфері із центром у вершині кута вирізає сферичний трикутник, сторонами якого є дуги великіх кіл, які є перетином сфери з гранями тригранного кута.

Дуги великих кіл на сфері грають ту ж роль, що й прямі на площині. Найкоротша лінія, що з'єднує дві точки на площині, — відрізок; на сфері — менша з дуг великого кола. *Множина на сфері* називається *опуклою*, якщо з будь-якими точками множині належить менша з дуг великого кола, що з'єднує ці дві точки.

Сферичний трикутник — опуклий. Розглянемо плоский трикутник. Його можна задати трьома точками — вершинами трикутника, а можна трьома сторонами, які є опорними прямими трикутника.

Нехай сферичний трикутник задано вершинами. Задамо його опорними прямими — дугами великих кіл. Опорні прямі — перетин сфери з гранями тригранного кута, утвореного векторами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Кожному великому колу можна поставити у відповідність пару точок наступним чином: через центр сфери проводимо пряму, перпендикулярну до площини, в якій лежить велике коло; ця пряма перетне сферу в двох діаметрально протилежних точках; ці точки і ставимо у відповідність великому колу.

Отже, якщо грань тригранного кута задана векторами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, то одна із дуальних точок — це точка перетину променя, що проходить через центр сфери в напрямі вектора $\boldsymbol{e}^3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)}$ зі сферою. Аналогічно для інших граней.

Таким чином, знаючи базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, ми одержали дуальний базис $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$ так: від задання трикутника через вершини перейшли до задання його через опорні прямі.

3.3.1 Зв'язок між опуклими множинами і опуклими функціями.

Функція $y = f(t)$ називається *опуклою*, коли

$$f(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) \leqslant \lambda_1 f(t_1) + \lambda_2 f(t_2),$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, для будь-яких t_1, t_2, тобто функція називається *опуклою*, якщо будь-яка хорда графіка функції лежить над графіком.

Функція $y = f(t)$ називається *увігнутою*, коли

$$f(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) \geqslant \lambda_1 f(t_1) + \lambda_2 f(t_2),$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, для будь-яких t_1, t_2.

Вправа. Довести, що множини M_1, M_2 — опуклі, де

$M_1 : \begin{cases} y \geqslant f(t), \\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \end{cases}$ $\quad y = f(t)$ — деяка опукла функція;

$M_2\ :\ \begin{cases} y \geqslant g(t), \\ y \leqslant kt+b, \end{cases}$ $y = g(t)$ — деяка опукла функція, $k, b \in R$ (рис. 71).

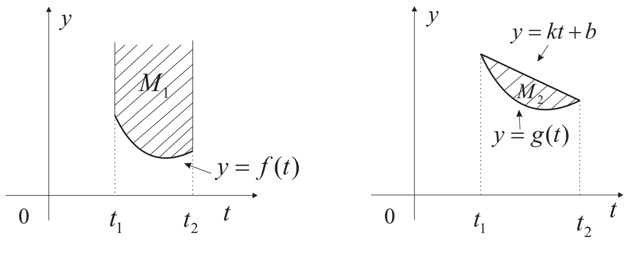


*Рис.*71

Розглянемо замкнену обмежену опуклу множину M на площині. Нехай P_0 — довільна точка границі множини, l — опорна пряма, що проходить через точку P_0. Введемо на площині прямокутну систему координат так, що вісь t паралельна прямій l. Будемо проводити прямі, які перпендикулярні до прямої l. Знайдуться межові точки Q_0, R_0, множини M, такі, що прямі, перпендикулярні до прямої l і які проходять через точки Q_0, R_0, — опорні прямі для множини M.

У загальному випадку перетини опорних прямих з опуклою множиною можуть складатися з відрізків. Але будь-яким завгодно малим поворотом пряму l можна перевести в пряму l', таку, що перпендикулярні до неї опорні прямі мають з фігурою тільки по одній спільній точці.

Межа L опуклої множини M точками Q_0, R_0 ділиться на дві частини, кожну з яких прямі, паралельні осі y, перетинають в одній точці; отже, кожну частину межі L можна вважати графіком деякої функції. Нехай це будуть функції $y = f(t)$ і $y = g(t)$ (рис. 72). Функція $y = f(t)$ є опуклою, а функція $y = g(t)$ — увігнутою.

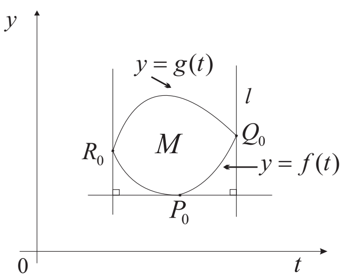


*Рис.*72

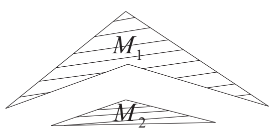


*Рис.*73

Вправа.

1. Якщо є функція $y = f(t)$ класу C^2, тобто у функції існують перша і друга похідна, така, що $f'' \geqslant 0$, то функція опукла.

2. Якщо функція $y = f(t)$ — опукла і класу C^2, то $f'' \geqslant 0$.

3. Якщо функція $y = f(t)$ належить класу C^2 і $f'' \leqslant 0$, то функція увігнута.

4. Якщо функція $y = f(t)$ є увігнута і належить класу C^2, то $f'' \leqslant 0$.

   Довести.

3.4 Відділимість опуклих множин.

Нехай M_1, M_2 — опуклі множини, що не перетинаються на площині, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. З'ясуємо, коли існує пряма, що відділяє множини, тобто така пряма, що M_1 лежить в одній відкритій півплощині, що визначається цією прямою, а M_2 — в другій.

Приклади.

1. M_1 (рис. 73) не є опукла, і прямої, що відділяє множини M_1 і M_2, немає.

2. M_1 — внутрішність круга; M_2 — опорна пряма круга з межею: $M_1 \cap M_2 = \varnothing$; M_1 і M_2 — опуклі множини. Прямої, що відділяє M_1 і M_2, не існує (рис. 74).

3. $M_1 : \left\{ \begin{array}{l} y \geqslant \frac{1}{x}, \\ x > 0; \end{array} \right. \quad M_2 : y \leqslant 0;$

   $M_1 \cap M_2 = \varnothing$; множини M_1 і M_2 опуклі і замкнені. Прямої, що відділяє M_1 і M_2, немає (рис. 75).

Теорема 3.4.1. *Нехай M_1, M_2 — замкнені опуклі множини, що не перетинаються на площині, одна з яких обмежена. Тоді M_1, M_2 відділимі, тобто існує така пряма на площині, що M_1 і M_2 лежать в різних відкритих півплощинах, що визначаються цією прямою.*

Відстань ρ між довільними множинами M_1, M_2 обчислюється за формулою

$$\rho(M_1, M_2) = \inf_{X \in M_1, Y \in M_2} |XY|.$$

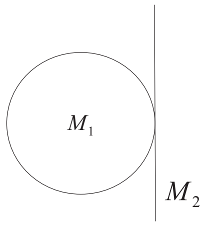


*Рис.*74

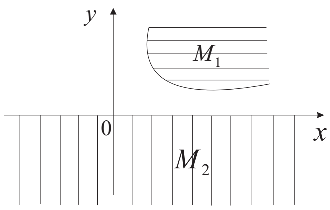


*Рис.*75

Зауважимо, що раніше ми так само визначали відстань від точки до прямої і площини, відстань між прямими.

Вернемося до розглянутих вище прикладів. В прикладах 2 і 3 відстань між множинами M_1, M_2 дорівнює нулю, але вона не досягається ні в якій парі точок. Вимоги теореми забезпечують те, що відстань між множинами досягається на деякій парі точок. Приклад 1 показує, що вимога опуклості множини істотна: відстань між множинами M_1 і M_2 досягається на деякій парі точок, але множини не відділимі, оскільки M_1 — неопукла множина.

Доведення. Нехай точка $X(x_1, x_2) \in M_1$, точка $Y(y_1, y_2) \in M_2$. Розглянемо функцію чотирьох змінних

$$f(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

тобто $f(X, Y) = |XY|$.

Доведення проведемо для випадку, коли M_1 і M_2 — обмежені множини.

Загальний випадок, сформульований у теоремі, зводиться до цього випадку, оскільки у випадку необмежності множини M_2 при наближенні точки Y до нескінченності, значення функції f прямує до нескінченності.

Згадаємо **теорему Веєрштраса**: *неперервна функція $y = f(x)$, що задана на відрізку, досягає свого найбільшого і найменшого значень.*

Істинне також твердження, аналогічне теоремі Веєрштраса: неперервна функція кількох змінних, що задана на обмеженій замкненій множині, досягає свого найбільшого та найменшого значень.

Отже, існують точка $X_0 \in M_1$ і точка $Y_0 \in M_2$, такі, що $f(X_0, Y_0) \leqslant f(X, Y)$, де X — довільна точка множини M_1, Y — довільна точка множини M_2. Отже, $\rho(M_1, M_2) = f(X_0, Y_0) = \rho_0$; $\rho_0 > 0$, оскільки $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Ясно, що точки X_0, Y_0 лежать на межах множини M_1 і M_2, відповідно. Справді, якщо хоч би одна з цих точок була внутрішньою точкою множини, ми б розглянули відрізок X_0Y_0 і знайшли на ньому точки X_0', Y_0', такі, що $|X_0'Y_0'| < |X_0Y_0|$.

Проведемо прямі l_1 і l_2, перпендикулярні до відрізка X_0Y_0 і які проходять через точки X_0, Y_0, відповідно. Доведемо, що l_1, l_2 — опорні прямі множин M_1, M_2, відповідно. Нехай l_1 — не опорна пряма множини M_1. Отже, точки множини M_1 лежать в обох півплощинах, які визначаються прямою l_1. Нехай точка C множини M_1 лежить в тій же півплощині, обмеженій прямою l_1, що і пряма l_2. Проведемо пряму a через точки C і X_0. Відрізок CX_0 належить множині M_1, оскільки вона опукла. Опустимо перпендикуляр із точки Y_0 на пряму a, нехай точка A — основа перпендикуляра. Якщо точка C належить відрізку X_0A, то $|X_0Y_0| > |CY_0|$, що суперечить твердженню: $|X_0Y_0|$ — відстань між множинами M_1 і M_2. Якщо точка C не належить відрізку X_0A (рис. 76), розглянемо відрізок AY_0. Оскільки множині M_1 належить відрізок CX_0, то точка A належить множині M_1, але $|X_0Y_0| > |AY_0|$; одержали суперечність з тим, що $|X_0Y_0|$ — відстань між множинами M_1, M_2.

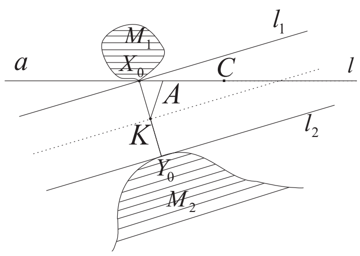


*Рис.*76

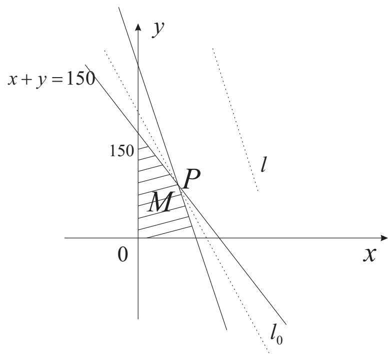


*Рис.*77

Аналогічно можна довести, що пряма l_2 є опорною прямою множини M_2.

Прямі l_1 і l_2 паралельні. Нехай точка K ділить пополам відрізок X_0Y_0. Проведемо через точку K пряму l, яка паралельна прямим l_1, l_2. Пряма l відділяє множини M_1, M_2.

■

Аналогічна теорема істинна для просторового випадку.

3.5 Найпростіша задача лінійного програмування.

Задача. Цех випускає вироби двох типів. Якщо цех буде випускати тільки вироби першого типу, він випустить 100 екземплярів; якщо цех буде випускати тільки вироби другого типу, він випустить 300 екземплярів. ВТК може перевірити 150 виробів (не суттєво, якого типу). Вироби 1-го типу коштують в два рази дорожче, ніж вироби 2-го типу. Скільки і яких виробів повинен випускати цех, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування. Нехай x — кількість виробів 1-го типу, які необхідно випустити, щоб одержати максимальний прибуток; y — кількість виробів 2-го типу, що дають максимальний прибуток. Тоді із умови задачі маємо:

$$x + y \leqslant 150; \quad 3x + y \leqslant 300; \quad x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0; \tag{3.4}$$

$f = 2x + y$ — вартість випущених виробів.

Таким чином, щоб розв'язувати задачу, потрібно знайти максимум лінійної функції двох змінних $f = 2x + y$, аргументи якої задовольняють системі лінійних нерівностей (3.4). Система (3.4) задає опуклу множину M (рис. 77). Розглянемо пряму l, що задана рівнянням $2x + y = h$. Змінюючи h, одержимо сім'ю паралельних прямих, серед яких є пряма l_0 з рівнянням $2x + y = h_0$, що є опорною прямою множини M (рис. 77).

Зауваження. *Розглянемо опуклий многокутник на площині. Через кожну точку його межі проходить опорна пряма. Якщо точка є внутрішня точка сторони многокутника (не співпадає з вершиною), то через неї проходить єдина опорна пряма, яка має в собі сторону многокутника. Якщо точка є вершина многокутника, через неї проходить множина опорних прямих, в тому числі і прямі, на яких лежать сторони многокутника, які виходять з даної вершини. Таким чином, кожна опорна пряма опуклого многокутника є опорна пряма в деякій вершині многокутника.*

Розглянемо опуклий многогранник. Через кожну точку його межі можна провести опорну площину. Через точку межі, яка не лежить на ребрі можна провести єдину опорну площину — площину грані. Через внутрішню точку ребра можна провести множину опорних площин; це частина жмутка площин, що проходять через пряму, яка має в собі ребро многокутника. Через вершину проходить множина опорних площин — частина в'язки площин з центром в цій вершині. Аналогічно плоскому випадку будь-яка опорна площина опуклого многогранника в довільній точці є опорною в одній із вершин многогранника.

Все сказане має місце і для опуклих многогранників у багатовимірному просторі.

На підставі зауваження опорна пряма l_0 проходить через вершину P многокутника M. Максимальний прибуток підприємства h_0 досягається, таким чином, при x і y, що є розв'язком системи рівнянь

$$x + y = 150; \quad 3x + y = 300,$$

звідси $x = 75$, $y = 75$.

Найпростішою задачею лінійного програмування є задача знаходження максимуму лінійної функції $f = a_i x^i$, що досягається на опуклому многограннику, який задано системою лінійних нерівностей

$$a_i^k x^i + d^k \geqslant 0; \quad x^i \geqslant 0; \quad i = 1, 2 \quad (i = 1, 2, 3); \quad k = 1, \dots, m.$$

Найбільше значення лінійної функції, якщо воно не дорівнює нескінченності, завжди досягається у вершині багатогранника. Тому рішення задачі зводиться до перебору вершин.

Задачі.

1. Транспортна задача. Є два родовища вугілля, на першому добувають 1000 т. вугілля, на другому — 1500 т. І є три споживачі, яким необхідно: І-му — 900 т. вугілля, ІІ-му — 1100 т., ІІІ-му — 500 т. Відомо, що вартість транспортування вугілля від i-го родовища до j-го споживача дорівнює c_{ij}. Скільки потрібно везти вугілля з першого родовища і скільки з другого кожному споживачу, щоб загальна вартість транспортування була найменшою?

Вказівка. Потрібно знайти мінімум функції

$$f = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij},$$

де x_{ij} — кількість вугілля, яке везуть з i-го родовища до j-го споживача, де $i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$.

2. Деяка продукція виробляється в пунктах A і B, звідки перевозиться в пункти І, ІІ, ІІІ. В пункті A виробляється 250 одиниць продукції, а в пункті B — 350 одиниць. У пункт І потрібно перевізти 150 одиниць, у пункт ІІ — 240, у пункт ІІІ — 210. Вартість перевезення однієї одиниці продукції дається таблицею.

Скласти оптимальний план перевезення.

3. Підприємство для виробництва двох видів продукції повинно використати три види сировини, що є в наявності в наступних кількостях: 17 одиниць виду A, 9 одиниць виду B та 8 одиниць виду C. На виробництво однієї одиниці першого виду продукції потрібно витратити 2 одиниці сировини виду A та 2 одиниці виду C, а для другого виду продукції на

Пункт виробництва	*Пункт споживання*		
	I	*II*	*III*
A	4	3	5
B	5	6	4

кожну одиницю виходу йде 2 одиниці сировини A і 3 одиниці сировини виду B. Прибуток, що одержує підприємство від реалізації одиниці першого виду продукції, дорівнює трьом умовним одиницям, а для другого виду продукції — чотирьом. Потрібно спланувати роботу підприємства так, щоб забезпечити найбільший прибуток.

4. На тваринницькій фермі відгодовують худобу. Нехай відомо, що кожній тварині потрібно щоденно видавати не менше 6 одиниць речовини A, 8 одиниць речовини B та 12 одиниць речовини C (наприклад, жири, білки, вугліводи). Для відгодовування тварин можна закупити два види кормів (наприклад, макуха та комбікорм). Одиниця маси першого корму має в собі 2 одиниці речовини A, 2 одиниці речовини B та 4 одиниці речовини C, а вартість його дорівнює 3 грн. Для другого корму відповідно дорівнюють 3, 2, 1 одиницям та 2 грн. Потрібно скласти раціон, при якому була б забезпечена добова потреба в речовинах A, B і C, причому вартість його була б найменшою.

5. В кожній з чотирьох посудин є по 1 л. суміші кислоти з водою. Процентний зміст кислоти в них дорівнює 10, 30, 60, 80 %, відповідно. Лаборанту потрібно одержати 50 % суміші кислоти з водою. Яка найбільша кількість суміші може бути ним виготовлена зливанням суміші із даних посудин?

6. Потрібно виготовити сплав, що має 40 % олова. На складі є три сплави з 60, 10 та 40% вмістом олова. Ціна кожного із сплавів, що є в наявності, дорівнює 4,3; 5,8; 5,5 грн., відповідно. Які сплави і в якому співвідношенні потрібно взяти на складі, щоб 1 кг нового сплаву був якомога дешевший?

7. Малюк може з'їсти торт за 10 хв., банку варення — за 8 хв., каструлю молока — за 15 хв.. Карлсон може з'їсти торт за 2 хв., банку варення — за 8 хв., каструлю молока — за 4 хв.. За який найменший час Малюк та Карлсон разом можуть з'їсти сніданок із торта, банки варення та каструлі молока?

Розділ 4

Криволінійні координати та способи задання кривих і поверхонь

Згадаємо, що коли (x^1, x^2) — косокутні декартові координати на площині, то координатними лініями $x^1 = const$, $x^2 = const$ є прямі і через кожну точку площини проходять дві координатні лінії. Якщо (x^1, x^2, x^3) — косокутні декартові координати у просторі, то координатні поверхні $x^1 = const$, $x^2 = const$, $x^3 = const$ є площини і через кожну точку простору проходить три координатні поверхні.

4.1 Полярна система координат на площині.

Виберемо на площині точку O, промінь l з початком в точці O і орієнтацію, тобто додатний напрям відліку кутів (рис. 78). Нехай P — довільна точка площини, $\overline{OP}$ — радіус-вектор точки P. Нехай $\rho = |\overline{OP}|$ $(\rho \geqslant 0)$, φ — кут, який утворює радіус-вектор $\overline{OP}$ з віссю l $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Тоді (ρ, φ) — *полярні координати* точки P. Точка O називається *полюсом*, промінь l — *полярною віссю* полярної системи координат.

Розглянемо прямокутну декартову площину (ρ, φ). Область зміни полярних координат ρ, φ — це півсмуга, верхня границя якої не досягається (рис. 79).

Полярні координати мають особливість у полюсі. Точці O не можна поставити у відповідність єдину пару чисел (ρ, φ), оскільки для O буде $\rho = 0$, а φ не визначено.

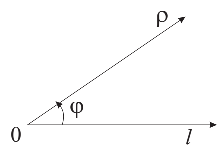


*Рис.*78

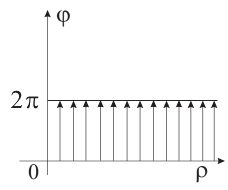


*Рис.*79

Координатні лінії: $\varphi = const$ — промені, що виходять з полюса O під кутом φ до осі l; $\rho = const$ — кола радіуса ρ з центром у точці O (рис. 80).

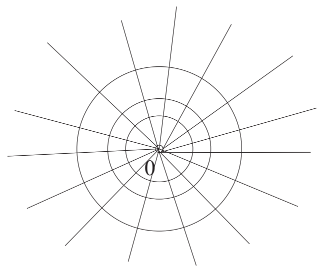


*Рис.*80

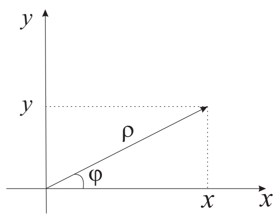


*Рис.*81

Зауважимо, що всі промені $\varphi = const$ проходять через спільну точку — полюс полярної системи координат, на відміну від декартової системи координат, де через кожну точку площини проходить рівно одна пряма кожного сімейства координатних ліній.

Знайдемо зв'язок між декартовими та полярними координатами точки при спеціальному виборі декартової системи, а саме: за додатну піввісь Ox приймемо полярну вісь, за початок координат — полюс O, вісь Oy направимо так, щоб з нею співпадала вісь Ox при повороті на кут $\frac{\pi}{2}$ в додатному напрямі. Тоді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

де (x, y) — декартові координати точки P, (ρ, φ) — полярні координати точки P (рис. 81).

Рівняння будь-якої прямої у декартовій системі координат має вигляд

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \tag{4.1}$$

З'ясуємо, який вигляд буде мати рівняння прямої в полярній системі координат. Підставимо у рівняння (4.1) рівності

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

одержимо рівняння прямої в полярній системі координат:

$$\rho(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + c = 0. \tag{4.2}$$

Перетворимо рівняння (4.2):

$$\frac{\rho(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Введемо кут φ_0 такий, що

$$\cos\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

і позначимо $h = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (h є відстань від початку координат до нашої прямої).

Тоді рівняння прямої в полярній системі координат має вигляд

$$\rho\cos(\varphi - \varphi_0) + h = 0.$$

Розглянемо рівняння кривих в полярній системі координат.

1. $\rho = \varphi$, $\varphi \geqslant 0$ — спіраль Архімеда (рис. 82).
2. $\rho = e^{\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$ — логарифмічна спіраль (рис. 83).

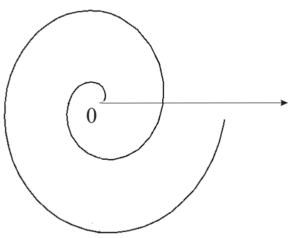


*Рис.*82

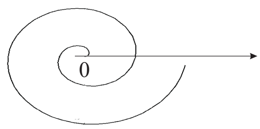


*Рис.*83

Параметричні рівняння логарифмічної спіралі в прямокутній декартовій системі координат, що зв'язана з полярною системою координат так, як було описано вище, наступні:

$$\begin{cases} x = e^{\varphi}\cos\varphi, \\ y = e^{\varphi}\sin\varphi. \end{cases}$$

Нехай на площині задано криволінійні координати u^1, u^2. Геометричне місце точок, для яких одна із координат приймає фіксоване значення, називається *координатною лінією.*

Вправи.

1. Виразити полярні координати через декартові.
2. Знайти відстань між точками $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ і $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ в полярній системі координат.
3. Записати в полярній системі координат рівняння кола радіуса r з центром в точці (a, b).

4.2 Криволінійні координати в просторі.

4.2.1 Циліндрична система координат.

Нехай у площині π задано полярну систему координат. Вісь Oz перпендикулярна до π, проходить через полюс O і орієнтована так, що з кінця Oz додатнє обертання в площині π видно як обертання проти годинникової стрілки. Нехай P — довільна точка простору, точка $\overline{P}$ — основа перпендикуляра, який опущено з точки P на площину π, а точка P_z — основа перпендикуляра, який опущено з точки P на вісь Oz (рис. 84). Нехай полярні координати точки $\overline{P}$ суть (ρ, φ), а координата точки P_z є z. Тоді три числа (ρ, φ, z) називаються *циліндричними координатами* точки P, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

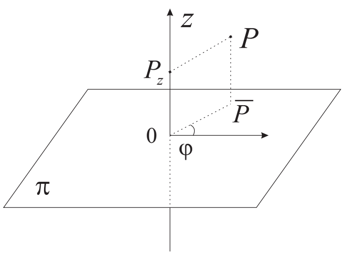


*Рис.*84

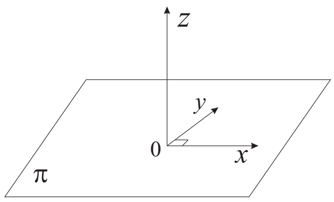


*Рис.*85

Розглянемо координатні поверхні циліндричної системи: $\rho = const$ — сімейство прямих кругових циліндрів, віссю яких є вісь Oz; $\varphi = const$ — півплощини, що обмежені віссю Oz; $z = const$ — площини, що перпендикулярні до осі Oz.

Особливими точками циліндричної системи координат є точки осі Oz, оскільки для них не визначена координата φ. Через кожну точку осі Oz проходять всі координатні поверхні сімейства $\varphi = const$.

Одержимо формули переходу від циліндричних координат до прямокутних декартових координат. Площину π приймемо за площину Oxy, додатну піввісь Ox сумістимо з полярною віссю, вісь Oy направимо так, щоб найкоротший поворот від Ox до Oy відбувався в додатному напрямі, вісь Oz залишимо на місці (рис. 85).

Тоді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Вправи.

1. Знайти відстань між точками $P_1(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ і $P_2(\rho_2, \varphi_2, z_2)$ в циліндричній системі координат.

2. Записати рівняння довільної площини в циліндричній системі координат.

4.2.2 Сферична система координат.

Нехай на площині π задано полярну систему координат. Вісь Oz перпендикулярна до π, проходить через полюс O і орієнтована так само, як у випадку циліндричних координат. Нехай P — довільна точка простору. Нехай $\rho = |\overline{OP}|$, φ — полярний кут, що відповідає точці $\overline{P}$ — основі перпендикуляра, який опущено з точки P на площину π, ψ — кут між радіус-вектором $\overline{OP}$ точки P та площиною π, причому $\psi \geqslant 0$, якщо P розташована у півпросторі $z \geqslant 0$, $\psi < 0$ — в протилежному випадку (рис. 86). Тоді три числа (ρ, φ, ψ) називаються *сферичними координатами* точки P, $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, φ називається довготою, ψ — широтою точки P.

Іноді за третю координату приймають кут ψ', який радіус-вектор $\overline{OP}$ точки P утворює з додатним напрямом осі Oz, $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \pi$, $\psi' = \frac{\pi}{2} - \psi_1$.

Координатні поверхні сферичної системи координат: $\rho = const$ — сімейство концентричних сфер з центром у полюсі; $\varphi = const$ — сімейство півплощин, що обмежені віссю Oz; $\psi = const$ — сімейство кругових конусів, віссю яких є вісь Oz (в це сімейство входять вісь Oz і площина π).

Особливими точками сферичної системи координат є точки осі Oz, для цих точок кут φ не визначений однозначно.

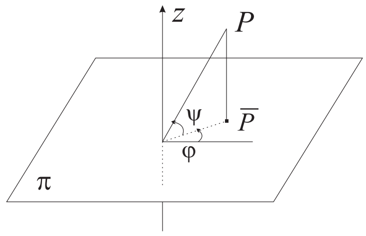


*Рис.*86

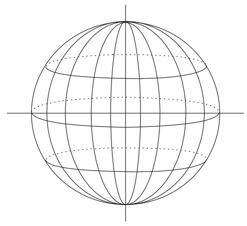


*Рис.*87

Знайдемо зв'язок між прямокутними декартовими і сферичними координатами точки. Площину π приймемо за площину Oxy, полярну вісь — за додатну піввісь Ox, вісь Oy напрямимо так, щоб найкоротший поворот від Ox до Oy відбувався в додатному напрямі, вісь Oz залишимо на місці. Тоді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi, \\ z = \rho\sin\psi. \end{cases}$$

Розглянемо сферу $\rho = const$. Меридіани на сфері — це лінії перетину сфери з площинами $\varphi = const$. Паралелі — це лінії перетину сфери з конусами $\psi = const$ (рис.87).

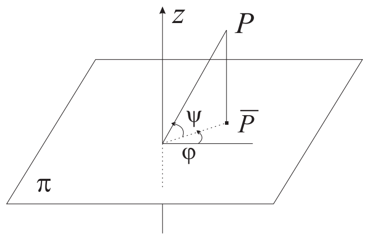

z
P
ψ
P̄
φ
π

*Рис.*86

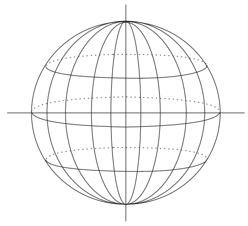


*Рис.*87

Нехай у просторі задано криволінійні координати u^1, u^2, u^3. Геометричне місце точок, для яких одна з координат приймає фіксоване значення, називається *координатною поверхнею.* Геометричне місце точок, для яких дві координати приймають стале значення, називається *координатною лінією.*

Паралелі, меридіани і промені, що виходять з полюса, — координатні лінії сферичної системи координат.

Вправа. Знайти координатні лінії циліндричної системи координат.

4.3 Способи задання кривих і поверхонь.

Згадаємо, як ми задавали пряму і площину.

1. **Параметричне задання.**

   Параметричне задання прямої:

   $$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

   де $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радіус-вектор довільної точки прямої, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — радіус-вектор фіксованої точки прямої, $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ — напрямний вектор прямої.

   В координатній формі:

   $$\begin{cases} x = x_0 + a^1 t, \\ y = y_0 + a^2 t, \\ z = z_0 + a^3 t. \end{cases}$$

   Параметричне задання площини:

   $$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}, \quad -\infty < u, v < +\infty,$$

   де $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ — радіус-вектор довільної точки площини, $\boldsymbol{r}_0$ — радіус-вектор фіксованої точки площини, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — неколінеарні вектори, що лежать в площині.

   В координатній формі:

   $$\begin{cases} x = x_0 + a^1 u + b^1 v, \\ y = y_0 + a^2 u + b^2 v, \\ z = z_0 + a^3 u + b^3 v. \end{cases}$$

2. **Неявне задання.**

   Пряма на площині задається як множина точок, координати яких задовольняють рівнянню $ax + by + c = 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$.

   Площина: $ax + by + cz + d = 0$, де $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

   Пряма в просторі: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0. \end{cases}$

3. **Явне задання.**

Рівняння прямої на площині, що не перпендикулярна до осі Ox, можна записати у вигляді

$$y = ax + b.$$

Прямі, які паралельні осі Oy, перетинають таку пряму в одній точці.

Рівняння площини, яка не перпендикулярна до площини Oxy, можна записати у вигляді

$$z = ax + by + c.$$

Прямі, які паралельні осі Oz, перетинають таку площину в одній точці.

Зауважимо, що явне задання є окремим випадком як параметричного так і неявного задання. Справді, нехай пряма на площині задана явно: $y = ax + b$. Виберемо параметром декартову координату x і одержимо параметричне задання прямої

$$\begin{cases} x = t, \\ y = at + b. \end{cases}$$

Неявне задання прямої є наступним:

$$y - ax - b = 0.$$

Для площини $z = ax + by + c$ параметричне задання буде

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = au + bv + c. \end{cases}$$

Неявне задання площини є

$$ax + by + c - z = 0.$$

4.3.1 Поняття кривої.

Нагадаємо, що взаємно однозначне і неперервне відображення, обернене до якого також неперервне, називається *топологічним відображенням (гомеоморфізмом)*.

Нехай L — множина точок на площині або в просторі, P — довільна точка множини L.

Околом $U_\delta(P)$ точки P в L називається перетин відкритої кулі $D_\rho(P)$ (в тривимірному випадку) або круга (в двовимірному випадку) з центром в точці P з множиною L, тобто $U_\delta(P) = D_\rho(P) \cap L$.

Множина L називається *відкритою*, якщо разом з кожною своєю точкою вона має в собі деякий її окіл.

Множина називається *зв'язною*, якщо її не можна представити у вигляді об'єднання двох відкритих непустих множин, що не перетинаються.

Образ відкритого інтервалу при топологічному відображенні його на площину або в простір називається *елементарною кривою*, тобто елементарна крива гомеоморфна відкритому інтервалу. Раніше ми показали, що відкритий інтервал гомеоморфний прямій. Отже, елементарна крива є гомеоморфною і прямій.

Множину точок простору (або площини) будемо називати *вкладеною кривою*, якщо ця множина зв'язна і кожна її точка має окіл, що є елементарною кривою.

Приклади.

1. Коло не є елементарною кривою, оскільки воно не є гомеоморфним інтервалу.

2. *Лемніскатою Бернуллі* (рис.88) називається крива, яка в деякій прямокутній системі координат задається рівнянням вигляду

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

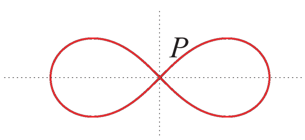


Рис.88

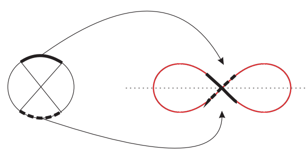


Рис.89

Вправа. Записати це рівняння в полярній системі координат.

Розглянувши початок координат, впевнитися, що ця крива не є вкладеною кривою.

Зануреною кривою називається геометричне місце точок в просторі, яке є образ вкладеної кривої при неперервному відображенні, причому неперервне відображення локально є топологічним.

Занурена крива може мати самоперетини.

Приклад. Лемніската Бернуллі є зануреною кривою (рис. 89).

Локальне дослідження будь-якої кривої може бути зведено до розглядання елементарної кривої.

4.3.2 Поняття поверхні.

Приклад. Внутрішності круга і квадрата топологічно еквівалентні, тобто гомеоморфні.

Дійсно, розтягуємо відрізок OA до OB (рис. 90). В різних напрямках розтягування різне. Самостійно записати це топологічне відображення.

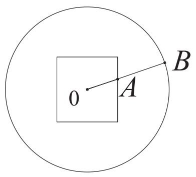


*Рис.*90

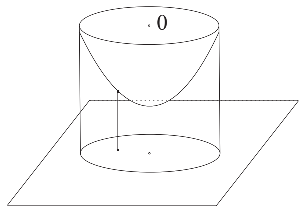


*Рис.*91

Елементарна поверхня — це образ внутрішності круга при топологічному відображенні його в просторі, тобто елементарна поверхня гомеоморфна внутрішності круга.

Приклад. Розглянемо поверхню яка задана рівнянням $z = x^2 + y^2$. Ця поверхня гомеоморфна площині. Але площина гомеоморфна відкритому кругу. Гомеоморфізм відкритого круга та площини встановлюється так: спочатку показують, що відкритий круг гомеоморфний відкритій півсфері (можна розглянути ортогональне проектування півсфери на площину (рис. 91)), потім так як показано на рис. 92, встановлюємо гомеоморфізм відкритої півсфери і площини. Самостійно аналітично записати вказані відображення півсфери на площину і показати, що вони топологічні.

Отже, поверхня, що заданя рівнянням $z = x^2 + y^2$ є елементарною поверхнею (рис. 93).

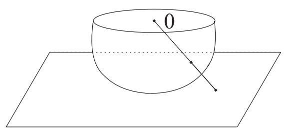


*Рис.*92

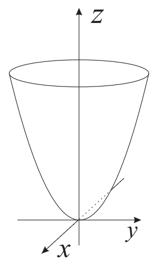


*Рис.*93

Вкладеною поверхнею називається зв'язна множина, для будь-якої точки якої існує окіл, гомеоморфний відкритому кругу.

Приклад. Сфера є вкладеною поверхнею, оскільки окіл довільної точки сфери гомеоморфний відкритому кругу. Але сфера не гомеоморфна площині і не є елементарною поверхнею.

Зауваження. *Як відомо з топології, кожна вкладена крива гомеоморфна або прямій, або колу. Вкладених поверхонь значно більше. Дійсно, тор є вкладеною поверхнею, але він не гомеоморфний ні площині, ні сфері.*

Зануреною поверхнею називається геометричне місце точок в просторі, яке є образом вкладеної поверхні при неперервному відображенні, причому неперервне відображення локально є топологічним. Іншими словами, ця поверхня може мати самоперетини.

Приклад зануреної поверхні, що не є вкладеною, наведено на рис. 94 (верхньої грані куба немає).

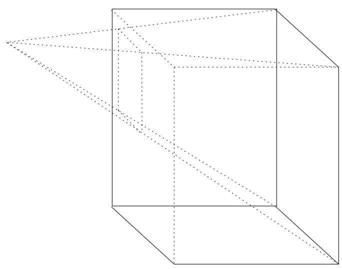


*Рис.*94

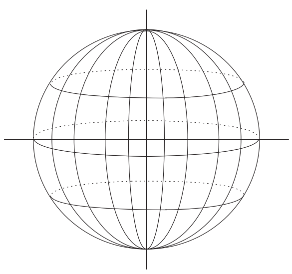


*Рис.*95

4.3.3 Параметричне задання кривих.

Розглянемо елементарну криву, що одержана при топологічному відображенні інтервалу (a, b) у простір. Кожній точці t інтервалу ставиться у відповідність радіус-вектор $\boldsymbol{r}(t)$ точки кривої.

Рівняння $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a < t < b$, називається *параметричним рівнянням кривої*.

Координатний запис цього рівняння має вигляд

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Параметрично задаються також вкладені і занурені криві, при цьому область зміни параметра не обов'язково буде відкритим інтервалом.

Приклад. Нехай на площині задано прямокутну декартову систему координат і полярну систему координат, які зв'язані так:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Рівняння кола радіуса R з центром на початку координат в полярній системі координат буде

$$\rho = R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Параметричне задання цього ж кола в декартовій системі координат:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Параметрично задану криву можна тлумачити як траєкторію руху матеріальної точки, де t — час.

4.3.4 Параметричне задання поверхонь.

Нехай F — елементарна поверхня, D^2 — круг; u, v — координати площини, в якій лежить круг D^2; x, y, z — декартові координати в просторі.

Кожній точці (u, v) внутрішності круга D^2 ставиться у відповідність радіус-вектор $\boldsymbol{r}(u, v)$ точки поверхні.

Рівняння $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, де $(u, v) \in D^2$, називається *параметричним рівнянням поверхні.*

В координатному вигляді рівняння записується так

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Параметрично задаються також вкладені і занурені поверхні, при цьому область зміни параметрів u, v не завжди співпадає з внутрішністю круга.

Приклади.

1. Розглянемо в просторі прямокутні декартові і сферичні координати, які зв'язані рівняннями

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cos\psi, \\ y = \rho \sin\varphi \cos\psi, \\ z = \rho \sin\psi. \end{cases}$$

1.1. Нехай $\rho = const = R$, а $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\begin{cases} x = R \cos\varphi \cos\psi, \\ y = R \sin\varphi \cos\psi, \\ z = R \sin\psi. \end{cases}$$

є параметричні рівняння сфери радіуса R з центром на початку координат.

Розглянемо на сфері меридіани $\varphi = const$ і паралелі $\psi = const$. Ці лінії задають криволінійну систему координат на сфері, яка має особливості в північному і південному полюсах (рис. 95).

Нехай $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — параметричне задання деякої поверхні. Якщо $u = const$, то $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ — радіус-вектор однієї змінної, тобто $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ задає криву при $u = const$. Змінюючи значення u, одержимо сімейство кривих на поверхні. Аналогічно, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ задає інше сімейство кривих на поверхні при $v = const$. Лінії $u = const$, $v = const$ називаються *координатними лініями на поверхні*, а u, v — *криволінійними координатами точок поверхні.*

1.2. Нехай $\psi = const = \psi_0$, а $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Тоді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\psi_0, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi_0, \\ z = \rho\sin\psi_0 \end{cases}$$

є параметричне рівняння конуса.

2. Розглянемо в просторі прямокутні декартові і циліндричні координати, які зв'язані рівняннями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Нехай $\rho = const = R$, а $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Тоді

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = u, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < u < +\infty \end{cases}$$

є параметричні рівняння прямого кругового циліндра радіуса R, віссю якого служить вісь Oz. Кола $u = const$ і прямолінійні твірні циліндра утворюють криволінійну систему координат на циліндрі без особливостей.

Зауважимо, що не будь-який радіус-вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ задає поверхню.

Приклад.

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u + v, \\ z = u + v, \\ -\infty < u, v < +\infty. \end{cases}$$

Позначимо $u + v$ через t. Одержимо

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t, \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Це рівняння задає пряму в просторі.

Таким чином, необхідні додаткові умови на радіус-вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, щоб він задав поверхню. Щоб уникнути вироджених, неприємних випадків, щоб поверхні мали більш звичайний вигляд, область зміни радіус-вектора повинна задовольняти додатковим вимогам. Ці умови будуть одержані в курсі диференціальної геометрії.

4.3.5 Неявне задання кривих і поверхонь.

Неявно заданою кривою на площині називається геометричне місце точок на площини, координати яких x, y задовольняють рівнянню $f(x, y) = 0$.

Приклади.

1. $ax + by + c = 0$.
2. $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$.
3. $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ (рис. 96).
4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ — лист Декарта (рис. 97).

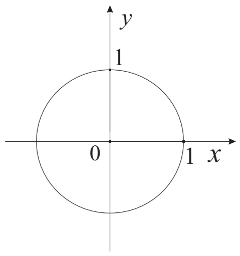


*Рис.*96

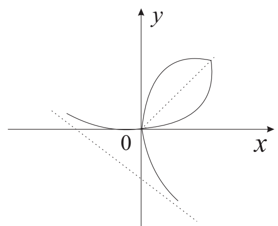


*Рис.*97

Зауваження. *Приклад 3 показує, що для того, щоб неявне задання визначало криву в розумінні данного вище визначення, необхідні додаткові умови. Ці умови ми розглянемо в курсі диференціальної геометрії.*

Неявно заданою поверхнею називається геометричне місце точок в просторі, координати яких x, y, z задовольняють рівнянню $F(x, y, z) = 0$.

Приклади.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

2. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$

3. $x^2+y^2-1=0$ — круговий циліндр з віссю обертаня Oz.

4. $f(x,y)=0$ — циліндр з твірною, паралельною осі Oz.

5. $(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2-1)=0$ — сфера радіуса 1 з центром на початку координат і вісь Oz.

Зауваження. *Приклад 5 показує, що для того, щоб рівняння $F(x,y,z)=0$ задавало поверхню в розумінні данного вище визначення, необхідні додаткові умови.*

4.3.6 Явне задання кривих і поверхонь.

Крива на площині називається *явно заданою*, якщо вона є графік функції $y=f(x)$.

Приклади.

1. $y=kx+b$.

2. $y=x^2$.

Прямі, паралельні осі y, перетинають таку криву в одній точці і задають топологічне відображення кривої на інтервал осі Ox.

Поверхня називається *явно заданою*, якщо вона є графік функції $z=f(x,y)$. Точки такої поверхні мають координати $(x,y,f(x,y))$.

Приклади.

1. $y=ax+by+c$.

2. $z=x^2+y^2$.

Відображення такої поверхні на область площини Oxy задається ортогональним проектуванням у напрямку осі Oz. Довільна пряма, паралельна осі Oz, перетинає і поверхню, і площину в одній точці, ці точки ставляться у відповідність одна одній.

Явне задання — це окремий випадок як параметричного, так і неявного задання.

Дійсно, нехай крива задана явно:

$$y = f(x).$$

Відповідне параметричне задання буде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Неявне:

$$y - f(x) = 0.$$

Нехай поверхня задана явно:

$$z = f(x, y).$$

Відповідне параметричне задання буде

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Неявне:

$$z - f(x, y) = 0.$$

4.3.7 Зв'язки між різними способами задання кривих.

Приклад. Розглянемо різні способи задання кола радіуса R з центром на початку координат (рис. 98).

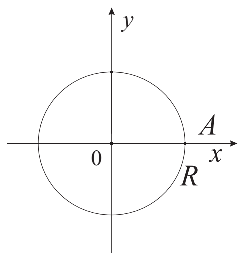


*Рис.*98

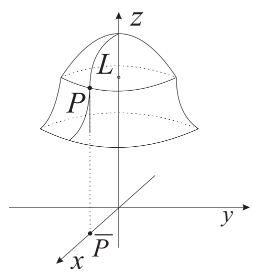


*Рис.*99

Неявне задання:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Параметричне задання:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ 0 \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

Явне задання верхнього півкола:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

явне задання нижнього півкола:

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

В околі точки A (рис. 98) коло також можна задати явно:

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Нехай деяка крива задана параметрично:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t). \end{cases}$$

Як перейти до явного задання? Потрібно виключити t з двох рівнянь $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$.

Наприклад, $t = f_1^{-1}(x)$ і $y = f_2(f_1^{-1}(x))$ — явне задання кривої, або $t = f_2^{-1}(y)$ і $x = f_1(f_2^{-1}(y))$.

Повернемося до розглянутого вище прикладу. Щоб одержати з параметричного задання кола явне задання верхнього півкола, з першого рівняння знайдемо $t = \arccos\frac{x}{R}$ і підставимо в друге рівняння, одержимо

$$y = R\sin(\arccos\frac{x}{R}) = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

4.3.8 Зв'язки між різними способами задання поверхонь.

Нехай поверхня задана неявно: $F(x, y, z) = 0$. Взагалі кажучи, для будь-якої точки поверхні існує окіл, який можна задати явно. Якщо прямі, що паралельні осі Oz, перетинають окіл не більше ніж в одній точці, то її можна задати так: $z = f(x, y)$; якщо прямі, що паралельні осі Oy, перетинають окіл в одній точці, то $y = \varphi(x, z)$ в цьому околі; якщо прямі, що паралельні осі Ox, перетинають окіл в одній точці, то $x = g(y, z)$ в цьому околі. Достатність умови існування явного задання будуть сформульовані в курсі диференціальної геометрії. Але в цілому поверхню (наприклад, сферу, тор) задати явно не можна.

Щоб перейти від параметричного задання поверхні

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

до неявного, потрібно виключити з трьох рівнянь u, v.

Щоб перейти від параметричного задання поверхні до явного, потрібно, використовуючи два рівняння, виразити u, v через відповідні декартові координати і підставити ці вирази в третє рівняння.

Приклад.

$$\begin{cases} x = R\cos u \cos v, \\ y = R\cos u \sin v, \\ z = R\sin u \end{cases}$$

— параметричні рівняння сфери. Піднесемо ці рівняння до квадрату й додамо, одержимо неявне задання сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Явне задання верхньої півсфери:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

явне задання нижньої півсфери:

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

4.4 Спеціальні класи поверхонь.

4.4.1 Поверхні обертання.

Розглянемо на площині Oxz криву L, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ z = f_2(t). \end{cases}$$

Будемо обертати площину, в якій розташована крива L, навколо осі Oz. Крива L утворить поверхню, яка називається *поверхнею обертання* (рис. 99). Зауважимо, що коли крива L перетинає вісь Oz, то на поверхні можуть бути особливі точки, в яких немає дотичної площини.

Знайдемо рівняння поверхні обертання. Довільна точка P кривої L при повороті на кут φ займе положення $P(\varphi)$ (при обертанні площини, в якій лежить крива L, точка P змалює коло). Нехай точки $\overline{P}$, $\overline{P}(\varphi)$ — основи перпендикулярів, що опущені з точок P, $P(\varphi)$, відповідно, на площину Oxy (рис. 100). Якщо $(f_1(t), 0, f_2(t))$ — координати точки P, то $(f_1(t), 0, 0)$, $(f_1(t)\cos\varphi, f_1(t)\sin\varphi, 0)$ — координати точок $\overline{P}$, $\overline{P}(\varphi)$, відповідно. Тоді $(f_1(t)\cos\varphi, f_1(t)\sin\varphi, f_2(t))$ — координати довільної точки $P(\varphi)$ поверхні. Таким чином, параметричні рівняння поверхні обертання:

$$\begin{cases} x = f_1(t)\cos\varphi, \\ y = f_1(t)\sin\varphi, \\ z = f_2(t). \end{cases}$$

Розглянемо координатні лінії на поверхні обертання: меридіани $\varphi = const$ — образи кривої L при повороті площини, в якій вона лежить; $t = const$ — кола, що лежать в перерізі поверхні площинами $z = const$.

Приклади.

1. Нехай L — півколо на площині Oxz радіуса R з центром на початку координат:
$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ z = R\sin t, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Тоді поверхня обертання — сфера, її рівняння:
$$\begin{cases} x = R\cos t\cos\varphi, \\ y = R\cos t\sin\varphi, \\ z = R\sin t, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

2. Нехай L — пряма, що паралельна осі Oz і знаходиться на віддалі R від неї:
$$\begin{cases} x = R, \\ z = t, \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$
Тоді поверхня обертання — прямий круговий циліндр, його рівнян-

ня:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = t, \\ -\infty < t < +\infty, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Вправи.

1. Написати рівняння поверхні, яка одержується при обертанні навколо осі Oz прямої, що проходить через початок координат і утворює кут φ з віссю Ox.

2. Написати рівняння поверхні, яка одержується при обертанні навколо осі Oz кола радіуса R з центром в точці $(a, 0, 0)$, $a > R$, що лежить в площині Oxz. Перейти від параметричного задання поверхні до неявного.

4.4.2 Циліндричні поверхні.

Нехай в просторі задано деяку криву L і пряму l. Поверхня, що утворена прямими, які проходять через точки кривої L паралельно прямій l, називається *циліндричною.*

Крива L називається *напрямною.* Прямі, які паралельні прямій l, називаються *твірними* циліндричної поверхні.

Не втрачаючи загальності, можна вважати криву L плоскою, оскільки завжди напрямною можна взяти криву, що лежить в площині, яка перетинає циліндр під прямим кутом до твірної.

Нехай крива L лежить в площині Oxy і задана неявно:

$$F(x, y) = 0 \tag{4.3}$$

Нехай напрямний вектор $\boldsymbol{a}$ прямої l не паралельний площині Oxy, тобто $a^3 \neq 0$. Можна вважати, що $a^3 = 1$ і $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, 1)$. Нехай $P(x_0, y_0)$ — довільна точка кривої L, тобто координати точки P задовольняють рівнянню (4.3):

$$F(x_0, y_0) = 0 \tag{4.4}$$

Рівняння прямої, яка паралельна прямій l і проходить через точку P:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta^1, \\ y = y_0 + ta^2, \\ z = t, \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Виразимо x_0, y_0 через x, y, z:

$$\begin{cases} x_0 = x - a^1 z, \\ y_0 = y - a^2 z. \end{cases}$$

Підставимо одержані вирази для x_0 і y_0 в рівності (4.4), одержимо неявне рівняння циліндричної поверхні:

$$F(x - a^1 z, y - a^2 z) = 0.$$

Нехай напрямна крива L задана параметрично: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{a}$ — напрямний вектор твірних циліндричної поверхні. Тоді параметричне задання циліндричної поверхні

$$\boldsymbol{R}(t, u) = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{a} \quad (-\infty < u < +\infty) \quad \text{(рис. 101)}.$$

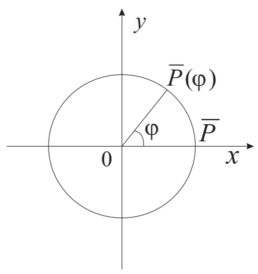


*Рис.*100

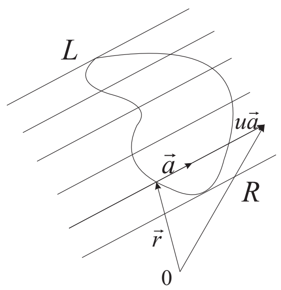


*Рис.*101

4.4.3 Конічні поверхні.

Нехай L — деяка крива у просторі, O — фіксована точка.

Поверхня, яка утворена прямими, що проходять через точку O і точки кривої L, називається *конічною*.

Крива L називається *напрямною*. Прямі, що проходять через точки L і точку O — *твірними*, точка O — *вершиною* конуса.

Запишемо рівняння конічної поверхні, якщо L лежить в площині $z = 1$, а вершина конуса O розташована на початку координат. Рівняння кривої L:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Нехай точка $P(x_0, y_0, z_0)$ лежить на кривій L, координати точки P задовольняють рівнянню (4.5), тобто

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0, \\ z_0 = 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рівняння прямої, що проходить через точки $O(0,0,0)$ і $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = t. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x}{z}, \\ y_0 = \frac{y}{z}. \end{cases}$$

Підставимо в рівняння (4.6) вирази для x_0, y_0, одержимо неявне рівняння конічної поверхні:

$$F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0.$$

Вправа. Написати рівняння конуса, вершина якого не співпадає з початком координат.

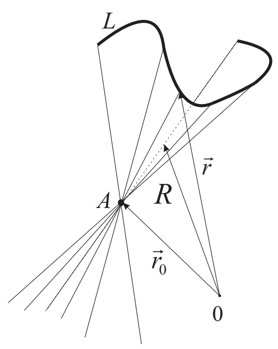


*Рис.*102

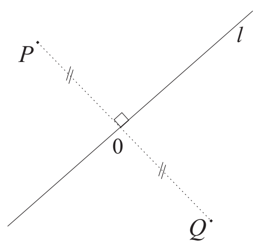


*Рис.*103

Вираз $F(x, y, z) = 0$ називається *однорідним порядку* m, якщо

$$F(tx, ty, tz) = t^m F(x, y, z).$$

Функція $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ — однорідна порядку 0.

Справедливе обернене твердження: якщо ліва частина рівняння $F(x, y, z) = 0$ однорідна, то рівняння визначає конус.

Дійсно, розглянемо рівняння $F(x, y, z) = 0$, причому $F(tx, ty, tz) = t^m F(x, y, z)$.

Нехай точка $P(x_0, y_0, z_0)$ задовольняє рівнянню $F(x, y, z) = 0$. Точка $P_1(tx_0, ty_0, tz_0)$, що лежить на прямій, яка проходить через точки P і $O(0, 0, 0)$, також задовольняє рівнянню $F(x, y, z) = 0$ з огляду на однорідність F. Отже, рівняння $F(x, y, z) = 0$ задає конус з вершиною на початку координат.

Нехай напрямна конуса L задана параметрично $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, точка $A(\boldsymbol{r}_0)$ — вершина конуса, $\boldsymbol{R}$ — радіус-вектор довільної точки конуса. Тоді $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_0 = u(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0)$ (рис. 102) і параметричне рівняння конічної поверхні

$$\boldsymbol{R}(t, u) = \boldsymbol{r}_0 + u(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0).$$

Якщо вершина конуса розташована на початку координат, то $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$ і останнє рівняння набуде вигляду

$$\boldsymbol{R}(t, u) = u\boldsymbol{r}(t).$$

Розділ 5

Криві і поверхні 2-го порядку

В прямокутній декартовій системі координат рівняння будь-якої прямої на площині лінійне, тобто має вигляд

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

рівняння будь-якої площини у просторі також лінійне, тобто має вигляд

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Рівняння прямої на площині (площини у просторі) лінійні в будь-якій декартовій системі координат, оскільки формули переходу від однієї системи координат до другої лінійні. В криволінійній системі координат вигляд рівнянь прямої і площини інший. Наприклад, рівняння прямої в полярній системі координат має вигляд $\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + h = 0$, нелінійне відносно φ. Перейдемо до вивчення кривих і поверхонь 2-го порядку, які будемо розглядати як геометричні місця точок на площині або в просторі, координати яких в декартовій системі координат задовольняють рівнянню другого порядку. А саме, загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

де $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ — довільні дійсні числа і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Загальне рівняння поверхні 2-го порядку має вигляд

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} = 0,$$

Тут $a_{ij}(i, j = 1, \dots, 4)$ — довільні дійсні числа і

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \neq 0.$$

При переході від однієї декартової системи координат до другої, координати точок змінюються лінійно. Тому рівняння 2-го порядку переходить в рівняння не вище 2-го порядку. Але оскільки воно в одній системі координат є суттєво квадратним, то воно квадратне в будь-якій системі координат. Таким чином, визначення кривої і поверхні другого порядку не залежить від вибору декартової системи координат.

У подальшому будемо вважати, що на площині або в просторі задана прямокутна система координат.

5.1 Канонічні рівняння кривої 2-го порядку.

5.1.1 Еліпс.

Розглянемо криву, що задана неявно рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } \ a > 0, b > 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0. \tag{5.1}$$

Ця крива називається *еліпсом*, а рівняння (5.1) — *канонічним* рівнянням еліпса.

Зауважимо, що коли $a = b$, рівняння (5.1) задає коло з центром на початку координат з радіусом a.

Точки P, Q, що лежать відносно прямої l в різних півплощинах, *симетричні відносно прямої* l, якщо $PQ \perp l$ і $|PO| = |OQ|$ (рис. 103).

Точки P, Q *симетричні відносно точки* O, коли $|PO| = |OQ|$, точки P, O, Q на одній прямій і O лежить між P і Q (рис. 104).

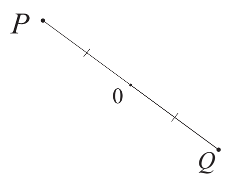


*Рис.*104

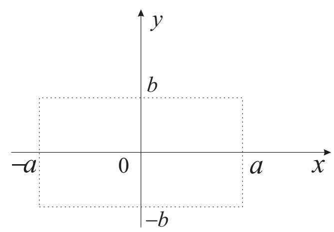


*Рис.*105

Пряма l є *вісь симетрії* деякої кривої, якщо при осьовій симетрії відносно прямої l крива переходить у себе.

Точка O є *центр симетрії* деякої кривої, якщо при центральній симетрії відносно точки O крива переходить у себе.

Повернемося до кривої, що задана рівнянням (5.1). Якщо рівнянню (5.1) задовольняють координати точки $A(x, y)$, то йому задовольняють і координати точок $A'(x, -y)$, $A''(-x, y)$, $A'''(-x, -y)$. Отже, x, y є осі симетрії кривої, що задана рівнянням (5.1), а точка $O(0, 0)$ є центр симетрії кривої. Тому досить побудувати частину кривої, що розташована в першому квадраті, і ми будемо мати уявлення про форму кривої.

Знайдемо точку перетину кривої з осями координат: $y = 0$, $x = \pm a$, $x = 0$, $y = \pm b$. З рівняння (5.1) випливає, що $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ (рис. 105). Параметри a і b називаються *півосями* еліпса.

Перетворення площини. Стискання (розтягування).

Розглянемо перетворення площини, при яких точка $P(x, y)$ переходить у точку $P'(x', y')$, причому $x' = ax$, $y' = by$, де $a > 0$, $b > 0$.

Це перетворення називається перетворенням *стискання (розтягування)* вздовж координатних осей і є окремим випадком афінних перетворень, які будуть вивчатися далі.

Якщо $a = b$, то перетворення площини називається *гомотетією.*

Знайдемо образ прямої $\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$ при перетворенні стискання. У формули $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ підставимо $x = a_1 t + b_1$, $y = a_2 t + b_2$ і одержимо знову рівняння прямої. Отже, при стисканні (розтягуванні) пряма переходить в пряму.

Довести самостійно, що при стисканні (розтягуванні) відрізок AB переходить у відрізок $A'B'$, де A' — образ A, B' — образ B.

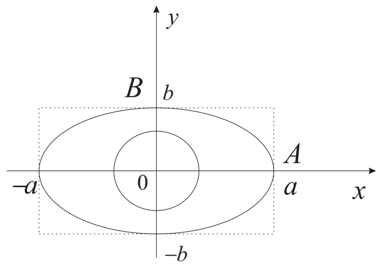


*Рис.*106

Повернемося до еліпса. Знайдемо образ кола $x^2 + y^2 = 1$ при перетворенні стискання. З формул $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ знаходимо $x = \frac{x'}{a}$, $y = \frac{y'}{b}$, підставимо одержані значення x, y в рівняння кола, після чого одержимо

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Знаючи, що еліпс одержується при стисканні (розтягуванні) кола, його легко намалювати (рис. 106).

Доведемо, що внутрішність еліпса — опукла множина. Доведемо спочатку, що круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ — опукла множина. Нехай точки P_1, P_2 належать кругу. Тоді відрізок P_1P_2 також належить кругу. Це випливає з того, що із всіх відрізків, що з'єднують вершину O (центр круга) з точками основи P_1P_2 трикутника OP_1P_2 найбільшу довжину має одна з бокових сторін трикутника (для доведення останнього твердження досить опустити з точки O висоту OH) (рис. 107).

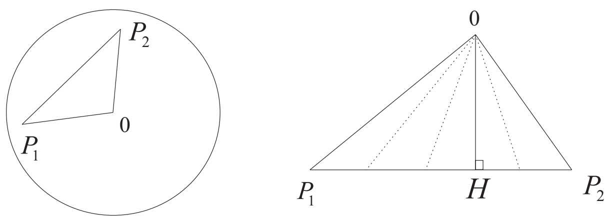


*Рис.*107

Внутрішність еліпса — образ внутрішності круга при перетворенні стискання. Але при стисканні відрізок переходить у відрізок. Тому внутрішність еліпса — опукла множина.

Еліпс — опукла крива.

Розглянемо різні способи задання еліпса:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ — неявне задання еліпса;

$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ — явне задання частини еліпса, що розташована у верхній півплощині;

$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ — явне задання частини еліпса, що розташована у нижній півплощині;

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ — параметричне задання еліпса.

Окремим випадком еліпса є коло; це крива 2-го порядку, її канонічне рівняння $x^2 + y^2 = a^2$. З іншого боку, коло — геометричне місце точок, відстань яких від фіксованої точки є величина стала і дорівнює a ($a > 0$).

Знайдемо геометричне місце точок, сума відстаней до двох фіксованих точок F_1, F_2 є величина стала і дорівнює $2a$.

Нехай на площині введена прямокутна декартова система координат так, що $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, де $c > 0$ (рис. 108).

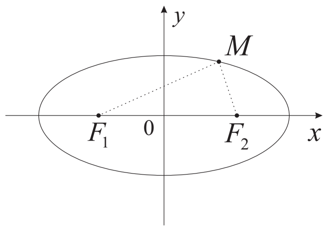


Рис.108

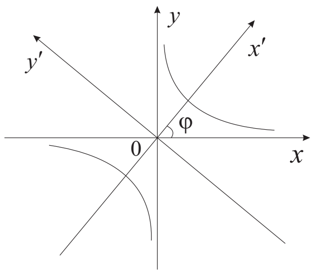


Рис.109

Сума відстаней довільної точки $M(x, y)$ від точок F_1, F_2 не може бути менша за відстань між точками F_1, F_2. Ця сума дорівнює відстані між F_1, F_2 (тобто $a = c$) тоді і тільки тоді, коли точка M знаходиться на відрізку F_1F_2. Отже, геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1, F_2 є величина стала і дорівнює $2c$, є відрізок F_1F_2.

Нехай $2a > 2c$, тобто $a > c$. Точка $M(x, y)$ належить шуканому геометричному місцю точок в тому і тільки тому випадку, коли

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{5.2}$$

Спростимо одержане рівняння:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2, \tag{5.3}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx, \tag{5.4}$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2, \tag{5.5}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{5.6}$$

Позначимо через b величину $\sqrt{a^2-c^2}$ $(a^2-c^2>0)$. Одержимо

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.7}$$

Ми довели, що з рівняння (5.2) випливає (5.7). Доведемо, що формула (5.2) — наслідок рівності (5.7). Тим самим доведено, що вирази (5.2) і (5.7) еквівалентні, тобто шукане геометричне місце точок — еліпс.

Нехай x, y — два числа, для яких виконується рівність (5.7). Виконуючи попередні викладки у зворотньому порядку, одержимо із рівності (5.7) спочатку рівність (5.6), потім (5.5), яку запишемо у вигляді

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=(a^2-cx)^2.$$

Добуваючи корінь з обох частин цієї рівності, одержимо

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=|a^2-cx|,$$

Але на підставі (5.7) $|x| \leqslant a$ і $c < a$. Отже, $|cx| < a^2$, $a^2-cx>0$ і $|a^2-cx|=a^2-cx$. Так ми приходимо до рівності (5.4), потім одержимо рівняння (5.3) і запишемо його у вигляді

$$(x+c)^2+y^2=[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2,$$

звідси

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|.$$

Розглянемо величину $(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2$. З огляду на (5.7) $x^2 \leqslant a^2$, $y^2 \leqslant b^2$, тобто $y^2 \leqslant a^2-c^2$, або $c^2+y^2 \leqslant a^2$, далі $|cx|<a^2$, тому $|2cx|<2a^2$. Отже, $(x-c)^2+y^2<4a^2$. Тому

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Звідси зразу випливає рівність (5.2).

Має місце і обернене твердження: кожен еліпс має ту властивість, що сума відстаней від будь-якої його точки до деяких двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала. Ця властивість називається *фокальною*.

Дійсно, нехай

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b, \tag{5.8}$$

— рівняння довільного еліпса; F_1, F_2 — точки з координатами відповідно $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$, $(\sqrt{a^2-b^2},0)$. Геометричне місце точок, сума відстаней яких до точок F_1, F_2 дорівнює $2a$, задається рівнянням (5.8), тобто співпадає з розглянутим еліпсом.

Розглянемо множину еліпсів, що задані рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h.$$

1. Нехай $h > 0$, тоді останнє рівняння можна записати так:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1. \tag{5.9}$$

   Півосі еліпса, заданого рівнянням (5.9) при фіксованому h, суть $a' = a\sqrt{h}$, $b' = b\sqrt{h}$. Еліпси (5.9) гомотетичні і одержуються один з другого за допомогою перетворення гомотетії з центром на початку координат.

   Приклад. Нехай $P'(x', y')$ — точка, в яку переходить точка $P(x, y)$ при гомотетії

$$\begin{cases} x' = \sqrt{h}x, \\ y' = \sqrt{h}y. \end{cases} \tag{5.10}$$

   Знайдемо образ кривої, заданої рівнянням (5.1) при гомотетії (5.10): $x = \frac{x'}{\sqrt{h}}$, $y = \frac{y'}{\sqrt{h}}$. Підставимо вирази для x, y у рівняння (5.1) і одержимо (5.9).

2. Нехай $h = 0$. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

   яке задає єдину точку.

3. Нехай $h < 0$, зокрема $h = -1$. Одержимо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

   яке задає порожню множину.

5.1.2 Гіпербола.

Розглянемо геометричне місце точок, що задовольняють рівнянню $xy = 1$ (рис. 109), або

$$y = \frac{1}{x} \tag{5.11}$$

Нехай система координат $Ox'y'$ одержується із системи Oxy за допомогою повороту останьої на кут φ (рис. 109). Тоді

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{4}$, формула набуде вигляду

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

Підставивши останній вираз у (5.11), одержимо

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1. \tag{5.12}$$

Розглянемо криву, що задана рівнянням

4.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.13}$$

Ця крива називається *гіперболою.*

Якщо $a = b$, гіпербола називається *рівнобічною.*

Крива (5.13) при перетворенні стискання (розтягування) $x = \frac{a}{\sqrt{2}}x'$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}y'$ перейде у криву (5.12).

Таким чином, крива (5.13) — деформована рівнобічна гіпербола. Точка $O(0,0)$ — центр симетрії кривої, оскільки якщо рівнянню (5.13) задовольняє точка (x, y), то йому задовольняє точка $(-x, -y)$, Ox і Oy — осі симетрії кривої, оскільки якщо рівнянню (5.13) задовольняє точка (x, y), то йому задовольняють точки $(x, -y)$ і $(-x, y)$. З формули (5.13) випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$, тобто $|x| \geqslant a$ $(a > 0)$, і якщо $y = 0$, то $x = \pm a$ (рис. 110).

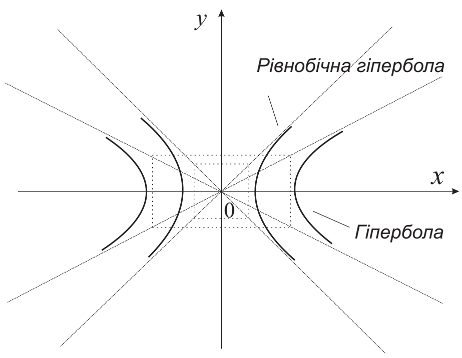


*Рис.*110

Доведемо, що множина $\begin{cases} xy \geqslant 1, \\ x > 0 \end{cases}$ — опукла. З курсу математичного аналізу відомо, що функція $y = f(x)$ — опукла (у внутрішній точці області визначення), коли $f'' > 0$ (в цій точці). У нашому випадку $y = \frac{1}{x}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$, оскільки $x > 0$, $y'' > 0$ і функція $y = \frac{1}{x}$ — опукла. При стисканні (розтягуванні)опуклість зберігається, тому множина $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \\ x > 0 \end{cases}$, опукла.

5. Розглянемо інші приклади кривих другого порядку.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ задає пару прямих оскільки його можна записати $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$; $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ — діагоналі прямокутника (рис. 111).

Діагоналі прямокутника (див. рис. 111) розбивають площину на чотири області:

в областях 1, 3 виконується $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) > 0$,

в областях 2, 4 виконується $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) < 0$.

Отже, враховуючи, що $|x| \geqslant a$, вітка гіперболи (5.13) лежить у заштрихованій області (рис. 111).

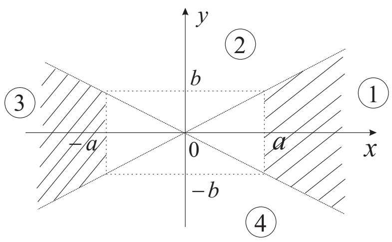


*Рис.*111

Пряма l називається *асимптотою* кривої γ, якщо відстань від точки P кривої γ до прямої l прямує до нуля при віддаленні точки у нескінченність.

Доведемо, що прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ — асимптоти гіперболи (5.13). Враховуючи симетрію, досить розглянути вітку гіперболи, що розташована у 1-му квадраті, і довести, що пряма $y_1 = \frac{b}{a}x$ — асимптота кривої $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,

$$y_1 - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}};$$

$$\lim_{x \to \infty}(y_1 - y) = 0.$$

Звідси випливає, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ — асимптота кривої $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ і крива лежить під прямою (рис. 112).

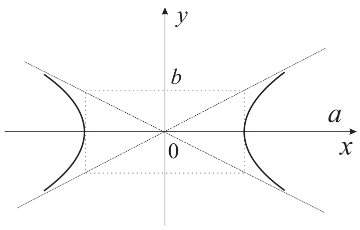


Рис.112

Розглянемо сімейство гіпербол

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h. \tag{5.14}$$

1. Нехай $h > 0$, останнє рівняння можна записати так:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1.$$

Одержали сімейство гіпербол, півосі яких змінюються зі зміною h, а асимптоти не змінюються (рис. 113).

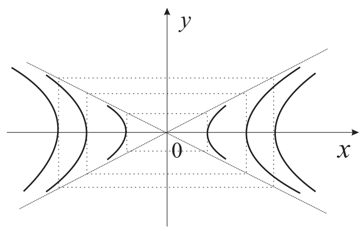


Рис.113

2. Нехай $h < 0$, рівняння (5.14) запишемо так:

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{-h})^2} - \frac{x^2}{(a\sqrt{-h})^2} = 1.$$

Одержали сімейство гіпербол, що лежать в областях 2, 4 (рис.111, 114).

Дві гіперболи, що визначаються умовами $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в одній і тій же системі координат і при одних і тих же значеннях a, b, називаються *спряженими* одна до другої.

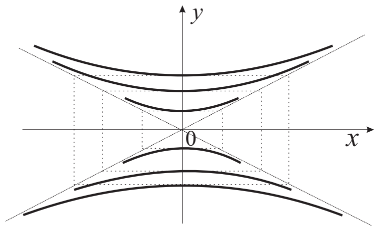


*Рис.*114

Дві гіперболи з різними значеннями h не перетинаються. Якщо h змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, то гіперболи і асимптоти покривають всю площину один раз.

Розглянемо різні способи задання гіперболи:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ — неявне задання гіперболи;
$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$ — явне задання правої вітки гіперболи (5.13);
$x = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$ — явне задання лівої вітки гіперболи (5.13);
$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = b\operatorname{sh} t. \end{cases}$, $-\infty < t < +\infty$ — параметричне рівняння правої вітки гіперболи.

Еліпс складається з однієї зв'язної компоненти. Гіпербола складається з двох зв'язних компонент, і кожна зв'язна компонента гіперболи задається явно.

Гіпербола має геометричну властивість, подібну геометричній властивості еліпса. А саме, геометричним місцем точок, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок площини, що називаються *фокусами*, — величина стала і рівна $2a$, є гіпербола.

Довести самостійно.

Гіпербола має фокальну властивість, аналогічну фокальній властивості еліпса.

5.1.3 Парабола.

Розглянемо геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню 2-го порядку:

6.
$$y^2 = 2px. \tag{5.15}$$

Крива $y = x^2$ нам добре відома, її називають *параболою*, $x = \frac{y^2}{2p}$ — також парабола, $y^2 = 2px$, $p > 0$ (рис. 115), крива однозначно проектується на вісь Oy.

Самостійно довести, що множина точок, координати яких задовольняють нерівності $y^2 - 2px < 0$, опукла.

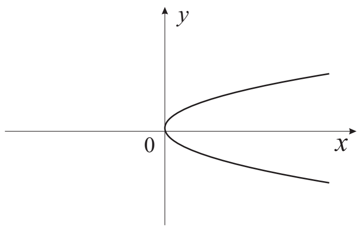


*Рис.*115

Якщо p змінюється від 0 до $+\infty$, то параболи покривають півплощину $x > 0$, крім додатньої півосі абсцис.

Парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$, одержується з параболи $y^2 = x$ шляхом стискання (розтягування) відносно осі Ox. Рівняння (5.15) задає параболу явно. Ox — вісь симетрії параболи (5.15).

Вправа. Знайти геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянням

7. $x^2 - 1 = 0$;

8. $x^2 + 1 = 0$;

9. $x^2 = 0$.

5.2 Канонічні рівняння поверхонь 2-го порядку.

Розглянемо сімейство поверхонь

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h.$$

1. Нехай $h = 1$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ - \ \text{рівняння еліпсоїда.} \tag{5.16}$$

Точка $O(0,0,0)$ — центр симетрії поверхні, оскільки якщо точка $P(x,y,z)$ лежить на поверхні (5.16), то і точка $P'(-x,-y,-z)$ лежить на поверхні (5.16).

Площини $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ є площинами симетрії поверхні, оскільки якщо точка $P(x, y, z)$ належить поверхні, то і точки $P'(-x, y, z)$, $P''(x, -y, z)$, $P'''(x, y, -z)$ належать поверхні.

Із рівняння (5.16) випливає, що $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$ $(a,\ b,\ c > 0)$.

Якщо $a = b = c = R$, то (5.16) — рівняння сфери радіуса R з центром на початку координат.

Розглянемо сферу радіуса 1 з центром на початку координат, задану рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{5.17}$$

і перетворення стискання простору відносно координатних площин

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = by, \\ z' = cz. \end{cases}$$

Після такого перетворення сфера (5.17) перейде в еліпсоїд (5.16).

Розглянемо переріз поверхні (5.16) площиною $z = 0$, отримуємо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ — еліпс, півосі якого a, b.

Самостійно розглянути переріз еліпсоїда (5.16) площинами $x = 0, y = 0$.

Вісь Ox перетинає еліпсоїд в точках $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$; вісь Oy — в точках $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$; вісь Oz — в точках $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$.

Вправа. Довести, що множина точок, координати яких задовольняють нерівності

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,$$

опукла.

Вказівка. Скористатися тим, що еліпсоїд — образ сфери при стисканні простору.

Розглянемо переріз еліпсоїда площиною, паралельною координатній площині Oxy:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = \rho. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\rho^2}{c^2}, \\ z = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

— рівняння ортогональної проекції перерізу на площину Oxy, в даному випадку проекція перерізу і сам переріз суміщаються паралельним переносом. В загальному випадку це невірно.

Приклад. Розглянемо переріз еліпсоїда (5.16) площиною

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Рівняння ортогональної проекції перерізу на площину Oxy суть його проекції $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(1-x-y)^2}{c^2} = 1$, $z = 0$. Переріз і проекція його не суміщаються рухом у просторі. Це зв'язано з тим, що площина перерізу не паралельна координатній площині Oxy.

Повернемося до рівнянь (5.18). Якщо $|\rho| > c$, то нема точок, координати яких задовольняли б рівнянням (5.18). Якщо $|\rho| = c$, то рівнянням (5.18) задовольняють координати точки $O(0,0,0)$. Якщо $|\rho| < c$, то рівняння (5.18) описують сімейство гомотетичних еліпсів

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{\rho^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{\rho^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

максимальні півосі яких дорівнюють a, b при $\rho = 0$ (рис. 116).

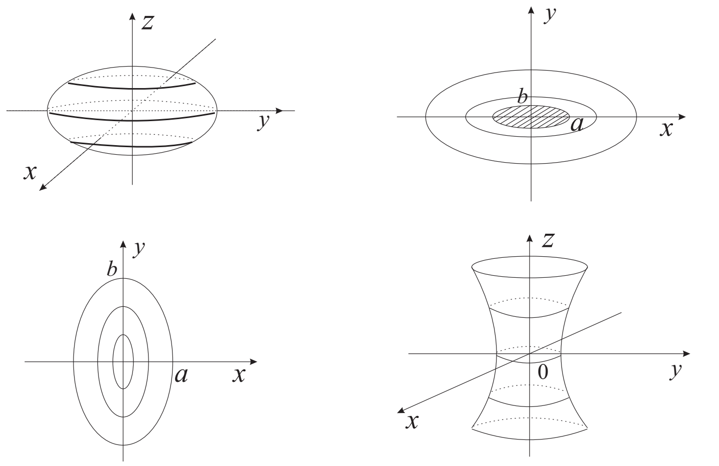


*Рис.*116

*Рис.*117

Якщо $a = b$, то рівняння (5.18) описує еліпсоїд обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

оскільки площини $z = \rho$ перерізають цей еліпсоїд по колах. Еліпсоїд $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ одержується при обертанні дуги еліпса $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \quad x \geqslant 0 \end{cases}$, навколо осі Oz.

Нагадаємо, що коли поверхня одержується за допомогою обертання кривої $\begin{cases} x = f_1(t) \\ z = f_2(t) \end{cases}$, навколо осі Oz, то рівняння поверхні можна записати так:

$$\begin{cases} x = f_1(t)\cos\varphi, \\ y = f_1(t)\sin\varphi, \\ z = f_2(t), \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Параметричне задання дуги еліпса записується у вигляді

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = 0, \\ z = c\sin t, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Звідси одержуємо параметричне задання еліпсоїда обертання:

$$\begin{cases} x = a\cos t\cos\varphi, \\ y = a\cos t\sin\varphi, \\ z = c\sin t, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Параметричне задання довільного еліпсоїда має слідуючий вигляд:

$$\begin{cases} x = a\cos t\cos\varphi, \\ y = b\cos t\sin\varphi, \\ z = c\sin t, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Топологічна будова еліпсоїда: еліпсоїд гомеоморфний сфері. Гомеоморфізм можна задати так: оскільки еліпсоїд — опукле тіло, то кожен промінь, що виходить з його центра, перетинає його в одній точці. Розглянемо сферу з тим же центром. Промінь, що виходить із центра, перетинає сферу в точці P, а еліпсоїд — в точці P'. Точки P і P' поставимо у відповідність одна одній. Ця відповідність буде взаємо однозначною і неперервною в обидві сторони. Можна задати гомеоморфізм по-іншому: розглянути параметричне задання еліпсоїда та сфери, поставити у відповідність точки з однаковими значеннями параметрів t, φ.

2. Нехай $h = 0$. Рівнянню
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$
задовольняє тільки точка $O(0,0,0)$.

3. Нехай $h = -1$. Не існує дійсних точок, що задовольняють рівнянню
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

При $h > 0$, рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h$ описує сімейство гомотетичних еліпсоїдів, півосі яких $a' = a\sqrt{h}$, $\ b' = b\sqrt{h}$, $\ c' = c\sqrt{h}$ при $h \to 0$ стягуються в точку. Якщо h змінюється від 0 до $+\infty$, то еліпсоїди покривають весь простір, тобто через одну точку простору проходить один еліпсоїд сімейства.

Розглянемо сімейство поверхонь
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = h \ (a, b, c > 0).$$

4. Нехай $h = 1$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5.19}$$
— рівняння однопорожнистого гіперболоїда.

Координатні площини є площини симетрії поверхні однопорожнистого гіперболоїда.

Застосуємо метод перерізів для з'ясування форми поверхні.

Розглянемо переріз поверхні (5.19) площинами, паралельними Oxy, тобто площинами $z = \rho$ (оскільки Oxy — площина симетрії поверхні (5.18), то можна розглянути лише випадок, коли $\rho \geqslant 0$):
$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = \rho. \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\rho^2}{c^2}, \\ z = 0 \end{array} \right.$$

— ортогональна проекція перерізу на площину Oxy; ці системи рівнянь описують сімейства гомететичних еліпсів

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{1+\frac{\rho^2}{c^2}})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{1+\frac{\rho^2}{c^2}})^2}=1,$$

$z=0$, півосі яких

$$a'=a\sqrt{1+\frac{\rho^2}{c^2}},\quad b'=b\sqrt{1+\frac{\rho^2}{c^2}}$$

мінімальні півосі дорівнюють a, b при $\rho=0$, при $\rho\to+\infty\quad a',b'\to+\infty$ (рис. 117).

Розглянемо перерізи поверхні (5.19) площинами $y=\rho$ ($\rho\geqslant 0$) (рис. 118),

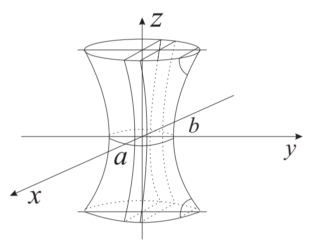


*Рис.*118

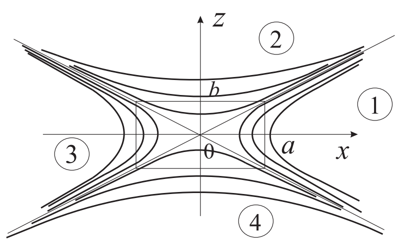


*Рис.*119

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\rho^2}{b^2},\\ y=0\end{cases}$$

— рівняння ортогональної проекції перерізу на площину Oxz, ці рівняння описують сімейство гіпербол з однаковими асимптотами.

Якщо $0\leqslant\rho<b$, то гіперболи сімейства розташовані в областях 1, 3.

Якщо $\rho=b$, то останні рівняння описують пару прямих асимптот.

Якщо $\rho>b$, то гіперболи сімейства розташовані в області 2, 4 (рис. 119).

Таким чином, перерізом поверхні (5.19) площиною $y=0$ є гіпербола. Перетинаючи поверхню (5.19) площинами $y=\rho$ ($\rho\geqslant 0$) і збільшуючи поступово ρ, бачимо, що в перерізі лежать гіперболи, доки $\rho<b$. Якщо $\rho=b$, то в перерізі лежать дві прямі, що перетинаються, якщо $\rho>b$, то в перерізі знову гіперболи.

Якщо обертати навколо осі Oz вітку гіперболи

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

то одержимо однопорожнистий гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Запишемо параметричні задання правої вітки гіперболи:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t, \\ y = 0, \\ z = c\operatorname{sh} t, \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Звідси можна одержати параметричне задання однопорожнистого гіперболоїда обертання:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t\cos\varphi, \\ y = a\operatorname{ch} t\sin\varphi, \\ z = c\operatorname{sh} t, \\ -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Таким чином, можна одержати наступне параметричне задання довільного однопорожнистого гіперболоїда:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t\cos\varphi, \\ y = b\operatorname{ch} t\sin\varphi, \\ z = c\operatorname{sh} t, \\ -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

5. Нехай $h = 0$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{5.20}$$

— рівняння конуса.

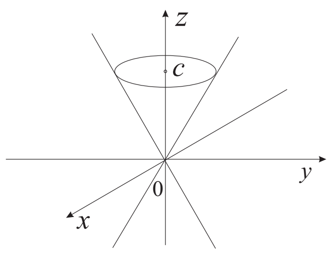


*Рис.*120

Якщо координати точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 0$ задовольняють рівнянню (5.20), то координати точки $P_0(tx_0, ty_0, tz_0)$ також задовольняють рівнянню (5.20). Але

$$\begin{cases} x = tx_0, \\ y = ty_0, \\ z = tz_0, \end{cases}$$

суть параметричні рівняння прямої, що проходить через початок координат. Тому, якщо точка P_0 належить поверхні, то пряма, що проходить через точки $O(0, 0, 0)$ і $P_0(x_0, y_0, z_0)$, належить поверхні.

Переріз поверхні (5.20) площиною $z = c$ є еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c.$$

Провівши всі прямі, що з'єднують початок координат з точками еліпса одержимо конус (5.20), переріз площиною $y = 0$ є прямі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad y = 0.$$

Якщо обертати пряму

$$\begin{cases} x = at, \\ z = ct, \\ -\infty < t < +\infty, \end{cases}$$

навколо осі Oz, то одержимо конус обертання, його параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = at\cos\varphi, \\ y = at\sin\varphi, \\ z = ct, \\ -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Запишемо параметричні рівняння довільного конуса, заданого в канонічному вигляді, тобто у вигляді (5.20):

$$\begin{cases} x = at\cos\varphi, \\ y = bt\sin\varphi, \\ z = ct, \\ -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Однопорожнистий гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ зв'язаний з конусом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ так, як гіпербола зв'язана із своїми асимптотами, тобто при прямуванні на нескінченність відстань між точками однопорожнистого гіперболоїда і конусом прямує до нуля, тому конус називають *асимптотичним.*

Площина $z = 0$ є площиною симетрії конуса і однопорожнистого гіперболоїда, тому досить вести розгляд у півпросторі $z \geqslant 0$. Але коли $z \geqslant 0$, то однопорожнистий гіперболоїд і конус можна задати явно:

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}, \quad z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Самостійно довести, що

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} \left(c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) = 0.$$

Сімейство поверхонь, що задано рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = h, \quad h \geqslant 0$$

є сімейство однопорожнистих гіперболоїдів з одним і тим же асимптотичним конусом. При $h \to 0$ еліпси, що лежать в перерізах однопорожнистих гіперболоїдів площиною $z = 0$, стягується і при $h = 0$ перетворюються в точку, і ми одержимо асимптотичний конус.

6. Нехай $h = -1$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{5.21}$$

— рівняння двопорожнистого гіперболоїда.

Поверхня симетрична відносно координатних площин.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = \rho$, ортогональна проекція перерізу на площину Oxy має рівняння

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{\rho^2}{c^2}, \\ z = 0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Якщо $-c < \rho < c$, то рівняння (5.22) задають порожню множину. Отже, в області $-c < z < c$ нема точок поверхні (5.21). Якщо $|\rho| = c$, то рівняння (5.22) задають точку. Якщо $|\rho| > c$, то рівняння (5.22) описують сімейство гомотетичних еліпсів (рис. 121), півосі яких співпадають з

$$a' = a\sqrt{\frac{\rho^2}{c^2} - 1}, \quad b' = b\sqrt{\frac{\rho^2}{c^2} - 1}.$$

Розглянемо переріз поверхні (5.21) площинами $y = \rho$. Ортогональні проекції перерізів на площину, які задаються рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}\right)^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

є гіперболи. При $\rho = 0$ одержимо гіперболу з мінімальними півосями, що дорівнюють a, c. Якщо $-\infty < \rho < +\infty$, то гіперболи (5.23) покривають частину площини Oxz, що обмежена гіперболою, яка є перерізом поверхні (5.21) площиною $y = 0$ (рис. 122).

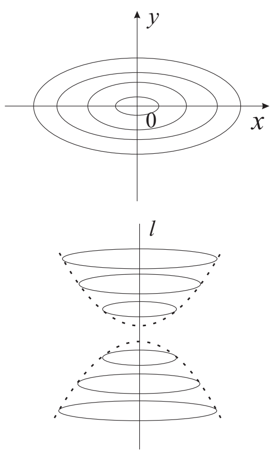


*Рис.*121

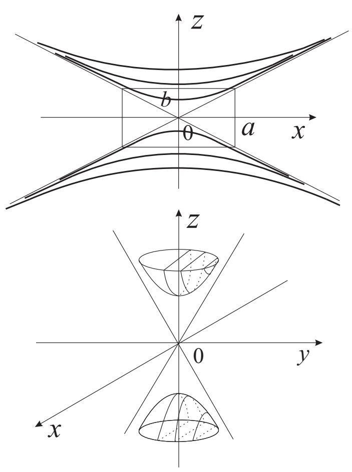


*Рис.*122

Вправа. Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ є асимптотичний конус поверхні (5.21). Довести наведений факт самостійно.

Випадок однопорожнистого і двопорожнистого гіперболоїдів у просторі аналогічний випадку спряженних гіпербол на площині.

Якщо $-\infty < h < +\infty$, то поверхні сімейства

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = h$$

покривають весь простір, через кожну точку простору проходить одна поверхня сімейства.

Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ розбиває простір на три області. Однопорожнистий гіперболоїд (5.19) лежить поза порожнинами конуса. Двопорожнистий гіперболоїд (5.21) лежить всередині порожнин конуса (рис. 123).

Якщо обертати навколо осі Oz гіперболу

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \\ y=0, \end{cases}$$

то одержимо двопорожнистий гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

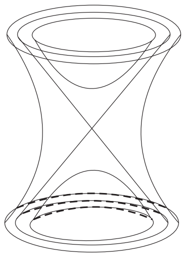


*Рис.*123

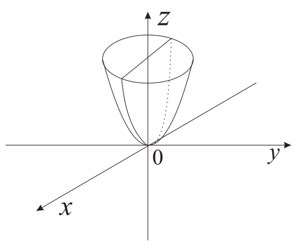


*Рис.*124

Вправи.

а) Записати параметричне рівняння двопорожнистого гіперболоїда обертання, загального двопорожнистого гіперболоїда, який задано рівнянням (5.21).

б) Довести, що множина точок простору, координати яких задовольняють нерівностям

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\leqslant -1, \quad z\geqslant 0$$

опукла. Звідси випливає, що зв'язні компоненти двопорожнистого гіперболоїда — опуклі поверхні (як границі опуклої множини).

7.
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \tag{5.24}$$

— рівняння *еліптичного параболоїда.*

Застосуємо метод перерізів для з'ясування форми поверхні. Перерізами поверхні площинами $z = h$ є криві, ортогональні проекції яких на площину Oxy задаються рівняннями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Якщо $h < 0$, то рівняння задають порожню множину, якщо $h = 0$, то рівняння задають точку $O(0, 0, 0)$, якщо $h > 0$, то останнє рівняння описує сімейство гомотетичних еліпсів, які покривають площину Oxy з виколотою точкою $O(0, 0, 0)$.

Переріз поверхні площиною $y = 0$ є парабола $z = \frac{x^2}{a^2}$ (рис. 124). Перетин поверхні площиною $x = 0$ є парабола $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2}, \\ x = 0. \end{cases}$

Тут Oxy, Oxz — площини симетрії поверхні (5.24). Зауважимо, що центра симетрії у поверхні немає.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = \rho$, рівняння ортогональної проекції перерізу на площину Oyz суть рівняння параболи $z - \frac{\rho^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$. Якщо $-\infty < \rho < +\infty$, то останні рівняння описують сімейство парабол, що одержуються одна з одної за допомогою паралельного переносу вздовж осі (рис. 125).

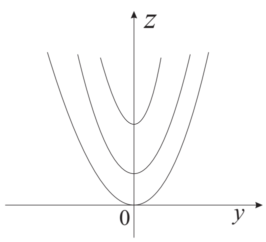


*Рис.*125

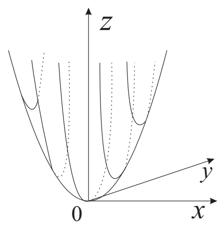


*Рис.*126

Еліптичний параболоїд (5.24) можна одержати, якщо переносити паралельно параболу, яка є переріз (5.24) площиною $x = 0$, так, щоб вершина параболи ковзала вздовж параболи, що є переріз поверхні (5.24) площиною $y = 0$ (рис. 126).

Якщо обертати параболу

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2}, \\ y = 0 \end{cases}$$

навколо осі Oz одержимо *еліптичний параболоїд обертання*

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a^2}.$$

Параметричне рівняння параболи $z = \frac{x^2}{a^2}$ суть

$$\begin{cases} x = r, \\ z = \frac{r^2}{a^2}, \end{cases}$$

звідси параметричне рівняння еліптичного параболоїда обертання

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = \frac{r^2}{a^2}, \\ -\infty < r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Вправа. Самостійно довести, що множина точок, координати яких задовольняють нерівності $z \geqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ опукла.

Звідси буде випливати, що еліптичний параболоїд — опукла поверхня.

Приклад. Границя рідини, що обертається навколо осі, — параболоїд обертання.

8.

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{5.25}$$

— рівняння *гіперболічного параболоїда.*

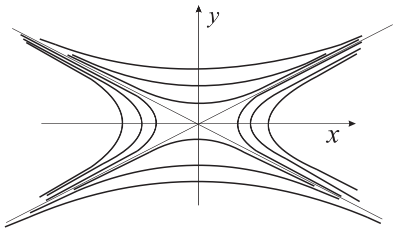
Перерізом поверхні площиною $y = 0$ є парабола $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2}, \\ y = 0, \end{cases}$ площиною $x = 0$ — парабола $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2}, \\ x = 0. \end{cases}$

Якщо розглянути переріз поверхні площинами $x = \rho\,(-\infty < \rho < +\infty)$, то можна побачити, що гіперболічний параболоїд одержується при паралельному переносі параболи, що є перерізом (5.25) площиною $x = 0$, вздовж параболи, яка є перерізом поверхні (5.25) площиною $y = 0$.

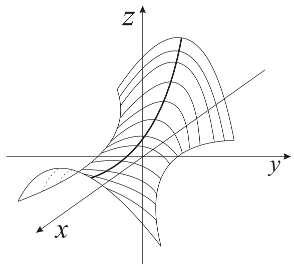
Розглянемо переріз поверхні (5.25) площинами $z = h(-\infty < h < +\infty)$, ортогональні проекції перерізів на площину Oxy утворюють сімейство гіпербол (при $h = 0$ пару прямих) з одними і тими ж асимптотами (рис. 127, а):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = 0. \end{cases}$$

Зовнішній вигляд гіперболічного параболоїда нагадує сідло (рис. 127, б).



a



b

*Рис.*127

Є більш складні сідлоподібні поверхні. Зокрема, поверхня, задана рівнянням $z = x^3 - 3xy^2$, називається *мавпиним сідлом* (рис. 128).

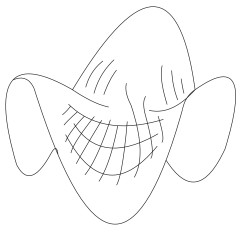


*Рис.*128

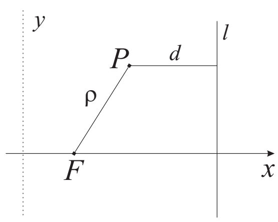


*Рис.*129

Сімейство сідлоподібних поверхонь задається рівняннями

$$z = Re\omega^n,$$

де n — натуральне число, більше або дорівнює 2б $\omega = x + iy$, Re — дійсна частина комплексної функції. При $n = 2$ одержуємо гіперболічний параболоїд, при $n = 3$ — мавпине сідло.

Нагадаємо, що рівняння $\varphi(x, y) = 0$ задає у просторі циліндр з напрямною $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ і твірними, паралельними осі Oz.

Розглянемо сімейство поверхонь, заданих рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h.$$

9. При $h = 1$ одержимо рівняння *еліптичного циліндра*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

10. При $h = 0$ рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

задає вісь z.

11. При $h = -1$ рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

задає порожню множину, тобто немає точок з дійсними координатами, які задовольняють цьому рівнянню.

12.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— рівняння *гіперболічного циліндра.*

13.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

— рівняння площин, що перетинаються.

14.

$$y^2 = 2px$$

— рівняння *параболічного циліндра.*

15.

$$x^2 = a^2$$

— рівняння паралельних площин.

16.

$$x^2 = 0$$

— рівняння площин, що співпадають.

17.

$$x^2 = -a^2$$

— рівняння задає порожню множину.

5.3 Геометричні властивості кривих 2-го порядку.

Ми вже показали, що геометричне місце точок, сума і модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок — величина стала, є відповідно еліпс і гіпербола.

Навпаки, сума відстаней від довільної точки $P(x,y)$ кривої

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b$$

до точок $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ і $F_2(\sqrt{a^2-b^2},0)$ дорівнює $2a$.

Будь-яка гіпербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

має властивість:

$$|\rho_1-\rho_2|=2a,$$

де ρ_1, ρ_2 — відстані від довільної точки гіперболи до двох фіксованих точок $F_1(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ і $F_2(\sqrt{a^2+b^2},0)$. Ця властивість називається *фокальною.*

Таким чином, еліпс і гіпербола мають аналогічні властивості, а параболу з цієї точки зору ми не розглядали. Попробуємо включити параболу в одну систему з еліпсом та гіперболою.

Вправа. Описати геометричне місце точок площини, для яких відношення відстаней від фіксованої точки і фіксованої прямої, що не проходить через вибрану точку, є величина стала і дорівнює $\frac{\rho}{d}=\varepsilon$.

Число ε називається *ексцентриситетом.*

Розв'язування. Введемо на площині прямокутну систему координат так, щоб фіксована точка F лежала на осі Ox, а фіксована пряма l була перпендикулярна до осі Ox. Вісь Oy поки що фіксувати не будемо (рис. 129). Тоді пряма l задається рівнянням $x=c_1$, а точка F має координати $(c,0)$. Нехай відстань від точки F до прямої l дорівнює p. Якщо точка $P(x,y)$ належить шуканому геометричному місцю точок, то

$$\rho=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad d=|x-c_1|;$$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|x-c_1|}=\varepsilon.$$

Перетворимо одержане рівняння:

$$(x-c)^2 + y^2 = \varepsilon^2(x-c_1)^2, \tag{5.26}$$

$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 - 2x(c-\varepsilon^2 c_1) = \varepsilon^2 c_1^2 - c^2.$$

1. Нехай $\varepsilon \neq 1$. Виберемо вісь y так, щоб $c_1 = \frac{c}{\varepsilon^2}$. Тоді рівняння прямої l буде $x = \frac{c}{\varepsilon^2}$. В цій системі координат рівняння (5.26) набуде вигляду

$$x^2(1-\varepsilon^2) + y^2 = \frac{c^2}{\varepsilon^2}(1-\varepsilon^2). \tag{5.27}$$

а) Нехай $\varepsilon < 1$. Рівняння (5.27) запишемо так:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{c}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^2} = 1,$$

це рівняння еліпса (рис. 130).

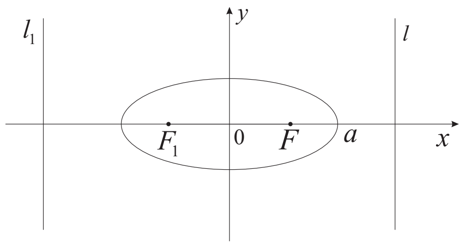


*Рис.*130

Його півосі $a = \frac{c}{\varepsilon}$, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$; $c = \sqrt{a^2-b^2}$ — абсциса фокуса; ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Доведемо, що точка F — один із фокусів еліпса. Дійсно, абсциса фокуса дорівнює $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{a^2-a^2(1-\varepsilon^2)} = c$ і співпадає з абсцисою точки F.

Пряма l називається *директрисою* еліпса. Рівняння директриси

$$x = \frac{c}{\varepsilon^2} \quad \text{або} \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Із властивостей симетрії еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ випливає, що існують фокус F_1 і директриса l_1, симетричні, відповідно, F і l відносно осі Oy.

б) Нехай $\varepsilon > 1$. Рівняння (5.27) запишемо так:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{c}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right)^2} = 1,$$

це рівняння гіперболи (рис. 131).

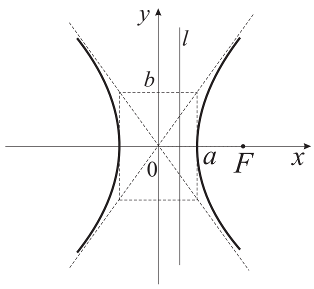


*Рис.*131

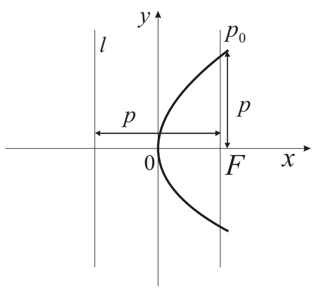


*Рис.*132

Її півосі $a = \frac{c}{\varepsilon}$, $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — абсциса фокуса; ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Точка $F(c, 0)$ — один з фокусів гіперболи.

Пряма $l : x = \frac{c}{\varepsilon^2} = \frac{a}{\varepsilon}$ — директриса гіперболи.

З'ясуємо, як розташована директриса відносно гіперболи. Для гіперболи $\varepsilon > 1$, тому директриса знаходиться лівіше вершини гіперболи (розглядаємо праву вітку гіперболи).

Симетрично відносно осі Oy розташовані другі фокус і директриса гіперболи.

2. Нехай $\varepsilon = 1$. Виберемо вісь Oy так, щоб $c = c_1$.

Рівняння (5.26) матиме вигляд $y^2 - 4cx = 0$ — це рівняння параболи (рис.132). Точка F називається *фокусом* параболи, пряма l — *директрисою.* Згадаємо канонічне рівняння параболи $y^2 = 2px$. Отже, $4c = 2p$ і $p = 2c$. Але $2c$ — це відстань між фокусом і директрисою. Таким чином, p — відстань між фокусом і директрисою.

Отже, залежно від значень ексцентриситету шуканим геометричним місцем точок є або еліпс, або гіпербола, або парабола.

Справедливе і обернене твердження: кожна з цих кривих є геометричне місце точок, відношення відстаней яких від фіксованої точки і фіксованої прямої, що проходить через цю точку, є величина стала.

Проведемо через фокус пряму, паралельну осі Oy, в верхній півплощині вона перетне параболу в точці p_0 з координатами (c, p). Отже, відстань від точки p_0 до осі Ox дорівнює p (рис. 132).

Розглянемо еліпс (гіперболу). Проведемо через фокус пряму, паралельну осі Oy, в I квадранті вона перетне еліпс (гіперболу) в точці p_0 (рис. 133).

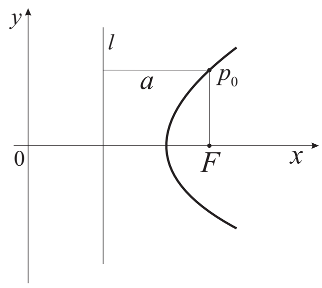


*Рис.*133

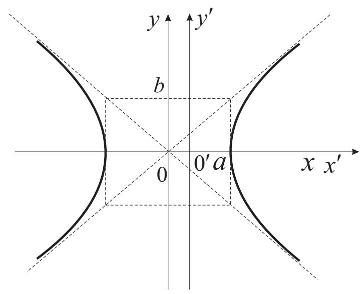


*Рис.*134

Знайдемо відстань від точки p_0 до осі Ox. Обчислимо спочатку відстань d_0 між фокусом і відповідною директрисою еліпса (гіперболи) $F(c, 0)$, l:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad c = a\varepsilon, \quad d_0 = \left| a\varepsilon - \frac{a}{\varepsilon} \right|.$$

Але $\frac{|p_0F|}{d_0} = \varepsilon$, звідси $|p_0F| = d_0\varepsilon = \frac{|c^2-a^2|}{a} = \frac{b^2}{a}$.

Величину $\frac{b^2}{a}$ також позначимо через p, де p має єдиний геометричний зміст для еліпсів, гіпербол і парабол, і називається *фокальним параметром.*

Вправи.

1. Із директоріальної властивості одержати фокальну властивість еліпсів (гіпербол), тобто з того, що $\frac{\rho}{d} = \varepsilon$, одержати $\rho_1 + \rho_2 = 2a \quad (|\rho_1 - \rho_2| = 2a)$.

2. Нехай на площині зафіксовані точки F_1 і F_2, M — довільна точка площини. Позначимо $|MF_1|$ і $|MF_2|$, відповідно, через ρ_1, ρ_2. Знайти геометричне місце точок таких, що $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \varepsilon = const$.

3. Замінимо фіксовані точки фіксованими прямими. Відстань від довільної точки M до цих прямих позначимо через d_1, d_2.

   а) Знайти геометричне місце точок, для яких $d_1 + d_2 = const$.

   б) Знайти геометричне місце точок, для яких $\frac{d_1}{d_2} = \varepsilon = const$.

Еліпс, гіперболу і параболу можна включити в одне сімейство кривих, виходячи з інших міркувань.

Запишемо рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в новій системі координат, яка зв'язана зі старою формулами $x'=x+a, \quad y'=y$:

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

Перетворимо останнє рівняння (в подальшому штрих опускаємо, тобто нову систему координат позначаємо через Oxy):

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Згадаємо, що $p=\frac{b^2}{a}$ і для еліпсів $b^2=a^2-c^2$. Тоді останнє рівняння прийме вигляд

$$y^2=2px-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2.$$

Оскількии $\frac{c}{a}=\varepsilon$, то рівняння еліпса має вигляд

$$y^2=2px-x^2(1-\varepsilon^2), \quad \varepsilon<1.$$

Останнє рівняння можна розглядати як рівняння сімейства еліпсів, що залежать від ε.

Якщо $\varepsilon=0$, то останнє рівняння описує коло.

Розглянемо гіперболу, що задана рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Запишемо рівняння правої вітки гіперболи в новій системі координат, яка зв'язана зі старою формулами $\begin{cases} x'=x-a, \\ y'=y, \end{cases}$ (рис. 134):

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

Перетворимо останнє рівняння (штрихи в подальшому опускаємо):

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Оскільки $\frac{b^2}{a}=p$ і для гіперболи $b^2=c^2-a^2$, одержимо

$$y^2=2px-x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right).$$

Оскільки $\frac{c}{a}=\varepsilon$, то рівняння гіперболи

$$y^2=2px-x^2(1-\varepsilon^2),\quad \varepsilon>1.$$

Рівняння еліпса, параболи і гіперболи, відповідно, будуть

$$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2,\quad \varepsilon<1;$$

$$y^2=2px;$$

$$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2,\quad \varepsilon>1.$$

Якщо $\varepsilon\to 1$, то еліпс прямує до параболи (рис.135).

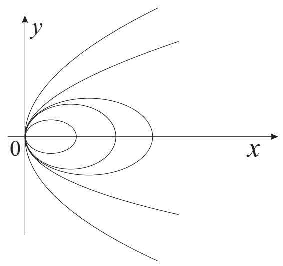


*Рис.*135

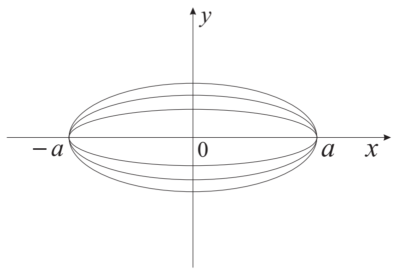


*Рис.*136

Відомо, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$, тому для $\frac{c}{a}\to 1$ потрібно, щоб один із фокусів прямував до нескінченності, при цьому другий фокус прямує до фокуса параболи.

Якщо $\varepsilon\to 1$, то права вітка гіперболи наближається до параболи.

Таким чином, рівняння $y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$ описує різні криві 2-го порядку при зміні ε.

Якщо $\varepsilon=0$, то *коло*; якщо $0<\varepsilon<1$, то *еліпс*; якщо $\varepsilon=1$, то *параболу*; якщо $1<\varepsilon<\infty$, то *гіперболу.*

З'ясуємо, як змінюється форма еліпса і гіперболи при зміні значень ексцентриситету. Розглянемо еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Але $b^2=a^2(1-\varepsilon^2)$, тому рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1$.

Зафіксуємо a. Якщо $\varepsilon=0$, одержимо коло. Якщо ε збільшується від 0 до 1 ($0<\varepsilon<1$), піввісь b зменшується, еліпс «сплющується» до відрізка $-a\leqslant x\leqslant a$.

Розглянемо гіперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Але $b^2=a^2(\varepsilon^2-1)$, тому рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\varepsilon^2-1)}=1$.

Зафіксуємо a і подивимось, як буде змінюватися форма гіперболи при зміні ε. Якщо $\varepsilon \to +\infty$, гіпербола прямує до пари прямих $x = \pm a$. Якщо ε зменшується від $+\infty$ до 1 $(1 < \varepsilon < +\infty)$, зменшується піввісь b, гіпербола «сплющується» (рис.137) до променів $|x| \geqslant a, y = 0$.

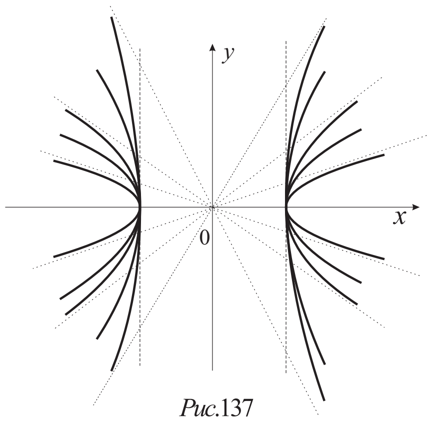


*Рис.*137

Еліпси і гіперболи з рівними ε, але різними a, гомотетичні. Отже, ексцентриситет повністю визначає їх форму.

5.4 Рівняння кривих 2-го порядку в полярній системі координат.

Рівняння еліпса в прямокутній системі координат Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введемо полярну систему координат (ρ, φ) наступним чином: полюс помістимо в точку O, за полярну піввісь приймемо додатну піввісь осі Ox. Тоді $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right.$ і рівняння еліпса в полярній системі координат буде

$$\rho^2 (\frac{cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{sin^2 \varphi}{b^2}) = 1,$$

або

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{sin^2 \varphi}{b^2}}}.$$

Ми бачимо, що одержане рівняння дуже складне.

Розглянемо іншу систему координат: за полюс виберемо один із фокусів кривої 2-го порядку, за полярну піввісь — пряму, що перпендикулярна до директриси (напрям полярної осі від директриси до фокуса (рис.138)).

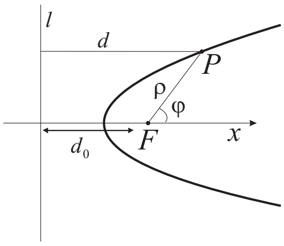


*Рис.*138

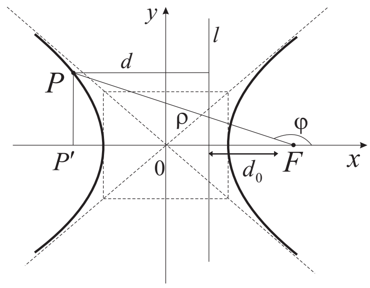


*Рис.*139

Ми знаємо, що для точок кривої 2-го порядку $\frac{\rho}{d} = \varepsilon$. Але $d = d_0 + \rho\cos\varphi$.

Отже, рівняння кривої 2-го порядку (еліпса, правої вітки гіперболи, параболи) в полярній системі координат

$$\frac{\rho}{d_0 + \rho\cos\varphi} = \varepsilon$$

або

$$\rho = \frac{d_0\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Згадаємо, що $d_0\varepsilon = p$, і запишемо рівняння еліпса, параболи, правої вітки гіперболи у вигляді

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Оскільки $d = |PF| - d_0 = -\rho\cos\varphi - d_0$ (рис.139), то

$$\frac{\rho}{-\rho\cos\varphi - d_0} = \varepsilon$$

або

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

для лівої вітки гіперболи.

5.4.1 Орбіти планет.

В 1608 — 1609 р.р. криві 2-го порядку стали об'єктом природознавства. Коперник стверджував, що планети обертаються навколо Сонця. Кеплер показав, що планети обертаються по еліпсах, в одному із фокусів якого знаходиться Сонце.

Задача двох тіл. Нехай є два матеріальні тіла з масами m і M^*, де маса M^* значно більша m. І нехай відстань між ними така, що, не втрачаючи загальності, можна вважати тіла точками. Крім того, будемо вважати, що тіло з масою M^* нерухоме, і що тіла утворюють замкнену систему, тобто інші тіла не впливають на них. Яка траєкторія руху тіла з масою m?

В подальшому для позначення тіл використовуємо ті ж букви m і M^*.

Розв'язування. На тіло m діє сила F, величина якої $|F| = -\frac{GmM^*}{r^2}$, де G - константа тяжіння, r - відстань між m і M^* (рис.140). В механіці доведено, що траєкторія руху m є плоскою. В площині руху m введено прямокутну декартову систему координат з початком у точці M^*. Нехай $(V_x(t), V_y(t))$ — вектор швидкості тіла m в момент часу $t, a(x_0, y_0)$ — координати m при $t = 0$.

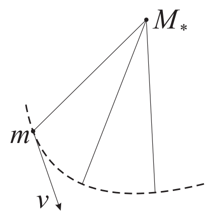


*Рис.*140

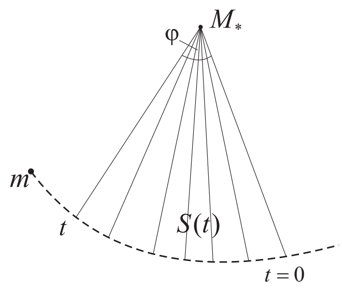


*Рис.*141

Згадаємо 2-й закон Ньютона $ma = F$, де a - прискорення, і запишемо систему диференціальних рівнянь :

$$m\frac{dV_x}{dt} = \frac{GmM^*x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = \frac{GmM^*y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad V_x(0) = V_{01}, \quad V_y(0) = V_{02}.$$

Розв'язавши систему, знайдемо траєкторію руху тіла m.

Щоб спростити систему диференціальних рівнянь, перейдемо до полярної системи координат, полюс якої помістимо в точку M^*. Нехай (r, φ) - полярні координати. Використовуючи диференціальні рівняння, можна довести, що тіло m рухається по кривій 2-го порядку:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Значення p і ε мають наступний фізичний зміст. Енергія E системи двох тіл m і M^* стала (закон збереження енергії), оскільки система замкнена. Момент імпульсу M зберігається:

$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GM^*m}{r} = const,$$

$$M = |r \times mV| = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = rm\frac{ds}{dt} = const,$$

де $S(t)$ — площа, що замітається радіус-вектором точки m від моменту часу $t = 0$ до моменту часу t. Фізичний зміст p і ε наступний:

$$p = \frac{M^2}{Gm^2M^*}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{G^2m^3(M^*)^2}}.$$

Звідси, якщо $E < 0$, траєкторією руху буде еліпс; якщо $E = 0$ — парабола. Але $E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GM^*m}{r}$, тому траєкторію руху тіла m з фіксованою точкою початку руху визначає його початкова швидкість.

Приклад. Під кутом α до горизонту вистрілили снаряд з початковою швидкістю V. Яка його траєкторія?

Розв'язування. Швидкість вітру, опір повітря ігноруємо, враховуємо лише силу тяжіння.

Виконується другий закон Ньютона $ma = F$, $F = -mg$. Звідси $a_x = 0$, $a_y = -g$. З іншого боку,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}.$$

Таким чином, $\frac{dV_y}{dt} = -g$, звідси $V_y = -gt + c_1$, але $V_y = \frac{dy}{dt}$, тому $y = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2$, $\frac{dV_x}{dt} = 0$. Отже, $V_x = c_3$, звідки $x = c_3t + c_4$.

Таким чином, одержана система рівнянь

$$\begin{cases} x = c_3t + c_4, \\ y = \frac{-gt^2}{2} + c_1t + c_2. \end{cases}$$

Для визначення констант скористаємося початковими умовами

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = V_0 \cos\alpha,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = V_0 \sin\alpha.$$

Одержимо $c_2 = c_4 = 0, \quad c_1 = V_0 \sin\alpha, \quad c_3 = V_0 \cos\alpha$.
Отже, траєкторія руху снаряда описується рівняннями

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos\alpha, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Це параметричні рівняння параболи.

5.5 Дотичні до кривих 2-го порядку. Оптичні властивості кривих.

5.5.1 Дотичні до кривих 2-го порядку.

Нехай γ - елементарна крива і $P_0, \ P$ — різні точки на ній. Пряма l, що проходить через точки $P_0, \ P$ називається *січною.* Коли $P \to P_0$, січна l наближається до деякого граничного положення l_0 або границі немає (рис.142). Якщо границя існує, то гранична пряма l_0 називається *дотичною* до кривої в точці P_0.

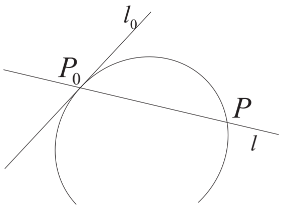


*Рис.*142

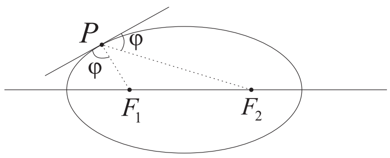


*Рис.*143

Приклад. У графіка функції $y = |x|$ в точці $P_0(0, \ 0)$ немає дотичної. Зауважимо, що якщо функція $y = f(x) \in C^1$, то в кожній точці (x_0, y_0), що належить графіку функції, дотична існує і задається рівнянням $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ або

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.28}$$

Розглянемо еліпс, який задано рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В околі довільної точки, що належить еліпсу, його можна задати явно: $y = y(x)$ або $x = x(y)$.

Розглянемо частину еліпса, що лежить у верхній півплощині $y > 0$. Вона задається рівнянням

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$y' = -\frac{\frac{b^2}{a^2}x}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ належить еліпсу і $y_0 > 0$. Тоді

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Підставимо знайдені вирази в рівняння (5.28) і одержимо рівняння дотичної до еліпса в точці (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Звідси

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{5.29}$$

Аналогічно можна показати рівняння дотичної до еліпса в точці $P_0(x_0, y_0)$, де $y_0 < 0$.

Рівняння дотичної до еліпса в точці $(a, 0)$ або $(-a, 0)$ буде $x = a$ або $x = -a$. Той же результат одержимо, якщо підставимо значення $x_0 = \pm a, \quad y_0 = 0$ в рівняння (5.29).

Таким чином, рівняння (5.29) задає дотичну до еліпса в довільній точці $P_0(x_0, y_0)$, що належить йому.

Рівняння (5.29) задає пряму, нормаль якої $n = (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})$, і напрямний вектор $\tau = (-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2})$.

Розглянемо (без доведення), як одержати рівняння дотичної, якщо крива задана неявно: $F(x, y) = 0$.

Нехай є функція двох змінних $F(x, y)$. Якщо вважати y фіксованим, то $F(x, y)$ стає функцією змінної x. Функція $\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$ називається *частинною похідною* функції F по x. Аналогічно $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ називається частинною похідною функції F по y.

Наприклад, $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}$.

Якщо крива задана рівнянням $F(x, y) = 0$, де $F(x, y)$ має неперервні частинні похідні, $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$ в точці (x_0, y_0), що лежить на кривій, то рівняння дотичної до кривої в точці (x_0, y_0) буде

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Приклад. Знайдемо вказаним способом дотичну до еліпса:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0,$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Вправа. Довести самостійно двома способами, що рівняння дотичної в точці (x_0, y_0) до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

буде

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

рівняння дотичної до параболи

$$y^2 = 2px$$

буде

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Розглянемо ще один підхід до визначення дотичної до кривої 2-го порядку. Нехай точки $P_0(x_0, y_0)$ і P належать кривій 2-го порядку. Рівняння січної, що проходить через точки P_0, P:

$$\begin{cases} x = x_0 + a^1 t, \\ y = y_0 + a^2 t. \end{cases} \tag{5.30}$$

Щоб знайти точки перетину кривої і прямої (5.30), потрібно розв'язати рівняння відносно t. Якщо $P \to P_0$, два розв'язки квадратного рівняння збігаються. Записавши умову того, що квадратне рівняння має подвійний корінь, одержимо рівняння дотичної.

Самостійно одержати рівняння дотичних до еліпса, гіперболи і параболи вказаним способом.

5.5.2 Оптичні властивості кривих 2-го порядку.

Твердження 5.5.1. *Світлові промені, що виходять з одного фокуса еліпса, після дзеркального відбиття від еліпса проходять через другий фокус, тобто дотична до еліпса у довільній його точці утворює рівні кути з променями, що виходять з точки дотику і проходять через фокуси (рис.143).*

Твердження 5.5.2. *Світлові промені, що виходять з одного фокуса, після дзеркального відбиття від гіперболи, вважаються такими, що виходять з другого фокуса (рис.144).*

Твердження 5.5.3. *Промені світла, що виходять з фокуса, після дзеркального відбиття від параболи утворюють промені, які паралельні осі симетрії параболи (рис.145).*

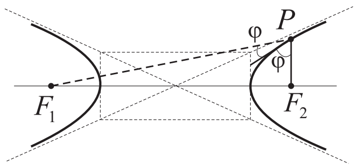


*Рис.*144

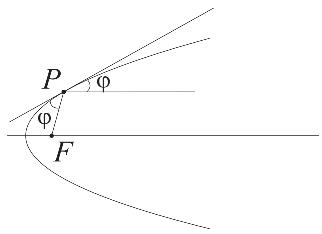


*Рис.*145

Зауваження. *Оптична властивість параболи знаходить широке застосування: параболічні прожектори, параболічні антени, параболічні дзеркала для використання сонячної енергії.*

Доведення. Через довільну точку P параболи проведемо дотичну l до параболи, пряму l_1, паралельну осі симетрії параболи, пряму l_2, що проходить через точку F — фокус параболи. Оскільки кут падіння дорівнює кутові відбиття, то для доведення досить показати, що кут між прямими $l,\ l_1$ дорівнює кутові між прямими $l,\ l_2$. Для того щоб спростити обчислення, будемо доводити, що $\cos\widehat{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}_1)} = \cos\widehat{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}_2)}$, де $\boldsymbol{n}$ — нормаль до параболи в точці P, $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ — напрямні вектори прямих $l_1,\ l_2$, причому вони направлені в сторону опуклості параболи (рис.146).

Виберемо прямокутну декартову систему координат, таку, щоб рівняння нашої параболи в ній було $y^2 = 2px$. Нехай точка P має координати (x_0, y_0). Тоді $yy_0 = p(x+x_0)$ — рівняння дотичної l, $\boldsymbol{n} = (p, -y_0)$, $F(\frac{p}{2}, 0)$,

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (\frac{p}{2} - x_0, -y_0),$$

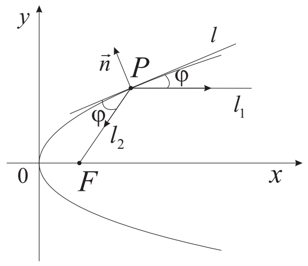


*Рис.*146

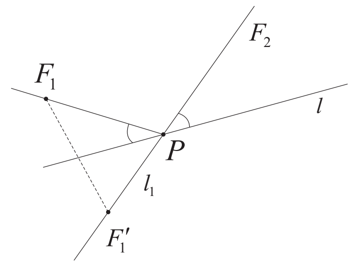


*Рис.*147

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a}_1}) = \frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1 \rangle}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{a}_1|} = \frac{p}{|\boldsymbol{n}|},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_2 \rangle}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{a}_2|} = \frac{p(\frac{p}{2}+x_0)}{|\boldsymbol{n}|\sqrt{(\frac{p}{2}+x_0)^2}} = \frac{p}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Таким чином, $\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a}_1}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a}_2})$ що і потрібно було довести.

■

Твердження 5.5.1, 5.5.2 доводяться аналогічно. Довести їх самостійно.

Розглянемо синтетичне доведення твердження 5.5.1.

Згадаємо розв'язання наступної задачі: дано пряму l і точки $F_1,\ F_2$, що розташовані по одну сторону від прямої. На прямій l потрібно знайти таку точку P, щоб сума відстаней $|F_1P| + |PF_2|$ була найменшою. Задача розв'язується так: будуємо точку P, симетричну точці F_1 відносно прямої l, з'єднуємо точки $F_1,\ F_2$ відрізком прямої l_1, шукана точка — це точка перетину прямих $l,\ l_1$. Отже, точка характеризується тим, що кут між прямими $l,\ F_1P$ дорівнює кутові між прямими $l,\ F_2P$.

Згадаємо тепер, що еліпс — це геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох фіксованих точок $F_1,\ F_2$ (фокусів еліпса) є величина стала, $\rho_1 + \rho_2 = 2a$. Еліпс — опукла фігура, тому дотична l лежить поза еліпсом. Для точок, що лежать поза еліпсом $\rho_1 + \rho_2 > 2$. Отже, на дотичній l точка P, для якої сума відстаней від точок F_1 і F_2 найменша, є точка дотику. Таким чином, кут між прямими $l,\ PF_1$ дорівнює кутові між прямими $l,\ PF_2$, що і потрібно було довести (рис.148).

Із цього доведення, як граничний випадок, одержується оптична властивість параболи. Дійсно, раніше ми довели, що сімейство еліпсів, у яких фіксовані одна вершина і один фокус F_1, а другий фокус F_2 йде

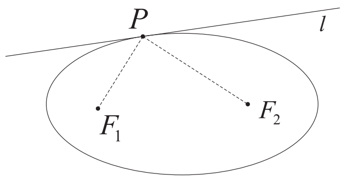


*Рис.*148

на нескінченність на границі дасть параболу. Але якщо $F_2 \to \infty$, то PF_2 прямує до прямої, що паралельна прямій F_1F_2.

5.6 Еліптична і еліпсоїдальна система координат.

5.6.1 Сімейство конфокальних (співфокусних) еліпсів і гіпербол.

Розглянемо множину еліпсів $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, що мають одну і ту ж пару фокусів, тобто c фіксуємо $c^2 = a^2 - b^2$, a змінюємо. Позначимо a через λ і запишемо рівняння сімейства співфокусних еліпсів так:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \quad (\lambda > c). \tag{5.31}$$

Оскільки сума відстаней довільної точки $P_0(x_0,\ y_0)$ від фокусів $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ дорівнює деякому фіксованому числу $2\lambda_0$ і $\lambda_0 > c$ для будь-якої точки площини, крім точок відрізка $-c \leqslant x \leqslant c,\ y = 0$, то через точку P_0 проходить еліпс із сімейства (5.31) при $\lambda = \lambda_0$. Із геометричної властивості еліпса випливає, що інший еліпс з даними фокусами через фіксовану точку P_0 проходити не буде.

Якщо $\lambda \to +\infty$, еліпс (5.31) йде на нескінченність. Якщо λ прямує до c, то еліпс (5.31) прямує до відрізка $-c \leqslant x \leqslant c,\ y = 0$.

Розглянемо сімейство співфокусних гіпербол $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, c фіксоване $(c^2 = a^2 + b^2)$, a змінюється. Позначимо a через μ і запишемо рівняння гіпербол так:

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \quad \mu < c. \tag{5.32}$$

Покажемо, що через кожну точку $P_0(x_0, y_0)$ площини, крім променів $|x| \geqslant c,\ y = 0$, проходить єдина гіпербола сімейства, тобто знайдеться μ таке, що $\frac{x_0^2}{\mu^2} + \frac{y_0^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0$. Розглянемо функцію $f(\mu) = \frac{x_0^2}{\mu^2} + \frac{y_0^2}{\mu^2 - c^2} - 1$, визначену на інтервалі $(0, c)$. Похідна $f'(\mu) = -\frac{2}{\mu^3}(x_0^2 + y_0^2) < 0$ від'ємна в кожній точці області визначення функції $f(\mu)$. Таким чином, функція строго монотонно спадає. При $\mu \to 0$ функція прямує до $+\infty$, при $\mu \to c$ функція прямує до $-\infty$. Тому, з огляду на неперервність функції, існує значення μ, при якому функція приймає значення 0. Внаслідок монотонності функції це значення єдине.

5.6.2 Еліптична система координат.

Нехай на площині задана декартова система координат. Нехай P — довільна точка площини, що лежить на осях координат. Точка P має декартові координати $(x,\ y)$. З іншого боку, точці P відповідають числа λ, μ, що визначають еліпс (5.31) і гіперболу (5.32), які проходять через точку P. Числа $(\lambda,\ \mu)$ називаються *еліптичними координатами* точки P. Координатними лініями еліптичної системи координат є еліпси і гіперболи.

Очевидно, що декартові і еліптичні координати точки зв'язані рівняннями

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1.$$

Звідси, якщо $x > 0,\ y > 0$, одержуємо

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}, \quad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}. \tag{5.33}$$

Доведемо, що еліптична система координат ортогональна, тобто в кожній точці, дотичні до координатних кривих перетинаються під прямим кутом. Обчислимо кут між нормалями до координатних ліній.

Координати нормалей

$$\boldsymbol{n}_1 = (\frac{x_0}{\lambda^2},\ \ \frac{y_0}{\lambda^2 - c^2}), \quad \boldsymbol{n}_2 = (\frac{x_0}{\mu^2},\ \ -\frac{y_0}{c^2 - \mu^2}).$$

Із формул (5.33) випливає, що $< \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 >= 0$.

5.6.3 Еліпсоїдальна система координат.

Розглянемо три сімейства поверхонь другого порядку:

$$(\lambda\ >\ -c^2\ >\ \mu\ >\ -b^2\ >\ \nu\ >\ -a^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \text{ (еліпсоїди)},$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1 \text{ (однопорожнисті гіперболоїди)},$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1 \text{ (двопорожнисті гіперболоїди)}.$$

Через кожну точку відкритого координатного октанту проходить по одній поверхні із кожного сімейства, тому $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ можна прийняти за координати точки відкритого октанту. Координати $(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ називаються *еліпсоїдальними*.

Вправа. Самостійно розглянути дані сімейства поверхонь. Знайти вираження декартових координат через еліпсоїдальні для точок відкритого октанту.

Розділ 6

Загальна теорія кривих і поверхонь 2-го порядку

6.1 Про метричну класифікацію кривих 2-го порядку.

Загальне рівняння кривої 2-го порядку має вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (6.1)$$

де $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Сімейство кривих (6.1) 5-параметричне. Для задання кривої 2-го порядку в загальному випадку необхідно задати 5 точок.

Зауваження. *Одна і та ж крива в різних системах координат має різні рівняння. Розглянемо сімейство прямокутних декартових координат на площині. Воно залежить від трьох параметрів. Одна прямокутна система координат одержується з іншої за допомогою паралельного переносу, повороту і осьової симетрії.*

Перерахуємо окремі випадки кривих 2-го порядку, що розглянуті раніше.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — еліпс;
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — точка;
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — порожня множина;
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гіпербола;

5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара прямих, що перетинаються;
6. $y^2 = 2px \quad (p \neq 0)$ — парабола;
7. $y^2 = a^2$ — пара паралельних прямих;
8. $y^2 = 0$ — пара прямих, що співпадають;
9. $y^2 = -a^2$ — порожня множина.

Переліченими кривими вичерпуються всі криві 2-го порядку. А саме має місце:

Теорема 6.1.1. *Для кривої 2-го порядку існує така прямокутна система координат на площині, в якій рівняння цієї кривої прийме один з перелічених дев'яти випадків.*

Доведення. Нехай крива L має рівняння (6.1) в деякій прямокутній системі координат Oxy. Перейдемо до нової системи координат Ox_1y_1, яка одержується із системи Oxy за допомогою повороту на кут φ навколо точки O (рис.149). Тоді

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi. \end{cases}$$

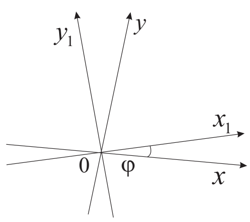


*Рис.*149

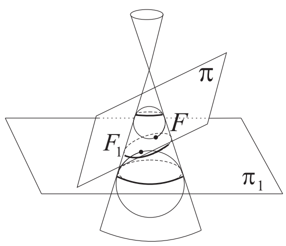


*Рис.*150

Звідси

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}(x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi)^2 +$$

$$+2a_{12}(x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi)(x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi) +$$

$$+a_{22}(x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi)^2 = x_1^2(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi +$$

$$+a_{22}\sin^2\varphi) + 2x_1y_1(-a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}\cos 2\varphi +$$

$$+a_{22}\sin\varphi\cos\varphi)+y_1^2(a_{11}\sin^2\varphi-2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi+a_{22}\cos^2\varphi).$$

Виберемо кут φ таким, щоб у новій системі координат коефіцієнт при x_1y_1 дорівнював 0, тобто

$$a'_{12}=a_{12}\cos 2\varphi+\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\sin 2\varphi=0.$$

Звідси випливає, що якщо $a_{12}\neq 0$, то $ctg 2\varphi=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$. Якщо $a_{12}=0$, то $\varphi=0$.

Ми бачимо, що коефіцієнти рівняння (6.1) змінюються при зміні координат. Але є величини, що залежать від коефіцієнтів, які не змінюються при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Такі величини називаються *інваріантами.* Наприклад

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+$$

$$+a_{11}\sin^2\varphi-2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi+a_{22}\cos^2\varphi=a_{11}+a_{22}.$$

Перевірити самостійно, що $a'_{11}a'_{22}-(a'_{12})^2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$.

Отже, рівняння кривої L в системі координат Ox_1y_1, буде

$$a'_{11}x_1^2+a'_{22}y_1^2+2a'_{13}x_1+2a'_{23}y_1+a'_{33}=0. \tag{6.2}$$

Розглянемо можливі випадки.

а) $a'_{11}a'_{22}\neq 0$ (зауважимо, що оскільки $a'_{11}a'_{22}-(a'_{12})^2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, тобто є інваріантом, і $a'_{12}=0$, то наше обмеження означає, що дискримінант рівняння (6.1) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$).

Тоді

$$a'_{11}x_1^2+a'_{22}y_1^2+2a'_{13}x_1+2a'_{23}y_1+a'_{33}=$$

$$=a'_{11}(x_1+\frac{a'_{13}}{a'_{11}})^2+a'_{22}(y_1+\frac{a'_{23}}{a'_{22}})^2+$$

$$+a'_{33}-\frac{(a'_{13})^2}{a'_{11}}-\frac{(a'_{23})^2}{a'_{22}}.$$

Перейдемо від системи координат Ox_1y_1 за допомогою паралельного переносу до системи координат $O_2x_2y_2$, такої, що точка O_2 в системі координат Ox_1y_1, має координати $(-\frac{a'_{13}}{a'_{11}},-\frac{a'_{23}}{a'_{22}})$, тобто

$$\begin{cases} x_2=x_1+\frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \\ y_2=y_1+\frac{a'_{23}}{a'_{22}}. \end{cases}$$

В новій системі координат рівняння кривої L має вигляд

$$a'_{11}x_2^2 + a'_{22}y_2^2 + a''_{33} = 0, \qquad (6.3)$$

де $a''_{33} = a'_{33} - \frac{(a'_{13})^2}{a'_{11}} - \frac{(a'_{23})^2}{a'_{22}}$.

Залежно від знаків a'_{11}, a'_{22}, a''_{33} рівняння (6.3) задає

1. $(+ + -)$ — еліпс,
2. $(+ + 0)$ — точку,
3. $(+ + +)$ — порожню множину,
4. $(+ - +)$ — гіперболу,
5. $(+ - 0)$ — пару прямих, що перетинаються.

б) $a'_{11}a'_{22} = 0$ (дискримінант рівняння (6.1) дорівнює 0.)

Для визначеності будемо вважати, що $a'_{11} = 0$. Тоді рівняння (6.2) набуде вигляду

$$a'_{22}y_1^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0. \qquad (6.4)$$

Випадок б) розбивається на два підвипадки.

(*) $a'_{13} \neq 0$. Перетворимо рівняння (6.4) так:

$$a'_{22}(y_1 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}})^2 + 2a'_{13}(x_1 + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} - \frac{(a'_{23})^2}{2a'_{13}a'_{22}}) = 0.$$

Нехай тепер

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}} - \frac{(a'_{23})^2}{2a'_{13}a'_{22}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}. \end{cases}$$

В системі координат $O_2x_2y_2$ рівнянням кривої L є

6. $a'_{22}y_2^2 + 2a'_{13}x_2 = 0$ — це рівняння параболи.

(**) $a'_{13} = 0$.

Рівняння (6.4) набуде вигляду

$$a'_{22}y_1^2 + 2a'_{23}y_1 + a'_{33} = 0;$$

перетворимо його:

$$a'_{22}(y_1 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}})^2 + a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{a'_{22}} = 0.$$

Перейдемо до нової системи координат $O_2x_2y_2$, такої, що

$$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}. \end{cases}$$

В цій системі координат рівняння кривої L є

$$a'_{22}y_2^2 + a''_{33} = 0,$$

де $a''_{33} = a'_{33} - \frac{(a'_{23})^2}{a'_{22}}$. Останнє рівняння залежно від знаків $a'_{22},\ a''_{33}$ задає

7. $(+\,-)$ — пару паралельних прямих,
8. $(+\ 0)$ — пару прямих, що співпадають,
9. $(+\,+)$ — порожню множину.

Теорема повністю доведена.

■

Зауваження. a'_{11} *і* a'_{22} *не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки в протилежному випадку рівняння* (6.2) *стає лінійним. Формули переходу від координат* $x_1,\ y_1$ *до координат* $x,\ y$ *— лінійні. Тому, якщо рівняння* (6.2) *лінійне, то буде лінійним і рівняння* (6.1)*, що суперечить припущенню* $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Розглянемо переріз конуса обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

різними площинами.

Зауважимо, що якщо площина не проходить через вершину конуса, то в перетині немає прямих, оскільки, як нижче ми доведемо, всі прямі, які лежать на конусі, проходять через цю вершину.

Розглянемо перетин конуса площинами, які не проходять через його вершину. Можливі наступні варіанти.

1. Площина перетинає одну порожнину конуса і не паралельна ні одній твірній конуса. Тоді в перерізі лежить обмежена крива 2-го порядку, тобто еліпс.

2. Площина паралельна одній із твірних конуса. Тоді площина перетинає одну порожнину конуса по нескінченній кривій. Нескінченна крива з однією зв'язною компонентою є парабола.

3. Площина перетинає обидві порожнини конуса. Тоді крива, що лежить на перерезі, має дві вітки, отже, це гіпербола.

Якщо площина перерізу проходить через вершину конуса, то в перерізі будуть або дві прямі, що перетинаються, або дві прямі, що збігаються, або точка.

Тому криві 2-го порядку називають конічними перерізами.

Вправа. Самостійно розглянути перерізи поверхонь 2-го порядку різними площинами.

Нехай перетином конуса обертання площиною π є еліпс. Як знайти фокуси і директриси цього еліпса? Впишемо в конус сферу, що дотикається площини π в точці F_1. Нехай π_1 — площина, в якій лежить коло дотику сфери з конусом. Площини π і π_1 перетинаються по прямій d_1 (рис.150). Точка F_1 — фокус еліпса, а пряма d_1 — директриса, що відповідає цьому фокусу. Якщо вписати в конус другу сферу, одержимо аналогічним чином другий фокус і другу директрису еліпса.

Вправа. Довести ці твердження самостійно. Самостійно розглянути випадки, коли перетинами є гіпербола або парабола.

6.2 Центр, вісь і площина симетрії.

6.2.1 Центр поверхні (кривої) 2-го порядку.

Визначення 6.2.1. *Поверхня (крива) F називається центрально - симетричною, якщо існує така точка O, що разом з кожною точкою P, поверхні (кривої) належить точка P' симетрична точці P відносно O. Точка O називається центром поверхні (кривої).*

Згадаємо, що довільну поверхню (криву) 2-го порядку можна задати рівнянням

$$F = a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i + c = 0, \tag{6.5}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 \neq 0, \quad i,\ j = 1,2,3 \quad (i,\ j = 1,2).$$

Нехай F — центрально-симетрична поверхня (крива). Розташуємо початок координат в центрі поверхні (кривої). З'ясуємо, який вигляд прийме в цьому випадку рівняння (6.5). Нехай точка $P(-x^1,-x^2,-x^3)$ $(P(-x^1,-x^2))$ належить F. Тоді точка $P^{'}(-x^1,-x^2,-x^3)$ $(P^{'}(-x^1,-x^2))$ також належить F. Отже, її координати задовольняють рівнянню (6.5):

$$a_{ij}x^ix^j-2b_ix^i+c=0. \tag{6.6}$$

Віднімаючи з рівняння (6.5) рівняння (6.6), одержимо

$$b_ix^i=0. \tag{6.7}$$

Запишемо рівність (6.7) у вигляді

$$\left\langle \boldsymbol{b},x \right\rangle=0,$$

де $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $x=(x^1,x^2,x^3)$, ($\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$, $x=(x^1,x^2)$), отже, $\left\langle \boldsymbol{b},x \right\rangle=0$ при будь-якому x, що задовольняє рівнянню (6.5).

Виберемо три (дві) точки, що лежать на поверхні (кривій), радіус-вектори яких $x=(x^1,x^2,x^3)$ $(x=(x^1,x^2))$ лінійно незалежні. Для них $\left\langle \boldsymbol{b},x_k \right\rangle=0$, $k=1,2,3$ $(k=1,2)$. Отже, $\boldsymbol{b}=0$. Якщо таких трьох (двох) точок немає, то легко показати, що рівняння (6.5) задає дві площини (прямі), що співпадають, і має вигляд

$$(a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3)^2 \ = \ 0, \ ((a_1x^1+a_2x^2)^2 \ = \ 0),$$

тобто і в цьому випадку вектор $\boldsymbol{b}=0$.

Таким чином, якщо центр симетрії поверхні (кривої) F співпадає з початком координат, то рівняння (6.5) не має лінійних членів.

Очевидно, що справедливе і обернене твердження: якщо рівняння поверхні (кривої) не має лінійних членів, то поверхня (крива) центральна і центром є початок координат.

Знайдемо умови, при виконанні яких поверхня (крива) F, задана рівнянням (6.5), буде центральною. Будемо шукати такий паралельний перенос $x^i=x_1^i+c^i$, $i=1,2,3$ $(i=1,2)$, щоб рівняння (6.5) у новій системі координат не мало лінійних членів. Зауважимо, що точка $O_1(c^1,c^2,c^3)$ $(O_1(c^1,c^2))$ буде центром поверхні (кривої) F. В новій системі координат рівняння (6.5) набуде вигляду

$$a_{ij}(x_1^i+c^i)(x_1^j+c^j)+2b_i(x_1^i+c^i)+c=0,$$

або

$$a_{ij}x_1^ix_1^j+2(a_{ij}c^j+b_i)x_1^i+2b_ic^i+a_{ij}c^ic^j+c=0,$$

і координати центру поверхні (кривої) F, якщо він існує, задовольняють системі рівнянь

$$a_{ij}c^j + b_i = 0, \quad i,\ j = 1,2,3, \ \ (i,\ j = 1,2). \tag{6.8}$$

Позначимо через $A = (a_{ij})$ — симетричну матрицю з елементами a_{ij}.

Якщо $\det A \neq 0$, то існує єдиний центр поверхні (кривої).

Якщо $\det A = 0$, то система (6.8) або має нескінчену множину розв'язків (коли ранг A дорівнює рангу розширеної матриці), або не має розв'язків. Тобто в цьому випадку у поверхні (кривої) або нескінченно багато центрів, або немає центру.

Зауважимо, що систему (6.8) можна записати у вигляді

$$F_{x^i} = 0, \quad i = 1,2,3, \ \ (i = 1,2),$$

де F_{x^i} — частинна похідна функції F по змінній x^i, $\quad i = 1,2,3,\ \ (i = 1,2)$.

6.2.2 Вісь симетрії кривої. Площина симетрії поверхні.

Нехай площина π, що задана нормальним рівнянням

$$n_1x^1 + n_2x^2 + n_3x^3 + d = 0, \ \ (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$$

є площина симетрії поверхні F. Тоді, якщо точка $P(x^1, x^2, x^3)$ належить поверхні F, то точка P_1, симетрична P відносно площини π, також належить F.

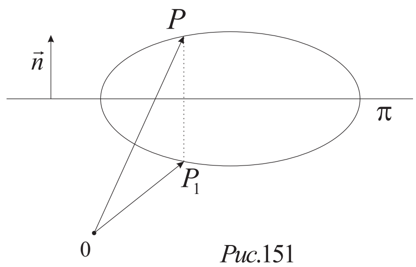


*Рис.*151

Знайдемо координати точки P_1. Нехай h — відхилення точки P від площини π; $\boldsymbol{n}$ — одиничний вектор нормалі площини π; $\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_1$ — радіус-вектори точок $P,\ P_1$ відповідно (рис. 151). Тоді $PP_1 = \lambda\boldsymbol{n}$, точніше $PP_1 = -2h\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - 2h\boldsymbol{n}$, в координатній формі останнє рівняння запишеться так:

$$x_1^i = x^i - 2hn_i,$$

де
$$h = n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 + d. \tag{6.9}$$

Координати (x_1^1, x_2^2, x_3^3) точки P_1 задовольняють рівнянню (6.5)

$$a_{ij}(x^i - 2hn_i)(x^j - 2hn_j) + 2b_i(x^i - 2hn_i) + c = 0.$$

Зауваження. *В прямокутній системі координат індекси у координат нормального вектора* $\mathbf{n}$ *можна писати і зверху, і знизу, оскільки* $n_i = g_{ik}n^k$, *де* $g_{ik} = \left\langle e_i, e_k \right\rangle$, *але для прямокутної системи координат*

$$\left\langle e_i, e_k \right\rangle = \delta_{ik}.$$

Перепишемо останню рівність, враховуючи зауваження.

Одержимо

$$a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i + c + 4h^2 a_{ij} n^i n^j - 4hb_i n^i - 4ha_{ij} x^i n^j = 0, \tag{6.10}$$

але $a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i + c = 0$, оскільки точка $P(x^1, x^2, x^3)$ належить поверхні F, і можна підставити вираз h з рівності (6.9). Розділимо спочатку обидві частини рівності (6.10) на $-4h$, вважаючи, що поверхня F не є подвійно вкритою площиною.

Одержимо

$$a_{ij}x^i n^j - a_{ij}n^i n^j \left(\sum n^i x^i + d\right) + b_i n^i = 0.$$

Зауваживши, що
$$\sum n^i x^i = \delta_{ij} x^i n^j,$$
остаточно одержимо вираз

$$[a_{ij}n^j - \delta_{ij}(a_{kl}n^k n^l)n^j]x^i + b_i n^i - a_{ij}n^i n^j d = 0.$$

Одержана рівність повинна виконуватися для всіх (x^1, x^2, x^3), що задовольняють рівнянню (6.5), оскільки поверхня F не є подвійно вкритою площиною, то

$$a_{ij}n^j - (a_{kl}n^k n^l)\delta_{ij}n^j = 0, \quad b_i n^i - (a_{ij}n^i n^j)d = 0. \tag{6.11}$$

Самостійно показати, що у випадку подвійно вкритої площини ми приходимо до тих же рівнянь.

Умови (6.11) необхідні для того, щоб $n^1x^1 + n^2x^2 + n^3x^3 + d = 0$ була площиною симетрії поверхні F.

В матричній формі умови (6.11) запишуться так:

$$A\boldsymbol{n} - \lambda\boldsymbol{n} = 0, \quad \langle b, \boldsymbol{n} \rangle - \lambda d = 0, \tag{6.12}$$

де

$$\lambda = a_{ij}n^i n^j.$$

Розглянемо перше рівняння системи (6.11):

$$(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})n^j = 0 \quad \text{або} \quad (A - \lambda E)\boldsymbol{n} = 0;$$

$\boldsymbol{n}$ — вектор нормалі площини π; отже, $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 \neq 0$, тому $\det(A - \lambda E) = 0$.

Многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$ називається *характеристичним многочленом* матриці A; корені характеристичного многочлена називаються *власними числами* матриці A; ненульові вектори $\boldsymbol{n}$, які задовольняють рівнянню $A\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{n}$, для деякого числа λ називаються *власними векторами* матриці A, що відповідають власному числу λ.

У симетричної матриці всі власні числа дійсні і їх кількість співпадає з порядком матриці з урахуванням кратності кореня.

Дійсно, нехай λ — довільний корінь многочлена $\det(A - \lambda E) = 0$. Тоді система $(a_{ik} - \lambda\delta_{ik})x^k = 0 \quad (i = 1..., n)$ має ненульовий розв'язок $(x^1, x^2, ..., x^n)$ і число $\overline{\lambda}$ також є корінь $\det(A - \lambda E) = 0$, оскільки коефіцієнти характеристичного многочлена дійсні (тут $\overline{\lambda}$ — комплексне число, спряжене числу λ; точно такий же зміст верхня риска має і далі).

Доведемо, що числа $(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^n)$ утворюють розв'язок (очевидно, нетривіальний) системи $(a_{ik} - \overline{\lambda}\delta_{ik})\overline{x}^k = 0 \quad (i = 1, ..., n)$.

Справді,

$$(a_{ik} - \overline{\lambda}\delta_{ik})\overline{x}^k = (\overline{a}_{ik} - \overline{\lambda}\,\overline{\delta}_{ik})\overline{x}^k =$$

$$= \overline{(a_{ik} - \lambda\delta_{ik})x^k} = 0.$$

Таким чином,

$$a_{ik}x^k = \lambda x^i, \quad a_{ik}\bar{x}^k = \overline{\lambda}\bar{x}^i.$$

Першу з цих рівностей домножаємо на $\bar{x}^i$, другу — на x^i, просумуємо по i:

$$a_{ik}\bar{x}^i x^k = \lambda \sum_i x^i \bar{x}^i = \lambda \sum_i |x^i|^2,$$

$$a_{ik}\bar{x}^k x^i = \overline{\lambda} \sum_i \bar{x}^i x^i = \overline{\lambda} \sum_i |x^i|^2.$$

Матриця A симетрична, тому

$$a_{ik}\bar{x}^i x^k = a_{ki}\bar{x}^i x^k = a_{ik}\bar{x}^k x^i.$$

Таким чином,

$$\overline{\lambda}\sum_i |x^i|^2 = \lambda\sum_i |x^i|^2.$$

Але

$$\sum_i |x^i|^2 \neq 0,$$

отже, $\overline{\lambda} = \lambda$, и λ — дійсне число.

Для кожного власного числа симетричної матриці існує дійсний власний вектор. Причому власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні. Дійсно, нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — власні значення матриці A; $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ — власні вектори, що їм відповідають. Тоді

$$A\boldsymbol{n}_1 = \lambda_1\boldsymbol{n}_1,\ A\boldsymbol{n}_2 = \lambda_2\boldsymbol{n}_2.$$

Помножимо перше рівняння скалярно на $\boldsymbol{n}_2$, друге — на $\boldsymbol{n}_1$:

$$\big\langle A\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\big\rangle = \lambda_1\big\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\big\rangle,$$

$$\big\langle A\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_1\big\rangle = \lambda_2\big\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\big\rangle.$$

З огляду на симетрічність матриці A ліві частини рівностей рівні, тому рівні і праві. Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\big\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\big\rangle = 0$.

Існує ортогональний базіс простору, що складається з власних векторів симетричної матриці, в якому вона приймає діагональний вигляд.

Приклад. Нехай $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3(0,0,1)$ — власні вектори матриці A. Який вигляд має матриця A?

Оскільки $\boldsymbol{e}_1$ — власний вектор A, то

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $a_{11} = \lambda$, $\quad a_{12} = a_{13} = 0$.

Аналогічно знаходимо решту елементів матриці A, вона має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Отже, щоб узнати площину симетрії π поверхні (6.5), потрібно:

1) знайти власні числа λ матриці A;

2) знайти власні вектори матриці A, що відповідають знайденим власним числам;

3) якщо $\lambda \neq 0$, то $d = \frac{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \rangle}{\lambda}$; якщо $\lambda = 0$ і відповідний власний вектор задовольняє умові $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \rangle = 0$, то площиною симетрії поверхні є будь-яка площина з нормаллю $\boldsymbol{n}$; якщо $\lambda = 0$, а знайдений з першого рівняння системи (6.12) вектор $\boldsymbol{n}$ такий, що $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \rangle \neq 0$, то у поверхні немає площин симетрії з нормаллю $\boldsymbol{n}$.

Зауваження. *Всі міркування лишаються справедливими, якщо F — крива, а π — її вісь симетрії.*

6.3 Дотичні площини поверхні.

Згадаємо, що коли крива на площині задана рівнянням $y = f(x)$ і $f \in C^1$, то в кожній точці (x_0, y_0) кривої є дотична і її рівнянням буде $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Вектор нормалі дотичної $\boldsymbol{n} = (f'(x_0), -1)$, напрямний вектор дотичної $\tau = (1, f'(x_0))$.

Нехай крива 2-го порядку задана рівнянням $F(x, y) = 0$, точка $P(x_0, y_0)$ належить кривій. Якщо рівняння $F(x, y) = 0$ — канонічне, то рівняння дотичної в точці P, якщо воно існує, набуде вигляду

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Нехай крива 2-го порядку задана загальним рівнянням $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \ldots = 0$. В кожній фіксованій точці $P(x_0, y_0)$ кривої, в якій $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$, дотична існує (це буде доведено в курсі диференціальної геометрії); в деякому околі точки P криву можна задати рівнянням $y = f(x)$ або $x = g(y)$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що в колі точки P крива задана рівнянням $y = f(x)$ (якщо криву можна задати лише рівнянням $x = g(y)$, перейменуємо x на y, y на x.)

Таким чином, крива задана рівнянням $F(x, y) = 0$, $F(x_0, y_0) = 0$; в околі точки $P(x_0, y_0)$ криву можна задати рівнянням $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$; отже, в околі точки P буде

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Продиференцюємо останню тотожність як складну функцію:

$$F_x + F_y f'(x) \equiv 0.$$

Звідси вектор $\boldsymbol{n} = (F_x, F_y)$ перпендикулярний до вектора $\tau = (1, f'(x))$. Але $\tau_0 = (1, f'(x_0))$ — напрямний вектор дотичної до кривої в точці P. Отже, вектор $\boldsymbol{n}_0 = (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0))$ — нормаль дотичної в точці P, тому рівняння дотичної до кривої, заданої у вигляді $F(x, y) = 0$, в точці $P(x_0, y_0)$ буде

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Приклад. $F(x, y) = xy - 1 = 0, \quad P(1, 1)$. Написати рівняння дотичної в точці P?

Розв'язування. $F_x = y, \quad F_y = x; \quad F_x(1, 1) = 1, \quad F_y(1, 1) = 1;$ рівняння дотичної $x + y - 2 = 0$.

Розглянемо тепер поверхні 2-го порядку. Нехай поверхня задана рівнянням

$$F(x^1, x^2, x^3) = a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i + c = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{6.13}$$

і нехай точка $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ належить поверхні.

Проведемо площину π через точку P, вона перетинає поверхню по кривій 2-го порядку. Якщо сукупність дотичних до всіх плоских перерезів поверхні, що проходять через точку P, заповнюють площину, то ця площина називається *дотичною площиною* поверхні в точці P.

У вершині конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ дотичної площини не існує. Не існує дотичної також в точках лінії перетину двох площин, заданих рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Зауважимо, що рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ задає конус у розумінні даного в 4.4 визначення.

Виведемо рівняння дотичної площини. Виберемо систему координат $x^1 x^2 x^3$ так, щоб точка P співпадала з початком координат. Тоді координати $P(0, 0, 0)$ і в рівнянні поверхні (6.13) вільний член дорівнює нулю. Отже, у вибраній системі координат рівняння поверхні

$$F(x^1, x^2, x^3) = a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{6.14}$$

Розглянемо вектор $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Якщо $\boldsymbol{b} = 0$, то рівняння (6.14) задає одне із наступних геометричних місць точок:

(*) точку;

(*) пряму;

(*) невироджений конус 2-го порядку;

(*) пару площин, що перетинаються по прямій, яка проходить через двічі вкриту площину.

Це можливо довести, записавши рівняння (6.14) в новій системі координат, базис якої складається з власних векторів матриці (a_{ij}). В цій системі координат рівняння поверхні буде канонічним. Очевидно, що у всіх випадках, крім останнього, дотичної площини в точці P не існує. Не існує її і в останньому випадку, оскільки перетин двічі вкритої площини довільною, не паралельною їй, — двічі вкрита пряма, що не має дотичної.

Нехай $\boldsymbol{b} \neq 0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $|\boldsymbol{b}| = 1$. Нехай π — довільна площина перетину, що не перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ — напрямні вектори площини, причому їх завжди можна вибрати так, щоб $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{d} \rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \rangle = 1$; точка P — початок координат. Тоді параметричні рівняння площини π є

$$x = u\boldsymbol{c} + v\boldsymbol{d},$$

або в координатній формі

$$x^i = uc^i + vd^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.15}$$

де v, u — ортогональні координати у площині π.

Щоб одержати рівняння кривої, що лежить у перетині поверхні площиною π, потрібно підставити вирази (6.15) в рівняння (6.14). Тоді одержимо

$$a_{ij}(c^i u + d^i v)(c^j u + d^j v) + 2b_i(c^i u + d^i v) = 0,$$

або

$$a_{ij}c^i c^j u^2 + 2a_{ij}c^i d^j uv + a_{ij}d^i d^j v^2 + 2b_i c^i u + 2b_i d^i v = 0. \tag{6.16}$$

Точці P відповідають $u = 0$, $v = 0$. Запишемо рівняння дотичної l до кривої (6.16) в точці P. Крива (6.16) задана рівнянням $F(u, v) = 0$. Знайдемо частинні похідні:

$$F_u = 2a_{ij}c^i c^j u + 2a_{ij}c^i d^j v + 2b_i c^i;$$

$$F_v = 2a_{ij}c^i d^j u + 2a_{ij}d^i d^j v + 2b_i d^i;$$

$$F_u(0, 0) = 2b_i c^i = 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle, \quad F_v(0, 0) = 2b_i d^i = 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle.$$

Рівняння дотичної l в точці P:

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle u + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle v = 0;$$

напрямний вектор дотичної $\tau = (0, \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle)$, тому параметричне рівняння дотичної l в площині записується так:

$$v = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle\, t, \quad u = 0. \tag{6.17}$$

Щоб одержати рівняння дотичної l в просторі, потрібно підставити вирази (6.17) в (6.15). Тоді матимемо

$$x = \boldsymbol{d} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle\, t.$$

Якщо площина перетину не перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{b}$, то $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \neq 0$ і дотичний вектор до перетину існує. З огляду на довільність вектора $\boldsymbol{d} \perp \boldsymbol{b}$ дотичні вектори повністю заповнюють площину, перпендикулярну до вектора $\boldsymbol{b}$. Отже, вектор $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — нормаль дотичної площини. Маємо також $b_i = F_{x^i}(0)$.

Таким чином, запишемо рівняння дотичної площини у точці P в нашій спеціальній системі координат:

$$F_{x^1}(0)x^1 + F_{x^2}(0)x^2 + F_{x^3}(0)x^3 = 0.$$

Нехай тепер система координат $x^1x^2x^3$ довільна, тоді (x_0^1, x_0^2, x_0^3) — координати точки P, рівняння поверхні — це вираз (6.13). Перейдемо до нової системи координат $\tilde{x^1}, \tilde{x^2}, \tilde{x^3}$ наступним чином: $x^i = \tilde{x^i} + x_0^i$.

В новій системі координат точка P співпадає з початком координат, а рівняння поверхні буде:

$$a_{ij}(\tilde{x^i} + x_0^i)(\tilde{x^j} + x_0^j) + 2b_i(\tilde{x^i} + x_0^i) + c = 0,$$

або

$$a_{ij}\tilde{x^i}\tilde{x^j} + 2a_{ij}\tilde{x^i}x_0^j + a_{ij}x_0^i x_0^j + 2b_i\tilde{x^i} + 2b_i x_0^i + c = 0.$$

Але $a_{ij}x_0^i x_0^j + 2b_i x_0^i + c \equiv 0$, тому рівняння поверхні в новій системі координат має наступний вигляд:

$$a_{ij}\tilde{x^i}\tilde{x^j} + 2(a_{ij}x_0^j + b_i)\tilde{x^i} = 0.$$

Згідно доказаному раніше $\boldsymbol{n} = (a_{1j}x_0^j + b_1, \quad a_{2j}x_0^j + b_2, \quad a_{3j}x_0^j + b_3)$ є вектор нормалі дотичної площини до поверхні в точці P, отже, рівняння дотичної площини в новій системі координат набуде вигляду:

$$(a_{1j}x_0^j + b_1)\tilde{x^1} + (a_{2j}x_0^j + b_2)\tilde{x^2} + (a_{3j}x_0^j + b_3)\tilde{x^3} = 0.$$

Легко бачити, що

$$a_{ij}x_0^j + b_i = \frac{1}{2}F_{x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3).$$

Запишемо тепер рівняння дотичної площини до поверхні в точці P в старій системі координат:

$$F_{x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^1 - x_0^1) + F_{x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^2 - x_0^2) + F_{x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^3 - x_0^3).$$

З'ясуємо, як розташована поверхня 2-го порядку відносно дотичної площини. Якщо в перерізі поверхні дотичною площиною лежить точка, поверхня розташована по одну сторону від дотичної площини. При цьому ми маємо на увазі ту зв'язну компоненту поверхні, де лежить точка, в якій ми проводимо дотичну площину.

Якщо в перерізі пара прямих злилася, поверхня лежить по одну сторону від дотичної площини (це циліндр або конус). Якщо в перерізі пара прямих перетинається, поверхня лежить по обидві сторони від дотичної площини.

Нехай Φ — довільна поверхня другого порядку; P — будь-яка точка поверхні, в якій є дотична площина. Якщо через точку P проходять прямолінійні тверні поверхні, вони обов'язково лежать у дотичній площині. Виберемо систему координат спеціальним чином; точку P приймемо за початок координат (тоді рівняння поверхні Φ буде мати вигляд $a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i = 0$), дотичну площину — за площину Ox^1x^2. Тоді одинична нормаль $\boldsymbol{n} = \lambda(b_1, b_2, b_3)$ дотичної площини буде напрямлена по осі Ox_3 і, отже, буде мати координати $(0, 0, 1)$. Тому у вибраній системі координат рівняння поверхні Φ буде:

$$a_{ij}x^i x^j + 2b_3 x^3 = 0. \tag{6.18}$$

З'ясуємо, яка максимальна кількість прямих поверхні лежить у дотичній площині. Рівняння дотичної площини до поверхні (6.18) в точці $P(0, 0, 0)$ буде $x_3 = 0$. Знайдемо переріз поверхні дотичною площиною: $x^3 = 0$,

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0;$$

це або точка, або пара прямих, що перетинаються, або пара прямих, які збігаються. Отже, максимальна кількість прямих, що проходять через точку P і лежать на поверхні, дорівнює 2, якщо поверхня Φ не вироджується в пару площин.

Вправа. З'ясувати питання про існування кругових перерізів на поверхнях другого порядку.

Вказівка. Розглянути поверхні в канонічному вигляді.

6.4 Інваріанти і форми кривих (поверхонь) 2-го порядку

Нехай крива 2-го порядку задана загальним рівнянням. Ми знаємо, що існує система координат, в якій рівняння кривої має канонічний вигляд.

Природно виникають питання:

1) Як перейти від загального рівняння до канонічного?

2) В різних системах координат одна і та ж крива F має різні рівняння. При переході від них до канонічних рівнянь чи будуть останні співпадати?

Нехай рівняння кривої (поверхні) 2-го порядку в деякій системі координат має вигляд:

$$a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i + c = 0, \quad A = (a_{ij}). \tag{6.19}$$

В іншій прямокутній системі координат, з тим же початком координат рівняння цієї ж кривої (поверхні) буде:

$$a^1_{ij}\tilde{x^i}\tilde{x^j} + 2b^1_i\tilde{x^i} + c^1 = 0, \quad A^1 = (a^1_{ij}). \tag{6.20}$$

Координати x^i і $\tilde{x^i}$ зв'язані формулами:

$$x^i = c^i_j\tilde{x^j}. \tag{6.21}$$

де матриця $C = (c^i_j)$ — ортогональна, тобто $CC^t = E \quad (C^t$ — транспонування матриці $C)$. Ортогональність матриці C випливає з того, що ми здійснюємо перехід від одного ортонормованого базису $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ до другого $\tilde{\boldsymbol{e}} = (\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \tilde{e_3})$, тобто $\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \delta_{ij}$ і $\left\langle \tilde{e_i}, \tilde{e_j} \right\rangle = \delta_{ij}$, а $\tilde{e_i} = c^i_j e_j$.

Матриці A і A^1 зв'язані так:

$$A^1 = CAC^t.$$

Щоб одержати цей зв'язок, потрібно формули (6.21) підставити у (6.19) і одержаний результат порівняти з виразом (6.20).

Доведемо, що характеристичні поліноми матриць A і A^1 співпадають, тобто що

$$\det(A - \lambda E) = \det(A^1 - \lambda E).$$

Дійсно, $\det(A^1 - \lambda E) = \det(CAC^t - \lambda CC^t) = \det(C(A - \lambda E)C^t) = \det C \det(A - \lambda E) \det C^t = \det(A - \lambda E)$.

Отже, характеристичні поліноми рівнянь (6.19) і (6.20) співпадають. Тому співпадають корені і коефіцієнти цих многочленів, тобто корені і коефіцієнти характеристичного многочлена не залежать від вибору системи координат і є інваріанти кривої (поверхні).

Випишемо ці інваріанти.

Для кривої

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+$$

$$+\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2,$$

де $\lambda_1,\ \lambda_2$ — власні числа матриці A. Отже, інваріанти кривої:

$$I_1=a_{11}+a_{22}=\lambda_1+\lambda_2,$$

$$I_2=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=\lambda_1\lambda_2.$$

Для поверхні

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33-\lambda} \end{pmatrix}=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)=$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\lambda(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})-\lambda\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\right)-$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ — власні числа матриці A. Отже, інваріанти поверхні:

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Ці інваріанти називають ще інваріантами квадратичної форми.

Зауваження. *Ми довели, що вирази I_i інваріантні відносно повороту осей координат. Але I_i інваріантні і при паралельному переносі осей координат, оскільки паралельний перенос не змінює квадратичну частину рівняння.*

Є ще один інваріант кривої (поверхні): інваріант не квадратичної форми, а всієї кривої (поверхні).

Розглянемо випадок кривої. Рівняння кривої запишемо так:

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0. \qquad (6.22)$$

Ставимо у відповідність кривій матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$,

визначник цієї матриці називається дискримінантом кривої.

Дискримінант кривої $I_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ є її інваріант.

Доведення. Введемо однорідні координати y^1, y^2, y^3.

$$x^1 = \frac{y^1}{y^3}, \quad x^2 = \frac{y^2}{y^3},$$

якщо однорідні координати пропорційні, то їм відповідає одна і та ж точка. Рівняння кривої (6.22) в однорідних координатах буде

$$a_{ij}y^iy^j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad A = (a_{ij}).$$

Перейдемо від системи координат $x^1, x^2 \;\; (y^1, y^2, y^3)$ до системи $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$ $(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3)$, повернувши осі x^1, x^2 на кут φ навколо початку координат. Тоді

$$\begin{cases} x^1 = \tilde{x}^1 \cos\varphi - \tilde{x}^2 \sin\varphi, \\ x^2 = \tilde{x}^1 \sin\varphi + \tilde{x}^2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Такому перетворенню координат відповідає наступне перетворення однорідних координат:

$$\begin{cases} y^1 = \tilde{y}^1 \cos\varphi - \tilde{y}^2 \sin\varphi, \\ y^2 = \tilde{y}^1 \sin\varphi + \tilde{y}^2 \cos\varphi, \\ y^3 = \tilde{y}^3. \end{cases}$$

Матриця переходу від нових однорідних координат до старих є

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і $\det C = 1$.

У нових однорідних координатах рівняння нашої кривої буде

$$a^1_{ij}\tilde{y}^i\tilde{y}^j = 0, \quad i,j = 1,2,3, \quad A^1 = (a^1_{ij}).$$

Але ми знаємо, що $A^1 = CAC^t$, звідси $\det A = \det A^1$, тобто дискримінант кривої не змінюється при повороті осей координат.

Розглянемо паралельний перенос

$$\begin{cases} x^1 = \tilde{x}^1 + d^1, \\ x^2 = \tilde{x}^2 + d^2. \end{cases}$$

Такому перетворенню відповідають наступні перетворення однорідних координат:

$$\begin{cases} y^1 = \tilde{y}^1 + d^1\tilde{y}^3, \\ y^2 = \tilde{y}^2 + d^2\tilde{y}^3, \\ \quad y^3 = \tilde{y}^3; \end{cases}$$

матриця цього перетворення

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d^1 \\ 0 & 1 & d^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і $\det C = 1$, отже $\det A = \det A^1$, де знову A і A^1 — матриці нашої кривої в старій і новій системах координат відповідно, $A^1 = CAC^t$.

Таким чином, наше твердження повністю доведено.

$\blacksquare$

Аналогічно доводиться, що дискримінант поверхні, заданої рівнянням

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + \\ + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0, \qquad (6.23)$$

$$I_4 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

є інваріант.

Використовуючи інваріанти, можна привести рівняння кривої (поверхні) до канонічного вигляду.

Розглянемо випадок кривої. Нехай в деяких системах координат крива задана рівнянням (6.22): $\lambda_1,\ \lambda_2$;

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2,$$

$$I_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— інваріанти кривої.

Розглянемо всі можливі випадки.

1) $I_2 \neq 0$, тобто $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

Виберемо систему координат так, щоб осі координат мали напрям власних векторів, а центр кривої був початком координат. Тоді рівняння кривої прийме вигляд

$$a_{11}(\tilde{x}^1)^2 + a_{22}(\tilde{x}^2)^2 + a_{33} = 0.$$

Характеристичний многочлен цього рівняння: $\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$. Отже, $a_{11} = \lambda_1, \quad a_{22} = \lambda_2$.

Щоб знайти коефіцієнт a_{33}, потрібно використати інваріант I_3:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 a_{33} = I_2 a_{33}.$$

Звідси $a_{33} = \frac{I_3}{I_2}$.

Таким чином, канонічне рівняння кривої знайдено:

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \lambda_2(\tilde{x}^2)^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

2) $I_2 = 0, \quad I_3 \neq 0$.

В деякій системі координат рівняння кривої набуде вигляду

$$a_{22}(\tilde{x}^2)^2 + 2a_{13}\tilde{x}^1 = 0$$

(див. 6.2)

Будемо вважати, що $\lambda_1 = 0$ (зауважимо, що одночасно λ_1, λ_2 не можуть дорівнювати нулю). Тоді $a_{22} = \lambda_2$,

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -I_1(a_{13})^2,$$

звідси

$$a_{13} = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}.$$

Таким чином, канонічне рівняння кривої в цьому випадку набуде вигляду

$$\lambda_2(\tilde{x}^2)^2 + 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\ \tilde{x}^1 = 0.$$

3) $I_2 = 0, \quad I_3 = 0.$

В деякій системі координат рівняння кривої прийме вигляд

$$a_{22}(\tilde{x}^2)^2 + a_{33} = 0.$$

Зауваження. *Рівність нулю інваріанта I_3 є критерій виродженості кривої 2-го порядку.*

Приклад. Нехай крива задана рівнянням

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Зауважимо, що коли крива невироджена, то у випадку, коли $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$, це еліпс, $I_2 = 0$ — парабола, $I_2 < 0$ — гіпербола.

Обчислимо I_2 для нашої кривої:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 16 = 9 > 0,$$

крива еліптичного типу.

Знайдемо корені характеристичного многочлена:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = (5-\lambda-4)(5-\lambda+4) = 0,$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9$. Обчислимо

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \\ -9 & -9 & 1 \end{vmatrix} = -81;$$

$I_3 \neq 0$ — нерозпадна крива.

В деякій системі координат $O\tilde{x}\tilde{y}$ рівняння нашої кривої $\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 - 9 = 0$, або

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{1} = 1,$$

це рівняння еліпса.

Початок системи координат $O\tilde{x}\tilde{y}$ збігається з центром кривої. Знайдемо центр кривої в системі координат Oxy, координати центра задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 4y - 9 = 0, \\ 4x + 5y - 9 = 0; \end{cases}$$

звідси знаходимо $x_{\text{Ц}} = 1,\ y_{\text{Ц}} = 1$. Таким чином, ми знайшли точку $O_1(1,1)$ на площині Oxy, яка є початком нової системи координат $O\tilde{x}\tilde{y}$.

Знайдемо напрями осей нової системи координат. Нові осі — осі симетрії кривої, нормалі осей симетрії кривої — власні вектори відповідної матриці. Власні числа ми знайшли: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 9$. Знайдемо власні вектори, що відповідають їм.

Вони задовольняють рівнянню $(A - \lambda E)\boldsymbol{n} = 0$.

Далі

$$\lambda_1 = 1, \quad A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0.$

Звідси отримали систему рівнянь: $\begin{cases} 4n_1 + 4n_2 = 0, \\ 4n_1 + 4n_2 = 0. \end{cases}$ Цій системі задовольняє вектор (n_1, n_2) з координатами $n_1 = 1,\ \ n_2 = -1$.

Таким чином, перший власний вектор, базисний вектор нової системи координат $\tilde{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Аналогічно знаходимо другий базисний вектор нової системи координат (рис.152):

$$\lambda_2 = 9, \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4n_1+4n_2 & = & 0, \\ 4n_1-4n_2 & = & 0, \end{array}\right. \quad n_1=1, \quad n_2=1, \quad \tilde{e}_2=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

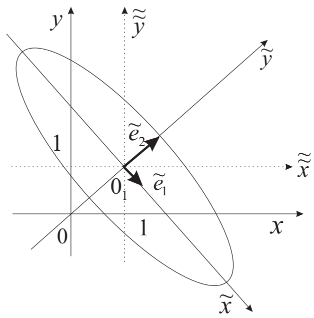


Рис.152

Зауваження. *Власними векторами є і протилежно направлені вектори $-\tilde{e}_1, -\tilde{e}_2$. Вибираючи певні власні вектори за базисні вектори нової системи координат, ми або зберігаємо орієнтацію площини, або змінюємо її на протилежну.*

Знайдемо формули переходу від системи координат $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ до системи Oxy. Щоб одержати із системи Oxy систему $O_1\tilde{x}\tilde{y}$, потрібно зробити паралельний перенос і поворот. Паралельний перенос задається формулами

$$\left\{\begin{array}{l} x=\tilde{\tilde{x}}+1, \\ y=\tilde{\tilde{y}}+1. \end{array}\right.$$

Старий базис $e=(e_1,e_2)$ і новий базис $\tilde{e}=(\tilde{e_1},\tilde{e_2})$ зв'язани формулами

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{e}_1=\frac{e_1}{\sqrt{2}}-\frac{e_2}{\sqrt{2}} \\ \tilde{e}_2=\frac{e_1}{\sqrt{2}}+\frac{e_2}{\sqrt{2}}, \end{array}\right.$$

матриця переходу від старого базиса до нового

$$C=\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right).$$

Використовуючи транспоновану матрицю C^t, запишемо формули переходу від координат $\tilde{x},\tilde{y}$ до координат $\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\tilde{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}, \\ \tilde{\tilde{y}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}. \end{array}\right.$$

Таким чином, формули переходу від координат x, y до координат $\tilde{x}, \tilde{y}$ мають вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + 1, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + 1. \end{cases}$$

Зауваження. *Якщо спочатку зробити поворот системи координат Oxy, щоб одержати систему $O\tilde{x}\tilde{y}$, а потім паралельний перенос $O\tilde{x}\tilde{y}$, щоб одержати систему координат $O_1\tilde{x}\tilde{y}$, то потрібно пам'ятати, що координати точки O_1 в системі координат $O\tilde{x}\tilde{y}$ не будуть дорівнювати* $(1, 1)$.

Розглянемо випадок поверхні, використовуючи інваріанти для приведення рівняння поверхні 2-го порядку до канонічного вигляду, доведемо класифікаційну теорему.

Теорема 6.4.1. *Для поверхні 2-го порядку існує така прямокутна декартова система координат у просторі, в якій рівняння цієї поверхні прийме один з перелічених 17 виглядів (див. 5.2), тобто переліченими поверхнями вичерпуються всі поверхні другого порядку.*

Доведення. Нехай у деякій системі координат поверхня задана рівнянням (6.23). Розглянемо можливі випадки.

1. $I_3 \neq 0$, тобто $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

Виберемо систему координат так, щоб осі координат мали напрями власних векторів, а центр поверхні був початком координат. Тоді рівняння поверхні набуде вигляду

$$a_{11}(\tilde{x}^1)^2 + a_{22}(\tilde{x}^2)^2 + a_{33}(\tilde{x}^3)^2 + a_{44} = 0.$$

Характеристичний многочлен цього рівняння —

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Отже, $a_{11} = \lambda_1, \quad a_{22} = \lambda_2, \quad a_{33} = \lambda_3$. Коефіцієнт a_{44} знайдемо, використовуючи інваріант I_4 :

$$I_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 a_{44} = I_4 a_{44},$$

звідси $a_{44} = \frac{I_4}{I_3}$.

Таким чином, канонічне рівняння поверхні —

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \lambda_2(\tilde{x}^2)^2 + \lambda_3(\tilde{x}^3)^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

Залежно від значень коефіцієнтів останнього рівняння воно задає наступні поверхні:

1) $(+++-)$ — еліпсоїд;

2) $(+++0)$ — точку;

3) $(++++)$ — порожню множину;

4) $(++--)$ — однопорожнистий гіперболоїд;

5) $(++-0)$ — конус;

6) $(++-+)$ — двопорожнистий гіперболоїд.

2. $I_3 = 0, \quad I_4 \neq 0.$

Діючи аналогічно випадку 2 для кривих, одержимо наступне канонічне рівняння поверхні:

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \lambda_2(\tilde{x}^2)^2 + 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\ \tilde{x}^3 = 0.$$

Залежно від значень коефіцієнтів рівняння задає такі поверхні:

7) $(++)$ — еліптичний параболоїд;

8) $(+-)$ — гіперболічний параболоїд.

3. $I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \quad I_2 \neq 0$

Рівняння (6.23) можна привести до вигляду

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \lambda_2(\tilde{x}^2)^2 + a_{44} = 0$$

і залежно від значень коефіцієнтів одержати поверхні:

9) $(++-)$ — еліптичний циліндр;

10) $(++0)$ — пряму;

11) $(+++)$ — порожню множину;

12) $(+--)$ — гіперболічний циліндр;

13) $(+-0)$ — пару площин, що перетинаються.

3*. $I_4 = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_2 = 0.$

Рівняння (6.23) приводиться або до вигляду

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + a_{24}\tilde{x}^2 = 0,$$

що дає

14) параболічний циліндр

або до вигляду

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + a_{44} = 0,$$

що залежно від значень коефіцієнтів задає

15) $(+-)$ — пару паралельних площин;

16) $(+0)$ — пару площин, що співпадають;

17) $(++)$ — порожню множину.

■

Зауваження. *Із доведення теореми випливає, що рівність нулю інваріанта I_4 є критерій виродженості поверхні 2-го порядку. До виродження поверхонь відносяться конуси, циліндри, поверхні, що розпадаються на лінійні образи.*

6.4.1 Асимптоти гіперболи. Асимптотичний конус гіперболоїда.

Нехай гіпербола задана рівнянням

$$F = a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2a_{13}x^1 + 2a_{23}x^2 + a_{33} = 0. \quad (6.24)$$

Перейдемо до системи координат $O\tilde{x}^1\tilde{x}^2$, в якій рівняння гіперболи має канонічний вигляд:

$$\widetilde{F} = \lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \lambda_2(\tilde{x}^2)^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

В цій системі координат асимптоти задаються рівнянням

$$\lambda_1(\tilde{x}^1)^2 + \lambda_2(\tilde{x}^2)^2 = 0,$$

тобто

$$\widetilde{F} - \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

Якщо тепер перейти знову до координат $x^1,\ x^2$, то рівняння асимптот гіперболи (6.24) буде

$$F - \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

Проводячи аналогічні міркування для однопорожнистого або двопорожнистого гіперболоїда

$$F = a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + \ldots + a_{44} = 0,$$

одержимо рівняння його асимптотичного конуса:

$$F - \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

На практиці приводити рівняння до канонічного вигляду доводиться не часто. Частіше по загальному рівнянню кривої (поверхні) потрібно вміти пізнавати, що це за крива (поверхня). При цьому суттєво використовуються інваріанти.

Розглянемо спочатку криві 2-го порядку. Нехай крива задана загальним рівнянням

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Форму кривої визначає інваріант $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2$, де $\lambda_1,\ \lambda_2$ — корені характеристичного многочлена кривої.

1. Якщо $I_2 \neq 0$, то крива центральна, тобто *еліпс*, *гіпербола*, *точка* чи *порожня множина.* Точніше,

(*) якщо $I_2 > 0$ — *еліпс*, *точка* або *порожня множина*;

(**) якщо $I_2 < 0$ — *гіпербола.*

2. Якщо $I_2 = 0$ — крива нецентральна, тобто або *парабола*, або *вироджена крива.*

Крива вироджена тоді і тільки тоді, коли інваріант

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо $I_2 = 0, \quad I_3 \neq 0$ — крива є парабола.

Щоб довести наведені вище твердження, досить їх перевірити для канонічних рівнянь, оскільки I_2, I_3 — інваріанти.

Розглянемо тепер поверхні 2-го порядку. Нехай поверхня задана загальним рівнянням

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 +$$

$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

3. Якщо інваріант $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ — поверхня центральна і має один центр, тобто *еліпсоїд*, *однопорожнистий гіперболоїд, двопорожнистий гіперболоїд, конус, точка* або *порожня множина.*

4. Якщо $I_3 = 0$, поверхня нецентральна; серед невироджених поверхонь це — *еліптичний параболоїд* або *гіперболічний параболоїд.*

5. Якщо інваріант $I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{14} & \dots & a_{44} \end{vmatrix} = 0$ — поверхня вироджена, тобто *конус, циліндр, прямі, площини* або *порожня множина.*

Розглянемо поверхні, що мають точки, в яких є дотичні площини. Інваріант I_4 визначає форму поверхні.

Обчисливши інваріант I_4 для канонічних рівнянь, впевнюємося, що коли

a) $I_4 < 0$, то поверхня — *еліпсоїд, двопорожнистий гіперболоїд* або *еліптичний параболоїд*;

b) $I_4 = 0$, то поверхня — *конус, циліндр* або *розпадається на пару площин*;

c) $I_4 > 0$, то поверхня — *однопорожнистий гіперболоїд* або *гіперболічний параболоїд.*

Теорема 6.4.2. *Якщо* $I_4 < 0$, *то поверхня опукла, вона лежить по одну сторону від дотичної площини, має з нею одну спільну точку.*

Якщо $I_4 = 0$ *і поверхня не розпадається на пару площин, то поверхня лежить по одну сторону від дотичної площини, має з нею спільну пряму.*

Якщо $I_4 > 0$, *то поверхня лежить по обидві сторони від дотичної площини, має з нею спільні дві прямі, що перетинаються.*

Доведення. Виберемо систему координат спеціальним чином: початок координат помістимо в точку, що належить поверхні, вісь Ox^3 напрямимо по нормалі до поверхні в цій точці. Тоді рівняння дотичної площини в цій точці, яка співпадає з площиною Ox^1x^2, буде $x^3 = 0$, а рівняння поверхні має наступний вигляд:

$$a_{ij}x^ix^j + 2x^3 = 0.$$

Обчислимо інваріант I_4 поверхні в цій системі координат:

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Знайдемо переріз нашої поверхні дотичною площиною:

$$a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0, \quad x^3 = 0. \tag{6.25}$$

Можливі три випадки:

1) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, тобто $I_4 < 0$, то система (6.25) має єдиний розв'язок — $(0, 0, 0)$. Отже, поверхня — опукла. Це еліпсоїд, еліптичний параболоїд, компоненти зв'язності двопорожнистого гіперболоїда.

2) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, тобто $I_4 = 0$, то розв'язком системи (6.25) є пара прямих, що злилися. Поверхня — конус або циліндр.

3) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, тобто $I_4 > 0$, то (6.25) задає пару прямих, що перетинаються. Поверхня — однопорожнистий гіперболоїд або гіперболічний параболоїд. Таким чином, через кожну точку однопорожнистого гіперболоїда чи гіперболічного параболоїда проходять дві прямі, що лежать на поверхні.

У першому випадку точки поверхні називаються *еліптичними*, у другому — *параболічними*, в третьому — *гіперболічними*.

Всі точки фіксованої поверхні 2-го порядку належать одному типу, оскільки інваріант I_4 не залежить від точок поверхні.

Для інших поверхонь це не так. Наприклад, на торі є і еліптичні, і параболічні, і гіперболічні точки: A — еліптична, B — параболічна, C — гіперболічна точка (рис. 153).

■

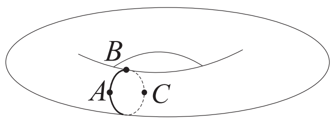


*Рис.*153

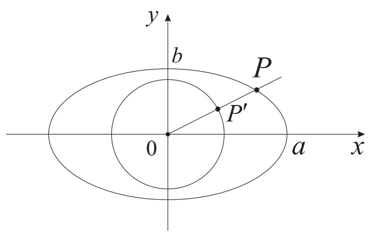


*Рис.*154

6.5 Прямолінійні твірні на поверхні 2-го порядку

Розглянемо невироджені поверхні, циліндри і конуси. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що поверхні задані канонічними рівняннями.

1. **Еліпсоїд**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

На еліпсоїді немає прямих, оскільки це обмежена поверхня.

2. **Двопорожнистий гіперболоїд**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Оскільки $I_4 < 0$ і дотична площина має з поверхнею тільки спільну точку, то на двопорожнистому гіперболоїді немає прямих ліній.

3. **Еліптичний параболоїд**

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

Оскільки $I_4 < 0$, то на еліптичному параболоїді немає прямих по аналогії з попереднім випадком.

4. **Конус**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Оскільки $I_4 = 0$, то за теоремою 6.4.2. через кожну точку конуса проходить єдина пряма, що лежить на конусі, — твірна конуса.

5. **Циліндр**

Оскільки $I_4 = 0$, то аналогічно попередньому випадку на циліндрі, крім твірних, інших прямих немає.

Для однопорожнистого гіперболоїда та гіперболічного параболоїда інваріант $I_4 > 0$. За теоремою 6.4.2. через кожну точку цих поверхонь проходять дві прямі. Розглянемо сімейство прямих, що лежать на даних поверхнях, більш докладно.

6. **Однопорожнистий гіперболоїд**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Перетворимо рівняння однопорожнистого гіперболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \tag{6.26}$$

Розглянемо два сімейства прямих:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases} \tag{6.27}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases} \tag{6.28}$$

тут $\lambda,\ \mu$ — параметри, $-\infty \leqslant \lambda,\ \mu \leqslant +\infty$.

Дослідимо властивості цих сімейств.

1) *Рівняння* (6.27) *задають пряму.*

Доведення. Нам потрібно довести, що площини, задані першим і другим рівнянням системи (6.27), перетинаються і не співпадають. Обчислимо для цього векторний добуток нормалей цих площин:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{a} & \frac{\lambda}{b} & -\frac{1}{c} \\ \frac{\lambda}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{\lambda}{c} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2-1}{bc}i - \frac{2\lambda}{ac}j - \frac{\lambda^2+1}{ab}k \neq 0.$$

Отже, система (6.27) задає пряму при будь-якому значенні λ.

■

2) *Пряма* (6.27) *лежить на поверхні.*

Доведення. Справді, якщо координати деякої точки задовольняють рівнянню (6.27), то вони задовольняють і рівнянню (6.26), яке є наслідком системи (6.27).

■

3) *Через кожну точку поверхні проходить пряма із сімейства* (6.27).

Доведення. Нехай точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні. І нехай або $\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c} \neq 0$, або $1-\frac{y_0}{b} \neq 0$; будемо вважати для визначеності, що $1-\frac{y_0}{b} \neq 0$; З рівняння

$$\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y_0}{b}\right) \tag{6.29}$$

знаходимо λ, при якому пряма сімейства (6.27) проходить через точку P_0. Оскільки із рівняння (6.29) λ визначається однозначно, через точку P_0 проходить єдина пряма сімейства (6.27).

■

Якщо $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$ і $1 - \frac{y_0}{b} = 0$, то шуканою прямою буде

$$\begin{cases} 1 + \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

Із властивості 3) випливає, що будь-які дві прямі сімейства (6.27) не перетинаються, оскільки якщо вони перетинаються, то лише в точці поверхні і, отже, через цю точку проходять дві прямі сімейства (6.27), що суперечить раніше доведеному (6.28).

4) Будь-які три прямі сімейства (6.27) є прямі загального положення, тобто вони лежать в різних площинах, і напрямні вектори цих прямих утворюють базис 3-вимірного простору.

Доведення. Розглянемо три прямі сімейства (6.27). Відповідні їм $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ попарно різні, тобто

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0.$$

За напрямний вектор прямої (6.27) можна прийняти вектор

$$p(\lambda) = \left(\frac{1-\lambda^2}{bc}, \quad \frac{2\lambda}{ac}, \quad \frac{1+\lambda^2}{ab}\right).$$

Щоб довести лінійну незалежність векторів $p(\lambda_1),\ p(\lambda_2)$, досить показати, що їх змішаний добуток не дорівнює нулю, тобто потрібно довести, що визначник

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 + 1 \\ \lambda_2^2 - 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 + 1 \\ \lambda_3^2 - 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 + 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Довести це самостійно.

■

Наслідком властивості 4) є те, що наші прямі лежать в різних площинах.

5) Кожна пряма сімейства (6.27) перетинається з кожною прямою сімейства (6.28), крім однієї, паралельної їй прямої.

Доведення. Розглянемо одну пряму сімейства (6.27) і одну пряму сімейства (6.28), (λ, μ— деякі фіксовані числа). Потрібно довести, що система рівнянь (6.27), (6.28) має розв'язок. Покажемо, що четверте рівняння є наслідок перших трьох. Розглянемо випадок $\lambda\mu \neq 0$. З першого рівняння систем (6.27) і (6.28) випливає, що

$$1 - \frac{y}{b} = \frac{\mu}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Підставимо цей вираз у друге рівняння системи (6.28) і одержимо друге рівняння системи (6.27).

Таким чином, друге рівняння системи (6.28) можна відкинути і дослідити систему 3-лінійних рівнянь з трьома невідомими $x,\ y,\ z$.

Випадок $\lambda\mu = 0$ розглянути самостійно.

■

Зауваження. *Властивості 1) — 5) мають місце для сімейства* (6.28).

6) Інших прямих, крім тих, що задані рівняннями (6.27), (6.28), на однопорожнистому гіперболоїді немає.

Ця властивість випливає з того, що, як доведено в 6.3., максимальна кількість прямих, які проходять через точку поверхні і лежать на ній, дорівнює двом, якщо поверхня не вироджується в пару площин і якщо в точці, що розглядається, існує дотична площина.

Таким чином, ми довели, що на однопорожнистому гіперболоїді є два сімейства прямолінійних твірних, що будь-які три прямі одного сімейства є прямі загального положення, що кожна пряма 2-го сімейства перетинає всі прямі першого сімейства, за виключенням однієї, і, отже, перетинає будь-які три фіксовані прямі 1-го сімейства.

Справедливе **обернене твердження**: *якщо взяти будь-які три прямі загального положення, то геометричним місцем прямих простору, що перетинають три дані прямі, буде однопорожнистий гіперболоїд.*

Довести це твердження самостійно.

Лінійчаста будова однопорожнистого гіперболоїда використовується в будівництві: телевізійна башта на Шаболовці побудована у вигляді однопорожнистого гіперболоїда, — сталевий каркас — прямолінійні твірні.

7. **Гіперболічний параболоїд**

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Гіперболічний параболоїд має властивості, аналогічні властивостям однопорожнистого гіперболоїда, але є і відмінності:

1) на гіперболічному параболоїді є два сімейства прямолінійних твірних;

2) через кожну точку гіперболічного параболоїда проходить по одній прямій з кожного сімейства;

3) всі прямі одного сімейства паралельні деякій площині;

4) кожна пряма одного сімейства перетинає всі прямі другого сімейства.

Доведемо спочатку властивості 1) — 4) для гіперболічного параболоїда, заданого рівнянням

$$z = xy. \tag{6.30}$$

Доведення. 1) Очевидно, що на поверхні (6.30) лежать прямі двох сімейств:

$$x = c_1, \quad z = c_1 y; \tag{6.31}$$

$$y = c_2, \quad z = c_2 x; \quad -\infty < c_1,\ c_2 < +\infty. \tag{6.32}$$

Розглянемо ортогональні проекції прямих сімейства (6.31) і (6.32) на площину Oxy; рівняння проекцій відповідно наступні:

$$x = c_1, \quad z = 0; \tag{6.33}$$

$$y = c_2, \quad z = 0. \tag{6.34}$$

Наявність властивостей 2) – 4) досить показати для прямих (6.33), (6.34), оскільки гіперболічний параболоїд і прямі (6.31), (6.32) взаємно однозначно проектуються на площину Oxy.

2) Дві прямі одного сімейства (6.31) або (6.32) не перетинаються, оскільки проектуються в різні паралельні прямі площини Oxy.

3) Всі прямі сімейства (6.31) паралельні площині Oyz; всі прямі сімейства (6.29) паралельні площині Oxz.

4) Кожна пряма сімейства (6.33) перетинає кожну пряму сімейства (6.34), оскільки прямі (6.33) паралельні осі Oy, а прямі (6.34) паралельні осі Ox.

■

Таким чином, властивості 1) – 4) доведені для окремого випадку — гіперболічного параболоїда, заданого рівнянням $z = xy$; але в деякій іншій системі координат ця ж поверхня має рівняння:

$$z = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}{2}.$$

Здійснимо стискання простору

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \frac{a\tilde{x}}{\sqrt{2}} \\ \tilde{\tilde{y}} = \frac{b\tilde{y}}{\sqrt{2}} \\ \tilde{\tilde{z}} = z \end{cases}$$

при цьому поверхня $z = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}{2}$ перейде в поверхню $\tilde{\tilde{z}} = \frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} - \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}$, прямі перейдуть у прямі, паралельні прямі — в паралельні прямі. Отже, властивості 1) – 4) зберігаються для поверхні $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

Випишемо сімейства прямолінійних твірних поверхні:

$$\begin{cases} \lambda z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \\ 1 = \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \mu z = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \\ 1 = \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{6.35}$$

Для виписаних сімейств прямих самостійно довести наявність властивостей 1) – 4) методом, аналогічним методу, що застосовується для однопорожнистого гіперболоїда.

5) Інших прямих, крім тих, що задані рівняннями (6.35) на гіперболічному параболоїді немає.

Властивість доводиться аналогічно відповідній властивості однопорожнистого гіперболоїда.

Із властивості 4) випливає, що коли взяти три прямі одного сімейства, то кожна пряма другого сімейства перетинає кожну з цих трьох прямих.

Має місце і обернене. Нехай у просторі задані три прямі, паралельні деякій площині, ніякі дві з яких не перетинаються і ніякі дві з яких не паралельні. Тоді геометричним місцем прямих, що перетинають ці три прямі, є гіперболічний параболоїд.

Довести самостійно.

В Харкові дах кінотеатру «Україна» і дах цирку мають форму гіперболічного параболоїда. Ця поверхня має прямолінійні твірні, і тому її легко будувати.

6.6 Топологічні властивості кривих (поверхонь) 2-го порядку

До топологічних властивостей відносять такі, які зберігаються при взаємно однозначних неперервних відображеннях. Прикладами таких властивостей є «бути замкненою кривою» «бути елементарною кривою» та ін. Властивість «бути опуклою кривою» не топологічна, оскільки можна досить легко побудувати гомеоморфний образ опуклої кривої, який уже опуклою кривою не буде. До топологічних властивостей слід віднести і властивість «бути кривою, що гомеоморфна якійсь певній кривій, кривій певного вигляду». Підведемо підсумки одержаних раніше результатів з точки зору топологічних властивостей.

I. **Еліпс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— опукла замкнена крива; еліпс, гомеоморфний колу. Гомеоморфізм можна одержати, якщо поставити у відповідність точки перетину кола і еліпса променями, що виходять з початку координат (рис.154). Самостійно довести, що таке відображення взаємно неперервне.

Отже, еліпс — вкладена крива.

Дуги еліпса, що лежать у відкритих координатних півплощинах, можна задати явно. Кожна з них гомеоморфна відкритому інтервалу, гомеоморфізм можна одержати за допомогою ортогональної проекції дуги на координатну вісь. Отже, кожна з цих дуг є елементарна крива.

II. **Парабола**

$$y^2 = 2px$$

— елементарна крива. Ортогональна проекція на вісь Oy задає гомеоморфізм параболи і прямої (рис. 155).

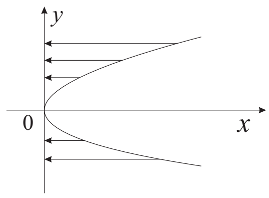


*Рис.*155

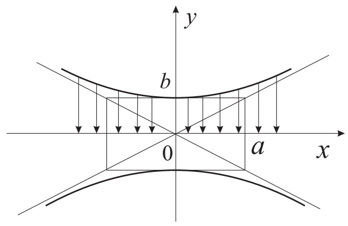


*Рис.*156

III. **Гіпербола**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

складається із двох зв'язних компонент, які є елементарними кривими, $y = b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ — явне задання верхньої вітки гіперболи. Ортогональна проекція кожної вітки гіперболи на вісь Ox задає гомеоморфізм вітки гіперболи і прямої (рис. 156).

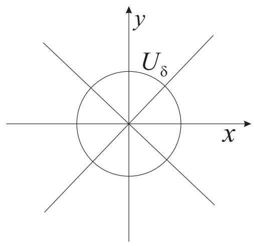


*Рис.*157

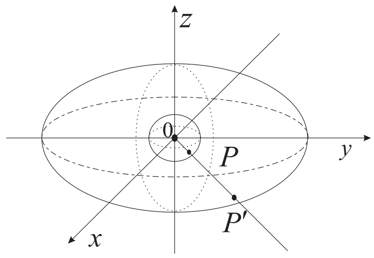


*Рис.*158

IV. **Пара прямих**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

що *перетинаються* має особливу точку. Перетин пари прямих з околом U_δ точки $O(0,\ 0)$ — це «хрест» (рис.157), він не гомеоморфний інтервалу.

V. **Еліпсоїд**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

— вкладена поверхня. Еліпсоїд гомеоморфний сфері (рис. 158).

Частини еліпсоїда, які лежать у відкритих координатних півпросторах, однозначно проектуються у відповідні координатні площини на області, що гомеоморфні відкритому кругу. Отже, кожна така частина є елементарна поверхня. В сукупності вони покривають весь еліпсоїд.

VI. **Гіперболоїди і конус** (рис. 159).

Розглянемо спочатку перехід від гіперболи до спряженої гіперболи. Потрібно вирізати деякі околи вершин гіперболи. Одержані чотири зв'язні компоненти потрібно попарно склеїти по-іншому і вигнути так, як показано на рис.160.

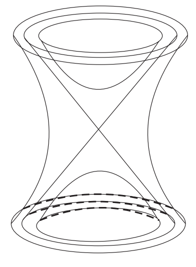


*Рис.*159

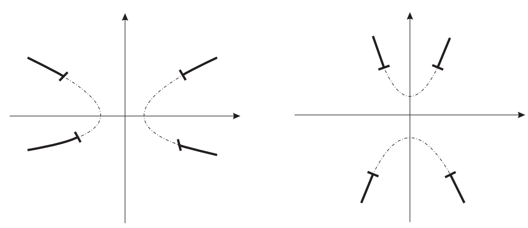


*Рис.*160

Перейдемо тепер до розглядання *гіперболоїдів*. Виріжемо із однопорожнистого гіперболоїда окіл «горлового» еліпса. Межі S^1, S^2 кусків поверхні, що залишилися, — еліпси (рис. 161). Викинутий кусок, з топологічної точки зору, можна вважати циліндричною поверхнею. Криві S^1 і S^2 на циліндрі — межі двох тілесних еліпсоїдів. Підклеїмо ці тілесні еліпси до кусків однопорожнистого гіперболоїда, що залишилися, і «вигнемо» поверхню так, щоб одержати двопорожнистий гіперболоїд (рис. 162).

Розглянуті операції (їх називають перебудовами) застосовують у теорії Морса.

Можна двопорожнистий гіперболоїд «перебудувати» в однопорожнистий.

Для простоти будемо розглядати зараз гіперболоїди і конус обертання:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

(ці поверхні топологічно еквівалентні загальним гіперболоїдам і конусу). Візьмемо сферу із центром на початку координат і відобразимо наші поверхні на сферу наступним чином: проведемо промінь із початку координат і точці перетину променя з поверхнею (гіперболоїдами або конусом) поставимо у відповідність точку перетину променя із сферою. При цьому конус перейде в два кола на сфері; двопорожнистий гіперболоїд — у дві відкриті шапочки, що обмежені цими колами; однопорожнистий гіперболоїд — у частину сфери, що залишилася, — «пояс» (рис. 163).

Зв'язна компонента двопорожнистого гіперболоїда гомеоморфна відкритій шапочці, а шапочка гомеоморфна відкритому диску. Отже, зв'язна компонента двопорожнистого гіперболоїда гомеоморфна площині, тобто є елементарною поверхнею.

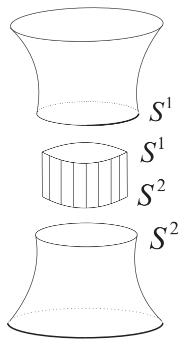


*Рис.*161

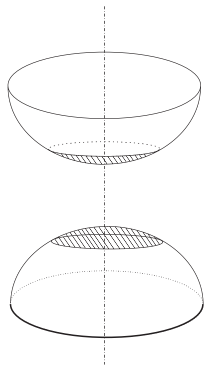


*Рис.*162

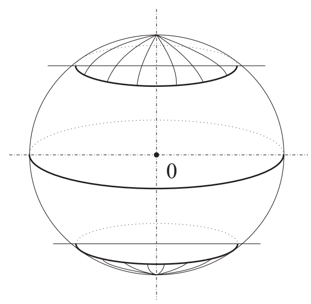


*Рис.*163

Зауваження. *Гомеоморфізм зв'язної компоненти двопорожнистого гіперболоїда і площини можна було встановити, здійснивши ортогональне проєктування зв'язної компоненти на координатну площину.*

Однопорожнистий гіперболоїд гомеоморфний поясу на сфері; пояс на сфері гомеоморфний поясу на циліндрі, що обмежений двома колами; пояс на циліндрі гомеоморфний циліндру, оскільки пояс — це $S^1 \times (a,b)$ $\quad (S^1$ — коло), а циліндр — це $S^1 \times E^1$ $\quad (E^1$ — пряма). Отже, однопорожнистий гіперболоїд — вкладена поверхня.

Конус (подібно парі прямих, що перетинаються, в плоскому випадку) — це поверхня з особливою точкою — вершиною конуса. У вершини конуса немає околу, який гомеоморфний кругу.

VII. **Параболоїди** задані явно. Отже, вони гомеоморфні площині і є елементарними поверхнями.

VIII. **Еліптичний циліндр** — вкладена поверхня, оскільки його можливо покрити чотирма частинами, кожна з яких гомеоморфна площині.

IX. **Гіперболічний циліндр** — вкладена поверхня, оскільки кожна зв'язна компонента гомеоморфна площині.

X. **Параболічний циліндр** гомеоморфний площині, отже, є елементарною поверхнею.

XI. **Поверхні, що залишилися,** — вироджені. Відмітимо серед них пару площин, що перетинаються, які мають особливу пряму — пряму перетину.

Розділ 7

Геометричні перетворення

7.1 Рухи.

Рухом на площині або в просторі називається таке відображення площини або простору на себе, при якому зберігається відстань між точками, тобто відображення $f : E^n \to E^n$ $(n = 2, 3)$ є рух, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in E^n$ буде виконуватись рівність

$$|x_1 x_2| = |f(x_1) f(x_2)|.$$

Властивості руху.

1. Рух — взаємно однозначне відображення.

2. Тотожне відображення (позначається через $id,\ e,\ 1$) є рух.

3. Серед рухів можна ввести операцію множення (позначається $\circ$) як композицію відображень: нехай f, g — два рухи, $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$, тоді $g \circ f$ — також рух.

4. Для кожного руху f можна побудувати обернене відображення f^{-1}, $x \xrightarrow{f} y$, $y \xrightarrow{f^{-1}} x$, $f^{-1} \circ f = id$, де f^{-1} — також рух.

5. Якщо g, f, h — рухи, то справедлива рівність $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, оскільки вона виконується для композиції відображень.

6. Рухи переводять пряму в пряму. Це випливає із нерівності трикутника.

7.1.1 Рухи на площині.

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат Ox^1x^2.

Приклади.

1. Паралельний перенос

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + a^1, \\ y^2 = x^2 + a^2 \end{cases}$$

є рухом. Перевірити самостійно.

2. Обертання навколо нерухомої точки на кут φ задається системою

$$\begin{cases} y^1 = x^1 \cos\varphi - x^2 \sin\varphi, \\ y^2 = x^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi \end{cases}$$

є рухом. Перевірити самостійно.

Зауваження. *Поворот системи координат на кут φ відповідає повороту площини на кут $-\varphi$ у фіксованій системі координат (рис. 164).*

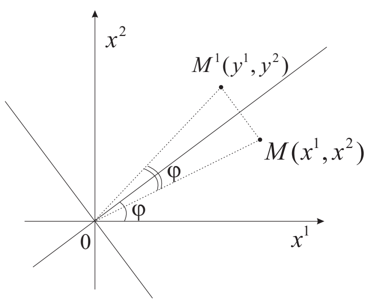


*Рис.*164

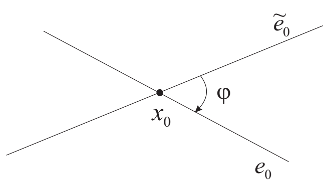


*Рис.*165

3. Симетрія відносно прямої, що задана рівняннями

$$\begin{cases} y^1 = x^1, \\ y^2 = -x^2 \end{cases}$$

також є рухом.

Виявляється, що будь-який рух на площині є композиція наступних рухів: *паралельного переносу, обертання та осьової симетрії.*

Доведення. Нехай f — деякий рух на площині, $f(x_0) = y_0$. $T_{\mathbf{b}}$ — паралельний перенос на вектор $\mathbf{b}$, де $\mathbf{b} = \overrightarrow{y_0 x_0}$. Розглянемо композицію $T_{\mathbf{b}} \circ f$, це також рух, причому $(T_{\mathbf{b}} \circ f)(x_0) = x_0$.

Розглянемо пряму l_0, що проходить через точку x_0. При русі $T_{\mathbf{b}} \circ f$ пряма l_0 перейде в пряму $\widetilde{l_0}$, яка також проходить через точку x_0 (рис. 165). Здійснимо поворот $R_\varphi(x_0)$ навколо точки x_0 на кут φ, такий, щоб $\widetilde{l_0}$ перейшла в l_0. Тоді рух $R_\varphi(x_0) \circ T_{\mathbf{b}} \circ f$ пряму l_0 лишає на місці.

Розглянемо довільну пряму l_1, що проходить через точку x_0 і утворює кут α з прямою l_0 (рис. 166). Як діє на l_1 рух $R_\varphi(x_0) \circ T_{\mathbf{b}} \circ f$? При русі кут між прямими зберігається незмінним. Отже, можливі два випадки.

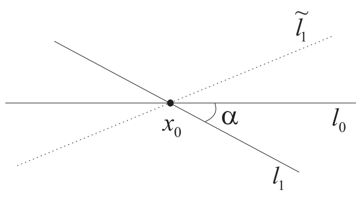


*Рис.*166

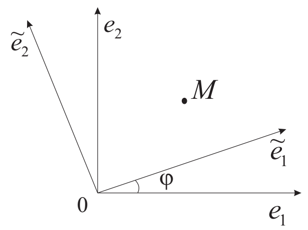


*Рис.*167

1. Пряма l_1 лишається на місті, і тоді
$$R_\varphi(x_0) \circ T_{\mathbf{b}} \circ f = 1.$$

2. Пряма l_1 переходить в симетричну відносно прямої l_0 пряму $\widetilde{l_1}$. Тоді будемо розглядати рух S_{l_0} — симетрію відносно прямої l_0. Результатом буде
$$S_{l_0} \circ R_\varphi(x_0) \circ T_{\mathbf{b}} \circ f = 1.$$

Зауважимо, що $R_\varphi^{-1}(x_0) = R_{-\varphi}(x_0)$, $\quad T_{\mathbf{b}}^{-1} = T_{-\mathbf{b}}$, $\quad S_{l_0}^{-1} = S_{l_0}$. Тому в першому випадку:
$$f = T_{-\mathbf{b}} \circ R_{-\varphi}(x_0),$$
а у другому:
$$f = T_{-\mathbf{b}} \circ R_{-\varphi}(x_0) \circ S_{l_0}.$$

Запишемо *формули перетворення координат при русі на площині.*

1. Нехай координати точки $x_0(0,0)$. Тоді

$$R_\varphi(x_0):\begin{cases} z^1 = x^1\cos\varphi - x^2\sin\varphi, \\ z^2 = x^1\sin\varphi + x^2\cos\varphi. \end{cases}$$

$$T_{\mathbf{b}}:\begin{cases} y^1 = z^1 + b^1, \\ y^2 = z^2 + b^2, \text{ де } \mathbf{b} = (b^1,\ b^2). \end{cases}$$

Отже, будь-який рух I типу аналітично записується так:

$$\begin{cases} y^1 = x^1\cos\varphi - x^2\sin\varphi + b^1, \\ y^2 = x^1\sin\varphi + x^2\cos\varphi + b^2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases} \tag{7.1}$$

2. Нехай пряма l_0 — вісь Ox^1 та координати точки $x_0(0,0)$.

$$S_{l_0}:\begin{cases} z^1 = x^1, \\ z^2 = -x^2, \end{cases}$$

в матричному вигляді

$$S_{l_0}:\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи пункт 1, кожний рух II типу аналітично записується так:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} y^1 = x^1\cos\varphi + x^2\sin\varphi + b^1, \\ y^2 = x^1\sin\varphi - x^2\cos\varphi + b^2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases} \tag{7.2}$$

У матричному вигляді системи (7.1) і (7.2) записуються так:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \text{ де } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Матриця A задовольняє умові $A^tA = AA^t = E$, де A^t — транспонована матриця до матриці A.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

або

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Система (7.1) задає рух, який є композицією повороту і паралельного переносу, система (7.2) — композиція осьової симетрії, повороту і паралельного переносу.

■

Приклад. Покажемо, що паралельний перенос на вектор $\boldsymbol{a}$ є композиція двох осьових симетрій. Дійсно, нехай вісь l_1 співпадає з координатною віссю Ox^1, а вісь l_2 задається рівнянням $x^2 = \frac{\boldsymbol{a}}{2}$. Тоді симетрії відносно цих осей задаються наступними рівняннями:

$$\begin{cases} y^1 = -x^1, \\ y^2 = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} z^1 = -(y^1 - \boldsymbol{a}) \\ z^2 = y^2. \end{cases}$$

Їх композиція має вигляд

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + \boldsymbol{a}, \\ z^2 = x^2. \end{cases}$$

Згадаємо перетворення координат при повороті системи координат на кут φ (рис.167). Новий базис $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2)$ виражається через старий базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ наступним чином:

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\varphi - \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi, \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Старі координати точки M через нові координати тієї ж точки M виражаються за допомогою системи

$$\begin{cases} x^1 = \widetilde{x}^1 \cos\varphi - \widetilde{x}^2 \sin\varphi, \\ x^2 = \widetilde{x}^1 \sin\varphi + \widetilde{x}^2 \cos\varphi. \end{cases}$$

Нові координати точки M через старі

$$\begin{cases} \widetilde{x}^1 = x^1 \cos\varphi + x^2 \sin\varphi, \\ \widetilde{x}^2 = -x^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi. \end{cases} \tag{7.3}$$

При повороті системи координат на кут φ навколо точки $O(0,0)$ — координати точки M змінюються за формулами

$$\begin{cases} y^1 = x^1 \cos\varphi - x^2 \sin\varphi, \\ y^2 = x^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi. \end{cases} \tag{7.4}$$

Зауважимо, що якщо обертати систему координат на кут φ, то в новій системі координат точка M матиме такі ж координати, як і точка, що одержана з точки M шляхом обертання на кут $-\varphi$ в старій системі координат. Звідси, формули (7.3) переходять у формули (7.4), якщо в (7.3) підставити $-\varphi$ замість φ, і навпаки.

З'ясуємо, чим відрізняються рухи (7.1) і (7.2). Система (7.1) описує рухи I роду, для них матриця

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \det A = 1.$$

Система (7.2) описує рухи II роду, для них

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \det A = -1.$$

Припустимо, що на площині задана деяка орієнтація. Нехай $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ — ортонормований базис, що задає цю орієнтацію. При русі базис $\boldsymbol{e}$ перейде у новий базис $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_1, \widetilde{\boldsymbol{e}}_2)$ площини. В системі (7.1) матриця A така, що $\det A > 0$. Отже, детермінант матриці переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до базису $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ при русі (7.1) додатний. Таким чином, базис $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ задає ту ж орієнтацію площини, що і базис $\boldsymbol{e}$. При русі II роду базис $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ задає протилежну орієнтацію площини, оскільки детермінант матриці переходу від $\boldsymbol{e}$ до $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ від'ємний.

Рухи, що зберігають орієнтацію площини, називаються *власними*, а ті, що змінюють орієнтацію — *невласними*.

Задати орієнтацію — це значить задати додатний напрям обертання на площині або вибрати додатний обхід трикутника (рис.168). При русі $\triangle A_1A_2A_3$ перейде в конгруентний $\triangle \widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$.

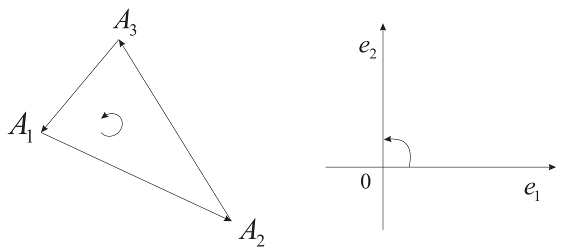


*Рис.*168

При русі I роду напрям обходу сторін трикутника зберігається, при русі II роду — змінюється на протилежний (рис.168, 169).

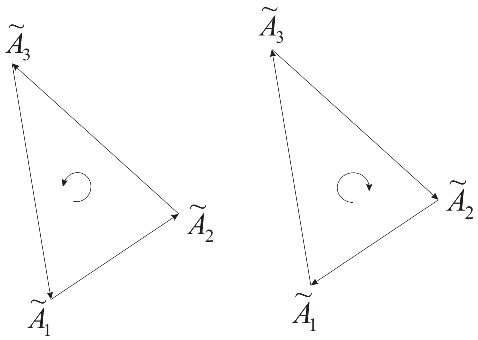


*Рис.*169

Будемо розглядати трикутник як тверде тіло. Якщо рух I роду, то, не виходячи з площини, можна сумістити трикутники $\triangle A_1A_2A_3$ і $\triangle \widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$. Якщо рух II роду, то, не виходячи з площини, ці два трикутники сумістити не можна.

Приклад. Розглянемо окремий випадок руху II роду — осьову симетрію. Трикутники $\triangle A_1A_2A_3$ і $\triangle \widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$ не можна сумістити, не виходячи з площини (рис.170). Осьова симетрія — проекція на E^2 руху в E^3. Обертанням в просторі навколо осі l на кут π $\triangle A_1A_2A_3$ можна сумістити з $\triangle \widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$.

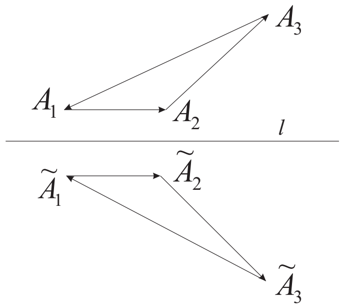


*Рис.*170

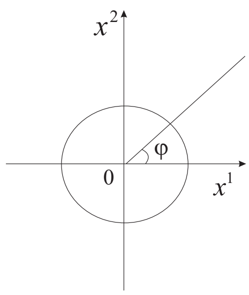


*Рис.*171

Ковзна симетрія — це композиція осьової симетрії і паралельного переносу в напрямі осі симетрії. Якщо вісь симетрії вибрати за вісь Ox^1 у прямокутній системі координат, то ковзна симетрія буде задаватися рівняннями:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \boldsymbol{a}, \\ y^2 = -x^2. \end{cases}$$

В окремому випадку, коли вектор паралельного переносу нульовий, це осьова симетрія.

Теорема Шаля (класифікаційна теорема).

Будь-який власний рух на площині є або паралельний перенос, або обертання навколо точки. Будь-який невласний рух є ковзна симетрія.

Доведення. *Розглянемо випадок власного руху.* Він задається системою (7.1).

a.) Нехай $A = E$. Система (7.1) набуде вигляду

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + b^1, \\ y^2 = x^2 + b^2, \end{cases}$$

така система рівностей задає паралельний перенос.

У цьому випадку $\varphi = 0$, перетворення не має нерухомої точки.

b.) Нехай $\varphi \neq 0$. Доведемо, що у цьому випадку є нерухома точка перетворення, тобто існує розв'язок матричного рівняння

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \quad \text{або} \quad (E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

У координатному вигляді останнє рівняння запишеться так:

$$\begin{cases} x^1(1 - \cos\varphi) + x^2 \sin\varphi = b^1, \\ -x^1 \sin\varphi + x^2(1 - \cos\varphi) = b^2. \end{cases}$$

$$\det(E - A) = \det \begin{pmatrix} 1 - \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi) = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \neq 0,$$

оскільки, $0 < \frac{\varphi}{2} < \pi$.

Головний визначник системи не дорівнює нулю, тому система має єдиний розв'язок $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$. Цей розв'язок і є нерухома точка руху (7.1).

Таким чином, рух задано рівнянням $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}$.

Звідси,

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0 = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{7.5}$$

Здійснимо паралельний перенос системи координат так, щоб початок координат співпадав з точкою x_0. Він задається рівністю

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0.$$

У новій системі координат рівняння (7.5) матиме вигляд

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = A\widetilde{\boldsymbol{x}}, \quad \text{де} \quad \widetilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0,$$

це рівняння описує поворот на кут φ навколо нового початку координат.

Розглянемо випадок невласного руху. Він задається системою (7.2) або рівнянням

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Здійснимо поворот системи координат на кут φ. У новій системі координат наш рух описується більш простим рівнянням:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y}^1 \\ \widetilde{y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} \widetilde{y}^1 = \widetilde{x}^1 + b^1, \\ \widetilde{y}^2 = -\widetilde{x}^2 + b^2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \widetilde{y}^1 = \widetilde{x}^1 + b^1, \\ \widetilde{y}^2 - \frac{b^2}{2} = -(\widetilde{x}^2 - \frac{b^2}{2}). \end{cases}$$

Перейдемо до нової системи координат, здійснивши паралельний перенос, який задано формулами

$$\begin{cases} \widetilde{\widetilde{x}}^1 = \widetilde{x}^1, \\ \widetilde{\widetilde{x}}^2 = \widetilde{x}^2 - \frac{b^2}{2}. \end{cases}$$

У новій системі координат рівняння руху будуть такими:

$$\begin{cases} \widetilde{\widetilde{y}}^1 = \widetilde{\widetilde{x}}^1 + b^1, \\ \widetilde{\widetilde{y}}^2 = -\widetilde{\widetilde{x}}^2, \end{cases}$$

тобто будуть задавати ковзну симетрію.

■

Вправи.

1. Яке перетворення буде композицією осьових симетрій S_{l_1}, S_{l_2}, якщо: $a)$ $l_1 \parallel l_2$; $b)$ $l_1 \neq l_2$?
2. Довести, що будь-який власний рух площини є композицією двох осьових симетрій, а будь-який невласний рух — композицією трьох осьових симетрій.
3. Яке перетворення буде композицією двох поворотів $R_{\varphi_1}(A)$, $R_{\varphi_2}(B)$?
4. Яке перетворення буде композицією осьової симетрії і повороту?
5. Яке перетворення буде композицією повороту і паралельного переносу?
6. Яке перетворення задає композиція $R_\varphi \circ T \circ R_{-\varphi}$?

Розглянемо комплексні числа

$$x = x^1 + ix^2, \quad y = y^1 + iy^2, \quad b = b^1 + ib^2.$$

Ми знаємо, що $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\overline{x} = x^1 - ix^2$, точки x, $\overline{x}$ симетричні відносно осі x^1.

Перевірити самостійно, що систему (7.1) можна записати так: $y = e^{i\varphi}x + b$, а систему (7.2): $y = e^{i\varphi}\overline{x} + b$.

Всі рухи, як ми показали раніше, утворюють групу і поділяються на власні і невласні.

Композиція двох власних рухів є власний рух, тотожне перетворення — власний рух, обернене до власного руху — власний рух. Отже, власні рухи самі утворюють групу, яка називається підгрупою власних рухів.

Композиція двох невласних рухів — рух власний. Невласні рухи групи не утворюють.

Композиція власного і невласного руху — невласний рух. Якщо створити композицію всіх власних рухів з одним і тим же невласним рухом, одержимо всі невласні рухи.

Паралельні переноси утворюють групу.

Розглянемо рухи, які можуть бути задані формулою $y = Ax$ (або $y = \boldsymbol{y} = e^{i\varphi}\boldsymbol{x}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Вони утворюють групу, яка називається ортогональною групою і позначається через $O(2)$. Підгрупа групи $O(2)$ з $\det A = 1$ позначається через $SO(2)$. Кожному елементові групи $SO(2)$ можна поставити у відповідність точку кола, причому ця відповідність між елементами групи і точками кола буде взаємно однозначною (рис.171).

7.1.2 Рухи в просторі.

Подібно до плоского випадку можна довести, що будь-який рух є лінійним перетворенням: $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, або в координатній формі:

$$\begin{cases} y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3 + b^1, \\ y^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 + b^2, \\ y^3 = a^3_1 x^1 + a^3_2 x^2 + a^3_3 x^3 + b^3. \end{cases}$$

Але не будь-яке лінійне перетворення задає рух, а лише таке, у якого $AA^t = E$.

Справді, нехай перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ задає рух, тоді $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ також задає рух. Перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ переводить 0 в 0, $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{y}$, відстані між відповідними точками зберігаються. Отже,

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

або

$$\left\langle A\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \right\rangle.$$

Підставимо в останню рівність $y^i = a^i_j x^j \ \ (i, j = 1, 2, 3)$ і прирівняємо коефіцієнти при $x^i,\ x^j$ справа і зліва, одержимо

$$(a^1_1)^2 + (a^2_1)^2 + (a^3_1)^2 = 1, \quad a^1_1 a^1_2 + a^2_1 a^2_2 + a^3_1 a^3_2 = 0$$

і т.п.

Виписати самостійно решту рівностей і впевнитися, що $\left\langle \boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{a}_j \right\rangle = \delta_{ij}$, де вектор $\boldsymbol{a}_i = \{a^1_i,\ a^2_i,\ a^3_i\}$ — умова, при якій перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ є рух.

Таким чином, щоб формула $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ задавала рух, матриця A повинна бути ортогональною.

Лінійне перетворення є рух тоді і тільки тоді, коли $AA^t = E$.

Теорема.
Будь-яке ортогональне перетворення вигляду $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ *має інваріантну пряму, що переходить в себе (точки цієї прямої не обов'язково лишаються на місці).*

Доведення. Розглянемо рівняння

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \ \text{ або } \ (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0,$$

ненульовий вектор $\boldsymbol{x}$, що задовольняє цьому рівнянню, є власним вектором матриці A, а число λ — власне значення, що відповідає цьому власному вектору.

Рівняння $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ рівносильне системі трьох рівнянь з трьома невідомими. Щоб ця система мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб $\det(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$, тобто λ повинно бути коренем характеристичного рівняння матриці A. Але оскільки вимірність простору $n = 3$ і матриця A — третього порядку, рівняння $\det(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ — це алгебраїчне рівняння третього ступеня. Таке рівняння завжди має дійсний корень λ_0, а рівняння $(A - \lambda_0 E)\boldsymbol{x} = 0$ має ненульовий розв'язок $\boldsymbol{e}_0$. Тим самим твердження доведено.

■

Пряма, що проходить через початок координат у напрямі вектора $\boldsymbol{e}_0$ інваріантна.

Оскільки, рівняння $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ задає рух, то

$$\left\langle A\boldsymbol{e}_0,\ A\boldsymbol{e}_0 \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{e}_0,\ \boldsymbol{e}_0 \right\rangle.$$

Ми знаємо, що $A\boldsymbol{e}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{e}_0$, отже,

$$\left\langle \lambda_0\boldsymbol{e}_0,\ \lambda_0\boldsymbol{e}_0 \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{e}_0,\ \boldsymbol{e}_0 \right\rangle.$$

Звідси одержуємо $\lambda_0^2 = 1$ і $\lambda_0 = \pm 1$.

Виберемо систему координат спеціальним чином: напрям осі Ox^3 співпадає з напрямом $\boldsymbol{e}_0$. Тоді площина x^1x^2 буде перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{e}_0$ (рис.172).

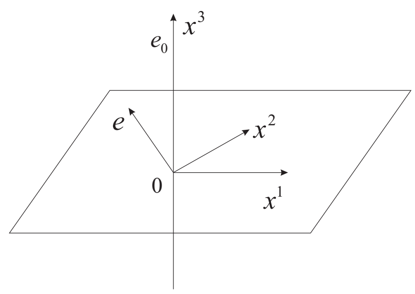


*Рис.*172

Площина, яка перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{e}_0$ і проходить через початок координат, інваріантна під дією руху $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

Справді, нехай вектор $\boldsymbol{e}$ перпендикулярний до вектора $\boldsymbol{e}_0$, тобто $\left\langle \boldsymbol{e}_0,\ \boldsymbol{e} \right\rangle = 0$, але $\left\langle A\boldsymbol{e}_0,\ A\boldsymbol{e} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{e}_0,\ \boldsymbol{e} \right\rangle = 0$ і $A\boldsymbol{e}_0 = \pm\boldsymbol{e}_0$, отже, $\left\langle \pm\,\boldsymbol{e}_0,\ A\boldsymbol{e} \right\rangle = 0$. Таким чином, $A\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{e}_0$.

З'ясуємо, який вигляд буде у матриці A у вибраній нами системі координат. Нехай $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$ — ортонормований базис, що задає нашу систему координат. Ми довели, що

$$A\boldsymbol{e}_3 = \pm \boldsymbol{e}_3,$$

або в координатній формі

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матрична рівність дозволяє записати $a_3^1 = 0,\ a_3^2 = 0,\ a_3^3 = \pm 1$.

Площина x^1x^2 — інваріант руху $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Отже,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $*$ — довільне дійсне число. Звідки, $a_1^3 = 0$ і

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & a_2^3 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix},$$

тому $a_2^3 = 0$.

Таким чином, у спеціальній системі координат матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

де $\widetilde{A}$ — ортогональна матриця, що відповідає плоскому русі (русі на площині x^1x^2). Отже, будь-яка ортогональна матриця A третього порядку має один з двох видів:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

або

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо всі можливі випадки:

1. $\det A = 1$.

1.1.
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ є обертання на кут φ навколо осі Ox^3.

1.2.
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

У площині x^1x^2 повернемо осі координат Ox^1 і Ox^2 на кут $\frac{\varphi}{2}$. В новій системі координат матриця A набуде вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ в цьому випадку є обертанням навколо осі Ox^1 на кут π.

Таким чином, у випадку 1. рівняння $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ задає обертання навколо деякої осі.

2. $\det A = -1$.

2.1.
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обертання на кут φ навколо осі x^3 і дзеркальна симетрія відносно площини $x^3 = 0$ називається *дзеркальним обертанням.*

2.2.
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдемо до нової системи координат так, як ми це зробили у випадку 1.2. Матриця A набуде вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, наше перетворення у цьому випадку є дзеркальна симетрія відносно площини $x^2 = 0$. Це окремий випадок дзеркального обертання.

Отже, у випадку 2. рівняння $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ задає дзеркальне обертання.

Таким чином, ми довели, що будь-який рух виду $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ у просторі є або обертання навколо деякої прямої на кут φ, або дзеркальне обертання. Отже, в деякій системі координат будь-який такий рух буде задано формулами:

$$\begin{cases} y^1 = x^1\cos\varphi - x^2\sin\varphi, \\ y^2 = x^1\sin\varphi + x^2\cos\varphi, \\ y^3 = \pm x^3. \end{cases}$$

Розглянемо ще деякі окремі випадки руху в просторі. Нехай рух задано так:

$$\begin{cases} y^1 = x^1\cos\varphi - x^2\sin\varphi, \\ y^2 = x^1\sin\varphi + x^2\cos\varphi, \\ y^3 = x^3 + b^3. \end{cases}$$

Це композиція повороту на кут φ навколо осі x^3 і паралельного переносу в напрямку цієї осі. Такий рух називається *гвинтовим.* Це власний рух.

Розглянемо композицію симетрії відносно площини (нехай це буде площина $x^3 = 0$) і паралельного переносу на вектор, що паралельний цій площині:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + b^1, \\ y^2 = x^2 + b^2, \\ y^3 = -x^3. \end{cases}$$

Цей рух є невласним, він називається *ковзною симетрією.*

Паралельний перенос

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + b^1, \\ y^2 = x^2 + b^2, \\ y^3 = x^3 + b^3 \end{cases}$$

є окремим випадком гвинтового руху.

Обертання навколо осі — окремий випадок гвинтового руху.

Теорема Шаля (класифікаційна теорема для простору).
Будь-який власний рух (тобто рух $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$*, де* $\det A = 1$*) є гвинтовий рух. Будь-який невласний рух (*$\det A = -1$*) є або дзеркальне обертання, або ковзна симетрія відносно площини.*

Доведення. Ми довели, що в деякій системі координат матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{якщо} \quad \det A = 1,$$

і

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{якщо} \quad \det A = -1.$$

Розглянемо спочатку власний рух. Якщо $\varphi = 0$, рівняння $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ набуде вигляду $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ і задає паралельний перенос.

Нехай $\varphi \neq 0$. Будемо шукати нерухому точку перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$, тобто розв'язок матричного рівняння $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, або $(A - E)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}$, або системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^1(\cos\varphi - 1) + x^2 \sin\varphi = -b^1, \\ -x^1 \sin\varphi + x^2(\cos\varphi - 1) = -b^2, \\ 0 = -b^3. \end{cases}$$

Ця система розв'язків не має, якщо $b^3 \neq 0$. Але з перших двох рівнянь однозначно знаходяться x_0^1, x_0^2 (оскільки $\varphi \neq 0$). Таким чином, існує $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_0^1 \\ \widetilde{x}_0^2 \end{pmatrix}$ такий, що $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0 = \widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{x}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{b}}$, де

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Але, оскільки, матриця A має спеціальний вигляд, рух задається системою рівнянь

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{y}} = \widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{b}}, \\ y^3 = x^3 + b^3. \end{cases}$$

Підставимо в перше рівняння $\widetilde{\boldsymbol{b}} = (E - \widetilde{A})\widetilde{\boldsymbol{x}}$ і одержимо

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{y}} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0 = \widetilde{A}(\widetilde{\boldsymbol{x}} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0), \\ y^3 = x^3 + b^3. \end{cases}$$

Перейдемо до нової системи координат $z^1z^2z^3$, яка зв'язана із системою $x^1x^2x^3$ так:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 - x_0^1, \\ z^2 = x^2 - x_0^2, \\ z^3 = x^3, \end{cases}$$

тобто здійснимо паралельний перенос у площині x^1x^2. В новій системі координат наш рух задається більш простими рівняннями:

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{y}} = \widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{z}}, \\ y^3 = z^3 + b^3, \end{cases}$$

які описують композицію обертання навколо осі Oz^3 і паралельного переносу вздовж цієї осі. Таким чином, це гвинтовий рух.

Розглянемо тепер невласний рух. Якщо $\varphi = 0$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

і рух задає система рівнянь

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + b^1, \\ y^2 = x^2 + b^2, \\ y^3 = -(x^3 - b^3). \end{cases}$$

Перейдемо до нової системи координат $z^1z^2z^3$, здійснивши паралельний перенос:

$$\begin{cases} z^1 = x^1, \\ z^2 = x^2, \\ z^3 = x^3 - b^3. \end{cases}$$

У новій системі координат рівняння руху будуть наступними:

$$\begin{cases} y^1 = z^1 + b^1, \\ y^2 = z^2 + b^2, \\ y^3 = -z^3. \end{cases}$$

Остання система рівнянь задає ковзну симетрію.

Випадок, коли $\varphi \neq 0$, розглянути самостійно.

Вказівка. Якщо $\varphi \neq 0$, то рівняння $(A-E)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}$ має єдиний розв'язок. При допомозі паралельного переносу можна перейти до нової системи координат, в якій рівняння руху буде мати вигляд $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{z}$, де

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

і рух буде дзеркальним обертанням.

■

Рухи виду $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ утворюють групу, яка позначається через $O(3)$. Власні рухи $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{z}$, $\det A = 1$ також утворюють групу, вона позначається через $SO(3)$. Кожний рух такого роду є обертанням на кут φ навколо нерухомої осі. Орієнтуємо вісь так, щоб із її кінця обертання було видно проти годинникової стрілки. Відкладемо на додатній півосі від початку координат відрізок довжиною φ. Кінець відрізка поставимо у відповідність руху. Тоді сукупність всіх точок, що відповідають власним рухам, заповнить кулю радіуса π з центром на початку координат. Оскільки обертання на кут π навколо прямої в протилежних напрямках — один і той же рух, то діаметрально протилежні точки сфери, що є межею кулі, потрібно ототожнити. Куля с ототожненими діаметрально протилежними точками межі позначається через RP^3 і називається тривимірним проективним простором. Ця множина є тривимірним дійсним проективним простором. Таким чином, $SO(3)$ допускає взаємно однозначне відображення на RP^3, причому близькі рухи переходять в близькі точки RP^3, тобто відображення є гомеоморфізмом. Можна сказати, що, з топологічної точки зору, $SO(3) = RP^3$.

7.1.3 Кути Ейлера.

Нехай $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ і $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3)$ — два ортонормовані базиси однієї орієнтації. Позначимо через l пряму, по якій перетинаються площини x^1x^2 і $\widetilde{x}^1\widetilde{x}^2$. Розглянемо кути

$$\varphi = (e_1\hat{\ }l), \quad \psi = (l\hat{\ }\widetilde{e}_1), \quad \theta = (e_3\hat{\ }\widetilde{e}_3).$$

Ці кути φ, ψ, θ (рис. 173) називаються *кутами Ейлера.* Якщо один базис зафіксовано, то другий повністю визначається кутами Ейлера.

Якщо дано базис $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ і кути φ, ψ, θ то, щоб одержати базис $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3)$ потрібно здійснити такі повороти:

1. у площині x^1x^2 повернути осі x^1 і x^2 на кут φ, вісь x^1 займе положення прямої l;

2. у площині, перпендикулярній до прямої l, повернути вісь x^3 на кут θ, одержимо вісь $\widetilde{x}^3$;

3. у площині, перпендикулярній до осі $\widetilde{x}^3$, повернути пряму l на кут ψ, одержимо вісь $\widetilde{x}^1$.

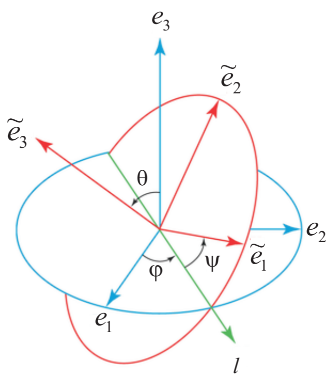


*Рис.*173

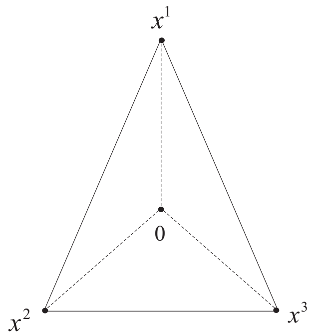


*Рис.*174

Кожному базису $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ (базис $\boldsymbol{e}$ фіксовано) відповідає деяке перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\det A = 1$ тієї ж орієнтації, що і $\boldsymbol{e}$. Отже, якщо у просторі задана система координат, то будь-який рух виду $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\det A = 1$ повністю визначається кутами Ейлера.

7.2 Дискретні групи рухів.

Ця тема безпосередньо пов'язана з фізикою, мистецтвом, архітектурою.

Нехай у просторі є деяка фігура. Розглянемо рухи, які переводять цю фігуру в себе. Сукупність усіх таких рухів утворює групу, яка називається групою симетрій фігури.

Приклади.

1. Група, що складається з повторних застосувань повороту на кут $\frac{360°}{n}$, де n — деяке ціле число, має у собі n елементів, називається *циклічною* групою і позначається через C_n. Вона є групою симетрій правильного орієнтованого n-кутника, тобто такого, на якому вибрано напрямок обходу вершин. Група симетрій центрально-симетричної фігури має в собі групу C_2.

2. Група, що складається з обертань, які описані в прикладі 1, і відбиттів відносно n осей, що утворюють одна з іншою кути $\frac{180°}{n}$, має в собі $2n$ елементів, називається *діедральною* групою і позначається через D_n. Ця група симетрій неорієнтованого правильного

n-кутника, $n \geqslant 3$. Група симетрій рівнобедреного, але неправильного трикутника є група D_1. Якщо група має вісь симетрії, то її група симетрій має в собі групу D_1.

3. $SO(2)$ є група симетрій орієнтованого кола.

4. $O(2)$ є група симетрій неорієнтованого кола.

7.2.1 Дискретні групи і правильні точкові системи.

Група $\mathit{\Gamma}$ рухів площини або простору називається *дискретною*, якщо вона має таку властивість: для будь-якої точки x_0 площини або простору існує куля фіксованого радіуса така, що під дією будь-якого елемента групи $\mathit{\Gamma}$ точка x_0 або лишається на місці, або її образ знаходиться поза кулею.

Приклади.

1. Група $SO(2)$ не є дискретною.

2. Групи $C_n,\ \ D_n$ дискретні.

3. Нехай $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ — фіксовані вектори, числа $m,\ n \in Z$, де Z — множина цілих чисел. Група $\mathit{\Gamma}= m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ є дискретною. З алгебраїчної точки зору, це група $Z \oplus Z$.

Візьмемо довільну точку x_0 площини (простору) і подіємо на неї усіма елементами групи. Сукупність точок $\mathit{\Gamma}(x_0) = \{\gamma x_0 \mid \gamma \in \mathit{\Gamma}\}$ площини (простору) називається орбітою точки x_0.

Дискретна група характеризується тим, що навколо будь-якої точки x_0 існує куля, всередині якої немає інших точок орбіти точки x_0, крім самої цієї точки.

Множина U називається *фундаментальною областю* групи, якщо в цій множині є точки з кожної орбіти, причому внутрішніми точками множини U не можуть бути дві точки з однієї орбіти.

Федорівськими, або кристалографічними, називаються дискретні групи, у яких фундаментальна область — обмежена множина.

Приклади.

1. Розглянемо групу C_n. Якщо $n = 3$, то група складається з трьох елементів: обертання на кути $0,\ 120,\ 240$. Орбіта точки — вершини правильного трикутника (рис.174).

   Фундаментальною областю групи C_n є тілесний кут, що дорівнює $\frac{2\pi}{n}$ (рис.175).

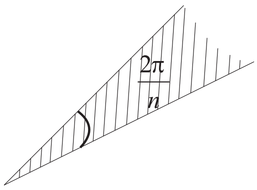


Рис.175

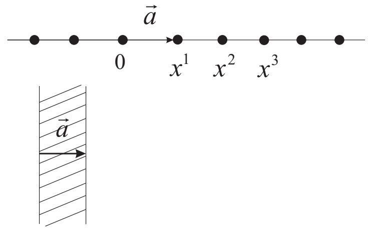


Рис.176

2. Нехай група $\Gamma = \{m\boldsymbol{a}\}$, де $\boldsymbol{a}$ — фіксований вектор, $m \in Z$. Орбіта точки — множина точок, що розташовані на прямій з напрямним вектором $\boldsymbol{a}$ на відстані $|\boldsymbol{a}|$ одна від іншої. Фундаментальною областю є полоса шириною $|\boldsymbol{a}|$ (рис.176). Отже, група $\Gamma = \{m\boldsymbol{a}\}$ не є федорівською.

3. Нехай група $\Gamma = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — фіксовані вектори, числа $m,\ n \in Z$. Орбіта точки x_0 складається з вершин гратки (рис.177). Фундаментальною областю є, наприклад, паралелограм, який натягнуто на вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (рис.178). Зауважимо, що вершини паралелограма — точки однієї орбіти, але ніякі дві із внутрішніх точок паралелограма не належать одній орбіті.

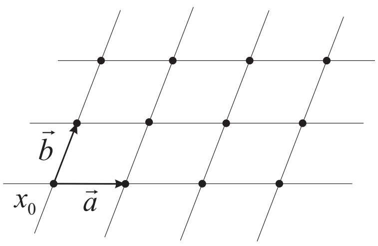


Рис.177

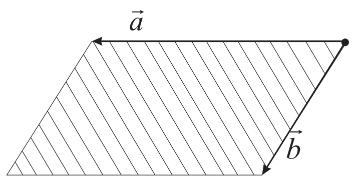


Рис.178

За фундаментальну область групи $\Gamma = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ можна взяти більш складні множини.

Група $\Gamma = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ є федорівською групою.

Правильною точковою системою називається сукупність точок на площині або в просторі, яка задавольняє умовам:

1. для будь-яких двох точок x, y у сукупності існує рух, який переводить x в y і всю точкову систему в себе (це умова правильного

розташування точок у просторі);

2. у будь-якій кулі скінченного радіуса існує скінченна кількість точок системи (умова того, що немає точок згущення);

3. існує така куля досить великого фіксованого радіуса, що в якій би точці площини або простору не розташовувався центр кулі, всередині його є точка системи (умова рівномірності заповнення простору точками системи).

Всі рухи, що переводять правильну точку системи в себе, утворюють дискретну групу з обмеженою фундаментальною областю, тобто федорівську групу.

Кристалам відповідають правильні точкові системи. Отже, класифікація кристалів зводиться до класифікації федорівських груп. Остання проведена: на площині існує 17 федорівських груп, у простору — 230. Класифікацію цих груп провів Федоров у 1890р., незалежно — Шенфліс.

Всі плоскі кристалографічні групи були відкриті експериментально. Мусульманська релігія забороняла зображати живих істот. Це було пов'язано із заповіддю: «не створи собі кумира». Тому художники створювали різноманітні декоративні орнаменти, що мають ту чи іншу групу симетрій. В арабських орнаментах присутні також групи симетрій усі 17 федорівських груп.

У багатьох орнаментах Ешера групою симетрій є одна з кристалографічних груп, причому фундаментальна область — зображення живої істоти.

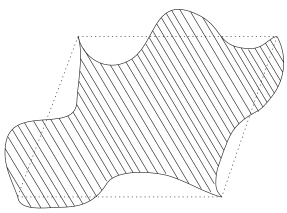


*Рис.*179

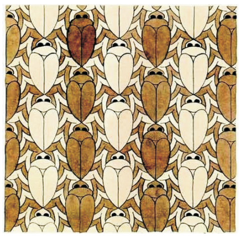


*Рис.*180

Розглянемо один із узорів Ешера. На рис.180 бачимо, що жуки, з яких складається узор розташовані у відповідності з граткою, що натягнута на базис ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$). Гратка не зовсім довільна: вона складається із двох добре розташованих одна відносно іншої прямокутних граток. Це збагачує симетрію візерунка і тим самим придає йому додаткову вишуканість. Так, гратка, крім стандартних паралельних переносів і симетрій відносно середин відрізків, що з'єднують її точки, має й інші автоморфізми. Це — симетрії відносно суцільних прямих і ковзні симетрії відносно пунктирних прямих, як горизонтальних, так і вертикальних (рис.181).

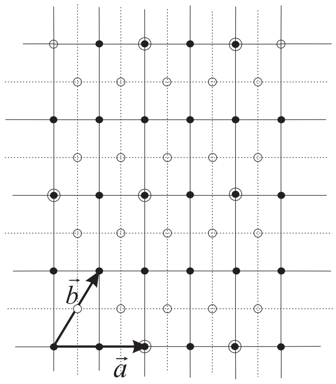


*Рис.*181

Форма жука має тільки поздовжню симетрію. Через це візерунок втрачає всі симетрії відносно точок, а також всі симетрії і ковзні симетрії відносно горизонтальних прямих.

Нехтуючи різницею в забарвленні жуків, розглянемо спочатку повну групу одноколірного візерунка. Очевидно, що ця група складається із паралельних переносів гратки, а також симетрії і ковзних симетрій відносно вертикальних відповідно суцільних і пунктирних прямих. Фундаментальною областю цієї групи може бути половина жука.

Очевидно, що цілий жук є фундаментальною областю для підгруп паралельних переносів. Звернемо увагу на те, що жук — також фундаментальна область ще однієї, крім цієї, підгрупи повної групи візерунка. Викинемо для цього з повної групи одноколірного візерунка всі «чисті» симетрії і, крім того, ті паралельні переноси, які переводять світлих жуків у темні, а темних у світлі. Множина автоморфізмів візерунка, що лишилися (а це будуть всі ковзні симетрії відносно вертикальних прямих і тільки ті паралельні переноси, які переводять жука в жука того ж кольору), задовольняє всім аксіомам групи. Жук для такої групи становить собою фундаментальну область.

Повна група двоколірного узора, очевидно, складається із усіх «чистих» симетрій відносно вертикальних прямих і тільки тих переносів, які пересувають кожного жука в жука того ж кольору. Фундаментальну область цієї групи можна скласти з половин двох жуків різного кольору.

Намітимо шлях проведення класифікацій федорівських груп на площині. Справедлива наступна теорема.

Теорема 7.2.1. *Кожна федорівська група в E^n має дискретну підгрупу, що породжена n лінійно незалежними паралельними переносами.*

Лема 7.2.1. *Нехай Γ — кристалографічна група, O, O' — дві точки однієї і тієї ж орбіти, g_1 — рух, що переводить точку O в точку O', g — обертання на кут φ навколо точки O. Тоді в Γ існує обертання на кут φ з центром в точці O'.*

Доведення. Виберемо точку O за початок координат. Тоді обертання g запишеться у вигляді:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \tag{7.6}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

а рух g_1, який переводить точку O в точку O' — у вигляді:

$$\boldsymbol{z} = A_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \tag{7.7}$$

де $\boldsymbol{b}$ — радіус-вектор точки O', матриця A_1 має вигляд:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \mp\sin\psi & \pm\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Розглянемо рух $g_1 \circ g \circ g_1^{-1}$. Із формул (7.6), (7.7) випливає, що рух $g \circ g_1^{-1}$ має вигляд

$$\boldsymbol{y} = AA_1^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{b}).$$

Тому рух $g_1 \circ g \circ g_1^{-1}$ задається рівнянням

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b} = A_1AA_1^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}). \tag{7.8}$$

Детермінант матриці $A_1AA_1^{-1}$ додатний, оскільки $\det A > 0$. Видно, що точку O' рух лишає на місці. Із теореми Шаля випливає, що рівняння (7.8) — поворот навколо точки O'. Безпосереднім обчисленням перевіряється, що матриця $A_1AA_1^{-1}$ задає поворот на кут φ.

■

Лема 7.2.2. *Якщо група має в собі поворот g на кут φ і паралельний перенос T, то вона має в собі і паралельний перенос T', який утворює кут φ з T і який співпадає з T за розміром.*

Доведення. Центр повороту g виберемо за початок координат. Тоді рух g має вигляд

$$\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{x}.$$

Паралельний перенос T має вигляд

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}.$$

Розглянемо рух $T' = g \circ T \circ g^{-1}$. Рух $T \circ g^{-1}$ має вигляд

$$\boldsymbol{y} = A^{-1}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}.$$

Тому рух T' записується так:

$$\boldsymbol{y} = A(A^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x} + A\boldsymbol{b},$$

тобто є паралельний перенос на вектор $A\boldsymbol{b}$, який одержано із вектора $\boldsymbol{b}$ обертанням його на кут φ.

■

Перейдемо до доведення теореми 7.2.1. для двовимірного випадку.

Доведення. *Випадок площини.* Нехай $\varGamma$ — федорівська група власних рухів площини. Рух, якщо він не є паралельним переносом, є поворот навколо деякої точки — центру повороту. Нехай рух g із групи $\varGamma$ є поворот на кут φ навколо точки O. Кожна точка O' із орбіти $\varGamma O$ також є центром повороту одного або декількох рухів із групи $\varGamma$. Дійсно, якщо рух g_1 із $\varGamma$ переводить точку O' в точку O, то рух $g' = g_1^{-1} \circ g \circ g_1$ належить групі $\varGamma$ і за лемою 7.2.1. буде поворотом на кут φ навколо точки O'.

За лемою 7.2.2. добуток $g^{-1} \circ g_1$ є паралельний перенос на вектор $\overline{OO_1}$. Разом з цим переносом в групі $\varGamma$ автоматично присутні паралельні переноси на всі вектори, кратні даному.

Тепер нам лишається виявити в групі $\varGamma$ перенос вздовж деякого іншого напрямку, що не співпадає з розглянутим.

Якщо кут $\varphi < 180°$, то, виконуючи поворот навколо точки O на кут φ проти годинникової стрілки, а потім такий же поворот навколо O', але за годинниковою стрілкою, ми одержимо перенос на вектор, не паралельний вектору $\overline{OO_1}$.

Якщо ж кут $\varphi = 180°$, то для одержання паралельного переносу вздовж нового напрямку досить виконати спочатку поворот навколо будь-якого еквівалентного O центра поворота, що не лежить на прямій OO' (такий центр повороту знайдеться тому, що орбіта ΓO відносно федорівської групи не лежить на одній прямій). Таким чином, в групі Γ присутні паралельні переноси вздовж двох векторів, що лежать на одній прямій, а звідси існує двовимірна підгрупа переносів, породжена цими векторами.

■

Кожен рух із дискретної групи Γ має вигляд $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$. Поставимо у відповідність йому рух $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Ця відповідність є гомоморфізм груп. З огляду на дискретність групи Γ група рухів $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ є скінченною. Вона є підгрупою дискретної групи Γ, яка лишає фіксовану точку нерухомою. Це групи симетрій самого орнаменту, породженого дискретною групою. На площині вони зводяться до C_n і D_n, причому можуть бути лише $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6,\ D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6$.

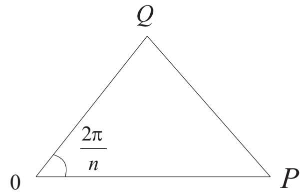


*Рис.*182

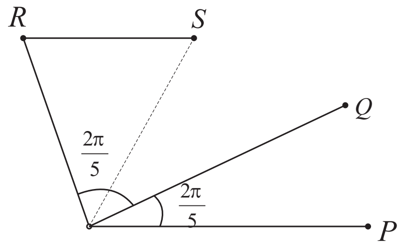


*Рис.*183

Оскільки в кожній групі є підгрупа власних рухів, не обмежуючи загальності можна досліджувати лише групи, які складаються із власних рухів. Нехай O — центр обертання підгрупи C_n, T — паралельний перенос на вектор найменшої довжини в дискретній групі Γ. Нехай точка P — образ точки O при паралельному переносі T, точка Q — образ точки P при повороті на кут $\frac{2\pi}{n}$. Згідно з другою лемою існує паралельний перенос T', що переводить точку O в точку O'. Паралельний перенос $(T')^{-1} \circ T$ переводить точку Q в точку P. Тому з огляду на мінімальність переносу T, $QP \geq OP$. Із властивостей рівнобедреного трикутника OQP (рис.182) випливає, що $\frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{3}$, звідки $n \leq 6$.

Доведемо тепер, що на площині немає поворотних симетрій 5-го порядку. Припустимо протилежне. Нехай точка Q — образ точки P при повороті на кут $\frac{2\pi}{5}$, R — образ точки P при повороті на кут $\frac{4\pi}{5}$, S — образ точки R при паралельному переносі T. Розглянемо трикутник ORS (рис. 183), $OR = RS$, кут R дорівнює $\frac{\pi}{5}$. Тому $OS < RS$. За другою лемою OR є паралельний перенос, що належить дискретній групі, і OS також є паралельний перенос як композиція двох паралельних переносів. Ми одержали суперечність з тим, що T — мінімальний паралельний перенос.

В плоских і просторових кристалах немає симетрії C_5 і C_8. В живій природі, навпаки, широко поширені симетрії C_5 і C_8. Є гіпотеза, у відповідність з якою симетрії C_5 і C_8 найпростіших живих істот зумовлені їх боротьбою за існування, так живі істоти страхуються від скам'яніння.

У просторі існують 32 підгрупи, що залишають точку на місці, і, як показано вище, підгрупа паралельних переносів $m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} + p\boldsymbol{c}$. Звідси і одержують класифікацію федорівських груп.

7.3 Афінні перетворення.

Афінні перетворення задаються рівняннями в координатному вигляді
$$y^i = a^i_j x^j + b^i,$$
де $i,\ j = 1,\ 2$ у випадку площини, $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ у випадку простору.

В матричному вигляді
$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}. \tag{7.9}$$

Приклади.

1. Рух є афінне перетворення.

2. Стискання є афінне перетворення.

Будемо розглядати зараз невироджені афінні перетворення, тобто такі, у яких $\det A \neq 0$.

Властивості афінних перетворень.

1. Відображення (7.9) взаємно однозначне, оскільки $\det A \neq 0$ і система (7.9) має єдиний розв'язок.

2. При відображенні (7.9) пряма переходить в пряму.

Доведення. Нехай пряма задана рівнянням $x^i = x^i_0 + a^i t$, або в матричному вигляді $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}t$. Підставляючи значення $\boldsymbol{x}$ в рівняння (7.9), одержимо
$$\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}t) + \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b} + (A\boldsymbol{a})t.$$

Останнє рівняння задає пряму, тому що $A\boldsymbol{a} \neq 0$, $\det A \neq 0$ і $\boldsymbol{a} \neq 0$. ■

Перетворення (7.9) у просторі площину переводить в площину.

3. Паралельні прямі переходять у паралельні прямі.

Справді, напрямні вектори образів паралельних прямих будуть ненульовими і колінеарними. Зауважимо, що якщо навіть $\det A = 0$, то прямі або перейдуть у точку, якщо $A\boldsymbol{a} = 0$, або перейдуть у паралельні прямі.

У просторі відображення (7.9) переводить паралельні площини в паралельні площини.

4. Інваріантом афінного перетворення є просте відношення.

Згадаємо, що інваріантом руху є відстань. Нехай на двох паралельних прямих розташовані відрізки A_1A_2, B_1B_2 (рис.184). Відношення довжини цих відрізків $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}$ називається *простим відношенням.*

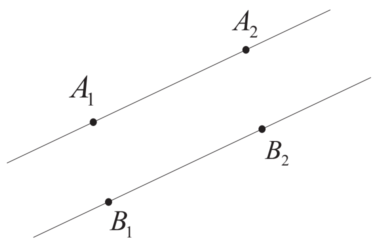


*Рис.*184

Доведемо властивість 4.

Доведення. Нехай на паралельних прямих

$$l_1 : \ \boldsymbol{x} = c_1 + \boldsymbol{a}t, \quad l_2 : \ \boldsymbol{x} = c_2 + \boldsymbol{a}\tau$$

лежать відрізки A_1A_2, A_3A_4, відповідно.

Точкам A_1, A_2, A_3, A_4 відповідають значення параметрів відповідно t_1, t_2, τ_1, τ_2. При афінному відображенні $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ прямі l_1, l_2 перейдуть у паралельні прямі

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{a}t + Ac_1 + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{a}\tau + Ac_2 + \boldsymbol{b},$$

точки A_i — в точки B_i $(i = 1, .., 4)$. Оскільки,

$$|A_1A_2| = |\boldsymbol{a}||t_2 - t_1|, \quad |A_3A_4| = |\boldsymbol{a}||\tau_4 - \tau_3|,$$

$$|B_1B_2| = |A\boldsymbol{a}||t_2 - t_1|, \quad |B_3B_4| = |A\boldsymbol{a}||\tau_4 - \tau_3|,$$

то

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_3A_4|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_3B_4|}.$$

■

Зауважимо, що властивість 4 має місце і для виродженого афінного перетворення, якщо прямі переходять у прямі, а не в точки.

Також, зауважимо, що можна обмежитися розгляданням перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ замість $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, оскільки перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ відрізняється від перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ тим, що до останнього добавляється паралельний перенос.

Нехай перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ задано на прямій. Тоді A — число і $|A|$ — коефіцієнт розтягування відрізків.

Нехай перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ задано на площині, в координатному вигляді воно запишеться так:

$$\begin{cases} y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, \\ y^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2. \end{cases}$$

Базисні вектори $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ і $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ під дією нашого перетворення перейдуть у вектори $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 = (a^1_1, a^2_1)$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_2 = (a^1_2, a^2_2)$.

Нехай S — площа квадрату, натягнутого на вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $S = 1$. Нехай $\widetilde{S}$ — площа паралелограма, в який перейшов квадрат, тобто паралелограма, натягнутого на вектори $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_2$,

$$\widetilde{S} = |\det \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ a^1_2 & a^2_2 \end{pmatrix}| = |\det A|.$$

Розглянемо тепер довільний паралелограм, натягнутий на вектори $\boldsymbol{e}_1 = (l^1_1, l^2_1)$ і $\boldsymbol{e}_2 = (l^1_2, l^2_2)$. Його площа $S = |\det L|$, де

$$L = \begin{pmatrix} l^1_1 & l^2_1 \\ l^1_2 & l^2_2 \end{pmatrix}.$$

При афінному перетворенні $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ перейдуть відповідно у вектори

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 = (a^1_1 l^1_1 + a^1_2 l^2_1,\ a^2_1 l^1_1 + a^2_2 l^2_1), \quad \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 = (a^1_1 l^1_2 + a^1_2 l^2_2,\ a^2_1 l^1_2 + a^2_2 l^2_2).$$

Площа паралелограма, натягнутого на вектори $\widetilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_2$,

$$\widetilde{S} = |\det(AL)| = |\det A||\det L| = |\det A|S.$$

Таким чином,

$$\frac{\widetilde{S}}{S} = |\det A|.$$

Аналогічне твердження істинне і в просторовому випадку.

З'ясуємо, скільки потрібно задати точок і їх образів, щоб афінне перетворення

$$\begin{cases} y^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b^1, \\ y^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b^2 \end{cases} \tag{7.10}$$

на площині визначалось однозначно.

Відмітимо, що власний рух на площині повністю визначається двома точками і їх образами.

Припустимо, задані точки $x_1(l^1, m^1)$, $x_2(l^2, m^2)$, $x_3(l^3, m^3)$. Їх образи — відповідно точки $\widetilde{x}_1(\widetilde{l}^1, \widetilde{m}^1)$, $\widetilde{x}_2(\widetilde{l}^2, \widetilde{m}^2)$, $\widetilde{x}_3(\widetilde{l}^3, \widetilde{m}^3)$. Щоб визначити афінне перетворення, потрібно визначити коефіцієнти системи (7.10). Підставимо в систему (7.10) координати заданих точок і їх образів, одержимо

$$\widetilde{l}^1 = a_1^1 l^1 + a_2^1 m^1 + b^1, \quad \widetilde{l}^2 = a_1^1 l^2 + a_2^1 m^2 + b^1, \quad \widetilde{l}^3 = a_1^1 l^3 + a_2^1 m^3 + b^1;$$

$$\widetilde{m}^1 = a_1^2 l^1 + a_2^2 m^1 + b^2, \quad \widetilde{m}^2 = a_1^2 l^2 + a_2^2 m^2 + b^2, \quad \widetilde{m}^3 = a_1^2 l^3 + a_2^2 m^3 + b^2.$$

Але визначник системи

$$\begin{vmatrix} l^1 & m^1 & 1 \\ l^2 & m^2 & 1 \\ l^3 & m^3 & 1 \end{vmatrix} = 2S_{\triangle x_1 x_2 x_3}.$$

Отже, якщо три задані точки не лежать на одній прямій, то при довільному заданні їх образів однозначно визначається афінне перетворення.

Щоб задати афінне перетворення в просторі, потрібно задати чотири точки, що не лежать в одній площині, і їх образи.

Таким чином, які б два трикутника на площині ми не взяли, існує афінне перетворення, яке переводить один трикутник в інший. Тобто з афінної точки зору всі трикутники дорівнюють один іншому (два трикутники називаються рівними, якщо існує афінне перетворення, яке переводить один трикутник в другий).

Всі тетраедри в просторі рівні між собою з афінної точки зору.

7.3.1 Будова групи афінних перетворень на площині.

Афінні перетворення $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ з $\det A \neq 0$ утворюють групу, яка називається повною лінійною над полем дійсних чисел і позначається через $GL(n, R)$.

Сукупність перетворень $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ з $\det A \neq 0$ також утворює групу невироджених афінних перетворень. Група рухів є підгрупою групи невироджених афінних перетворень.

Теорема 7.3.1. *Будь-яке невироджене афінне перетворення на площині є композиція руху і стискання відносно двох ортогональних осей.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, будемо розглядати афінне перетворення f у вигляді $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \quad \det A \neq 0$. При цьому перетворенні, коло одиничного радіуса перейде в обмежену криву 2-го порядку, тобто в еліпс, в осі еліпса перейдуть деякі діаметри кола, оскільки за 4-тою властивістю афінного перетворення центр перейде в центр. Покажемо, що ці діаметри ортогональні. Дійсно, розглянемо хорди еліпса, що паралельні одній осі. Другою віссю вони діляться пополам. Але ці хорди — образи хорд кола, що паралельні відповідному діаметру. По основній властивості афінного перетворення другим діаметром вони поділяються пополам. Звідси випливає, що діаметри кола, які переходять в осі еліпса, ортогональні.

Здійснимо рух g площини, при якому центр еліпса збігається з центром кола, а напрями головних осей — з напрямами відповідних діаметрів. Введемо на площині прямокутну систему координат з центром у центрі еліпса і осями $x^1, \ x^2$, напрямленими по головних осях еліпса. Композиція $g \circ f$ є афінне перетворення S, в координатній формі воно записується таким чином:

$$\begin{cases} y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, \\ y^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2. \end{cases}$$

Оскільки, при цьому перетворенні координатні осі переходять в себе, то при $x^2 = 0$ буде $y^2 = a^2_1 x^1 = 0$, тобто $a^1_2 = 0$. Аналогічно, $a^1_2 = 0$. Тобто перетворення $S = g \circ f$ є стискання площини вздовж координатних осей. Звідси, $f = g^{-1} \circ S$, і теорема доведена.

■

Аналогічно проводиться доведення в тривимірному випадку.

7.3.2 Паралельне проектування.

Нехай вектор $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3)$ задає деякий напрям в просторі. Нехай π — площина, яка не паралельна $\boldsymbol{a}$. Тоді кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину точку площини π наступним чином: нехай P — довільна точка простору. Проведемо через P пряму заданого напряму $\boldsymbol{a}$. Пряма перетне площину π в точці $\overline{P}$. Точці P ставимо у відповідність точку $\overline{P}$ (рис. 185).

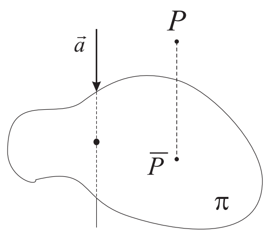


*Рис.*185

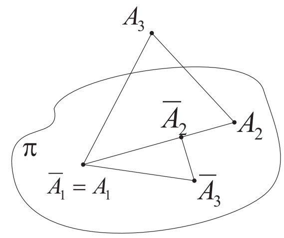


*Рис.*186

Описане відображення називається *паралельним проектуванням.* Воно не є взаємно однозначним: прямі, що паралельні $\boldsymbol{a}$, переходять у точку. Але якщо пряма не паралельна $\boldsymbol{a}$, вона відображається в пряму.

Приймемо площину π за координатну площину x^1x^2. Нехай довільна точка P має координати (x^1, x^2, x^3). Рівняння прямої, що проходить через точку P з напрямним вектором $\boldsymbol{a}$, будуть

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + a^1 t, \\ y^2 = x^2 + a^2 t, \\ y^3 = x^3 + a^3 t. \end{cases}$$

Точка P перейде при паралельному проектуванні в точку $\overline{P}(y^1, y^2, 0)$, тобто для точки $\overline{P}$ буде $y^3 = 0,\ \ x^3 + a^3 t = 0,\ \ t = -\frac{x^3}{a^3}$.

Таким чином, паралельне проектування аналітично задається формулами

$$\begin{cases} y^1 = \frac{a^3x^1 - a^1x^3}{a^3}, \\ \\ y^2 = \frac{a^3x^2 - a^2x^3}{a^3}, \\ \\ \qquad y^3 = 0, \end{cases}$$

з яких видно, що воно є афінним перетворенням, причому виродженим, оскільки $\det A = 0$.

При паралельному проектуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі, просте відношення є інваріантом.

Ці властивості є основою правил зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування.

Теорема 7.3.2. *З точністю до подібності будь-які два трикутники в просторі можна одержати один з другого за допомогою паралельного проектування.*

Доведення. Розглянемо два довільні трикутника: $\triangle A_1A_2A_3$ і $\triangle \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. За допомогою руху сумістимо точку A_1 з точкою $\overline{A}_1$, пряму A_1A_2 з прямою $\overline{A}_1\overline{A}_2$ (рис.186). Після цього здійснимо гомотетію з центром в точці A_1 і коефіцієнтом $k = \frac{\overline{A}_1\overline{A}_2}{A_1A_2}$, точка A_2 перейде в точку $\overline{A}_2$ (рис.187). Композиція руху і гомотетії — це перетворення подібності.

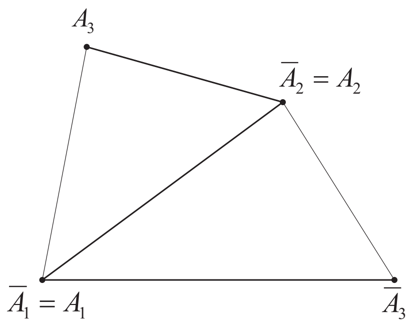


*Рис.*187

Таким чином, застосувавши перетворення подібності, ми сумістимо точки A_1 з $\overline{A}_1$, A_2 з $\overline{A}_2$.

Розглянемо тепер паралельне проектування на площину $\triangle \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ в напрямку прямої $A_3\overline{A}_3$, якщо точки A_3, $\overline{A}_3$ не співпадають. Воно переведе $\triangle A_1A_2A_3$ в $\triangle \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, що і потрібно було довести. Якщо $A_3 = \overline{A}_3$, то напрям проектування можна взяти перпендикулярним до площини трикутників.

■

Приклади.

1. Образом квадрата при паралельному проектуванні буде довільний паралелограм, оскільки паралельність сторін зберігається.

2. Розглянемо правильний шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис.188, a). Якщо на деякій площині π довільно задати точки $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, що не

лежать на одній прямій, то знайдеться паралельне проектування (з точністю до подібності) на площину π, яке переводить точку A_1 в точку $\overline{A}_1$, A_2 в $\overline{A}_2$, A_3 в $\overline{A}_3$. Образи решти точок довільно вибрати не можна, вони однозначно відновлюються. Точка A_0 — середина відрізка A_1A_3 — перейде в точку $\overline{A}_0$ — середину відрізка $\overline{A}_1\overline{A}_3$.

Оскільки, $\frac{|A_2A_0|}{|A_0A_5|} = \frac{|\overline{A}_2\overline{A}_0|}{|\overline{A}_0\overline{A}_5|}$, то можна знайти точку $\overline{A}_5$.

Пряма l_1 паралельна прямій $\overline{A}_2\overline{A}_3$, пряма l_3 паралельна прямій $\overline{A}_2\overline{A}_5$, звідси можна знайти точку $\overline{A}_6$.

Пряма l_2 паралельна прямій $\overline{A}_1\overline{A}_2$, пряма l_4 паралельна прямій $\overline{A}_2\overline{A}_5$, звідси можна знайти точку $\overline{A}_4$ (рис.188, b).

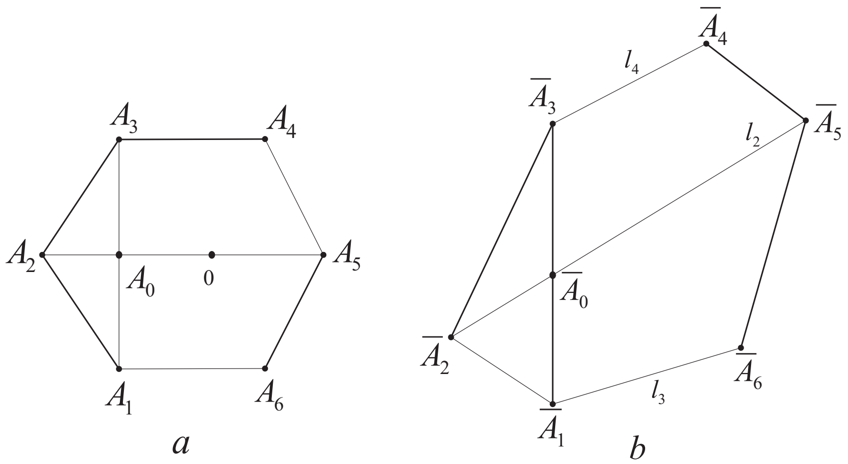


*Рис.*188

3. Образом вершин тетраедра при паралельному проектуванні на площину може бути довільний набір з 4 точок площини, ніякі три з яких не лежать на одній прямій.

4. Що може бути образом куба при паралельному проектуванні? Три ребра куба, що виходять з однієї вершини, можуть перейти в довільні три відрізки, одна гранична точка яких спільна. Далі образ куба відновлюється однозначно.

Розглянемо довільне виродження афінне перетворення координат

$$\begin{cases} y^1 = a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3 + b^1, \\ y^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3 + b^2, \\ y^3 = a_1^3x^1 + a_2^3x^2 + a_3^3x^3 + b^3. \end{cases}$$

Оскільки $\det A = 0$, знайдуться такі числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, які одночасно не дорівнюють нулю, що

$$\lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 y^3 = -(\lambda_1 b^1 + \lambda_2 b^2 + \lambda_3 b^3) = -c,$$

тобто образ простору при відображенні лежить у деякій площині, яку ми візьмемо за координатну площину $x^3 = 0$. Будемо розглядати випадок, коли ранг матриці A дорівнює двом ($rgA = 2$), тобто образом простору є вся площина. В новій системі координат перетворення запишеться в наступному вигляді (коефіцієнти знову будемо позначати через a^i_j):

$$\begin{cases} y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3, \\ y^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3, \\ \qquad y^3 = 0. \end{cases}$$

Виявляється, що справедлива

Основна теорема аксонометрії (теорема Польке – Шварца). *З точністю до подібності будь-яке вироджене афінне перетворення з рангом матриці, що дорівнює двом, є паралельним проектуванням.*

7.4 Проективні перетворення.

Розглянемо пряму. Нехай точка P прямої має на ній координату x. Можна ввести на прямій *однорідні координати* $x^1,\ x^2$ так: $x = \frac{x^1}{x^2}$, де $x^2 \neq 0$. Нехай точка P має однорідні координати $(x^1,\ x^2)$. Тоді пара $(y^1,\ y^2)$ задає ту ж точку P, якщо $\frac{y^1}{x^1} = \frac{y^2}{x^2} = \lambda$, тобто якщо $y^i = \lambda x^i,\ i = \ 1,2$. Всі пари одночасно не рівних нулю, розбиваються на класи еквівалентності: пара $(x^1,\ x^2)$ еквівалентна парі $(y^1,\ y^2)$, якщо $y^i = \lambda x^i,\ \lambda \neq 0,\ i = \ 1,2$. Кожен клас еквівалентності задає деяку точку прямої. Можна розглядати і точку з однорідними координатами $(x^1, 0)$. Пряма, до якої приєднана точка $(x^1, 0)$, називається *проективною прямою.*

Таким чином, проективна пряма — це пряма з приєднаною нескінченно віддаленою точкою.

Розглянемо на площині x^1x^2 коло $(x^1)^2 + (x^2 - 1)^2 = 1$ і центральне проектування із точки $(0, 1)$ півкола AOB на вісь x^1 (рис.189). Звичайна пряма при такому відображенні відповідає відкритому півколу AOB, проективній прямій — дуга AOB з ототожненими граничними точками A і B, тобто, з топологічної точки зору, проективна пряма і коло — не одне і те ж.

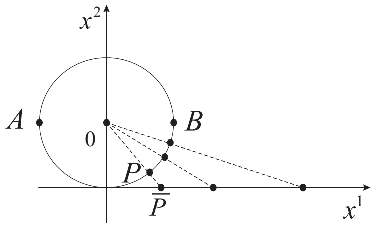


*Рис.*189

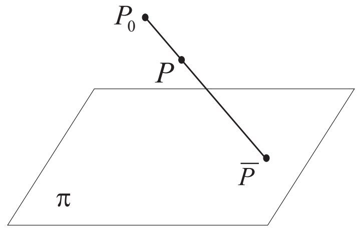


*Рис.*190

Складається враження, що нескінченно віддалена точка відрізняється від інших точок проективної прямої. Це не так, всі точки проективної прямої рівноправні. Дійсно, розглянемо координатну площину x^1x^2. Точки, що входять в один клас еквівалентності, заповнюють пряму, яка проходить через початок координат. Ця пряма — точка проективної прямої, включаючи сам початок координат. Тому проективну пряму можна інтерпретувати як жмуток прямих площин x^1x^2, що проходять через початок координат. Всі прямі цього жмутка рівноправні.

Розглянемо площину, на якій введені координати $x,\ y$. Можна ввести на площині *однорідні координати* $x^1,\ x^2,\ x^3$ наступними чином: $x = \frac{x^1}{x^3},\ y = \frac{x^2}{x^3}$, де $x^3 \neq 0$. Два набори чисел $(x^1,\ x^2,\ x^3)$, $(y^1,\ y^2,\ y^3)$, одночасно не рівних нулю, еквівалентні, якщо $y^i = \lambda x^i,\ \lambda \neq 0,\ i = 1, 2, 3$. Еквівалентні набори задають одну і ту ж точку площини. Доповнимо площину точками з однорідними координатами $(x^1,\ x^2,\ 0)$ (вони називаються нескінченно віддаленими) і одержимо так звану *проективну площину.*

Аналогічно, проективній прямій проективну площину можна інтерпретувати як в'язку прямих у просторі, що проходять через початок координат.

Розглянемо сферу з центром на початку координат. Кожна пряма в'язки перетинає сферу в двох діаметрально протилежних точках. Цю пару точок можна вважати точкою проективної площини, а проективну площину інтерпретувати як сферу з ототожненими діаметрально протилежними точками або півсферу з ототожненими діаметрально протилежними точками межі.

Можна дати ще одну інтерпретацію проективної площини. За допомогою ортогонального проектування можна відобразити півсферу на круг, ототожнивши потім діаметрально протилежні точки кола — межі круга, одержимо проективну площину.

Рівняння прямої на площині в неоднорідних координатах записується так: $a_1x + a_2y + a_3 = 0$, в однорідних координатах рівняння цієї ж прямої: $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$, це і буде рівнянням прямої на проективній площині.

Щоб знайти точку перетину двох прямих на проективній площині, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0, \\ b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 = 0. \end{cases}$$

Ця система рівнянь завжди має ненульовий розв'язок, тобто кожні дві прямі на проективній площині перетинаються.

Перетворення на прямій, що задане формулою

$$y = \frac{a_1^1x + a_2^1}{a_1^2x + a_2^2},$$

називається *проективним перетворенням на прямій.* В однорідних координатах воно запишеться так:

$$\begin{cases} y^1 = a_1^1x^1 + a_2^1x^2, \\ y^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2. \end{cases}$$

Проективне перетворення на площині задається формулами

$$\widetilde{x} = \frac{a_1^1x + a_2^1y + a_3^1}{a_1^3x + a_2^3y + a_3^3}, \quad \widetilde{y} = \frac{a_1^2x + a_2^2y + a_3^2}{a_1^3x + a_2^3y + a_3^3}.$$

В однорідних координатах проективне перетворення запишеться так:

$$\begin{cases} y^1 = a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a_3^1x^3, \\ y^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3, \\ y^3 = a_1^3x^1 + a_2^3x^2 + a_3^3x^3, \end{cases} \tag{7.11}$$

або в матричному вигляді $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

Якщо $\det A \neq 0$, проективне перетворення називається *невиродженим.*

Властивості невиродженого проективного перетворення.

1. Невироджене проективне перетворення переводить пряму в пряму.

Доведення. Кожну пряму можна задати лінійним рівнянням

$$ax^1 + bx^2 + cx^3 \ = \ 0.$$

Із формул (7.11) x^i через y^i також виражається лінійно. Підставимо ці вирази у рівняння прямої. Одержимо лінійне рівняння відносно y^i, тобто рівняння прямої.

■

2. Складне відношення — інваріант проективного перетворення.

   Складним відношенням чотирьох точок $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ на прямій (позначається через $(A_1A_2A_3A_4)$) називається:

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{|A_1A_3|}{|A_1A_4|} : \frac{|A_2A_3|}{|A_2A_4|}.$$

Доведення. Нехай проективне перетворення f переводить пряму l в пряму $\bar{l}$. Розглянемо рух g_1, який вісь x^1 переводить у пряму l, і g_2, який переводить пряму l у вісь x^1. Проективне перетворення $f_1 = g_2 \circ f \circ g_1$ лишає вісь x^1 на місці. Але рух не змінює довжин відрізків, тому досить провести доведення для перетворення f_1. Таким чином, потрібно довести інваріантність складного відношення для проективного перетворення на прямій. Це доводиться безпосереднім обчисленням.

Нехай π — деяка площина в просторі, P_0 — точка, яка не належить площині π, і P — довільна точка простору. Через точки P_0 і P проведемо пряму. Вона перетне площину π в точці P. Поставимо у відповідність точці P точку $\overline{P}$ (рис.190). Таке перетворення називається *центральним проектуванням.*

■

Вправа. Довести, що центральне проектування є вироджене проективне перетворення простору, тобто проективним перетворенням з $\det A \ = \ 0.$

7.4.1 Дуальність.

В проективній геометрії кожному твердженню відповідає дуальне йому твердження, яке одержане із першого заміною точок прямими і навпаки. Наприклад, твердженню: через будь-які дві різні точки площини проходить одна пряма — відповідає дуальне твердження: будь-які дві різні прямі перетинаються в одній точці.

В проективній геометрії справедлива

Теорема Паскаля.

Якщо в криву 2-го порядку вписано шестикутник, то протилежні сторони перетинаються в точках, які лежать на одній прямій.

Дуальною їй є

Теорема Бріаншона.

Якщо навколо кривої 2-го порядку описано шестикутник, то прямі, що з'єднують протилежні вершини, перетинаються в одній точці.

Ця теорема була доведена через сто років після теореми Паскаля.

Пряма на проективній площині в однорідних координатах задається рівнянням

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0, \tag{7.12}$$

де $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ — однорідні координати точки, $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ називаються *тангенціальними координатами* прямої, вони також є однорідними. Якщо $x^1,\ x^2,\ x^3$ зафіксовані, а $u_1,\ u_2,\ u_3$ змінюються, то рівняння (7.12) задає жмуток прямих. Так дуальність проявляється аналітично.

Розглянемо перетворення проективної площини, яке переводить точки в прямі і навпаки, воно називається *полярним перетворенням* відносно невиродженої кривої 2-го порядку. Вище ми ввели складне відношення чотирьох точок з використанням довжин відрізків. Можна ввести складне відношення через однорідні координати точок без використання довжин, а саме:

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\begin{vmatrix} x^1_{A_1} & x^1_{B_1} \\ x^3_{A_1} & x^3_{B_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^1_{A_2} & x^1_{B_1} \\ x^3_{A_2} & x^3_{B_1} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x^1_{A_1} & x^1_{B_2} \\ x^3_{A_1} & x^3_{B_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^1_{A_2} & x^1_{B_2} \\ x^3_{A_2} & x^3_{B_2} \end{vmatrix}},$$

де $(x^1_{A_1},\ x^2_{A_1},\ x^3_{A_1})$ — однорідні координати точки A_1 і т.д.

Нехай на площині задані крива 2-го порядку

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x^ix^j = 0$$

і точка $A_1(x^1_0,\ x^2_0,\ x^3_0)$, що не належить кривій. Проведемо через точку A_1 пряму l, вона перетне криву в двох точках B_1 і B_2. Знайдемо на прямій l таку точку A_2, що $(A_1A_2B_1B_2) = -1$. Проведемо через точку A_1 всі прямі і на кожній знайдемо точку, що має згадану властивість. Геометричне місце цих точок називається *полярою* точки A_1. Точка A_1 по відношенню до поляри називається *полюсом.*

Складемо рівняння поляри. Нехай $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ — однорідні координати точки A_2. Координати x^i будь-якої точки прямої A_1A_2, що відрізняється від A_1, можна записати у вигляді

$$\overline{x}^i = x^i + \lambda x_0^i, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що складне відношення чотирьох точок $A_1,\ A_2,\ \lambda A_1 + A_2,\ \mu A_1 + A_2$, де $(\xi A_1 + A_2)$ — точка з координатами $\xi x_0^i + x^i$

$$(A_1,\ A_2,\ \lambda A_1 + A_2,\ \mu A_1 + A_2) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Звідси випливає, що точки B_1 і B_2 перетину прямої A_1A_2 з кривою 2-го порядку допускають представлення

$$B_1 = \lambda A_1 + A_2, \quad B_2 = -\lambda A_1 + A_2.$$

Підставляючи координати точок B_1, B_2 в рівняння кривої, одержимо

$$\sum_{i,\ j} a_{ij}(\pm\lambda x_0^i + x^i)(\pm\lambda x_0^j + x^j) =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i,\ j} a_{ij} x_0^i x_0^j \pm 2\lambda \sum_{i,\ j} a_{ij} x_0^i x^j + \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i x^j = 0.$$

Звідси випливає

$$\sum_{i,\ j} a_{ij} x_0^i x^j = 0.$$

Це є рівняння поляри. Таким чином, поляра є прямою.

Якщо точка $A_1(x_0^1,\ x_0^2,\ x_0^3)$ лежить на кривій, то рівняння задає дотичну кривої 2-го порядку в цій точці. Тому можна визначити полярну точку, що лежить на кривій, як дотичну до кривої в цій точці. Відмітимо дві важливі властивості поляри.

1. Поляра будь-якої точки B поляри точки A_1 проходить через A_1.
2. Якщо точка A_1 рухається вздовж прямої, то її поляра обертається навколо деякої точки.

Дійсно, рівняння поляри точки $\widetilde{B}(\widetilde{x}^1,\ \widetilde{x}^2,\ \widetilde{x}^3)$

$$\sum_{i,\ j} a_{ij} \widetilde{x}^i x^j = 0$$

задовольняється координатами точки A_1, оскільки

$$\sum_{i,\ j} a_{ij} x_0^i \widetilde{x}^j = \sum_{i,\ j} a_{ij} \widetilde{x}^i x_0^j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

а

$$\sum_{i,\ j} a_{ij} \widetilde{x}^i x_0^j = 0$$

з огляду на те, що B лежить на полярі точки A_1.

Нехай точка A_1 рухається вздовж прямої, що з'єднує точки $A'(x'^i)$ і $A''(x''^i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Поляра будь-якої точки цієї прямої буде

$$\sum_{i,\ j} a_{ij} x^i (\lambda' x'^i + \lambda'' x''^j) = 0,$$

або

$$\lambda' \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i x'^j + \lambda'' \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i x''^j = 0.$$

Звідси видно, що поляра обертається навколо точки, що задається рівняннями

$$\sum_{i,\ j} a_{ij} x^i x'^j = 0, \quad \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i x''^j = 0.$$

Вкажемо спосіб знаходження поляри точки A. Нехай точка A лежить поза кривою. Проведемо із точки A дотичні до кривої. Нехай B_1 і B_2 — точки дотику. Поляри точок B_1, B_2 є дотичними до кривої і за побудовою проходять через точку A. За першою властивістю точки B_1, B_2 лежать на полярі точки A. Пряма, що проходить через точки B_1, B_2, буде полярою точки A.

Навпаки, по полярі полюс знаходиться таким чином. Нехай поляра перетинає криву. В точках перетину проводимо дотичні. Вони перетинаються в полюсі.

Самостійно розглянути випадки, коли полюс лежить поза кривою і поляра не перетинає криву.

Використовуючи полярне перетворення, покажемо, як теорема Бріаншона випливає із теореми Паскаля. Здійснимо полярне перетворення відносно кривої 2-го порядку, в яку вписано шестикутник. Вершини шестикутника перейдуть у дотичні до кривої, сторони — в точки перетину дотичних. Таким чином, вписаний шестикутник перейде в описаний. Полярне перетворення, крім того, відобразить точки перетину протилежних сторін вписаного шестикутника в прямі (поляри), що з'єднують протилежні вершини описаного шестикутника, а пряму, на якій лежать ці точки, — в точку, яка є полюсом цієї прямої. Ця точка і буде точкою перетину прямих, що з'єднують протилежні вершини описаного шестикутника, оскільки вона є точкою перетину поляр, полюси яких лежать на одній прямій.

Бібліоґрафія

[1] *Делоне Б.Н., Райков Д.А.,* Аналитическая геометрия. Т. I. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. 456 с.

[2] *Делоне Б.Н., Райков Д.А.,* Аналитическая геометрия. Т. II. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 516 с.

[3] *Погорелов А.В.,* Аналитическая геометрия. М.: Наука. 1968. 176 с.

[4] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.,* Аналитическая геометрия. М.: Наука. 1981. 232 с.

[5] *Курош А.Г.,* Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1971. 431 с.

[6] *Люстерник Л.А.,* Выпуклые фигуры и многогранники. М.: Гостехиздат. 1956. 212 с.

[7] *Кострикин А.И., Манин Ю.И.,* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука. 1985. 303 с.

[8] *Берже М.,* Геометрия. Т. I. М.: Мир. 1984. 559 с.

[9] *Берже М.,* Геометрия. Т. II. М.: Мир. 1984. 336 с.