

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет

**О. В. Лисенко,  
Г. А. Олексієнко**

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ:  
ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ**

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми  
Сумський державний університет  
2017

УДК 53(076.2)

Л60

Рецензенти:

*О. Г. Пономарьов* – доктор фізико-математичних наук, професор, в. о. завідувача відділу фізики пучків заряджених частинок Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми);

*А. С. Опанасюк* – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри електроніки і комп'ютерної техніки Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання  
вченою радою Сумського державного університету  
як навчальний посібник  
(протокол № 6 від 8 грудня 2016 року)*

**Лисенко О. В.**

Л60 Розв'язування задач із фізики: електрика та магнетизм : навчальний посібник / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 284 с.  
ISBN 978-966-657-680-7

Навчальний посібник містить приклади розв'язування задач із фізики за розділами: «Електрика» та «Магнетизм». Кожному розділу передують стислі теоретичні відомості, подані задачі для самостійного розв'язування.

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації.

**УДК 53(076.2)**

ISBN 978-966-657-680-7

© Лисенко О. В., Олексієнко Г. А., 2017  
© Сумський державний університет, 2017

## ЗМІСТ

	С.
ВСТУП .....	4
1 ПОСТІЙНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ.....	5
1.1 Приклади розв'язування задач.....	5
1.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	35
2 ПРОВІДНИКИ Й ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ .....	45
2.1 Приклади розв'язування задач.....	46
2.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	66
3 ЕЛЕКТРОЄМНІСТЬ. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ .....	71
3.1 Приклади розв'язування задач.....	71
3.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	98
4 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ.....	103
4.1 Приклади розв'язування задач.....	103
4.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	128
5 ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ. МАГНЕТИКИ.....	136
5.1 Приклади розв'язування задач.....	137
5.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	174
6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ.....	194
6.1 Приклади розв'язування задач.....	194
6.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	212
7 РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ ПОЛЯХ .....	227
7.1 Приклади розв'язування задач.....	227
7.2 Задачі для самостійного розв'язування.....	253
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.....	261
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	283

## ВСТУП

У навчальному посібнику подані приклади розв'язування найбільш типових задач із розділів «Електрика» та «Магнетизм», а також наведені задачі для самостійного розв'язування. Автори мають на меті сформулювати у студентів методологію розв'язування задач, допомогти засвоїти фізичні закони, навчити деяких математичних прийомів, що широко використовуються у фізиці. Під час роботи над кожною темою потрібно дотримуватися таких рекомендацій:

1 Детально **опрацювати** теоретичний матеріал за підручником із курсу фізики (наприклад, [1–2]).

2 Уважно **вивчити** розв'язування розібраних задач із зазначеної теми. З'ясувати всі не зрозумілі для себе моменти у розв'язанні задач. За необхідності ще раз повернутися до посібника для більш глибокого опрацювання теоретичного матеріалу або ж звернутися за консультацією до викладача. **Пам'ятайте**, необхідно домогтися повного розуміння розв'язування наведених задач.

2 Перейти до самостійного розв'язування задач зазначеної теми. Потрібно **керуватися** загальною методологією розв'язування, що подана в розібраних задачах, а саме: а) зробити рисунок до задачі, якщо це необхідно; б) з'ясувати сутність процесів, про які йде мова у задачі; в) установити закони, які потрібно використати для розв'язування задачі, записати відповідні рівняння; г) провести математичні перетворення, одержати розв'язок у загальному вигляді, в якому шукана величина повинна бути виражена через величини, що наведені в умові задачі; г) виконати аналіз одержаного розв'язку щодо його відповідності фізичному змісту.

# 1 ПОСТІЙНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

## **Основні формули**

Напруженість і потенціал поля точкового заряду  $q$  :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}. \quad (1 \text{ а})$$

Зв'язок між напруженістю поля й потенціалом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}. \quad (1 \text{ б})$$

Теорема Гауса та циркуляція вектора  $\vec{E}$  :

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \oint_L \vec{E}d\vec{r} = 0. \quad (1 \text{ в})$$

Напруженість електричного поля, що створюється нескінченною рівномірно зарядженою площиною:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1 \text{ г})$$

## **1.1 Приклади розв'язування задач**

### **Приклад 1.1**

Дві невеликі однаково заряджені кульки кожна масою  $m$  підвішені до однієї точки на шовкових нитках довжиною  $l$ . Відстань між кульками  $x \ll l$ . Знайти швидкість зменшення заряду  $dq/dt$  кожної кульки, якщо швидкість їх зближення змінюється за законом  $v = a/\sqrt{x}$ , де  $a$  – стала.

### Розв'язання

$$dq/dt - ?$$

$$m, l, x \ll l,$$

$$v = a/\sqrt{x}$$

Розглянемо рисунок 1.1. На ньому зображені в точках  $A$  і  $B$  заряджені кульки масою  $m$  кожна. Ці кульки висять на нитках, довжина яких  $OA = OB = l$ , відстань між ними  $x = AB$ . У момент часу  $t$  кожна кулька має заряд  $q(t)$ . Розглянемо кульку  $A$ . На неї діють три сили:  $\vec{T}$  – сила натягу нитки;  $\vec{F}_C$  – сила Кулона;  $m\vec{g}$  – сила тяжіння. Аналогічні сили діють і на кульку  $B$ . Якщо б заряд кульок був незмінним, то система перебувала б у рівноважному стані. Через те що заряд зменшується, змінюється сила Кулона  $\vec{F}_C$ . Це спричиняє зміну умов рівноваги, зокрема й зміну відстані  $x(t)$ . Зрозуміло, чим більша швидкість зміни заряду  $dq/dt$ , тим більша зміна сили Кулона  $\vec{F}_C$ , тим більша швидкість зміни відстані між кульками  $v = dx/dt$ . Знайдемо зв'язок між цими величинами.

Для розв'язування цього завдання використаємо закони Ньютона, закон Кулона. Вважаємо, що заряд  $q(t)$  змінюється настільки повільно, що в довільний момент часу  $t$  має місце квазірівноважний стан. Саме тому, виходячи з першого закону Ньютона, для кульки  $A$  у момент часу  $t$  можемо записати

$$\vec{F}_C + \vec{T} + m\vec{g} = 0. \quad (1)$$

Зобразимо вектори, що входять до співвідношення (1) на рис. 1.2. З геометричних міркувань зрозуміло, що кути  $\angle O'OA = \angle LMN = \angle \alpha$  (рис. 1.1 та 1.2). З рис. 1.2 випливає, що

$$\operatorname{tg} \alpha = F_C / mg. \quad (3)$$

З іншого боку, з рис. 1.1 можемо знайти, що

$$\operatorname{tg}\alpha = x / (2 \cdot \sqrt{l^2 - (x/2)^2}) \approx x / (2l). \quad (4)$$

Тут ми застосували умову, що  $x \ll l$ . Використовуючи (3) та (4), а також закон Кулона  $F_C = q^2 / (4\pi\epsilon_0 x^2)$ , можемо записати зв'язок між зарядом  $q(t)$ , відстанню  $x(t)$  для довільного моменту часу  $t$ :

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg} = \frac{x}{2l}, \quad q(t) = x(t)^{3/2} \cdot (2\pi\epsilon_0 mg / l)^{1/2}. \quad (5)$$

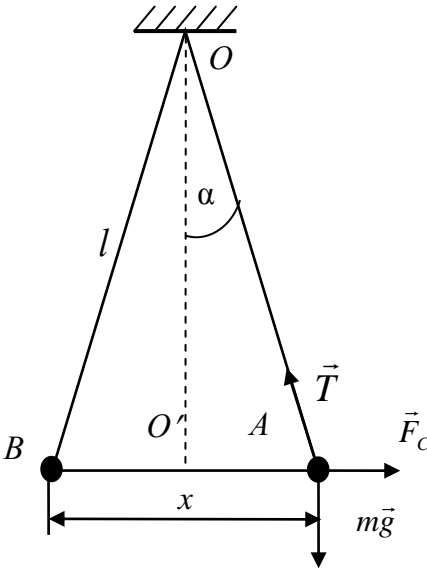


Рисунок 1.1

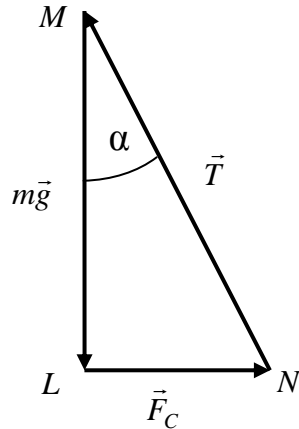


Рисунок 1.2

Далі диференціюємо праву і ліву частини рівності (5) за часом та одержуємо

$$\begin{aligned} dq/dt &= (3/2) \cdot x^{1/2} (dx/dt) \cdot (2\pi\epsilon_0 mg/l)^{1/2} = \\ &= (3/2) \cdot x^{1/2} \cdot (a/\sqrt{x}) \cdot (2\pi\epsilon_0 mg/l)^{1/2} = \end{aligned}$$

$$= (3/2) \cdot a \cdot (2\pi\epsilon_0 mg/l)^{1/2}. \quad (6)$$

У співвідношенні (6) використали, що за умовою задачі  $dx/dt = v = a/\sqrt{x}$ . Таким чином, одержали шукану розрахункову формулу

$$dq/dt = (3a/2) \cdot \sqrt{2\pi\epsilon_0 mg/l}. \quad (7)$$

### **Аналіз одержаного результату**

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Із фізичних міркувань випливає, що коли маси кульок будуть прямувати до нескінченності, то для того, щоб їх швидкість змінювалася, як і раніше, за законом  $v = a/\sqrt{x}$ , швидкість зміни заряду кульок повинна також збільшитися до нескінченності. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли  $m \rightarrow \infty$ , то

$$dq/dt = (3a/2) \cdot \sqrt{2\pi\epsilon_0 mg/l} \sim m^{1/2} \rightarrow \infty.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $dq/dt = (3a/2) \cdot \sqrt{2\pi\epsilon_0 mg/l}$ .

### **Приклад 1.2**

У вершинах квадрата з діагоналлю  $2 \cdot l$  знаходяться точкові заряди  $+q$  і  $-q$ , як показано на рис. 1.3. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля в точці, що знаходиться на відстані

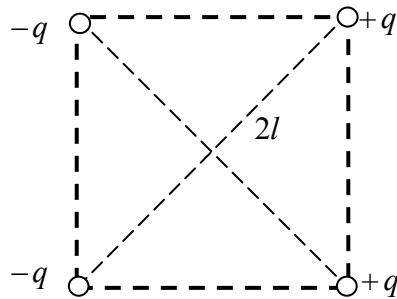


Рисунок 1.3



$x$  від центра квадрата й розміщена симетрично відносно вершин квадрата.

### Розв'язання

$|\vec{E}_{рез}| - ?$  | У задачі необхідно знайти модуль вектора напруженості електричного поля, створеного чотирма точковими зарядами.

Для цього використаємо закон Кулона у вигляді

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$$
 та принцип суперпозиції. Відповідно до

принципу суперпозиції електричних полів кожний заряд створює електричне поле незалежно від наявності в просторі інших зарядів. Результируюча напруженість електричного поля  $\vec{E}_{рез}$  в шуканій точці дорівнює

геометричній сумі напруженості  $\vec{E}_A$ ,  $\vec{E}_B$ ,  $\vec{E}_C$ ,  $\vec{E}_D$  полів, створюваних відповідно кожним зарядом (рис. 1.4):

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D.$$

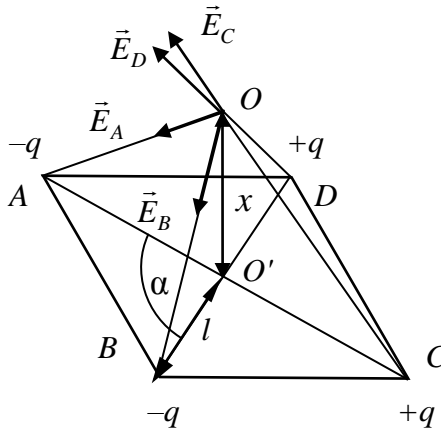


Рисунок 1.4

Таким чином, задача зводиться до знаходження модуля вектора, що дорівнює геометричній сумі чотирьох відомих векторів.

Відповідно до закону Кулона для точкових електричних зарядів можемо записати:

$$\begin{aligned}\vec{E}_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-q)}{|r_{AO}|^3} \cdot \vec{r}_{AO}, \quad \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-q)}{|r_{BO}|^3} \cdot \vec{r}_{BO}, \\ \vec{E}_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|r_{CO}|^3} \cdot \vec{r}_{CO}, \quad \vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|r_{DO}|^3} \cdot \vec{r}_{DO}.\end{aligned}\quad (1)$$

Використовуючи рис. 1.4, можемо знайти, що

$$|r_{AO}| = |r_{BO}| = |r_{CO}| = |r_{DO}| = \sqrt{x^2 + l^2}.\quad (2)$$

Тоді, використовуючи (1) та (2), а також рис. 1.4, одержуємо

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{рез}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}} \cdot (-\vec{r}_{AO} - \vec{r}_{BO} + \vec{r}_{CO} + \vec{r}_{DO}) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}} \cdot ((\vec{r}_{CO} - \vec{r}_{AO}) + (\vec{r}_{DO} - \vec{r}_{BO})) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}} \cdot (\vec{CA} + \vec{DB}).\end{aligned}$$

Модуль суми двох векторів  $\vec{CA}$  і  $\vec{DB}$  дорівнює

$$|\vec{CA} + \vec{DB}| = \sqrt{(\vec{CA} + \vec{DB})^2} = \sqrt{CA^2 + DB^2 + 2 \cdot CA \cdot DB \cdot \cos \alpha},$$

де  $\alpha = 90^\circ$  – кут між векторами  $\vec{CA}$  й  $\vec{DB}$  або діагоналями квадрата  $ABCD$  (рис. 1.4), а  $CA = DB = 2l$  – за умовою.

Таким чином, одержали шукану розрахункову формулу

$$\begin{aligned}
 |\vec{E}_{рез}| &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{(2l)^2 + (2l)^2} = \\
 &= \frac{ql}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Із фізичних міркувань зрозуміло, що коли відстань  $x$  спрямувати до нескінченності, то електричне поле на нескінченній відстані від зарядів буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули одержуємо такий самий результат.

Коли  $x \rightarrow \infty$ , то  $|\vec{E}_{рез}| = \frac{ql}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{x^3} \rightarrow 0$ .

Таким чином, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $|\vec{E}_{рез}| = \frac{ql}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0(x^2 + l^2)^{3/2}}$ .

### ***Приклад 1.3***

Точковий заряд  $+q$  знаходиться у центрі тонкого кільця радіусом  $R$ , по якому рівномірно розподілений від'ємний заряд  $-q$ . Знайти модуль вектора напруженості електричного поля на осі кільця в точці, що знаходиться на відстані  $x$  від центра кільця, якщо  $x \gg R$ .

#### ***Розв'язання***

$E - ?$ $+q, -q, R,$ $x, x \gg R$	У задачі необхідно знайти модуль напруженості електричного поля, створеного точковим зарядом $+q$ й зарядженим кільцем – неточковим зарядом – у точці $A$ , що знаходиться на відстані $x = OA$ від центра
---	--

кільця  $O$  (рис. 1.5). Напруженість електричного поля точкового заряду визначається законом Кулона (1 а). Для того щоб визначити напруженість електричного поля зарядженого кільця (неточковий заряд), його необхідно розділити на елементарні точкові заряди, одержати напруженість електричного поля від елементарного точкового заряду, а потім, використовуючи принцип суперпозиції, знайти напруженість сумарного електричного поля. Потрібно мати на увазі, що нескінченна сума нескінченно малих величин, яку одержуємо під час розв'язування задачі, зводиться до визначеного інтеграла.

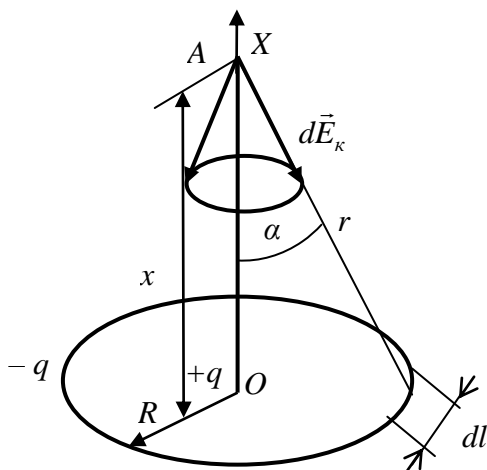


Рисунок 1.5

Виділимо на кільці (рис. 1.5) малу ділянку  $dl$ . Заряд цієї ділянки дорівнює  $dq = (-q) \cdot dl / (2\pi R)$ . Тут урахували, що заряд  $-q$  рівномірно розподілений по всьому кільцю довжиною  $2\pi R$ . Заряд  $dq$  можна розглядати як точковий. Він створює електричне поле у точці  $A$  (рис. 1.5):

$$d\vec{E}_\kappa = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} = \frac{(-q) \cdot dl}{8\pi^2 \epsilon_0 R \cdot r^3} \cdot \vec{r}, \quad (1)$$

а його проекція на вісь  $AO$  буде дорівнювати

$$dE_{\kappa,x} = \frac{(-q)dl}{8\pi^2 R\epsilon_0 r^3} \cdot r \cdot \cos \alpha = \frac{(-q)dl \cdot x}{8\pi^2 R\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Тут використали, що  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ ,  $\cos \alpha = x/r$  (рис. 1.5).

Вираз (2) є правильним для будь-якої ділянки  $dl$ . Тому згідно з принципом суперпозиції електричних полів проекція результуючого вектора напруженості від заряду кільця на вісь  $OX$  буде дорівнювати

$$E_{\kappa,x} = \frac{(-q) \cdot x}{8\pi^2 R\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl = \frac{(-q) \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Векторна сума горизонтальних складових векторів  $d\vec{E}_\kappa$ , як випливає з рис. 1.5, дорівнює нулю.

Напруженість електричного поля в точці  $A$  від точкового заряду  $+q$  визначається за допомогою закону Кулона. Модуль напруженості дорівнює

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2} \vec{e}_x, \quad (4)$$

а її напрямок збігається з напрямком осі  $X$ . Результуюча напруженість буде дорівнювати  $\vec{E} = \vec{E}_\kappa + \vec{E}_1$ , або

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q\vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{qx\vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{q\vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left( 1 - \frac{1}{(1 + (R/x)^2)^{3/2}} \right) \approx \\ &\approx \frac{q\vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} \right) \right) = \frac{3qR^3 \vec{e}_x}{8\pi\epsilon_0 x^4}. \end{aligned}$$

Тут ми використали відоме співвідношення  $(1+\alpha)^n \approx 1+n\alpha$ , яке виконується, якщо  $\alpha = (R/x)^2 \ll 1$ . Таким чином,

$$E = 3qR^2 / (8\pi\epsilon_0 x^4). \quad (5)$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Із фізичних міркувань зрозуміло, що коли радіус кільця  $R$  буде прямувати до нуля, то фізично це буде означати злиття додатного та від'ємного однакових за модулем зарядів. Тобто буде мати місце їх взаємне знищення. Тому в цьому випадку напруженість електричного поля повинна прямувати до нуля. Такий самий результат впливає і з розрахункової формули. Якщо,  $R \rightarrow 0$ , то

$$E = \frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4} \sim R^2 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $E = 3qR^2 / (8\pi\epsilon_0 x^4)$ .

### ***Приклад 1.4***

Знайти вектор напруженості електричного поля в центрі кулі радіусом  $R$ , об'ємна густина заряду якого  $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{a}$  – сталий вектор;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений із центра кулі.

#### ***Розв'язання***

$\vec{E} = ?$
$R, \rho = \vec{a} \cdot \vec{r},$
$\vec{a} = \overrightarrow{const}$

У задачі необхідно знайти модуль напруженості електричного поля, створеного зарядженою кулею, яка не є

точковим зарядом. Тому розіб'ємо заряджену кулю (рис. 1.6) на елементарні заряди  $dq$  так, щоб кожний такий елементарний заряд можна було вважати точковим. Напруженість електричного поля такого точкового заряду в центрі кулі визначається законом Кулона (1 а). Щоб знайти напруженість сумарного електричного поля, використаємо принцип суперпозиції.

Виділимо з кулі нескінченно малий об'єм  $dV$ , що містить заряд  $dq = \rho \cdot dV$  (рис. 1.6). Цей заряд можна розглядати як точковий. Тоді напруженість електричного поля, яке створює цей заряд у центрі кулі, буде дорівнювати (рис. 1.6):

$$d\vec{E} = \frac{dq(-\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} = -\frac{\rho \cdot dV \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}, \quad (1)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений із центра кулі (точка  $O$ , рис. 1.6) до заряду  $dq$ , однаковий за модулем і протилежний за напрямком вектора, проведеного від заряду  $dq$  до центра кулі (через це у формулі (1) з'являється знак мінус).

Розмістимо початок декартової системи координат у центрі кулі (точка  $O$ ). Вісь  $Z$  спрямуємо вздовж вектора  $\vec{a}$  (рис. 1.6). Розкладемо вектор  $d\vec{E}$  за проєкціями на координатні осі:

$$dE_x = \frac{-\rho \cdot dV \cdot x}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}, \quad dE_y = \frac{-\rho \cdot dV \cdot y}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}, \quad dE_z = \frac{-\rho \cdot dV \cdot z}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}. \quad (2)$$

У формулі (2) радіус-вектор  $\vec{r}$  розклали за проєкціями на відповідні осі  $x, y, z$ . Заряд, що створює електричне поле, має сферичну симетрію. Тому для зручності обчислення перейдемо до сферичної системи координат (рис. 1.6):

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \theta. \quad (3)$$

Елементарний об'єм у сферичних координатах, як відомо, буде дорівнювати  $dV = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr$ . Також візьмемо до уваги, що об'ємна густина заряду

$$\rho = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_x \cdot x + a_y \cdot y + a_z \cdot z = a_z \cdot z = az = a \cdot r \cdot \cos \theta. \quad (4)$$

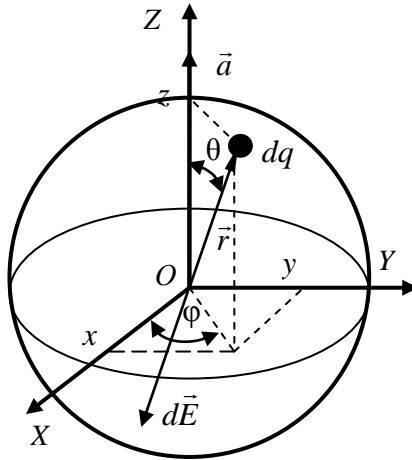


Рисунок 1.6

Нагадаємо, що координатні осі вибрані так, що  $a_x = a_y = 0$ ,  $a_z = a$ . Далі підставляємо вирази (3) і (4) у формулу (2) та одержуємо

$$\begin{aligned} dE_z &= -a \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi / (4\pi\epsilon_0), \\ dE_x &= -a \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta \cdot r \cdot dr \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi / (4\pi\epsilon_0), \\ dE_y &= -a \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta \cdot r \cdot dr \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi / (4\pi\epsilon_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Інтегруємо співвідношення (5) за об'ємом кулі, тобто в межах за змінною  $\theta$  від  $0$  до  $\pi$ , за змінною  $\varphi$  – від  $0$  до  $2\pi$ , за змінною  $r$  – від  $0$  до  $R$ . У результаті одержуємо:



$$E_z = -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot r \cdot d\varphi =$$

$$= -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi (-1) \cos^2 \theta \cdot d(\cos \theta) \cdot \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{a \cdot R^2}{6 \cdot \epsilon_0}, \quad (6)$$

$$E_x = -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \int_0^R r \cdot dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi = 0. \quad (7)$$

Аналогічно до співвідношення (7) одержуємо, що  $E_y = 0$ .

Тоді, використовуючи те, що вісь  $Z$  за напрямком збігається з вектором  $\vec{a}$ , можемо записати

$$\vec{E} = -\frac{R^2}{6 \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{a}. \quad (8)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Зрозуміло, якщо модуль вектора  $|\vec{a}|$  буде дорівнювати нулю, то густина заряду  $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r}$  також буде дорівнювати нулю. Тому електричне поле буде відсутнє, тобто його напруженість буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $a \rightarrow 0$ , то

$$|\vec{E}| = \frac{R^2}{6\epsilon_0} \cdot |\vec{a}| \sim a \rightarrow 0.$$

2 Якщо радіус кулі  $R$ , в якій розподілений заряд, спрямувати до нуля, то це буде означати, що електричний заряд у цьому випадку буде відсутнім. Тобто напруженість електричного поля повинна дорівнювати нулю. Цей

результат також впливає з розрахункової формули. Якщо  $R \rightarrow 0$ , то

$$\vec{E} = -\frac{R^2}{6\epsilon_0} \cdot \vec{a} \sim R^2 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\vec{E} = -\frac{R^2}{6\epsilon_0} \cdot \vec{a}.$

### *Приклад 1.5*

Система складається з кулі радіусом  $R$ , зарядженої сферично симетрично, і навколишнього середовища, заповненого зарядом з об'ємною густиною  $\rho = \alpha / r$ , де  $\alpha$  – стала;  $r$  – відстань від центра кулі. Знайти заряд кулі  $q_1$ , для якого модуль вектора напруженості електричного поля за межами кулі не буде залежати від  $r$ . Чому дорівнює ця напруженість? Діелектричну проникність кулі й навколишнього середовища вважати такою, що дорівнює одиниці.

#### *Розв'язання*

$\frac{q_1, E - ?}{R, \rho = \alpha / r}$	<p>З умови задачі впливає, що розподіл зарядів має сферичну симетрію. Тому й електричне поле, що створюється такими зарядами, також буде мати таку саму симетрію. Тому для розв'язування задачі використаємо теорему Гауса для електростатичного поля, отримаємо математичну формулу для модуля напруженості електричного поля поза кулею. Проаналізуємо цю формулу з погляду відсутності залежності напруженості електричного поля від відстані між точкою спостереження поля та центром кулі <math>r</math>,</p>
---	--

знайдемо шуканий заряд кулі й модуль напруженості електричного поля поза кулею.

Через сферичну симетрію розподілу заряду напруженість електричного поля  $\vec{E}$  може залежати лише від відстані від центра кулі  $r$ . Тому на поверхні сфери з центром у центрі кулі вектори  $\vec{E}$  будуть мати однаковий модуль та будуть перпендикулярні до поверхні такої сфери. Виходячи з цього, поверхню  $S$ , по якій будемо проводити інтегрування відповідно до теореми Гауса, виберемо у вигляді сфери радіусом  $r$  із центром у центрі кулі радіусом  $R$  (рис. 1.7).

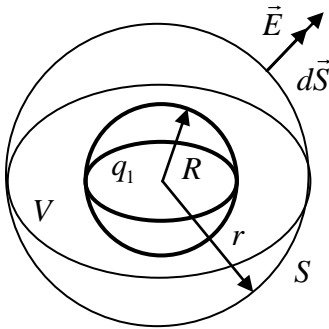


Рисунок 1.7

Використаємо теорему Гауса

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Знайдемо  $q$  – сумарний заряд, що знаходиться всередині поверхні інтегрування  $S$  (рис. 1.7). Цей заряд дорівнює сумі зарядів кулі й зарядів навколишнього середовища між сферами з радіусами  $R$  та  $r$ :

$$\begin{aligned} q &= q_1 + \int_V \rho \cdot dV = q_1 + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \cdot \int_R^r \frac{\alpha}{r'} \cdot (r')^2 \cdot dr' = \\ &= q_1 + 2\pi\alpha(r^2 - R^2). \end{aligned} \quad (2)$$

У формулі (2) використали формулу для елементарного об'єму у сферичній системі координат  $dV = (r')^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr'$ , формулу для об'ємної густини заряду  $\rho = \alpha / r'$ , заряд кулі позначили через  $q_1$ .

Як було зазначено вище, у довільних точках поверхні сфери  $S$  (рис. 1.7) вектори  $\vec{E}$  будуть мати однаковий модуль і будуть перпендикулярні до поверхні такої сфери. Тому

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos 0 = E \int_S dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2, \quad (3)$$

де  $S$  – площа поверхні сфери радіусом  $r$ .

Тоді, підставляючи співвідношення (2), (3) в (1), одержуємо

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot (q_1 + 2\pi\alpha(r^2 - R^2)) = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot (q_1 - 2\pi\alpha R^2). \quad (4)$$

Із формули (4) випливає, що напруженість електричного поля не буде залежати від  $r$ , якщо буде виконуватися умова  $q_1 - 2\pi\alpha R^2 = 0$ . Звідси одержуємо

$$q_1 = 2\pi\alpha R^2, \quad E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}. \quad (5)$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Зрозуміло, що, коли коефіцієнт  $\alpha$  прямує до нуля, це буде означати, що й густина заряду навколишнього середовища теж прямує до нуля  $\rho = 0 / r = 0$ . Для того щоб за такої умови ( $\rho = 0$ ) напруженість електричного поля за межами кулі не залежала від відстані  $r$ , потрібно щоб і заряд кулі  $q_1$  був таким, що дорівнює нулю. Тоді й напруженість електричного поля буде дорівнювати нулю. З розрахункових формул впливає такий самий результат.

Якщо  $\alpha \rightarrow 0$ , то

$$q_1 = 2\pi\alpha R^2 \sim \alpha \rightarrow 0, \quad E = \alpha/(2\varepsilon_0) \sim \alpha \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $q_1 = 2\pi\alpha R^2, \quad E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}.$

### **Приклад 1.6**

Заряд  $Q$  розподілено рівномірно в об'ємі кулі радіусом  $R$ . Виходячи з того, що діелектрична проникність усюди дорівнює одиниці, знайти потенціал: а) усередині кулі як функцію відстані  $r$  від його центра; б) у центрі кулі.

#### **Розв'язання**

$\varphi(r), \varphi(0) - ?$ $Q, R$	Потенціал усередині кулі $\varphi(r)$ знайдемо використовуючи зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом (1 б):
--	--

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r}. \quad (1)$$

Зазначимо, потенціал на нескінченній відстані від зарядженої кулі ( $r = \infty$ ) вважаємо відомим і таким, що дорівнює нулю. Це відображає ту обставину, що електричне поле на нескінченній відстані від заряду, який його створює, зменшується до нуля, тобто зникає. Тому його можна характеризувати потенціалом  $\varphi(\infty) = 0$ . Напруженість електричного поля, що входить до співвідношення (1), визначаємо за допомогою теореми Гауса (1 в).

Знайдемо напруженість електричного поля як функцію відстані від центра кулі  $r$ . Через сферичну симетрію

розподілу заряду напруженість електричного поля  $\vec{E}$  залежить лише від відстані від центра зарядженої кулі  $r$  та спрямована вздовж радіуса. Тому за поверхню інтегрування у теоремі Гауса беремо сферу радіусом  $r$  із центром, що збігається з центром зарядженої кулі. Потік вектора  $\vec{E}$  через таку поверхню інтегрування буде дорівнювати

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2, \quad (2)$$

де  $S$  – площа поверхні сфери інтегрування радіусом  $r$ .

Далі знайдемо відповідно до теореми Гауса (1 в) електричний заряд  $q$ , що знаходиться всередині поверхні інтегрування. Для розв'язування цієї задачі ми повинні розглядати два випадки: 1)  $r > R$  та 2)  $r \leq R$ .

Для першого випадку зрозуміло, що всередині поверхні інтегрування буде повністю знаходитися заряджена куля з радіусом  $R$  і зарядом  $Q$ , за межами зарядженої кулі заряд відсутній. Тобто в цій ситуації  $q = Q$ . Тоді, виходячи з теореми Гауса, одержуємо

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0, \quad E \cdot 4\pi r^2 = Q / \varepsilon_0, \quad E = Q / (4\pi \varepsilon_0 r^2) \quad (3)$$

за умови, що  $r > R$ .

У другому випадку всередині поверхні інтегрування буде знаходитися лише частина заряду  $Q$ , тому що  $r \leq R$ . За умовою задачі електричний заряд рівномірно розподілений усередині кулі з радіусом  $R$ . Тому його густина дорівнює  $\rho = 3 \cdot Q / (4 \cdot \pi \cdot R^3)$ . Тоді всередині поверхні інтегрування з радіусом  $r \leq R$  буде знаходитися заряд  $q = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3 = Q \cdot r^3 / R^3$ . Далі, використовуючи теорему Гауса, знаходимо, що за умови  $r \leq R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0, \quad E \cdot 4\pi r^2 = Q \cdot r^3 / (\varepsilon_0 \cdot R^3), \quad E = Q \cdot r / (4\pi\varepsilon_0 R^3). \quad (4)$$

Тепер знайдемо потенціал усередині кулі  $\varphi(r)$  за допомогою співвідношення (1):

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_r^\infty E dr = \int_r^R E dr + \int_R^\infty E dr = \\ &= [Q / (4\pi\varepsilon_0 R^3)] \int_r^R r dr + \int_R^\infty [Q / (4\pi\varepsilon_0 r^2)] dr = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left[ 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]. \end{aligned}$$

Тобто

$$\varphi(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left[ 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]. \quad (5)$$

Для одержання формули (4) використали вирази для напруженості електричного поля (3), (4), а також те, що  $\varphi(\infty) = 0$ .

У разі якщо  $r = 0$ , як це впливає з (5), одержуємо

$$\varphi(0) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}. \quad (6)$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Якщо відстань від центра кулі до досліджуваної точки буде дорівнювати радіусу кулі  $r = R$ , ця точка буде знаходитися на поверхні кулі. Потенціал цієї точки повинен дорівнювати потенціалу поверхні зарядженої кулі, який, як відомо, дорівнює  $Q / (4\pi\varepsilon_0 R)$ .

Із розрахункової формули (5) впливає такий самий результат: якщо  $r = R$ , то

$$\varphi(0) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left[ 1 - \frac{R^2}{3R^2} \right] = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:** а)  $\varphi(r) = \varphi_0(1 - r^2/3R^2)$  за умови  $r \leq R$ , де  $\varphi_0 = 3Q/8\pi\epsilon_0 R$ ; б)  $\varphi(0) = \varphi_0$ .

### **Приклад 1.7**

Два тонкі дротяні кільця кожний радіусом  $R$  розміщені так, що осі їх збігаються (рис. 1.8). Заряди кільця дорівнюють  $q$  й  $-q$ . Знайти різницю потенціалів між центрами кілець, якщо вони знаходяться на відстані один від одного  $a$ .

#### **Розв'язання**

$\Delta\varphi - ?$ $+q, -q,$ $R, a$	<p>У задачі необхідно знайти різницю потенціалів між двома точками простору, в якому створене електричне поле зарядами <math>q</math> і <math>-q</math>. Для цього потрібно визначити потенціали в кожній точці окремо, а потім знайти різницю потенціалів. Для визначення потенціалу електричного поля, що створено зарядом кільця, розіб'ємо цей заряд на елементарні так, щоб кожний елементарний заряд можна було вважати точковим. Потенціал точкового заряду визначається формулою (1 а). Для визначення потенціалу сумарного електричного поля використаємо принцип суперпозиції.</p>
--	--

Спочатку розв'яжемо допоміжну задачу: визначимо потенціал електричного поля в точці  $O'$ , що розміщена на відстані  $x$  від центра рівномірно зарядженого зарядом  $Q$  кільця радіусом  $R$  (вважаємо, що в рамках цієї допоміжної



задачі інше кільце відсутнє, див. рис. 1.9). Виділимо на кільці малу ділянку  $dl$  (рис. 1.9) із зарядом

$$dQ = Q \cdot dl / (2\pi R). \quad (1)$$

Тут ми використали умову рівномірного розподілу заряду по всій довжині кільця. Заряд  $dQ$  можна розглядати як точковий. Тоді потенціал електричного поля, що створений цим зарядом у точці  $O'$ , буде дорівнювати (рис. 1.9)

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q \cdot dl}{8\pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R \sqrt{x^2 + R^2}}, \quad (2)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$  (рис. 1.9) знаходимо за допомогою теореми Піфагора.

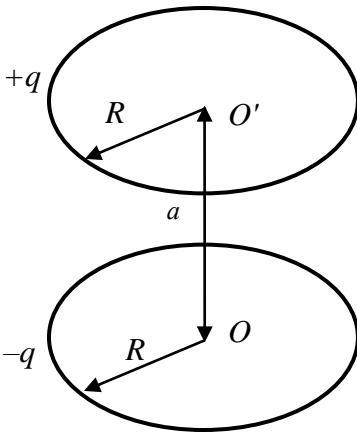


Рисунок 1.8

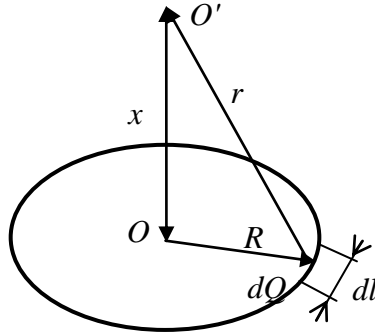


Рисунок 1.9

Відповідно до принципу суперпозиції для знаходження потенціалу електричного поля, створюваного зарядом усього кільця, вираз (2) необхідно проінтегрувати:

$$\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{Q \cdot dl}{8\pi^2 \cdot R \cdot \epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (3)$$

Використовуючи одержаний результат, розглянемо випадок двох кілець і визначимо потенціал електричного поля в точці  $O'$  (рис. 1.8). Згідно з принципом суперпозиції потенціал у точці  $O'$   $\varphi_{O'}$  дорівнює сумі потенціалів електричного поля, створеного зарядом  $-q$   $\varphi_{O'-q}$  та зарядом  $+q$   $\varphi_{O'+q}$ . Тобто  $\varphi_{O'} = \varphi_{O'-q} + \varphi_{O'+q}$ . Для знаходження потенціалів  $\varphi_{O'+q}$  та  $\varphi_{O'-q}$  використаємо формулу (3). Зрозуміло, що коли  $x = a$ ,  $Q = -q$ , то

$$\varphi_{O'-q} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + R^2}}.$$

Якщо  $x = 0$ ,  $Q = +q$ , одержуємо

$$\varphi_{O'+q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Тоді

$$\varphi_{O'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + R^2}}. \quad (4)$$

Аналогічно визначимо потенціал у точці  $O$  (рис. 1.8):

$$\varphi_O = \varphi_{O+q} + \varphi_{O-q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + R^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (5)$$

Тоді різниця потенціалів між центрами кілець (точки  $O'$  та  $O$ ) буде дорівнювати

$$\Delta\varphi = \varphi_{O'} - \varphi_O = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 / R^2}} \right). \quad (6)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Якщо відстань між кільцями  $a$  буде зменшена до нуля, то це означає, що різниця потенціалів буде визначатися між точками, які збігаються між собою. Зрозуміло, що різниця однакових потенціалів дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат.

Якщо  $a \rightarrow 0$ , то

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 / R^2}} \right) \rightarrow \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot (1 - 1) = 0.$$

2 Спрямуємо радіуси кілець  $R$  до нескінченності. Це буде означати, що електричне поле в центрі кілець зникне (на нескінченній відстані від електричних зарядів напруженість електричного поля дорівнює нулю). Отже, у цьому випадку різниця потенціалів буде дорівнювати нулю. Такий самий результат випливає і з розрахункової формули. Якщо  $R \rightarrow \infty$ , то

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 / R^2}} \right) \rightarrow \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \infty} \cdot (1 - 1) \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:** 
$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 / R^2}} \right).$$

### *Приклад 1.8*

Знайти потенціал і напруженість електричного поля в центрі рівномірно зарядженої півсфери радіусом  $R$  із поверхневою густиною  $\sigma$ .

### Розв'язання

$E, \Phi - ?$   
 $\sigma, R$  | У задачі необхідно знайти потенціал і модуль напруженості електричного поля, створеного зарядженою півсферою.

Розіб'ємо заряд півсфери на елементарні так, щоб кожний такий заряд можна було вважати точковим. Потенціал і напруженість електричного поля точкового заряду знайдемо за допомогою закону Кулона (1 а). Для визначення потенціалу й напруженості сумарного електричного поля використаємо принцип суперпозиції.

Виділимо на півсфері нескінченно малу площу  $dS$  (рис. 1.10) із зарядом  $dq = \sigma \cdot dS$ . Цей заряд можна розглядати як точковий.

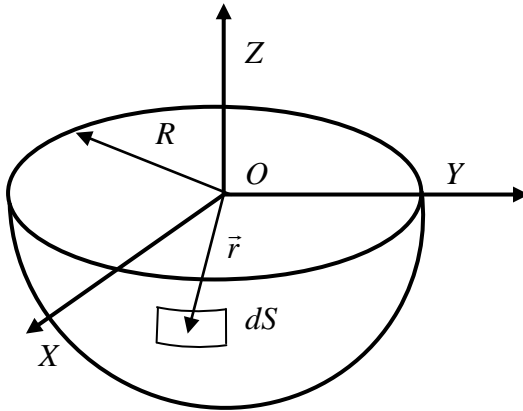


Рисунок 1.10

Тоді напруженість і потенціал електричного поля, які створює заряд  $dq$  у точці  $O$ , будуть відповідно дорівнювати

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot (-\vec{r}) = -\frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{r}, \quad (1)$$

$$d\Phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}. \quad (2)$$

Тут  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений із центра півсфери до виділеної площі  $dS$ , що однаковий за модулем та протилежний за напрямком до вектора, проведеного від заряду  $dq$  до центра півсфери  $O$ .

Виберемо координатні осі так, щоб вісь  $Z$  була віссю симетрії півсфери, а початок системи координат помістимо в точку  $O$  (рис. 1.10).

Розглянемо проєкції вектора  $d\vec{E}$  на координатні осі:

$$dE_z = \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot z, \quad dE_x = \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot x, \quad dE_y = \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot y. \quad (3)$$

Перейдемо до сферичних координат, використовуючи співвідношення:

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$dS = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \quad (4)$$

та одержуємо:

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi,$$

$$dE_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi,$$

$$dE_y = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \varphi \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Проінтегруємо ці вирази по всій поверхні півсфери, тобто в межах від  $\pi/2$  до  $\pi$  – за змінною  $\theta$ , від 0 до  $2\pi$  – за змінною  $\varphi$ , та одержуємо:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}, \\
 E_x &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \\
 E_y &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$E = E_z = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}. \quad (5)$$

Для визначення потенціалу перейдемо до сферичних координат у виразі (2) за допомогою співвідношень (4). У результаті інтегрування знаходимо

$$\Phi = \frac{\sigma \cdot r^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma \cdot r}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot R}{2\epsilon_0}. \quad (6)$$

Тут ми використали умову, що заряд розміщено на півсфері радіусом  $R$ , тобто  $r = R$ .

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Коли поверхнева густина заряду буде прямувати до нуля, то електричний заряд буде зменшуватися до нуля, а отже, й електричне поле, породжене такими зарядами, буде зникати. Тобто напруженість електричного поля та його

потенціал будуть прямувати до нуля. Такий самий результат впливає і з розрахункової формули.

Якщо  $\sigma \rightarrow 0$ , то  $E = \sigma / (4\epsilon_0) \sim \sigma \rightarrow 0$ ,

$\Phi = (\sigma \cdot R) / (2\epsilon_0) \sim \sigma \rightarrow 0$ .

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$ ,  $\Phi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ .

### Приклад 1.9

Потенціал електричного поля має вигляд  $\varphi = \alpha(xy - z^2)$ , де  $\alpha$  – стала. Знайти проекцію напруженості електричного поля в точці  $M(2; 1; -3)$  на напрямок вектора  $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_z$ , де  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – орти осей  $X, Y, Z$ .

#### Розв'язання

$E_a - ?$ $\varphi = \alpha(xy - z^2)$ , $M(2; 1; -3)$ , $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_z$	У задачі необхідно визначити проекцію вектора напруженості електричного поля за відомим потенціалом. Для цього необхідно використати співвідношення, що зв'яже напруженість електричного поля й потенціал $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi$ . Визначивши таким чином вектор $\vec{E}$ , далі знаходимо проекцію відомого вектора на відомий напрямок.
--	---

Знайдемо вектор напруженості електричного поля в довільній точці простору

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \cdot \varphi = \\ &= -\left[ \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(xy - z^2)) + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\alpha(xy - z^2)) + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\alpha(xy - z^2)) \right] = \end{aligned}$$

$$= -\alpha[\vec{e}_x \cdot y + \vec{e}_y \cdot x + \vec{e}_z \cdot (-2z)].$$

У точці  $M(2; 1; -3)$  вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}_M$  дорівнює

$$\vec{E}_M = -\alpha[\vec{e}_x \cdot 1 + \vec{e}_y \cdot 2 + \vec{e}_z \cdot (+6)].$$

Тут ми використали умову, що координати точки  $M$  дорівнюють  $x=2; y=1; z=-3$ .

Як відомо, проекція будь-якого вектора  $\vec{E}_M$  на вектор  $\vec{a}$  дорівнює (рис. 1.11)  $E_a = |\vec{E}_M| \cdot \cos(\angle \vec{E}_M \vec{a})$ . Зрозуміло, що  $\cos(\angle \vec{E}_M \vec{a}) = \vec{E}_M \cdot \vec{a} / (|\vec{E}_M| \cdot |\vec{a}|)$ . Тоді одержуємо

$$E_a = |\vec{E}_M| \frac{\vec{E}_M \cdot \vec{a}}{|\vec{E}_M| \cdot |\vec{a}|} = \frac{\vec{E}_M \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\alpha(1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z)}{\sqrt{(\vec{e}_x + 3\vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x + 3\vec{e}_z)}},$$

або 
$$E_a = -\alpha \frac{19}{\sqrt{10}}.$$

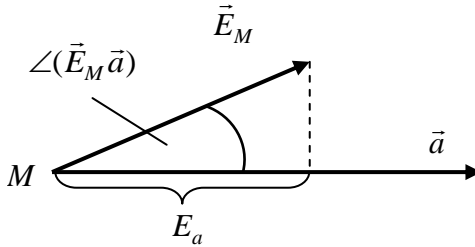


Рисунок 1.11

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.



Якщо коефіцієнт  $\alpha = 0$ , то потенціал  $\varphi$  буде дорівнює нулю у всіх точках простору. Це означає, що електричне поле буде відсутнє. Тобто  $E_a$  буде дорівнювати нулю.

Такий самий результат впливає з одержаної формули.

Якщо  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $E_a = \alpha \cdot \frac{19}{\sqrt{10}} \sim \alpha \rightarrow 0$ .

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $E_a = \alpha \cdot \frac{19}{\sqrt{10}}$ .

### **Приклад 1.10**

Визначити потенціал  $\varphi(x, y, z)$  електростатичного поля  $\vec{E} = ay\vec{e}_x + (ax + bz)\vec{e}_y + by\vec{e}_z$ , де  $a$  та  $b$  – сталі;  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – орти осей  $X, Y, Z$ .

#### **Розв'язання**

$\varphi(x, y, z) - ?$ $\vec{E} = ay\vec{e}_x + (ax + bz)\vec{e}_y + by\vec{e}_z$	У задачі необхідно визначити потенціал електростатичного поля за відомою напруженістю електричного поля. Для цього необхідно використати співвідношення, що зв'язує напруженість електростатичного поля й потенціал $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ . Підставимо в це рівняння явний вид напруженості електростатичного поля. Потім замінимо одержане векторне рівняння на три рівняння для проєкцій відповідних векторів і отримаємо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. Таким чином, задача зводиться до розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку.
--	---

Підставимо в рівняння  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  явний вид напруженості електростатичного поля, а також використаємо, що

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_x \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Тоді

$$\vec{E} = ay\vec{e}_x + (ax + bz)\vec{e}_y + by\vec{e}_z = -\left[ \vec{e}_x \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right].$$

Запишемо це векторне рівняння як систему рівнянь для відповідних проекцій:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ay, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = ax + bz, \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = by. \quad (1-3)$$

Розв'яжемо рівняння (1):

$$\varphi = -\int ay dx + \psi(y, z) = -ayx + \psi(y, z), \quad (4)$$

де  $\psi(y, z)$  – функція інтегрування, що не залежить від  $x$ , але залежить від  $y, z$ .

Далі підставляємо (4) у співвідношення (2) і одержуємо рівняння для функції  $\psi(y, z)$ :

$$-\frac{\partial}{\partial y} [(-axy) + \psi(y, z)] = ax + bz, \quad -\frac{\partial\psi(y, z)}{\partial y} = bz,$$

$$\psi(y, z) = -\int bz dy + \theta(z) = -bzy + \theta(z), \quad (5)$$

де  $\theta(z)$  – функція, що залежить лише від  $z$  і не залежить від  $y, x$ . Далі підставимо (4) з урахуванням співвідношення (5) у вираз (3) та отримаємо рівняння для  $\theta(z)$

$$-\frac{\partial}{\partial z} [-ayx - bzy + \theta(z)] = by, \quad \text{або} \quad -\frac{\partial\theta(z)}{\partial z} = 0.$$

Тобто

$$\theta = const ,$$

де  $const$  – константа, що не залежить від  $x, y, z$ . Таким чином,

$$\begin{aligned}\varphi &= -ayx + \psi(y, z) = -ayx + (-bzy) + \theta(z) = \\ &= -(ayx + bzy) + const .\end{aligned}$$

### *Аналіз одержаного результату*

Перевіримо правильність одержаного результату безпосередньою підстановкою  $\varphi(x, y, z)$  у співвідношення  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\left[ \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-ayx + bzy) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (-ayx + bzy) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (-ayx + bzy) + const \right] = ay\vec{e}_x + (ax + bz)\vec{e}_y + by\vec{e}_z .\end{aligned}$$

Бачимо, що одержаний вираз для напруженості електричного поля збігається з поданим в умові задачі. Отже, одержаний розв'язок є правильним.

**Відповідь:**  $\varphi = -(ayx + bzy) + const$ .

## **1.2 Задачі для самостійного розв'язування**

**1.1** Два точкових однойменних заряди по  $q = 12$  нКл кожен знаходяться на відстані  $a = 10$  см один від одного. Визначте величину та напрям сили, з якою ці заряди будуть діяти на додатний заряд  $q_3 = 20$  нКл, що розміщений на відстані  $b = 20$  см від кожного з них.

**1.2** Два додатних заряди  $q_1 = 0,3$  мкКл та  $q_2 = 0,2$  мкКл знаходяться на відстані  $l = 10$  см один від одного. Де потрібно помістити між ними третій заряд, щоб він перебував у рівновазі?

**1.3** Точковий заряд  $1$  мкКл знаходиться поблизу великої рівномірно зарядженої пластини навпроти її середини. Визначте поверхневу густину заряду пластини, якщо на точковий заряд діє сила  $60$  мН.

**1.4** Дві кульки, кожна масою  $m = 10$  мг, підвішені на нитках довжиною по  $l = 50$  см. Після того як кулькам надали однакового заряду, вони відійшли одна від одної на відстань  $a = 7$  см. Знайдіть величину заряду кожної кульки  $q$ .

**1.5** Між двома вертикальними плоскопаралельними пластинами, що знаходяться на відстані  $d = 2$  см одна від одної, підвішена заряджена кулька масою  $m = 0,1$  г. За умови різниці потенціалів між пластинами  $U = 900$  В кулька відхилилася на кут  $\alpha = 10^0$ . Визначте заряд кульки  $q$ .

**1.6** Дві паралельні площини, поверхневі густини заряду яких дорівнюють  $\sigma_1 = 2$  мкКл/м<sup>2</sup> та  $\sigma_2 = -0,8$  мкКл/м<sup>2</sup>, знаходяться на відстані  $d = 0,6$  см одна від одної. Визначте різницю потенціалів між площинами.

**1.7** Порошина масою  $m = 10^{-9}$  г утримується у рівновазі між двома горизонтальними паралельними пластинами, зарядженими до різниці потенціалів  $\Delta\varphi = 120$  В. Відстань між пластинами  $d = 8$  мм. З яким прискоренням буде рухатися порошина, якщо вона втратить  $N = 10$  електронів?

**1.8** Три однакових заряди ( $q = 0,1$  мкКл кожний) розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. Який від'ємний заряд  $q_1$  потрібно розмістити в центрі

трикутника, щоб система перебувала у рівновазі? Чи буде ця рівновага стійкою?

**1.9** Нескінченна площа несе рівномірно розподілений заряд, поверхнева густина якого  $\sigma = 1 \text{ мкКл/м}^2$ . На деякій відстані від площини паралельно їй розміщене коло радіусом  $r = 10 \text{ см}$ . Обчислити потік  $\Phi_E$  вектора напруженості через це коло.

**1.10** Плоска квадратна пластина зі стороною довжиною  $a$ , що дорівнює  $10 \text{ см}$ , знаходиться на деякій відстані від нескінченної рівномірно зарядженої ( $\sigma = 1 \text{ мкКл/м}^2$ ) площини. Площина пластини становить кут  $\beta = 30^\circ$  із лініями поля. Знайти потік  $\Phi_E$  напруженості електричного поля через цю пластину.

**1.11** Електричне поле створене двома нескінченними паралельними пластинами, що несуть однаковий рівномірно розподілений по площі заряд ( $\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$ ). Визначити напруженість  $E$  поля: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж лінії, перпендикулярної до пластин.

**1.12** Електричне поле створене двома нескінченними паралельними пластинами, що несуть рівномірно розподілений по площі заряд із поверхневою густиною  $\sigma_1 = 1 \text{ нКл/м}^2$  і  $\sigma_2 = 3 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити напруженість  $E$  поля: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж перпендикулярної до пластин лінії.

**1.13** Електричне поле створене двома нескінченними паралельними пластинами, що несуть рівномірно розподілений по площі заряд із поверхневою густиною  $\sigma_1 = 2 \text{ нКл/м}^2$  і  $\sigma_2 = -5 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити напруженість  $E$  поля: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж перпендикулярної до пластин лінії.

**1.14** Дві прямокутні однакові паралельні пластини, довжини сторін яких  $a = 10$  см і  $b = 15$  см, розміщені на малій (порівняно з лінійними розмірами пластин) відстані одна від одної. На одній із пластин рівномірно розподілений заряд  $q_1 = 50$  нКл, на іншій – заряд  $q_2 = 150$  нКл. Визначити напруженість  $E$  електричного поля між пластинами.

**1.15** Дві нескінченні паралельні пластини рівномірно заряджені з поверхневою густиною  $\sigma_1 = 10$  нКл/м<sup>2</sup> і  $\sigma_2 = -30$  нКл/м<sup>2</sup>. Визначити силу взаємодії між пластинами, площа яких  $S = 1$  м<sup>2</sup>.

**1.16** Дві круглі паралельні пластини радіусом  $R = 10$  см розміщені на малій (порівняно з радіусом) відстані одна від одної. Пластинам передали однакові за абсолютним значенням, але протилежні за знаком заряди  $|q_1| = |q_2| = q$ . Визначити цей заряд  $q$ , якщо пластини притягуються із силою  $F = 2$  мН. Вважати, що заряди розподілені по пластинах рівномірно.

**1.17** У центрі сфери радіусом  $R = 20$  см знаходиться точковий заряд  $q = 10$  нКл. Визначити потік  $\Phi_E$  вектора напруженості через частину сферичної поверхні площею  $S = 20$  см<sup>2</sup>.

**1.18** Електричне поле створене точковим зарядом  $q = 0,1$  мкКл. Визначити потік  $\Phi_E$  напруженості електричного поля через круглу площадку радіусом  $R = 30$  см. Заряд рівновіддалений від країв площадки й знаходиться на відстані  $a = 40$  см від її центра.

**1.19** Електричне поле створене рівномірно зарядженим з об'ємною густиною заряду  $\rho$  циліндром. Радіус циліндра  $R$ , довжина нескінченна. Знайти напруженість  $E$  поля як функцію відстані  $r$  від осі всередині циліндра.

**1.20** Кулька радіусом  $R = 2$  см заряджена з об'ємною густиною  $\rho = 0,7$  мкКл/м<sup>2</sup>. Яка напруженість поля на відстанях  $r_1 = 1$  см та  $r_2 = 3$  см від центра кульки?

**1.21** Два додатні заряди  $q_1$  й  $q_2$  знаходяться у точках із радіусами-векторами  $\vec{r}_1$  й  $\vec{r}_2$ . Знайти від'ємний заряд  $q_3$  і радіус-вектор  $\vec{r}_3$  точки, в яку його потрібно помістити, щоб сила, що діє на кожний із трьох зарядів, дорівнювала нулю.

**1.22** Додатний точковий заряд 50 мкКл знаходиться на площині  $XU$  в точці з радіусом-вектором  $\vec{r}_0 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ , де  $\vec{e}_x$  й  $\vec{e}_y$  – орти осей  $X$  і  $Y$ . Знайти напруженість електричного поля та її модуль у точці з радіусом-вектором  $\vec{r} = 8\vec{e}_x - 5\vec{e}_y$ . Величини  $r_0$  і  $r$  виражені в метрах.

**1.23** Тонкий стрижень довжиною  $l = 10$  см рівномірно заряджений зарядом  $q = 3$ нКл. Визначити напруженість поля і потенціал у точці, що лежить на осі стрижня на відстані  $x_0 = 20$  см від ближчого його кінця.

**1.24** Тонкий прямий стрижень довжиною  $2a$ , що знаходиться у вакуумі, заряджений рівномірно зарядом  $q$ . Знайти модуль напруженості електричного поля як функцію відстані  $r$  від центра стрижня до точки прямої, а) що перпендикулярна до стрижня і проходить через його центр; б) що збігається з віссю стрижня, якщо  $r > a$ . Дослідити одержані вирази, якщо  $r \gg a$ .

**1.25** Тонке півкільце радіусом  $R = 20$  см заряджене рівномірно зарядом  $q = 0,70$  нКл. Знайти модуль напруженості електричного поля в центрі кривизни цього півкільця.

**1.26** Кільце радіусом  $r$  із тонкого провідника має заряд  $q$ . Знайти модуль напруженості електричного поля на осі кільця як функцію відстані  $l$  до його центра. Дослідити одержану залежність, якщо  $l \gg r$ . Визначити максимальне значення напруженості й відповідну йому відстань  $l_m$ . Зобразити приблизний графік функції  $E(l)$ .

**1.27** Тонке непровідне кільце радіусом  $R$  заряджене з лінійною густиною  $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ , де  $\lambda_0$  – постійна;  $\varphi$  – азимутальний кут. Знайти модуль напруженості електричного поля: а) у центрі кільця; б) на осі кільця залежно від відстані  $x$  до його центра. Одержаний вираз дослідити, якщо  $x \gg R$ .

**1.28** Рівномірно заряджена нитка, на одиницю довжини якої припадає заряд  $\lambda$ , має конфігурацію, як показано на рис. 1.12–1.13. Радіус заокруглення  $R$  значно менший від довжини нитки. Знайти модуль напруженості електричного поля в точці  $O$  для конфігурацій рис. 1.12 та рис. 1.13.

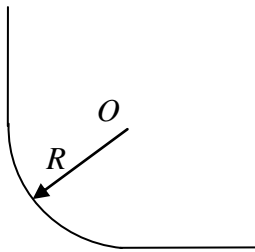


Рисунок 1.12

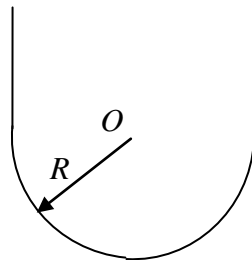


Рисунок 1.13

**1.29** Сфера радіусом  $r$  заряджена з поверхневою густиною  $\sigma = \vec{a} \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{a}$  – сталий вектор;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки сфери відносно її центра. Знайти напруженість електричного поля в центрі сфери.



**1.30** Поверхнева густина заряду на сфері радіусом  $R$  залежить від полярного кута  $\theta$  як  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , де  $\sigma_0$  – додатна стала. Показати, що такий розподіл заряду можна подати як результат малого зміщення двох рівномірно заряджених куль радіусом  $R$  одна відносно одної, заряди яких однакові за модулем та протилежні за знаком. Скориставшись цим, знайти напруженість електричного поля всередині цієї сфери.

**1.31** Дві довгі паралельні нитки рівномірно заряджені кожна з лінійною густиною  $\lambda = 0,50$  мкКл/м. Відстань між нитками  $l = 45$  см. Знайти максимальне значення модуля напруженості електричного поля в площині симетрії цієї системи, розміщеною між нитками.

**1.32** Нескінченно довга циліндрична поверхня круглого перерізу заряджена рівномірно по довжині з поверхневою густиною  $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$ , де  $\varphi$  – полярний кут циліндричної системи координат, вісь  $Z$  якої збігається з віссю цієї поверхні. Знайти модуль і напрямок напруженості електричного поля на осі  $Z$ .

**1.33** Три однакових кульки, розміщені у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною  $a$ , з'єднані одна з одною нитками. Заряд і маса кожної кульки дорівнюють  $q$  й  $m$ . Одну з ниток перепалили. Знайти максимальну швидкість середньої кульки. Силою тяжіння знехтувати.

**1.34** Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною  $\lambda = 0,40$  мкКл/м. Обчислити різницю потенціалів точок 1 і 2, якщо точка 2 знаходиться далі від нитки, ніж точка 1, в  $\eta = 2,0$  рази.

**1.35** Тонке кільце радіусом  $R = 0,25$  м має заряд  $Q = 5,0$  мкКл, нерівномірно розподілений по кільцю. Знайти роботу електричних сил, яка виконується під час переміщення точкового заряду  $q = 10$  мкКл із центра

кільця по довільній траєкторії в точку, що знаходиться на осі кільця на відстані  $l = 50$  см від його центра.

**1.36** Кругла тонка пластинка радіусом  $R$ , що знаходиться у вакуумі, рівномірно заряджена з поверхневою густиною  $\sigma$ . Знайти потенціал і модуль напруженості електричного поля на осі пластинки як функцію відстані  $l$  від її центра. Дослідити одержаний вираз, якщо  $l \rightarrow 0$  та  $l \gg R$ .

**1.37** Знайти напруженість електричного поля, потенціал якого має вигляд  $\varphi = \vec{a} \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{a}$  – постійний вектор,  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки поля.

**1.38** Показати, що потенціал поля диполя з електричним моментом  $\vec{p}$  (рис. 1.14) може бути поданий як  $\varphi = \vec{p} \cdot \vec{r} / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ , де  $\vec{r}$  – радіус-вектор. Знайти за допомогою цього виразу модуль напруженості електричного поля диполя як функцію  $r$  та  $\theta$ .

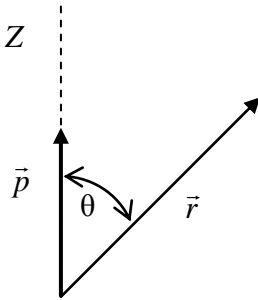


Рисунок 1.14

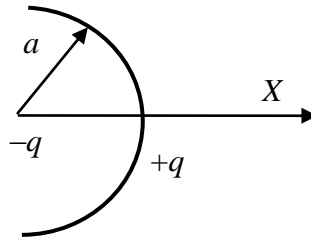


Рисунок 1.15

**1.39** Система складається із заряду  $q > 0$ , рівномірно розподіленого по півколу радіусом  $a$ , у центрі якого розміщено від'ємний точковий заряд  $-q$  (рис. 1.15). Знайти: а) електричний дипольний момент цієї системи;

б) модуль напруженості електричного поля на осі  $X$  системи на відстані  $x \gg a$  від неї.

**1.40** Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить лише від відстані до його центра як  $\varphi = ar^2 + b$ , де  $a$  й  $b$  – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду  $\rho(r)$  усередині кулі.

**1.41** Знайти потік вектора напруженості електричного поля  $\Phi_E$  через бічну поверхневого колового циліндра висотою  $h = 20$  см, що має радіус основи  $r = 10$  см. Точковий заряд  $q_0 = 0,3$  мкКл розміщено: а) на осі циліндра на середині висоти; б) у центрі основи.

**1.42** Простір між двома концентричними сферами радіусами  $R_1$  і  $R_2$  заряджений з об'ємною густиною заряду  $\rho = a/r^2$ , де  $a$  – стала величина. Знайти повний заряд  $q$ , а також напруженість  $E$  і потенціал  $\varphi$  електричного поля як функції відстані від центра.

**1.43** Простір заповнено зарядом з об'ємною густиною  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$ , де  $\rho_0$  і  $\alpha$  – додатні сталі;  $r$  – відстань від центра системи. Знайти модуль напруженості електричного поля як функцію  $r$ . Дослідити одержаний вираз для малих і великих  $r$ , тобто якщо  $\alpha r^3 \ll 1$  і  $\alpha r^3 \gg 1$ .

**1.44** Напруженість електричного поля залежить лише від координат  $x$  і  $y$  за законом  $\vec{E} = a(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)/(x^2 + y^2)$ , де  $a$  – стала;  $\vec{e}_x$  і  $\vec{e}_y$  – орти осей  $X$  і  $Y$ . Знайти потік вектора  $\vec{E}$  через сферу радіусом  $R$  із центром на початку координат.

**1.45** Куля радіусом  $R$  має додатний заряд, об'ємна густина якого залежить лише від відстані до його центра як  $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ , де  $\rho_0$  – стала. Вважаючи, що

діелектрична проникність дорівнює одиниці, знайти:  
а) модуль напруженості електричного поля всередині й поза кулею як функцію  $r$ ; б) максимальне значення модуля напруженості  $E_{\max}$  й відповідне йому значення  $r_m$ .

**1.46** Усередині кулі, зарядженої рівномірно з об'ємною густиною  $\rho$ , є сферична порожнина. Центр порожнини зміщений відносно центра кулі на відстань, що характеризується вектором  $\vec{a}$ . Знайти напруженість  $\vec{E}$  поля всередині порожнини.

## 2 ПРОВІДНИКИ Й ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

### Основні формули

Напруженість електричного поля біля поверхні провідника у вакуумі

$$E_n = \sigma / \epsilon_0. \quad (2 \text{ а})$$

Потік вектора поляризації  $\vec{P}$  через замкнену поверхню

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q', \quad (2 \text{ б})$$

де  $q'$  – алгебраїчна сума зв'язаних зарядів усередині цієї поверхні.

Вектор  $\vec{D}$  (вектор електричної індукції) і теорема Гауса для нього:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q, \quad (2 \text{ в})$$

де  $q$  – алгебраїчна сума сторонніх зарядів усередині замкненої поверхні.

Умови на межі поділу двох діелектриків:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (2 \text{ г})$$

де  $\sigma'$  й  $\sigma$  – поверхнева густина відповідно зв'язаних і сторонніх зарядів, а орт нормалі  $\vec{n}$  спрямований із середовища 1 у середовище 2.

Для ізотропних діелектриків:

$$\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + \chi. \quad (2 \text{ г})$$

У разі ізотропного однорідного діелектрика, що заповнює весь простір між екіпотенціальними поверхнями,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon . \quad (2 \text{ д})$$

## 2.1 Приклади розв'язування задач

### Приклад 2.1

Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $l$  від провідної площини. Яку роботу необхідно виконати проти електричних сил, щоб повільно відвести цей заряд на дуже велику відстань від провідної площини.

#### *Розв'язання*

$A - ?$ $q, l$	<p>Точковий заряд <math>q</math> створює навколо себе електричне поле, яке впливає на електричні заряди, що знаходяться на провідній площі. У результаті дії цього поля заряди провідної поверхні зміщуються, і на ній з'являється індукований електричний заряд. Цей індукований заряд також бере участь у формуванні загального електричного поля. Для того щоб відвести заряд <math>q</math> на дуже велику відстань від провідної площини, необхідно виконати роботу проти сил, що діють між зарядом <math>q</math> та індукованим зарядом провідної площини.</p>
-------------------	---

Для розв'язування задачі використаємо **метод дзеркальних зображень**. Цей метод базується на такому очевидному положенні: якщо в електричному полі замінити будь-яку еквіпотенціальну поверхню провідником із такою самою формою і створити на ньому потенціал, який дорівнює потенціалу еквіпотенціальної поверхні, то електричне поле не зміниться.

Застосуємо це положення до електричного поля двох точкових зарядів  $q$  та  $-q$ , розміщених один від одного на відстані  $2 \cdot l$  (рис. 2.1). Електричне поле, що створюється

цими зарядами, можна розділити площиною  $AA$  на дві рівні частини. Ця площина скрізь перпендикулярна до силових ліній і тому буде еквіпотенціальною поверхнею. Саме через це, якщо в площині  $AA$  буде знаходитися необмежена провідна площина з потенціалом, що дорівнює нулю, поле між цією площиною та зарядом  $q$  не зміниться і буде збігатися з полем двох точкових зарядів  $q$  та  $-q$ . Ця обставина дозволяє легко врахувати вплив індукованих зарядів провідної площини заміною системи заряду  $q$  та заряду індукованої площини на систему зарядів  $q$  та  $-q$ . Заряд  $-q$  розміщений за площиною на такій самій відстані  $l$  від площини, як і заряд  $q$ . Тому заряд  $-q$  є дзеркальним відображенням заряду  $q$  у провідній площині. Одержаний результат можна сформулювати так: *електричне поле між точковим зарядом і нескінченною площиною збігається з полем, що створює цей заряд та його дзеркальне відображення в провідній площині, або вплив провідної площі з індукованим зарядом можна замінити впливом точкового заряду, який є дзеркальним відображенням цього заряду в провідній площині.*

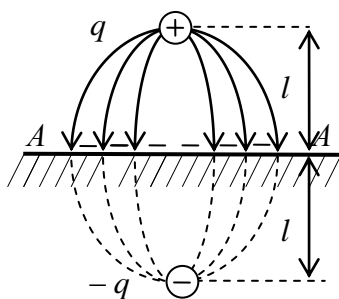


Рисунок 2.1

Застосуємо розглянутий метод для знаходження роботи, яку потрібно виконати проти електричних сил, щоб повільно відвести цей заряд  $q$  на дуже велику відстань від провідної площини. Електричне поле в просторі між зарядом  $q$  та провідною площиною буде збігатися з полем заряду  $q$  та його дзеркальним

відображенням (рис. 2.2). Таким чином, задача зводиться до знаходження роботи, яку потрібно виконати, щоб відвести заряд  $q$  від його дзеркального відображення – заряду  $-q$  з відстані  $2 \cdot l$  на нескінченну відстань.

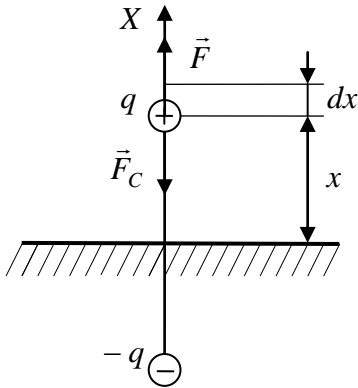


Рисунок 2.2

Для того щоб відвести заряд від провідної площини, необхідно до заряду  $q$  прикласти силу  $\vec{F}$ , протилежну за напрямком та однакою за модулем сили кулонівської взаємодії  $\vec{F}_C$  між зарядом  $q$  та зарядом  $-q$  (рис. 2.2). Тобто

$$\vec{F} = -\vec{F}_C = + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} \vec{e}_x. \quad (1)$$

Як відомо, елементарна робота визначається співвідношенням

$$dA = F_x dx = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} dx, \quad (2)$$

де сила  $\vec{F}$  визначається співвідношенням (1). Далі проводимо інтегрування за змінною  $x$  від  $l$  до  $\infty$  та одержуємо

$$A = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_l^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}. \quad (3)$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Розглянемо інші методи розв'язування задачі. Зазначимо, що спроба розв'язати задачу, використовуючи



поняття потенціалу, приводить до неправильного результату:

$$A = -A_C = -q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{2l} - 0 \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l}. \quad (4)$$

У співвідношенні (4)  $A_C$  – робота сили кулонівської взаємодії  $\vec{F}_C$ ;  $\varphi_1$  – потенціал взаємодії зарядів  $q$  та  $-q$ , що знаходяться на відстані  $2l$ ;  $\varphi_2$  – потенціал взаємодії зарядів  $q$  та  $-q$ , що знаходяться на нескінченній відстані один від одного.

Як бачимо, результат (4) відрізняється удвічі порівняно з (3). Це пов'язано з тим, що вираз  $A_C = q(\varphi_1 - \varphi_2)$  є правильним лише для потенціального поля. У системі ж відліку провідної площини електричне поле не є потенціальним. Причина цього полягає в тому, що під час руху заряду  $q$  індуковані заряди провідної поверхні теж рухаються. Тобто електричне поле індукованих зарядів стає залежним від часу, а не лише від положення заряду  $q$  і тому є непотенціальним. Таким чином, вираз  $A_C = q(\varphi_1 - \varphi_2)$  для цього випадку для змінних у часі електричних полів є неправильним.

**Відповідь:**  $A = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$

### **Приклад 2.2**

Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $l$  від провідної площини. Визначити поверхневу густину зарядів, що індукуються на площині, як функцію відстані  $r$  від основи перпендикуляра, який опущено від заряду на цю площину.

### Розв'язання

$$\sigma = \sigma(r) - ?$$

$q, l$

Заряд  $q$  створює навколо себе електричне поле, що діє на електричні заряди провідної поверхні. Під дією цього поля заряди провідної поверхні починають рухатися. Через це виникають індуковані заряди, які, у свою чергу, також беруть участь у формуванні загального електричного поля. Зрештою, рух зарядів у провідній поверхні припиняється, встановлюється стаціонарний стан, в якому як індуковані заряди, так і загальне електричне поле перестають змінюватися. Саме для стаціонарного стану й потрібно знайти густину індукованого заряду в провідній поверхні.

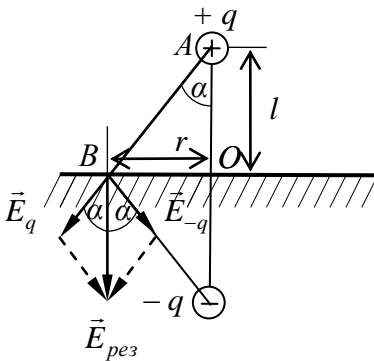


Рисунок 2.3

Для розв'язування цієї задачі використаємо зв'язок між густиною заряду в провіднику та напруженістю електричного поля біля поверхні провідника (2 а). Напруженість електричного поля біля поверхні провідника визначимо використовуючи метод дзеркальних відображень (див. про цей метод у прикладі 2.1).

Згідно з методом дзеркальних відображень електричне поле, створене зарядом  $q$  та індукованими зарядами провідної поверхні, буде збігатися з полем, утвореним зарядом  $q$  та його дзеркальним відображенням  $-q$  (рис. 2.1). Таким чином, напруженість загального електричного поля  $\vec{E}_{рез}$  біля поверхні провідної площини можна знайти як векторну суму напруженостей  $\vec{E}_q$  та  $\vec{E}_{-q}$ ,

створених відповідно точковими зарядами  $q$  та  $-q$  (рис. 2.3). Тобто  $\vec{E}_{рез} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}$ . Виходячи з рис. 2.3, неважко з'ясувати, що

$$E_{рез} = 2E_q \cdot \cos(\alpha). \quad (1)$$

Косинус кута  $\alpha$  легко можна визначити з трикутника  $AOB$  (рис. 2.3):

$$\cos(\alpha) = l / \sqrt{l^2 + r^2}, \quad (2)$$

а модуль напруженості електричного поля  $E_q$  точкового заряду  $q$  дорівнює

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(l^2 + r^2)}. \quad (3)$$

Підставляємо (2) і (3) у формулу (1) і одержуємо

$$E_{рез} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot l}{(l^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Далі використовуємо зв'язок між густиною заряду в провіднику та напруженістю електричного поля біля поверхні провідника (2 а):

$$|E_{рез}| = |\sigma| / \epsilon_0. \quad (5)$$

Використовуючи співвідношення (5) та (4), знаходимо шукану густину індукованих зарядів у провіднику

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{q \cdot l}{(l^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

У співвідношенні (6) знак « $\rightarrow$ » означає, що індукується заряд протилежного знака до заряду  $q$ .

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Відповідно до методу дзеркальних відображень індукований заряд провідної площини ми замінюємо точковим зарядом  $-q$ , однаковим за модулем та протилежним за знаком заряду  $q$  (рис. 2.1). Виходячи з цього, а також із розподілу силових ліній поля (силові лінії відходять від додатного заряду і входять у такий самий за модулем від'ємний заряд, див. рис. 2.1), можна зробити припущення, що увесь індукований на площині заряд  $q_{інд}$  повинен дорівнювати  $-q$ . Перевіримо це.

Для цього розіб'ємо провідну площину на кільця радіусом  $r$  із центром у точці  $O$  (рис. 2.3), товщиною  $dr$  та площею  $dS = d(\pi \cdot r^2) = 2\pi \cdot r dr$ . Використовуючи формулу (6) знайдемо заряд на цій площині:

$$dq_{інд} = \sigma \cdot dS = -\frac{1}{2\pi} \frac{q \cdot l}{(l^2 + r^2)^{3/2}} 2\pi \cdot r dr. \quad (7)$$

Повний заряд  $q_{інд}$  обчислимо підсумувавши заряди  $dq_{інд}$  на всій провідній поверхні:

$$\begin{aligned} q_{інд} &= -\int_0^{\infty} \frac{q \cdot l}{(l^2 + r^2)^{3/2}} r dr = -\frac{q \cdot l}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(r^2)}{(l^2 + r^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{q \cdot l}{2} \cdot \left( (-2)(l^2 + r^2)^{-1/2} \right) \Big|_0^{\infty} = -q. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, одержали, що  $q_{інд} = -q$ . Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{q \cdot l}{(l^2 + r^2)^{3/2}}.$

### Приклад 2.3

Точковий сторонній заряд  $q$  знаходиться у центрі кулі з однорідного діелектрика з проникністю  $\epsilon$ . Знайти вектор поляризації  $\vec{P}$  як функцію радіуса-вектора  $\vec{r}$  відносно центра кулі, а також зв'язаний заряд  $q'$  усередині сфери, радіус якої менший від радіуса кулі.

#### Розв'язання

$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}) - ?$   
 $q' - ?$   
 $q, \epsilon$

Електричний заряд  $q$  створює електричне поле всередині діелектричної кулі, в результаті чого діелектрик поляризується, і в ньому виникають зв'язані заряди. Для визначення зв'язаного заряду  $q'$  й вектора поляризації  $\vec{P}$  як функції радіуса-вектора  $\vec{r}$  використаємо відомі співвідношення:  $q' = -\oint \vec{P} \cdot d\vec{S}$  (формула (2 б)),  $\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ ,  $\epsilon = 1 + \chi$  (формули (2 г)),  $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon$  (формула (2 д)).

Через те що однорідний та ізотропний діелектрик займає весь простір між екіпотенціальними поверхнями, напруженість електричного поля всередині діелектрика можна знайти за допомогою співвідношення (2 д):

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1)$$

де  $\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$  – напруженість електричного поля точкового заряду  $q$  у вакуумі у разі відсутності діелектрика;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від точкового заряду  $q$  (від центра діелектричної кулі) до точки спостереження.

Враховуючи (1), знаходимо вектор поляризації  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \epsilon_0(\epsilon - 1) = \frac{q(\epsilon - 1) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}. \quad (2)$$

Тут ми взяли до уваги, що відповідно до формули (2 г)  $\chi = \epsilon - 1$ .

Для знаходження зв'язаних зарядів усередині діелектрика використаємо співвідношення (2 б):

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$$

Підставляємо в цей вираз (2), проводимо інтегрування по поверхні сфери. Беремо до уваги, що вектор  $\vec{P}$  на поверхні сфери за модулем постійний, а за напрямком є паралельним вектору  $d\vec{S}$ . У результаті одержуємо

$$q' = -\oint \vec{P} d\vec{S} = -P \oint dS = -PS_{\text{сфери}} = -\frac{q(\epsilon - 1)}{4\pi\epsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot q. \quad (3)$$

$$\text{Отже, } \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot \frac{q}{4\pi \cdot r^3} \cdot \vec{r}, \quad q' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot q.$$

### **Аналіз одержаного результату**

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли діелектрик відсутній. Тоді з фізичних міркувань випливає, що поляризації діелектрика також не повинно бути. Тобто  $q' = 0$ ,  $\vec{P} = 0$ . Такий самий результат випливає і з одержаних формул. Коли діелектрик відсутній, то це означає, що діелектрична проникність простору прямує до одиниці:  $\epsilon \rightarrow 1$ . Тоді

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot \frac{q}{4\pi \cdot r^3} \cdot \vec{r} \sim (\epsilon - 1) \rightarrow 0,$$

$$q' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \cdot q \sim \epsilon - 1 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi \cdot r^3} \cdot \vec{r}, \vec{E}.$

**Приклад 2.4**

Біля плоскої поверхні однорідного діелектрика з проникністю  $\varepsilon$  напруженість електричного поля у вакуумі дорівнює  $E_0$ , причому вектор  $\vec{E}_0$  розміщено під кутом  $\theta$  до нормалі поверхні діелектрика (рис. 2.4). Беручи поле всередині й за межами діелектрика однорідним, знайти: а) потік вектора  $\vec{E}$  через сферу радіуса  $R$  із центром на поверхні діелектрика; б) циркуляцію вектора  $\vec{D}$  по контуру  $\Gamma$  довжини  $l$  (рис. 2.4), площина якого перпендикулярна до поверхні діелектрика й паралельна вектору  $\vec{E}_0$ .

**Розв'язання**

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} - ?$ $\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} - ?$
$\varepsilon, E_0, \theta$

Розглянемо завдання (а) задачі. Зазначимо, що вплив діелектрика на електричне поле полягає в тому, що в діелектрику індуються зв'язані заряди, які беруть участь у формуванні загального

електричного поля  $\vec{E}$ . Тому для визначення потоку вектора  $\vec{E}$  через сферу радіусом  $R$  використаємо теорему Гауса для вакууму з урахуванням індукованих зв'язаних зарядів:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Таким чином, задача знаходження потоку вектора  $\vec{E}$  зводиться до знаходження зарядів  $q + q'$  у середині сфери

радіусом  $R$  (рис. 2.4). У випадку, що розглядається, сторонні заряди відсутні. Тобто

$$q = 0. \quad (2)$$

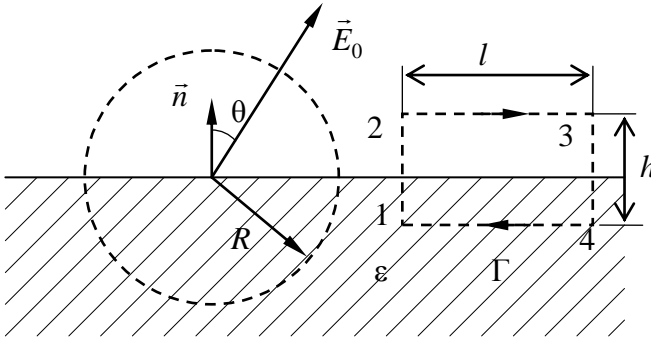


Рисунок 2.4

В умові задачі зазначено, що електричні поля всередині й за межами діелектрика однорідні. Це означає, що зв'язані заряди розміщені лише вздовж межі поділу діелектрик – вакуум і характеризуються сталою поверхневою густиною зв'язаного заряду  $\sigma'$ . Поверхневу густину зв'язаних зарядів знайдемо використовуючи граничні умови для вектора поляризації (див. формулу (2 г)). Для визначення вектора  $\vec{D}$  використаємо також граничні умови та зв'язок між вектором  $\vec{D}$  та  $\vec{E}$  (співвідношення (2 г) та (2 г)).

Як було вищезазначено, зв'язані заряди розподілені рівномірно по межі поділу діелектрик – вакуум із деякою сталою поверхневою густиною  $\sigma'$ . Тому зв'язаний заряд, що міститься всередині сфери радіусом  $R$  і знаходиться на колі радіусом  $R$ , дорівнює

$$q' = \sigma' \cdot \pi \cdot R^2. \quad (3)$$



Тоді потік вектора  $\vec{E}$  (1) з урахуванням (2) та (3) буде таким, що дорівнює

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma' \cdot \pi R^2}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Поверхневу густину зв'язаних зарядів  $\sigma'$  знайдемо використовуючи граничні умови (див. формулу (2 г)) для нормальних компонент векторів  $\vec{P}$  і  $\vec{D}$ :

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma = 0. \quad (5)$$

Тут індексом «1» позначено відповідні величини в діелектрику, а індексом «2» – відповідні величини для вакууму; враховано, що сторонні заряди відсутні:  $\sigma = 0$ . Також для знаходження нормальних складових векторів  $\vec{P}$  та  $\vec{D}$  використаємо співвідношення (2 г):

$$P_{1n} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{1n} = (\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{1n},$$

$$P_{2n} = 0 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{2n} = (1 - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{2n} = 0,$$

$$D_{1n} = \varepsilon \varepsilon_0 E_{1n}, \quad D_{2n} = \varepsilon_0 \cdot E_{2n} = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \cos(\theta). \quad (6)$$

Тут використали умову, що нормальна складова вектора напруженості електричного поля у вакуумі дорівнює  $E_{2n} = E_0 \cdot \cos(\theta)$  (рис. 2.4). Далі підставляємо співвідношення (6) в (5) і знаходимо

$$\sigma' = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \cdot E_{1n} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \cdot E_{2n} / \varepsilon = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \cdot E_0 \cos \theta / \varepsilon. \quad (7)$$

Підставляємо одержаний результат (7) в (4) і знаходимо шуканий потік вектора  $\vec{E}$ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \pi R^2 \cdot E_0 \cos \theta. \quad (8)$$

Розглянемо завдання (б) задачі. Циркуляцію вектора  $\vec{D}$  подамо у вигляді суми інтегралів на відповідних ділянках контура (рис. 2.4):

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{D} \cdot d\vec{r} + \int_2^3 \vec{D} \cdot d\vec{r} + \int_3^4 \vec{D} \cdot d\vec{r} + \int_4^1 \vec{D} \cdot d\vec{r}. \quad (9)$$

Через те що поверхневі сторонні заряди відсутні  $\sigma = 0$ , то відповідно до співвідношень (5) та (6)  $D_{1n} = D_{2n} = D_n$ . Тоді

$$\int_1^2 \vec{D} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 D_n \cdot dr = D_n \cdot \int_1^2 dr = D_n \cdot h,$$

$$\int_3^4 \vec{D} \cdot d\vec{r} = \int_3^4 (-1)D_n \cdot dr = (-1)D_n \int_3^4 dr = (-1)D_n \cdot h, \quad (10)$$

де  $h$  – довжина шляху інтегрування між точками 1 і 2 (3 і 4) (рис. 2.4). Знак мінус у другій формулі системи (10) пов'язаний із тим, що на ділянці 3–4 напрямком обходу контура протилежний вектору  $\vec{n}$  (рис. 2.4).

Аналогічно знаходимо

$$\int_2^3 \vec{D} \cdot d\vec{r} = \int_2^3 D_{2\tau} \cdot dr = D_{2\tau} \int_2^3 dr = D_{2\tau} \cdot l,$$

$$\int_4^1 \vec{D} \cdot d\vec{r} = \int_4^1 (-1)D_{1\tau} \cdot dr = (-1)D_{1\tau} \int_4^1 dr = (-1)D_{1\tau} \cdot l, \quad (11)$$

де  $D_{1\tau}$ ,  $D_{2\tau}$  – тангенціальні складові вектора  $\vec{D}$  у діелектрику й вакуумі відповідно. З урахуванням (10) та (11) циркуляція (9) набере вигляду

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = l(D_{2\tau} - D_{1\tau}). \quad (12)$$

Використовуємо граничні умови для тангенціальних компонент вектора  $\vec{E}$  у вакуумі й діелектрику (2 г)  $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_0 \cdot \sin \theta$  (рис. 2.4) і знаходимо відповідно до (2 г)

$$D_{1\tau} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{1\tau} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \sin \theta,$$

$$D_{2\tau} = 1 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{2\tau} = \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \sin \theta.$$

Тоді співвідношення (12) перетвориться на

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = -(\varepsilon - 1) \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \sin \theta. \quad (13)$$

Таким чином,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \pi R^2 \cdot E_0 \cos \theta,$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = -(\varepsilon - 1) \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \sin \theta.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул в граничних випадках.

Розглянемо ситуацію, коли замість діелектрика буде вакуум. Тоді потік вектора  $\vec{E}$  (за умовою задачі сторонні заряди відсутні) й циркуляція вектора  $\vec{D}$  будуть дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає і з одержаних формул. Якщо  $\varepsilon \rightarrow 1$ , то

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \pi R^2 \cdot E_0 \cos \theta \sim (\varepsilon - 1) \rightarrow 0,$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = -(\varepsilon - 1) \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \sin \theta \sim (\varepsilon - 1) \rightarrow 0.$$

Це підтверджує, що розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:** а)  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\varepsilon - 1) \pi R^2 \cdot E_0 \cos \theta / \varepsilon,$

$$\text{б) } \oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = -(\varepsilon - 1) \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot \sin \theta.$$

### Приклад 2.5

Нескінченно велика пластина з однорідного діелектрика з проникністю  $\varepsilon$  заряджена рівномірно стороннім зарядом з об'ємною густиною  $\rho$ . Товщина пластинки  $2d$ . Знайти: а) модуль напруженості й потенціал електричного поля як функцію відстані  $l$  від середини пластини (потенціал у середині пластини взяти таким, що дорівнює нулю); розмістити вісь  $X$  перпендикулярно до пластини і зобразити наближені графіки залежностей проєкції  $E_x(x)$  й потенціалу  $\varphi(x)$ ; б) поверхневу та об'ємну густину зв'язаного заряду.

#### Розв'язання

$E_x(x) - ?$ $\varphi(x) - ?$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\varepsilon, \rho, 2d,$ $\rho', \sigma'$	Для визначення напруженості електричного поля $\vec{E}$ , створеного сторонніми й зв'язаними зарядами діелектрика, виконаємо таке. По-перше, за допомогою теореми Гауса для вакууму визначимо напруженість електричного поля $\vec{E}_0$ , створеного сторонніми зарядами за умови відсутності діелектрика. По-друге, використовуючи зв'язок між напруженістю $\vec{E}$ й $\vec{E}_0$ $\vec{E} = \vec{E}_0 / \varepsilon$ (формула (2 д)), знайдемо шукану напруженість електричного поля $\vec{E}$ . Щоб знайти потенціал, застосуємо відоме співвідношення $\Delta\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Об'ємну густину зв'язаних зарядів визначимо за допомогою співвідношень $\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$ (формула (2 б)) і $\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ (формула (2 г)). Поверхневу
---	--

густину зв'язаних зарядів визначимо з граничних умов для вектора  $\vec{P}$  (формула (2 г)).

Розглянемо завдання (а) задачі. Спочатку визначимо напруженість електричного поля  $\vec{E}_0$ , створену сторонніми зарядами за умови відсутності діелектрика, за допомогою теореми Гауса для вакууму:

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Поверхню інтегрування виберемо у вигляді циліндра, верхня і нижня основи якого розміщені симетрично (паралельно) відносно площини, що проходить через середину пластини (рис. 2.5).

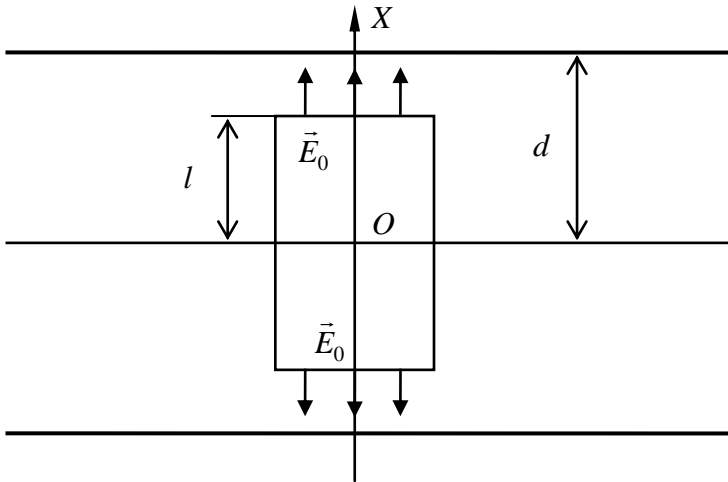


Рисунок 2.5

Виходячи із симетрії розміщення зарядів, зрозуміло, що вектор  $\vec{E}_0$  є перпендикулярним до основи і паралельним бічній поверхні циліндра. Модуль вектора  $\vec{E}_0$

в усіх точках основи циліндра має одне й те саме значення. Тому

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = 2E_0 \cdot S, \quad (2)$$

де  $S$  – площа основи.

У разі якщо висота циліндра менша від товщини пластини  $2 \cdot l < 2 \cdot d$  (рис. 2.5), заряд, обмежений поверхнею циліндра, буде дорівнювати

$$q = \rho \cdot S \cdot 2l. \quad (3)$$

У разі якщо  $l \geq d$ , заряд  $q$ , обмежений поверхнею циліндра, буде дорівнювати заряду, що знаходиться у відсіченій циліндром частині пластини:

$$q = \rho \cdot S \cdot 2d. \quad (4)$$

Підставляємо (4), (3), (2) в (1) і одержуємо

$$E_0 = \rho l / \varepsilon_0, \quad l < d,$$

$$E_0 = \rho d / \varepsilon_0, \quad l \geq d. \quad (5)$$

Відомо, що електричне поле в однорідному ізотропному діелектрику  $\vec{E}$ , що заповнює весь простір між екіпотенціальними поверхнями, зв'язане з електричним полем у вакуумі  $\vec{E}_0$  співвідношенням (формула (2 д)).

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Тоді, використовуючи (5), одержуємо

$$E = \rho l / (\varepsilon \varepsilon_0), \quad l < d,$$

$$E = \rho d / \varepsilon_0, \quad l \geq d. \quad (7)$$

Тут ураховано, що за межами пластини діелектрична проникність дорівнює одиниці.

Для визначення потенціалу використовуємо співвідношення

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^l E \cdot dl. \quad (8)$$

Візьмемо до уваги, що за умовою задачі потенціал у центрі пластини дорівнює нулю:  $\varphi_1 = 0$ . Підставляємо в рівняння (8) співвідношення (7) і одержуємо:

$$\varphi = \varphi_2 = -\int_0^l \frac{l' \rho}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot dl' = -\frac{l^2 \rho}{2\varepsilon \varepsilon_0}, \text{ якщо } l \leq d,$$

$$\varphi = \varphi_2 = -\left[ \int_0^d \frac{l' \rho}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot dl' + \int_d^l \frac{\rho \cdot d}{\varepsilon_0} \cdot dl' \right] = -\left( \frac{d}{2\varepsilon} + \frac{l-d}{1} \right) \cdot \frac{\rho \cdot d}{\varepsilon_0},$$

якщо  $l \geq d$ . (9)

Побудуємо графіки залежностей (7) та (9) (рис. 2.6), замінивши у цих виразах  $l$  на  $x$ . Також урахуємо, що, коли  $x < 0$ , напрямок вектора напруженості електричного поля є протилежним до напрямку осі  $X$  (рис. 2.5).

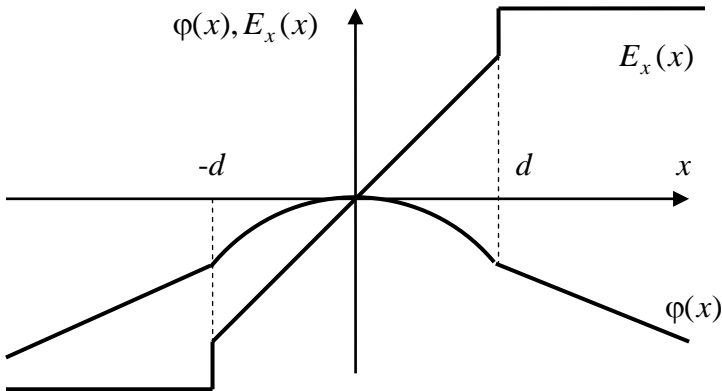


Рисунок 2.6

Розглянемо завдання (б) задачі. Для знаходження об'ємної густини зв'язаного заряду  $\rho'$  виділимо малий об'єм  $\Delta V = S\Delta l$  (рис. 2.7), знайдемо в ньому зв'язаний заряд  $q'$ , визначимо шукану густину як

$$\rho' = q' / \Delta V = q' / (S\Delta l). \quad (10)$$

Зв'язаний заряд  $q'$  в об'ємі  $\Delta V$  (рис. 2.7) обчислимо за допомогою співвідношення

$$\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'. \quad (11)$$

Вираз для вектора поляризації, якщо  $l < d$ , можна легко визначити:

$$|\vec{P}| = |\chi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}| = (\epsilon - 1) \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\rho \cdot l}{\epsilon_0 \cdot \epsilon} = (\epsilon - 1) \frac{\rho \cdot l}{\epsilon}. \quad (12)$$

Тут використали відому формулу (2 г), а також співвідношення для напруженості електричного поля (7), одержане в цій задачі.

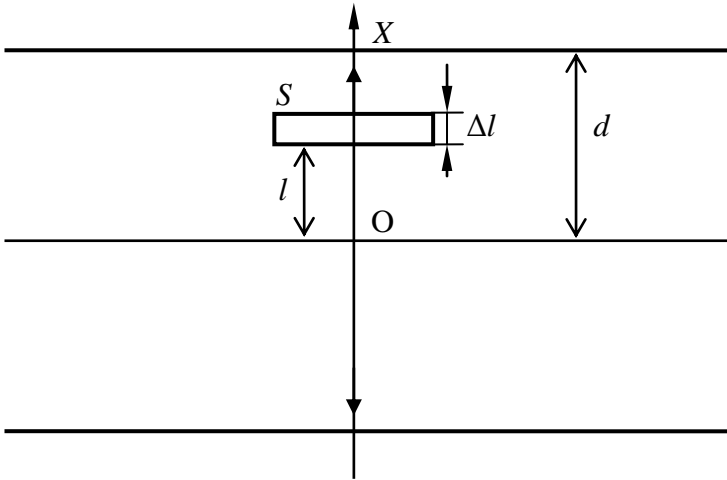


Рисунок 2.7



Знайдемо потік вектора поляризації  $\oint \vec{P} dS$  через поверхню об'єму  $\Delta V$ . Зрозуміло, що вектор  $\vec{P}$  є паралельним вектору  $\vec{E}$ , а отже, й осі  $OX$ . Тому потік вектора  $\vec{P}$  через бічну поверхню об'єму  $\Delta V$  дорівнює нулю. Тоді, використовуючи вираз (12), знаходимо

$$\begin{aligned} \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} &= P \Big|_{l+\Delta l} \cdot S - P \Big|_l \cdot S = \\ &= (\varepsilon - 1) \cdot \rho \cdot \frac{l + \Delta l}{\varepsilon} \cdot S - (\varepsilon - 1) \cdot \rho \cdot \frac{l}{\varepsilon} \cdot S = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot \rho}{\varepsilon} \Delta l \cdot S. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставляємо (13) в (11) і одержуємо

$$\frac{(\varepsilon - 1) \cdot \rho}{\varepsilon} \Delta l \cdot S = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \rho \cdot \Delta V = -q'$$

або

$$\rho' = \frac{q'}{\Delta V} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \rho, \quad (14)$$

де  $\rho'$  – шукана об'ємна густина зв'язаних зарядів.

Поверхневу густину зв'язаних зарядів  $\sigma'$  визначимо використовуючи граничну умову

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

де  $P_{2n} = 0$  – вектор поляризації у вакуумі;

$P_{1n} = P_{1n}(d) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \rho \cdot d$  – вектор поляризації біля поверхні діелектрика (використали формулу (12),  $l = d$ ).

Тоді

$$\sigma' = P_{1n} = (\varepsilon - 1) \rho \cdot d / \varepsilon. \quad (15)$$

Таким чином, одержали шукані величини:

$$E = \rho l / (\varepsilon \varepsilon_0), \quad l < d; \quad E = \rho d / \varepsilon_0, \quad l \geq d;$$

$$\varphi = -\frac{l^2 \rho}{2\epsilon_0}, \text{ якщо } l \leq d; \quad \varphi = -\left(\frac{d}{2\epsilon} + \frac{l-d}{1}\right) \cdot \frac{d\rho}{\epsilon_0}, \text{ якщо } l \geq d;$$

$$\rho' = -(\epsilon - 1)\rho / \epsilon; \quad \sigma' = P_{1n} = (\epsilon - 1)\rho \cdot d / \epsilon.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул (7), (9), (14), (15) в граничних випадках.

Коли об'ємна густина сторонніх зарядів  $\rho$  буде дорівнювати нулю, то електричне поле буде відсутнє, а отже, й сторонні заряди також будуть відсутніми. Тобто  $E = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\rho' = 0$ ,  $\sigma' = 0$ . Такий самий результат впливає з одержаних формул. Якщо  $\rho \rightarrow 0$ , то  $E \sim \rho \rightarrow 0$ ,  $\varphi \sim \rho \rightarrow 0$ ,  $\rho' \sim \rho \rightarrow 0$ ,  $\sigma' \sim \rho \rightarrow 0$ .

Отже, одержані розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

### **Відповідь:**

а)  $E = \rho l / (\epsilon \epsilon_0)$ ,  $l < d$ ,  $E = \rho d / \epsilon_0$ ,  $l \geq d$ ;

$$\varphi = -\frac{l^2 \rho}{2\epsilon \epsilon_0}, \text{ якщо } l \leq d; \quad \varphi = -\left(\frac{d}{2\epsilon} + \frac{l-d}{1}\right) \cdot \frac{\rho \cdot d}{\epsilon_0}, \text{ якщо } l \geq d.$$

Графіки  $E(x)$  та  $\varphi(x)$  зображені на рис. 2.6;

б)  $\rho' = -(\epsilon - 1)\rho / \epsilon$ ,  $\sigma' = P_{1n} = (\epsilon - 1)\rho \cdot d / \epsilon$ .

## **2.2 Задачі для самостійного розв'язування**

**2.1** На відстані  $a = 5$  см від нескінченної провідної площини знаходиться точковий заряд  $q = 1$  нКл. Визначити силу  $F$ , що діє на цей заряд із боку індукованого ним заряду на провідній площині.

**2.2** В однорідне електричне поле напруженістю  $E_0 = 2$  кВ/м внесено тонку металеву пластину. Площина

пластини перпендикулярна до напрямку електричного поля. Чому дорівнює поверхнева густина заряду на пластині?

**2.3** Ебонітова суцільна куля радіусом  $R = 5$  см має рівномірно розподілений заряд, об'ємна густина якого  $\rho = 10$  нКл/м<sup>3</sup>. Визначити напруженість  $E$  й електричне зміщення  $D$  електричного поля в точках: 1) на відстані  $r_1 = 3$  см від центра сфери; 2) на поверхні сфери; 3) на відстані  $r_2 = 10$  см від центра сфери. Побудувати графіки залежності  $E(r)$  й  $D(r)$ . Діелектрична провідність ебоніту  $\varepsilon = 2,7$ .

**2.4** Скляна куля з порожниною несе рівномірно розподілений по об'єму заряд. Його об'ємна густина  $\rho = 100$  нКл/м<sup>3</sup>. Внутрішній радіус  $R_1$  кулі дорівнює 5 см, зовнішній –  $R_2 = 10$  см. Обчислити напруженість  $E$  й електричне зміщення  $D$  електричного поля в точках, що віддалені від центра сфери на відстань: 1)  $r_1 = 3$  см; 2)  $r_2 = 6$  см; 3)  $r_3 = 12$  см. Побудувати графіки залежності  $E(r)$  й  $D(r)$ . Діелектрична провідність скла  $\varepsilon = 6,0$ .

**2.5** Довгий парафіновий циліндр радіусом  $R = 2$  см має рівномірно розподілений заряд, об'ємна густина якого  $\rho = 10$  нКл/м<sup>3</sup>. Визначити напруженість  $E$  й електричне зміщення  $D$  електричного поля в точках, що знаходяться від осі циліндра на відстані: 1)  $r_1 = 1$  см; 2)  $r_2 = 3$  см. Обидві точки знаходяться на однакових відстанях від кінців циліндра. Побудувати графіки залежностей  $E(r)$  й  $D(r)$ . Діелектрична провідність парафіну  $\varepsilon = 2,0$ .

**2.6** Два точкових заряди  $q = 2$  нКл розміщені на відстанях  $h = 5$  см від металевої площини і на відстані  $2h = 10$  см один від одного. Знайти сили, що діють на кожний заряд.

**2.7** Довга нитка, рівномірно заряджена з лінійною густиною заряду  $\lambda = 1 \text{ мкКл/м}$ , підвішена паралельно нескінченній провідній площині на відстані  $h = 10 \text{ см}$  від неї. Знайти напруженість і потенціал електричного поля на поверхні провідника у точках, що лежать на прямій, яка перпендикулярна до поверхні та проходить через нитку.

**2.8** Точковий сторонній заряд  $q$  розміщено в центрі діелектричної кулі радіусом  $a$  з проникністю  $\epsilon_1$ . Навколо кулі простір заповнено діелектриком із проникністю  $\epsilon_2$ . Знайти поверхневу густина зв'язаних зарядів на межі поділу цих діелектриків.

**2.9** Показати, що на межі однорідного діелектрика з провідником поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює  $\sigma' = -\sigma(\epsilon - 1)/\epsilon$ , де  $\epsilon$  – діелектрична проникність;  $\sigma$  – поверхнева густина зарядів на провіднику.

**2.10** Однорідний діелектрик має вигляд сферичної кулі з радіусами  $a$  й  $b$ , причому  $a < b$ . Зобразити наближені графіки модуля напруженості електричного поля  $E$  та потенціалу  $\phi$  як функції відстані  $r$  від центра системи, якщо діелектрик має додатний сторонній заряд, який розподілено рівномірно: а) по внутрішній поверхні сферичної кулі; б) по об'єму кулі.

**2.11** Круглий діелектричний диск радіусом  $R$  і товщиною  $d$  поляризований статично так, що вектор поляризації  $\vec{P}$  усюди є однаковим і лежить у площині диска. Знайти напруженість  $\vec{E}$  електричного поля в центрі диска, якщо  $d \ll R$ .

**2.12** За деяких умов вектор поляризації нескінченної незарядженої пластини з діелектрика має вигляд  $\vec{P} = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$ , де  $\vec{P}_0$  – вектор, перпендикулярний до пластини;  $x$  – відстань від середини пластини;  $d$  – її

напівтовщина. Знайти напруженість  $\vec{E}$  електричного поля всередині пластини й різницю потенціалів між її поверхнями.

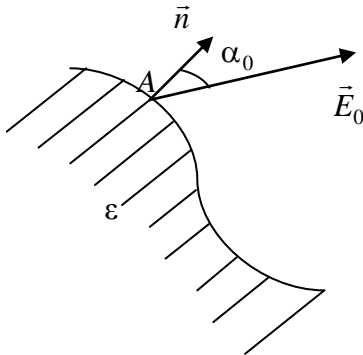


Рисунок 2.8

**2.13** Поблизу точки  $A$  (рис. 2.8) на межі поділу скло – вакуум напруженість електричного поля у вакуумі  $E_0 = 10,0 \text{ В/м}$ , кут між вектором  $\vec{E}_0$  і нормаллю  $\vec{n}$  на межі поділу  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Знайти напруженість  $E$  поля у склі поблизу точки  $A$ , кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{E}$  й  $\vec{n}$  у

склі, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів біля точки  $A$ .

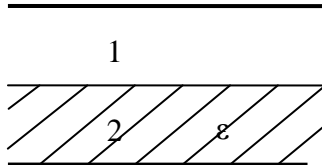


Рисунок 2.9

**2.14** Спочатку простір між обкладками плоского конденсатора було заповнено повітрям і напруженість поля в проміжку дорівнювала  $E_0$ .

Потім половину проміжку, як показано на рис. 2.9, заповнили однорідним ізотропним діелектриком із проникністю  $\epsilon$ . Знайти модулі векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  в обох частинах проміжку (1 і 2), якщо під час уведення діелектрика: а) напруга між обкладками не змінювалася; б) заряди на обкладках залишалися сталими.

**2.15** Дві однакових невеликих однойменно заряджених кульки підвішені на ізолювальних нитках однакової довжини до однієї точки. Під час заповнення

навколишнього середовища гасом кут між нитками не змінився. Знайти густину матеріалу кульок.

**2.16** У середині кулі з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\varepsilon = 5,00$  створене однорідне електричне поле напруженістю  $E = 100$  В/м. Радіус кулі  $R = 3,0$  см. Визначити максимальну поверхневу густину зв'язаних зарядів і повний зв'язаний заряд одного знака.

**2.17** Півпростір, заповнений однорідним ізотропним діелектриком із проникністю  $\varepsilon$ , обмежено провідною площиною. На відстані  $l$  від цієї площини в діелектрику знаходиться невелика металева кулька, що має заряд  $q$ . Знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі з провідною площиною як функцію відстані  $r$  від кульки.

## 3 ЕЛЕКТРОЄМНІСТЬ. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

### *Основні формули*

*Ємність плоского конденсатора*

$$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S / d . \quad (3 \text{ а})$$

*Енергія взаємодії системи точкових зарядів*

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot \varphi_i . \quad (3 \text{ б})$$

*Повна енергія системи з неперервним розподілом електричного заряду*

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \cdot \rho \cdot dV . \quad (3 \text{ в})$$

*Енергія зарядженого конденсатора*

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} . \quad (3 \text{ г})$$

*Об'ємна густина енергії електричного поля*

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2}{2} . \quad (3 \text{ г})$$

### **3.1 Приклади розв'язування задач**

#### ***Приклад 3.1***

Два довгих прямих провідники з однаковим радіусом перерізу  $a$  розміщені в повітрі паралельно один одному. Відстань між їх осями дорівнює  $b$ . Знайти взаємну ємність провідників на одиницю довжини  $C_l$  за умови  $b \gg a$ . Обчислити  $C_l$ , якщо  $a = 1,00$  мм і  $b = 50$  мм.

### Розв'язання

$$\begin{array}{|l} C_l - ? \\ \hline a = 1,00 \text{ мм,} \\ b = 50 \text{ мм} \end{array}$$

У задачі необхідно визначити взаємну ємність двох провідників на одиницю довжини  $C_l$ , яка за визначенням дорівнює

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{q}{l \cdot \Delta\phi}, \quad (1)$$

де  $q$  – заряд одного з провідників, що знаходиться на довжині провідника  $l$ ;  $\Delta\phi$  – різниця потенціалів між провідниками;  $C$  – ємність провідників довжиною  $l$ . Таким чином, задача зводиться до знаходження різниці потенціалів  $\Delta\phi$  для електростатичного поля провідників, на яких розміщені заряди  $q$  й  $-q$ . Відомо, що ємність провідників не залежить від заряду провідника  $q$ . Тому після підстановки різниці потенціалів  $\Delta\phi$  як функції заряду  $q$  у співвідношення (1) варто очікувати взаємного скорочення невідомої величини  $q$ . Для визначення різниці потенціалів як функції модуля заряду  $q$  зручно використати зв'язок між потенціалом та напруженістю електричного поля  $\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , а напруженість  $\vec{E}$

визначати через заряди за допомогою теореми Гауса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Спочатку визначимо напруженість електричного поля, створену одним довгим прямим провідником із лінійною густиною заряду  $\lambda$ , за допомогою теореми Гауса. Для цього виберемо поверхню інтегрування у вигляді циліндра радіусом  $r$ , висотою  $l$  (рис. 3.1). Через те що розподіл електричного заряду має циліндричну симетрію, вектор



напруженості електричного поля  $\vec{E}$  спрямований уздовж радіальних ліній, а модуль його залежить лише від відстані до осі провідника  $r$ . Тому потік вектора  $\vec{E}$  через дві основи дорівнює нулю (вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до поверхні основи), а через бічну поверхню –  $E \cdot S = E(r) \cdot 2\pi r \cdot l$ , де  $S$  – площа бічної поверхні циліндра. Таким чином,  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot l$ . Заряд усередині поверхні інтегрування дорівнює  $q = \lambda \cdot l$ . Тоді відповідно до теореми Гауса

$$E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0},$$

або

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}. \quad (2)$$

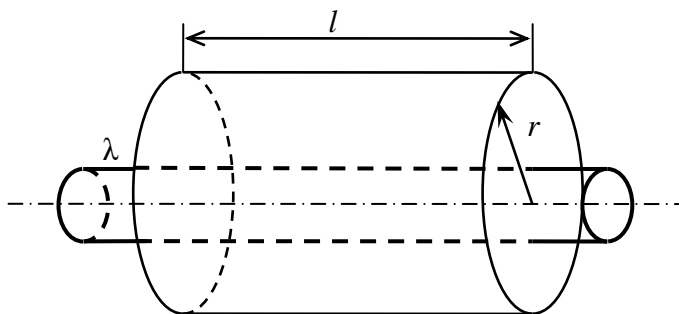


Рисунок 3.1

Тепер визначимо напруженість електричного поля між двома довгими різнойменно зарядженими прямими проводами з лінійною густиною заряду  $\lambda$  (рис. 3.2), використовуючи одержану формулу для напруженості електричного поля (2), а також принцип суперпозиції.

Загальна напруженість електричного поля дорівнює векторній сумі напруженостей, що створюються зарядами обох провідників. Ураховуючи напрямки відповідних векторів, одержуємо напруженість загального електричного поля

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} - \frac{(-\lambda)}{2\pi \cdot \epsilon_0 (b-x)} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right). \quad (3)$$

Використовуючи співвідношення між різницею потенціалів і напруженістю електричного поля

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}, \text{ знаходимо, що}$$

$$\Delta\varphi = -\int_{b-a}^a E(x) dx = \int_a^{b-a} \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) \cdot dx = \frac{\lambda}{\pi \cdot \epsilon_0} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right).$$

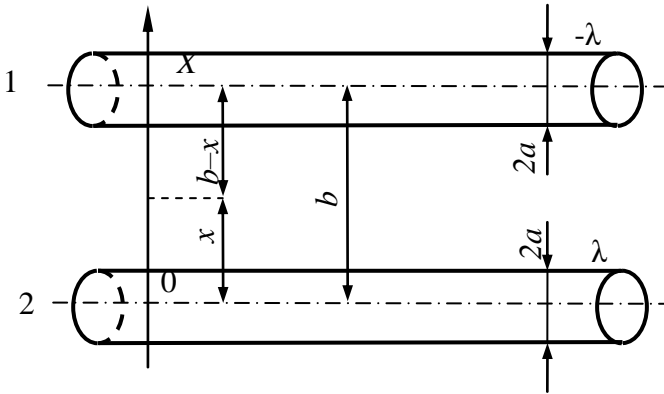


Рисунок 3.2

Через те що  $a \ll b$  і  $\ln((b-a)/a) \approx \ln(b/a)$ , одержану формулу можна спростити:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{\pi \cdot \epsilon_0} \ln(b/a). \quad (4)$$

Розглянемо провідники довжиною  $l$ . Заряд, що знаходиться на провіднику 2, дорівнює

$$q = l \cdot \lambda. \quad (5)$$

Підставляємо формули (4) та (5) в (1) і одержуємо, що шукана ємність на одиницю довжини дорівнює

$$C_l \approx \frac{l \cdot \lambda}{l \frac{\lambda}{\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{b}{a}} = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\begin{aligned} C_l &= \pi \cdot \varepsilon_0 / \ln \frac{b}{a} = \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} / \ln(0,05/0,001) \text{ Ф/м} = \\ &= 7,1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \end{aligned}$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) в граничних випадках.

Якщо радіус провідника  $a$  буде прямувати до нуля, то напруженість електричного поля на поверхні нитки буде прямувати до нескінченності (див. формулу (2), якщо  $r = a \rightarrow 0$ , то  $E \rightarrow \infty$ ), отже, і різниця потенціалів за умови сталої лінійної густини заряду буде прямувати до нескінченності. Тому ємність провідників буде прямувати до нуля:  $C_l = \frac{C}{l} = \frac{\lambda \cdot l}{l \cdot \Delta\varphi} \rightarrow \frac{\lambda}{\infty} = 0$ .

Такий самий результат впливає і з одержаної формули: якщо  $a \rightarrow 0$ , то

$$C_l = \pi \cdot \varepsilon_0 / \ln \frac{b}{a} \sim \frac{(-1)}{\ln a} \rightarrow 0.$$

Отже, одержана формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $C_l = \pi \cdot \varepsilon_0 / \ln \frac{b}{a} = 7,1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$

**Приклад 3.2**

Визначити взаємну ємність системи, що складається з металевої кульки радіусом  $a$  і нескінченної провідної пластини, розміщеної від центра кульки на відстані  $l$ , якщо  $l \gg a$ .

**Розв'язання**

$\frac{C - ?}{a, l}$  | У задачі необхідно визначити взаємну ємність двох провідників  $C$ , яка за означенням дорівнює

$$C = \frac{q}{\Delta\phi}, \tag{1}$$

де  $q$  – заряд одного з провідників (кульки);  $\Delta\phi$  – різниця потенціалів між кулькою та провідною пластинною. Таким чином, задача зводиться до знаходження різниці потенціалів  $\Delta\phi$  для електростатичного поля кульки і площини, на яких розміщені заряди  $q$  й  $-q$ . Відомо, що ємність провідників не залежить від заряду провідника  $q$ . Тому після підстановки різниці потенціалів  $\Delta\phi$  як функції заряду  $q$  у співвідношення (1) варто очікувати взаємного скорочення невідомої величини  $q$ . Для визначення різниці потенціалів між металевою кулькою й провідною пластинною скористаємося методом дзеркальних зображень (більш детальна інформація про цей метод викладена у прикладі 2.1, розділ 2). Метод дзеркальних зображень базується на такому очевидному положенні: якщо в електричному полі замінити будь-яку еквіпотенціальну

поверхню провідником із такою самою формою і створити на ньому потенціал, що дорівнює потенціалу еквіпотенціальної поверхні, то електричне поле не зміниться.

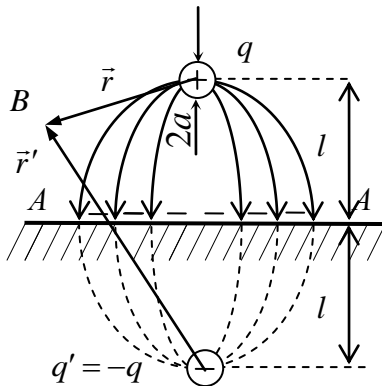


Рисунок 3.3

Згідно з методом дзеркальних зображень електричним зображенням заряду  $q$  в провідній пластині  $AA$  буде заряд протилежного знака  $q' = -q$ , який розміщено протилежно від провідної пластини  $AA$  на такій самій відстані від неї, як і заряд  $q$  (рис. 3.3).

Відповідно до методу дзеркальних зображень електричне поле, яке створюється зарядом  $q$  та зарядженою пластинною у верхній частині півпростору, еквівалентне електричному полю, що створює заряд  $q$  та його зображення  $q' = -q$ . За умовою  $a \ll l$ , тому заряди  $q$  й  $q' = -q$  можна вважати точковими. Таким чином, шуканий потенціал дорівнює потенціалу електричного поля точкових зарядів  $q$  та  $q'$  і в довільній точці  $B$  півпростору (рис. 3.3) визначається за законом Кулона й принципом суперпозиції:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right). \quad (2)$$

Відстані  $r$  та  $r'$  позначені на рис. 3.3. Використовуючи формулу (2), знайдемо потенціал провідної пластини  $\varphi_1$  та поверхні кульки  $\varphi_2$ . Зрозуміло, що в площині  $AA$  потенціал дорівнює нулю ( $\varphi_1 = 0$ ), тому що тут  $r = r'$

(рис. 3.3 та формулу (2)). За допомогою (2) визначимо також потенціал поверхні кульки  $\varphi_2$  із зарядом  $q$ . Враховуємо, що  $r = a$ ,  $r' = 2l - a \approx 2l$ , оскільки  $l \gg a$ . Тоді

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2l} \right) \approx \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a}. \quad (3)$$

Далі, використовуючи (1), знаходимо шукану ємність системи провідників:

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} \approx q / \left( \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a} \right) = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a. \quad (4)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Якщо радіус кульки  $a$  спрямуємо до нуля, то потенціал кулі, пропорційний  $1/a$  за умови сталого заряду  $q$ , буде прямувати до нескінченності. Тому й різниця потенціалів буде прямувати до нескінченності. Тоді взаємна ємність системи буде дорівнювати  $C = q/\infty = 0$ . Такий самий результат впливає і з одержаної формули (4). Якщо  $a \rightarrow 0$ , то  $C = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a \sim a \rightarrow 0$ .

Отже, формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $C \approx 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a$ .

### *Приклад 3.3*

Знайти різницю потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  між точками  $A$  і  $B$  на схемі (рис. 3.4)).

#### *Розв'язання*

$\varphi_A - \varphi_B - ?$	У задачі необхідно визначити різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками схеми $A$ й $B$ через відомі ємності $C_1, C_2, C_3$ та
$C_1, C_2, C_3$	
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	

значення ЕРС джерел струму  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ . Зрозуміло, що постійний електричний струм через ємність не проходить. Тому різниця потенціалів на полюсах джерел струму дорівнює відповідним ЕРС. Для розв'язування задачі знайдемо потенціал  $\varphi_A$  як функцію потенціалу  $\varphi_B$ , а потім отримаємо їх різницю. Невідома величина  $\varphi_B$  повинна обов'язково скоротитись, оскільки потенціал визначається з точністю до довільної сталої, а різниця потенціалів не залежить від довільних констант.

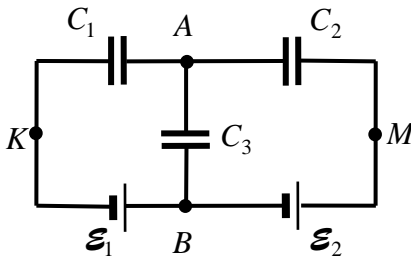


Рисунок 3.4

Для визначення потенціалу  $\varphi_A$  через  $\varphi_B$  використаємо означення ємності  $C = q / \Delta\varphi$ , а також той факт, що сумарний заряд у точках схеми, обмеженої лише конденсаторами, дорівнює нулю (закон збереження заряду).

Розглянемо точку  $A$  (рис. 3.4). Сумарний заряд у цій точці, що обмежена лише конденсаторами, дорівнює нулю через закон збереження заряду. Тому можемо записати

$$q_{1A} + q_{2A} + q_{3A} = 0, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} q_{1A} &= (\varphi_A - \varphi_K) \cdot C_1, & q_{2A} &= (\varphi_A - \varphi_M) \cdot C_2, \\ q_{3A} &= (\varphi_A - \varphi_B) \cdot C_3 \end{aligned} \quad (2)$$

є зарядами на відповідних пластинах конденсаторів:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . З урахуванням (2) вираз (1) запишемо у вигляді

$$(\varphi_A - \varphi_K) \cdot C_1 + (\varphi_A - \varphi_M) \cdot C_2 + (\varphi_A - \varphi_B) \cdot C_3 = 0. \quad (3)$$

Візьмемо до уваги, що  $\varphi_B - \varphi_K = \mathcal{E}_1$ ,  $\varphi_M - \varphi_B = \mathcal{E}_2$  (рис. 3.4). Тоді з (3) одержуємо

$$(\varphi_A - (\varphi_B - \mathcal{E}_1))C_1 + (\varphi_A - (\mathcal{E}_2 + \varphi_B))C_2 + (\varphi_A - \varphi_B)C_3 = 0. \quad (4)$$

А з (4) отримаємо

$$\varphi_A = \varphi_B + \frac{C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Звідси знаходимо шукану різницю потенціалів

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}. \quad (5)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Зрозуміло, якщо ЕРС джерел струму будуть дорівнювати нулю, то різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  також повинна дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з одержаної формули. Якщо  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ , то

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3} \sim C_2 \mathcal{E}_2 + C_3 \mathcal{E}_1 \rightarrow 0.$$

2 Коли потенціали на обкладках конденсатора  $C_3$  будуть однаковими, то це означає, що  $\varphi_A - \varphi_B$  дорівнює нулю. З іншого боку, це означає, що ємність  $C_3 = q / \Delta\varphi \rightarrow q / 0 = \infty$  прямує до нескінченності. Такий самий результат впливає з одержаної формули. Якщо

$$C_3 \rightarrow \infty, \text{ то } \varphi_A - \varphi_B = \frac{C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3} \sim \frac{1}{C_3} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.



**Відповідь:**  $\Phi_A - \Phi_B = \frac{C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}$ .

### **Приклад 3.4**

Плоский конденсатор із площею кожної пластини  $S = 200 \text{ см}^2$  і відстанню між ними  $d = 5,0 \text{ мм}$  помістили в зовнішнє однорідне електричне поле з напруженістю  $E = 1,3 \text{ кВ/см}$ , перпендикулярною до пластин. Потім пластини замкнули провідником, після чого провідник прийняли і конденсатор перевернули на  $180^\circ$  навколо осі, перпендикулярної до напрямку поля. Знайти виконану роботу проти електричних сил.

#### **Розв'язання**

$A - ?$ $S = 200 \text{ см}^2,$ $d = 5,0 \text{ мм},$ $E = 1,3 \text{ кВ/см}$	З'ясуємо сутність процесів, про які йде мова в задачі. Після того як з'єднали провідником незаряджені пластини конденсатора, у провіднику під дією зовнішнього електричного поля проходить електричний струм. У результаті перенесення цим струмом заряду пластини стають різнойменно зарядженими (сумарний заряд дорівнює нулю через закон збереження електричного заряду). Утворений заряд на пластинах конденсатора створює, у свою чергу, додаткове електричне поле $E_d$ . Причому напрямок напруженості додаткового електричного поля такий, що результуюча напруженість електричного поля $\vec{E}_p = \vec{E}_d + \vec{E}$ зменшується (якщо було б навпаки, то на базі такого процесу можна було б створити вічний двигун першого роду). Тому й сила електричного струму в провіднику зменшується, а потім і зовсім припиняється, коли різниця потенціалів між пластинами стає такою, що дорівнює нулю. Таким чином, електричний струм припиняється, коли між пластинами
--	---

напруженість результуючого електричного поля стає такою, що дорівнює нулю, і сила з боку електричного поля на заряди перестає діяти. Далі приймаємо провідник (у цей момент часу пластини конденсатора вже є зарядженими). Потім повертаємо заряджений конденсатор на  $180^\circ$  у зовнішньому електричному полі. Зрозуміло, що для руху електричного заряду в зовнішньому електричному полі необхідно виконати роботу проти електричних сил. Цю роботу й необхідно знайти в задачі.

Для розв'язування задачі спочатку визначимо напруженість додаткового електричного поля  $E_d$ , що виникає в результаті переходу електричного заряду з однієї пластини конденсатора на іншу під дією зовнішнього електричного поля. Потім визначимо енергію системи до повороту  $W_1$  і після повороту –  $W_2$ . Маючи на увазі, що електростатичні сили є консервативними, знайдемо роботу проти електричних сил  $A$  як різницю між енергією системи в кінцевому стані  $W_2$  та енергією системи в початковому стані  $W_1$ :

$$A = W_2 - W_1. \quad (1)$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Зрозуміло, що електричний струм у провіднику припиняється (зарядження конденсатора), коли сила з боку результуючого електричного поля на заряди перестає діяти. Тобто між пластинами конденсатора напруженість результуючого електричного поля стає такою, що дорівнює нулю:

$$\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_d = 0, \quad (2)$$

або

$$\vec{E}_d = -\vec{E}. \quad (3)$$

Таким чином, напруженість додаткового електричного поля та напруженість зовнішнього електричного поля є однаковими за модулем та протилежними за напрямком.

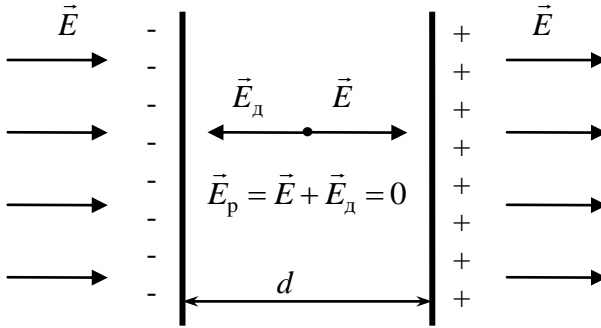


Рисунок 3.5

Знайдемо енергію результуючого електричного поля всередині конденсатора  $W_1$  до повороту. Для цього визначимо об'ємну густину електричного поля між пластинами конденсатора до повороту, використовуючи формулу (3 г):

$$w = \frac{\epsilon_0 \cdot E_p^2}{2} = 0.$$

Також обчислимо загальну енергію електричного поля всередині конденсатора  $W_1$  до повороту як добуток об'ємної густини електричного поля на об'єм конденсатора:

$$W_1 = w \cdot (S \cdot d) = \frac{\epsilon_0 \cdot E_p^2}{2} \cdot (S \cdot d) = 0. \quad (4)$$

Після повороту конденсатора зовнішнє електричне поле не змінюється, а додаткове поле змінює свій напрямок на протилежний. Тому після повороту напруженість

результуючого електричного поля всередині конденсатора має таке значення:

$$\vec{E}_{p2} = \vec{E} - \vec{E}_d = 2\vec{E}. \quad (5)$$

Тут ми використали співвідношення (3). Енергію електричного поля всередині конденсатора  $W_2$  після повороту знаходимо, як і в попередньому випадку (див. співвідношення (4)):

$$W_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot E_{p2}^2}{2} \cdot (S \cdot d) = \frac{\varepsilon_0 \cdot (2E)^2}{2} \cdot (S \cdot d) = 2\varepsilon_0 S \cdot d \cdot E^2. \quad (6)$$

Тут ми застосували формулу (5). Нарешті, використовуючи (1), (4) та (5), знаходимо шукану роботу

$$A = W_2 - W_1 = 2\varepsilon_0 S \cdot d \cdot E^2. \quad (7)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення

$$\begin{aligned} A &= 2\varepsilon_0 S d E^2 = 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} (1,3 \cdot 10^5)^2 \text{ Дж} = \\ &= 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Якщо б зовнішнє електричне поле було відсутнім ( $E = 0$ ), то зрозуміло, що робота зовнішніх сил для повороту конденсатора дорівнювала б нулю (зовнішнє електричне поле не чинило б опору під час повороту конденсатора). Такий самий результат впливає і з одержаної формули: якщо  $E \rightarrow 0$ , то

$$A = 2\varepsilon_0 E^2 S d \sim E^2 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $A = 2\varepsilon_0 S \cdot d \cdot E^2 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$

**Приклад 3.5**

Заряд  $q$  розподілено рівномірно в об'ємі кулі радіусом  $R$ . Беручи діелектричну проникність кулі такою, що дорівнює одиниці, знайти: а) власну електростатичну енергію кулі; б) відношення енергії  $W_1$ , що знаходиться всередині кулі, до енергії  $W_2$ , що перебуває у навколишньому просторі.

**Розв'язання**

$W - ?$ $W_1 / W_2 - ?$ $q, R$	Для знаходження енергії електричного поля $W_1$ , що знаходиться всередині кулі, та енергії $W_2$ , локалізованої в навколишньому просторі за межами кулі, використаємо співвідношення
--------------------------------------	--

$$W_1 = \int_{V_1} w \cdot dV, \quad W_2 = \int_{V_2} w \cdot dV, \quad (1)$$

де

$$w = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 / 2 \quad (2)$$

$\varepsilon$  об'ємною густиною енергії електростатичного поля (формула (3 г));  $V_1$  – об'єм кулі;  $V_2$  – об'єм навколишнього середовища навколо кулі. Власну електростатичну енергію кулі визначимо як

$$W = W_1 + W_2. \quad (3)$$

Таким чином, задача зводиться до відшукування напруженості електростатичного поля, яку можна знайти

за допомогою теореми Гауса, виходячи з того, що розподіл заряду є сферично симетричним.

Знайдемо напруженість електричного поля всередині рівномірно зарядженої кулі з об'ємною густиною заряду

$$\rho = q/V_{\text{кулі}} = q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \quad (4)$$

за допомогою теореми Гауса (у формулі (4)  $R$  – радіус кулі). Виходячи зі сферичної симетрії розподілу електричного заряду, за поверхню інтегрування беремо сферу радіусом  $r < R$ . Із міркувань симетрії випливає, що вектор  $\vec{E}$  буде спрямованим уздовж радіуса, і модуль його буде залежати лише від  $r$ . Тоді

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2, \quad (5)$$

де  $S = 4\pi r^2$  – площа сфери радіусом  $r$ . Заряд усередині цієї сфери з урахуванням (4) дорівнює

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{R^3} r^3.$$

Тоді відповідно до теореми Гауса

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 R^3} r^3, \text{ або } E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r, \text{ якщо } r \leq R. \quad (6)$$

Аналогічно, використовуючи теорему Гауса, можемо знайти напруженість електричного поля для  $r \geq R$ :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \text{ або } E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \text{ якщо } r \geq R. \quad (7)$$

Тепер легко визначити енергію  $W_1$  та  $W_2$ , використовуючи (1)–(2) та (6)–(7):

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{V_1} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \right)^2 r^2 \sin\theta = \\
 &= \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^6} \cdot \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \int_{V_2} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta = \\
 &= \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

У співвідношеннях (8)–(9) використали співвідношення для елементарного об'єму  $dV = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr$ , а також, що діелектрична проникність  $\varepsilon = 1$  за умовою задачі.

Тепер легко можна знайти шукану власну електростатичну енергію кулі

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{20} \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}, \quad (10)$$

а також відношення енергій  $W_1$  та  $W_2$ :

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{40} \cdot \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R}} = \frac{1}{5}. \quad (11)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Якщо б заряд кулі дорівнював нулю, то зрозуміло, що його власна електростатична енергія також дорівнювала б

нулю. Такий самий результат впливає з одержаної формули. Якщо  $q \rightarrow 0$ , то  $W = \frac{3}{20} \cdot \frac{q^2}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \sim q^2 \rightarrow 0$ .

Отже, одержана формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $W = \frac{3}{20} \cdot \frac{q^2}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}, \quad \frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{5}$ .

### Приклад 3.6

Є плоский повітряний конденсатор, площа кожної обкладки якого дорівнює  $S$ . Яку роботу необхідно виконати, щоб повільно збільшити відстань між обкладками від  $x_1$  до  $x_2$ , якщо підтримувати незмінними: а) заряд конденсатора, що дорівнює  $q$ ; б) напругу на конденсаторі, яка дорівнює  $U$ ?

#### Розв'язання

$A - ?$ $S, x_1,$ $x_2, q,$ $U$	Розглянемо випадок (а): заряд конденсатора є сталою величиною $q = const$ . Візьмемо до уваги, що електростатичні сили є консервативними. Знайдемо шукану роботу проти електричних сил $A$ як різницю між енергією системи в кінцевому стані $W_2$ та енергією системи в початковому стані $W_1$ :
--	--

$$A = W_2 - W_1. \quad (1)$$

Як відомо (див. формулу (3 г)), енергія конденсатора визначається співвідношенням

$$W = \frac{q^2}{2C}, \quad (2)$$

де ємність плоского конденсатора (див. формулу (3а))



$$C = \varepsilon_0 \cdot S / x. \quad (3)$$

У формулі (3)  $x$  є відстанню між пластинами конденсатора. Підставляємо (2) з урахуванням (3) в (1) і одержуємо шукану роботу

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q^2 x_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 x_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 (x_2 - x_1)}{2\varepsilon_0 S}. \quad (4)$$

Розглянемо випадок (б): напруга на конденсаторі, що дорівнює  $U$ , є сталою величиною. У цьому разі заряд на пластинах змінюється, в такому процесі важливу роль відіграє зовнішнє джерело, завдяки якому підтримується стала напруга. Тому тут не можна роботу знаходити за допомогою формули (1), тому що ця формула не враховує роботи зовнішнього джерела для переміщення заряду з однієї пластини на іншу.

Виходячи з вищезазначеного, для знаходження роботи  $A$  зовнішньої сили  $F_x$  використаємо визначення роботи:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \quad (5)$$

Зовнішня сила  $F_x$  дорівнює за модулем та протилежна за напрямком силі, з якою одна пластина діє на іншу пластину конденсатора:

$$F_x = -q_1 \cdot E_x = -q_1 \cdot \frac{(-q_1)}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1^2}{2\varepsilon_0 S}. \quad (6)$$

У цій формулі  $q_1$  – заряд пластини конденсатора, яка рухається в полі іншої пластини, що характеризується напруженістю електричного поля  $E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{(-q_1)}{2\varepsilon_0 S}$ .

Зазначимо, що в разі, якщо напруга на конденсаторі залишається сталою величиною  $U = const$ , заряд на конденсаторі змінюється залежно від відстані між пластинами:  $q_1 = q_1(x)$ . Знайдемо цю залежність. Для цього використаємо означення для ємності конденсатора  $C = q/U$ , а також співвідношення (3):

$$C = \epsilon_0 \cdot S / x = q_1 / U.$$

Звідси

$$q_1 = \epsilon_0 \cdot S \cdot U / x. \quad (7)$$

Далі підставляємо (7) в (6), а потім – (6) в (5) і одержуємо шукану роботу:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{q_1(x)^2}{2\epsilon_0 S} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(\epsilon_0 S \cdot U)^2}{2\epsilon_0 S \cdot x^2} dx = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) = \\ &= \epsilon_0 S U^2 (x_2 - x_1) / (2x_1 x_2). \end{aligned} \quad (8)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул в граничних випадках.

Якщо у випадку (а) заряд конденсатора або ж переміщення  $x_2 - x_1$  дорівнює нулю, то з фізичних міркувань зрозуміло, що робота також буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає і з одержаної формули:

$$\text{якщо } x_2 - x_1 \rightarrow 0, \text{ то } A = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} (x_2 - x_1) \rightarrow 0;$$

$$\text{якщо } q \rightarrow 0, \text{ то } A = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} (x_2 - x_1) \sim q^2 \rightarrow 0.$$

Якщо у випадку (б) напруга конденсатора або ж переміщення пластин  $x_2 - x_1$  дорівнює нулю, то з фізичних

міркувань зрозуміло, що робота також буде дорівнювати нулю. Цей результат впливає і з одержаної формули:

$$\text{якщо } x_2 - x_1 \rightarrow 0, \text{ то } A = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot U^2}{2x_1 \cdot x_2} \cdot (x_2 - x_1) \sim (x_2 - x_1) \rightarrow 0;$$

$$\text{якщо } q \rightarrow 0, \text{ то } A = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot U^2}{2x_1 \cdot x_2} \cdot (x_2 - x_1) \sim (x_2 - x_1) \rightarrow 0.$$

Отже, одержані формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:** а)  $A = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} (x_2 - x_1)$ ; б)  $A = \frac{\varepsilon_0 S U^2 (x_2 - x_1)}{2x_1 x_2}$ .

### Приклад 3.7

$\Delta W, A - ?$ $\eta = 0,60, C = 20 \text{ нФ},$ $U = 100 \text{ В}$	Між обкладками плоского конденсатора паралельно їм розміщена металева пластинка, товщина якої становить $\eta = 0,60$ відстані між обкладками. Ємність конденсатора за умови відсутності пластинки $C = 20 \text{ нФ}$ . Конденсатор приєднаний до джерела постійної напруги $U = 100 \text{ В}$ . Пластинку повільно вийняли з конденсатора. Знайти: а) збільшення енергії конденсатора; б) механічну роботу, яку витратили на виймання пластинки.
---	---

#### Розв'язання

Для визначення збільшення енергії конденсатора використаємо формули для енергії та ємності конденсатора (див. співвідношення (3 а) та (3 г)). Механічну роботу, витрачену для того, щоб вийняти пластину, визначимо за допомогою закону збереження енергії. Тут візьмемо до уваги, що шукана механічна робота витрачається не лише на зміну енергії конденсатора, а й на переміщення частини заряду з однієї пластини конденсатора на іншу через

джерело постійної напруги проти сторонніх сил (заряд на пластинах конденсатора за цих умов зменшується).

Зазначимо, всередині металевій пластини електричне поле відсутнє (рис. 3.6, де  $x$  – відстань від обкладки конденсатора до металевій пластини;  $d'$  – товщина металевій пластини;  $d$  – відстань між обкладками конденсатора,  $d'/d = \eta$ ). Тому конденсатор із металевією пластинією, розміщеною між обкладками конденсатора, можемо замінити двома послідовно з'єднаними конденсаторами з ємностями

$$C_1 = \epsilon_0 S / x \text{ і } C_2 = \epsilon_0 S / (d - d' - x), \quad (1)$$

де  $x$  та  $d - d' - x$  – це відстані між обкладками конденсаторів  $C_1$  та  $C_2$  відповідно (рис. 3.6). Тоді ємність двох послідовно з'єднаних конденсаторів  $C_1$  і  $C_2$  з урахуванням (1) буде дорівнювати

$$C' = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'}. \quad (2)$$

Виходячи з того що ємність конденсатора без металевій пластини дорівнює  $C = \epsilon_0 S / d$ , тобто  $\epsilon_0 S = Cd$  й  $\eta = d' / d$ , то формулу (2) можна перетворити на такий вигляд:

$$C' = C \frac{d}{d - d'} = C \frac{1}{1 - d' / d} = C \frac{1}{1 - \eta}. \quad (3)$$

Тобто ємність конденсатора з металевією пластинією  $C'$  є більшою за ємність конденсатора без металевій пластинки  $C$ .

Енергія системи з ємністю  $C'$  буде дорівнювати

$$W_1 = \frac{C' U^2}{2} = C \frac{U^2}{2(1 - \eta)}. \quad (4)$$

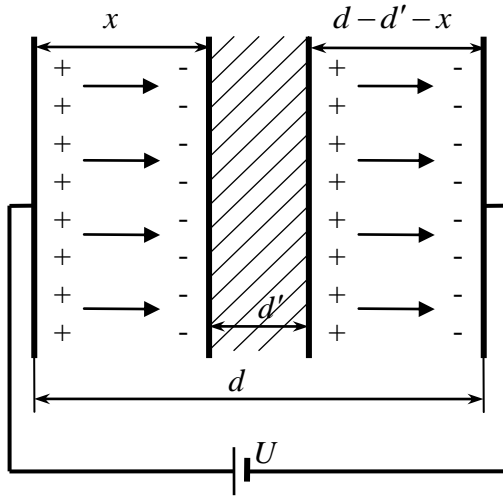


Рисунок 3.6

Енергія зарядженого конденсатора без металевої пластини дорівнює

$$W_2 = \frac{CU^2}{2}. \quad (5)$$

Тоді збільшення енергії конденсатора буде таким, що дорівнює

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{CU^2}{2} - \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\eta} = -\frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta}. \quad (6)$$

Як бачимо, збільшення енергії конденсатора є від'ємним. Тобто енергія конденсатора зменшується.

За умови сталої напруги на конденсаторі робота, що витрачається на виймання металевої пластинки (як буде показано далі, є додатною величиною), визначається не лише на зміну енергії зарядженого конденсатора (від'ємна величина), а й на виконання роботи з переміщення заряду

$q' - q$  з однієї обкладки конденсатора на іншу проти сторонніх сил джерела постійної напруги (додатна величина). Тут  $q'$  – заряд конденсатора з металевою пластинкою,  $q$  – без неї.

$$A = \Delta W + U(q' - q). \quad (7)$$

Користуючись співвідношеннями

$$C' = \frac{q'}{U}, \quad C = \frac{q}{U}$$

та формулою (2), знаходимо, що

$$q' - q = U(C' - C) = UC \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (8)$$

Тоді зі співвідношення (7) за допомогою формул (6), (8) одержуємо

$$A = -\frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1 - \eta} + \frac{CU^2 \cdot \eta}{1 - \eta} = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (9)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (6) і (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\Delta W = -\frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 100^2}{2} \cdot \frac{0,6}{1 - 0,6} \text{ Дж} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж},$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 100^2}{2} \cdot \frac{0,6}{1 - 0,6} \text{ Дж} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Спрямуємо напругу на конденсаторі до нуля. Тоді електрична взаємодія між пластиною й конденсатором буде відсутня, і тому робота, що витрачається на виймання пластини з конденсатора (впливом сил тяжіння нехтуємо),

буде дорівнювати нулю. Зрозуміло, що зміна енергії конденсатора також буде дорівнювати нулю. Такі самі результати випливають з одержаних формул: якщо  $U \rightarrow 0$ , то

$$A = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \sim U^2 \rightarrow 0,$$

$$\Delta W = -\frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \sim U^2 \rightarrow 0.$$

2 Спрямуємо товщину металевої пластини  $d'$  до нуля. Тоді  $\eta = d'/d \rightarrow 0$ . Зрозуміло, що нескінченно тонка пластинка не буде впливати на електричне поле конденсатора. Це означає, що зміна енергії конденсатора й величина роботи, що витрачається на виймання металевої пластинки з конденсатора, будуть дорівнювати нулю. Такий самий результат випливає з одержаних формул: якщо  $\eta \rightarrow 0$ , то

$$A = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \sim \eta \rightarrow 0,$$

$$\Delta W = -\frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \sim \eta \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\Delta W = -\frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж},$

$$A = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

### Приклад 3.8

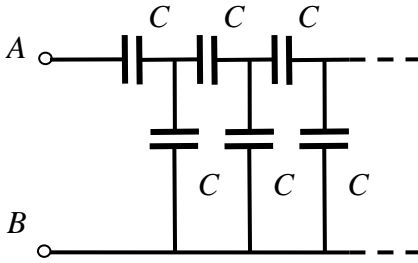


Рисунок 3.7

Знайти ємність нескінченного кола (рис. 3.7), утвореного повторенням однакової ділянки кола, що складається з двох однакових конденсаторів ємністю  $C$  кожний.

### Розв'язання

$\frac{C_x - ?}{C}$  | Для розв'язування задачі візьмемо до уваги, що коли до нескінченного електричного кола приєднати ще одну ділянку, то це коло не зміниться. А отже, й ємність цього кола не зміниться. Також використаємо формули для паралельного та послідовного з'єднання конденсаторів.

Позначимо шукану ємність між точками  $A$  та  $B$  (рис. 3.7) через  $C_x$ . Далі розглянемо схему, що складається з ємності  $C_x$  та ще однієї ділянки кола з двома конденсаторами ємності  $C$  (рис. 3.8 а й рис. 3.8 б). Знайдемо ємність  $C'$  між точками  $A'$  та  $B'$ . Зрозуміло, що цю ємність (рис. 3.8 а) можна легко знайти, використовуючи формули для послідовного та паралельного з'єднання конденсаторів:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_x}. \quad (1)$$

З іншого боку, порівнюючи еквівалентні схеми, що зображені на рис. 3.8 а та 3.8 б, переконуємося, що  $C'$  – ємність нескінченного електричного кола з такими самими ділянками, що й у колі ємністю  $C_x$ . Тобто  $C' = C_x$ . Тому,



виходячи з (1), можемо записати

$$\frac{1}{C_x} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C_x}, \text{ або } C_x^2 + C_x C + C^2 = 0. \quad (2)$$

Розв'язуємо квадратне рівняння відносно невідомого  $C_x$ , враховуємо, що величина  $C_x$  додатна, та одержуємо

$$C_x = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2} = C(\sqrt{5} - 1)/2. \quad (3)$$

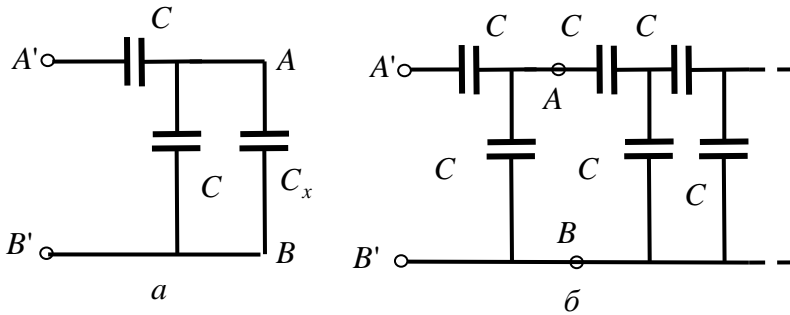


Рисунок 3.8

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничному випадку. Спрямуємо ємність конденсатора до нуля  $C \rightarrow 0$ . Це означає, що за умови будь-якої напруги на конденсаторі заряд на його пластинах залишиться нульовим ( $C = q/U$ ). Зрозуміло, що яку б схему з таких конденсаторів ми не склали б (зокрема, й зображену на рис. 3.7), то заряд такої системи завжди буде таким, що дорівнює нулю. Тобто  $C_x = 0$ . Такий самий результат впливає з одержаної формули: якщо  $C \rightarrow 0$ , то

$$C_x = C(\sqrt{5} - 1)/2 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $C_x = C(\sqrt{5} - 1)/2$ .

### **3.2 Задачі для самостійного розв'язування**

**3.1** Три конденсатори ємностями 1, 2 і 3 мкФ з'єднані послідовно та підключені до джерела постійного струму з напругою 300 В. Визначте заряд і напругу на обкладках кожного конденсатора.

**3.2** Конденсатор ємністю 10 мкФ заряджений до напруги 10 В. Визначте заряд на обкладках цього конденсатора після того, як паралельно йому був підключений інший незаряджений конденсатор ємністю 20 мкФ.

**3.3** Два конденсатори ємностями 5 і 8 мкФ з'єднані послідовно та приєднані до батареї з ЕРС 80 В. Визначте заряди конденсаторів та різницю потенціалів між їх обкладками.

**3.4** Як зміниться ємність плоского конденсатора, якщо між його пластинами внести металеву пластину, товщина якої становить  $\eta = 0,6$  від відстані між пластинами конденсатора.

**3.5** Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом 10 см кожна. Відстань між пластинами дорівнює 2 мм. Конденсатор приєднаний до джерела напруги 80 В. Визначте заряд конденсатора і напруженість поля конденсатора у двох випадках: а) діелектрик – повітря; б) діелектрик – скло. Діелектрична проникність скла  $\epsilon = 7,0$ .

**3.6** Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений двома шарами діелектрика: шаром скла товщиною 0,2 см та шаром парафіну товщиною 0,3 см.

Різниця потенціалів між обкладками дорівнює 300 В. Визначте напруженість поля та різницю потенціалу в кожному з шарів. Діелектрична проникність скла  $\epsilon_1 = 7,0$ , парафіну  $\epsilon_2 = 2,0$ .

**3.7** Плоский конденсатор із площею пластин  $200 \text{ см}^2$  кожна заряджений до напруги 2 кВ. Відстань між пластинами дорівнює 2 см. Діелектриком є скло. Визначте енергію поля конденсатора та густину енергії поля. Діелектрична проникність скла  $\epsilon = 7,0$ .

**3.8** Плоский повітряний конденсатор, відстань між обкладками якого 5 мм, заряджений до різниці потенціалів 3000 В. Площа його пластин –  $15,7 \text{ см}^2$ . Конденсатор вимикають із джерела напруги, а потім його пластини розсовують на відстань 1 см. Визначте ємність, різницю потенціалів та енергію конденсатора після розсування його пластин.

**3.9** Між пластинами плоского конденсатора, що знаходяться на відстані 1 см одна від одної, прикладена різниця потенціалів 100 В. До однієї з пластин прилягає плоскопаралельна пластинка кристалічного бромистого талію ( $\epsilon = 173$ ) товщиною 9,5 мм. Після вимкнення конденсатора з джерела напруги пластинку кристала виймають. Яка встановиться після цього різниця потенціалів між пластинами конденсатора?

**3.10** Яка кількість теплоти  $Q$  виділиться, коли плоский конденсатор розрядиться, якщо різниця потенціалів  $U$  між пластинами дорівнює 15 кВ, відстань  $d = 1 \text{ мм}$ , діелектрик – слюда, площа  $S$  кожної пластини дорівнює  $300 \text{ см}^2$ ? Діелектрична проникність слюди  $\epsilon = 7,0$ .

**3.11** Різниця потенціалів між пластинами плоского конденсатора дорівнює  $U = 6 \text{ кВ}$ , заряд  $q$  кожної пластини – 10 нКл. Обчисліть енергію  $W$  поля конденсатора.

**3.12** Плоский повітряний конденсатор заряджений до різниці потенціалів  $U = 300$  В. Після від'єднання від джерела струму відстань між пластинами конденсатора було збільшено у п'ять разів ( $n = 5$ ). Визначте різницю потенціалів  $U$  на обкладках конденсатора після їх розсування.

**3.13** Знайти енергію  $W$  відокремленої сфери радіусом  $R = 4$  см, зарядженої до потенціалу  $\phi = 500$  В.

**3.14** Заряджена куля  $A$  радіусом  $r_1 = 2$  см торкається до незарядженої кулі  $B$ , радіус якої  $r_2 = 3$  см. Після того як кулі роз'єднали, виявилось, що енергія кулі  $B$   $W = 0,4$  Дж. Який заряд  $q_1$  був на кулі  $A$  до їх зіткнення?

**3.15** Обчислити енергію  $W$  електростатичного поля металевій кулі, якій передано заряд  $q = 100$  нКл, якщо діаметр  $d$  кулі дорівнює  $20$  см.

**3.16** Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено послідовно двома діелектричними шарами 1 та 2 з товщиною  $d_1$  та  $d_2$  і проникністю відповідно  $\epsilon_1$  й  $\epsilon_2$ . Площа кожної обкладки дорівнює  $S$ . Знайти: а) ємність конденсатора; б) густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на межі поділу діелектричних шарів, якщо напруга на конденсаторі дорівнює  $U$  й електричне поле спрямоване від шару 1 до шару 2.

**3.17** Знайти ємність сферичного конденсатора, радіуси обкладок якого дорівнюють  $R_1$  і  $R_2$ , причому  $R_2 > R_1$ , якщо простір між обкладками заповнено: а) однорідним діелектриком із проникністю  $\epsilon$ ; б) діелектриком, проникність якого залежить від відстані до центра конденсатора як  $\epsilon = ar$ ,  $a$  – стала.

**3.18** Знайти ємність сферичного конденсатора, радіуси внутрішньої й зовнішньої обкладок якого дорівнюють  $a$  й  $b$ , якщо простір між обкладками заповнено наполовину, як

показано на рис. 3.9, однорідним діелектриком із проникністю  $\varepsilon$ .

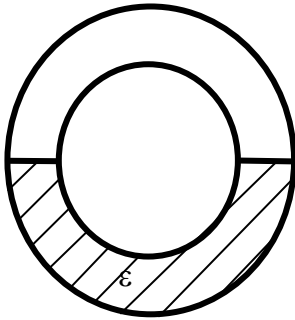


Рисунок 3.9

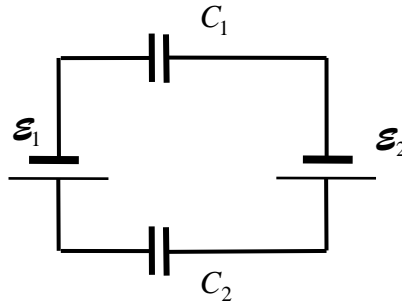


Рисунок 3.10

**3.19** Циліндричний конденсатор заповнений двома циліндричними шарами діелектриків із проникністю  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . Внутрішні радіуси шарів дорівнюють відповідно  $R_1$  і  $R_2$ , причому  $R_2 > R_1$ . Максимально припустима напруженість електричного поля для цих діелектриків дорівнює відповідно  $E_{1m}$  і  $E_{2m}$ . Визначити співвідношення між  $\varepsilon$ ,  $R$  і  $E_m$ , коли напруженості електричного поля в обох діелектриках під час підвищення напруги досягнуть значень, що відповідають пробою першого та другого діелектриків одночасно.

**3.20** Знайти заряд кожного конденсатора в електричному колі, який зображено на рис. 3.10.

**3.21** Конденсатор ємністю  $C_1 = 1,0$  мкФ, попередньо заряджений до напруги  $U = 300$  В, під'єднали паралельно до незарядженого конденсатора ємністю  $C_2 = 2,0$  мкФ. Знайти збільшення електричної енергії системи на момент установлення рівноваги. Пояснити одержаний результат.

**3.22** У центрі сферичної оболонки, рівномірно зарядженої зарядом  $q = 5,0 \text{ мкКл}$ , розміщено точковий заряд  $q_0 = 1,5 \text{ мкКл}$ . Знайти роботу електричних сил, яку потрібно виконати для розширення оболонки, а саме збільшення її радіуса від  $R_1 = 50 \text{ мм}$  до  $R_2 = 100 \text{ мм}$ .

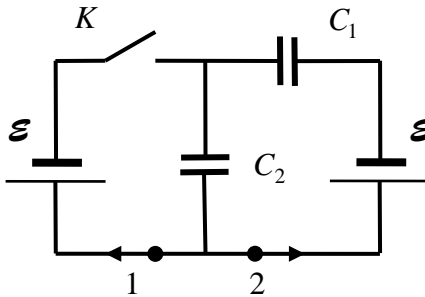


Рисунок 3.11

**3.23** Які заряди пройдуть після замикання ключа  $K$  у схемі (рис. 3.11) через перерізи 1 і 2 у напрямках, показаних стрілками?

**3.24** Точковий заряд  $q$  знаходиться в центрі  $O$  сферичного незарядженого

провідного шару з малим отвором уздовж радіуса. Внутрішній і зовнішній радіуси шару дорівнюють відповідно  $a$  і  $b$ . Яку роботу потрібно витратити, щоб повільно перенести заряд  $q$  із точки  $O$  через отвір на нескінченність?

**3.25** У середині плоского конденсатора знаходиться паралельно обкладкам пластина, товщина якої становить  $\eta = 0,60$  від відстані між обкладками. Ємність конденсатора за відсутності пластини дорівнює  $C = 20 \text{ нФ}$ . Конденсатор спочатку під'єднали до джерела постійної напруги  $U = 200 \text{ В}$ , потім від'єднали й після цього повільно витягли пластину з конденсатора. Знайти роботу, виконану проти електричних сил, коли витягували пластину, якщо вона: а) металева; б) скляна. Діелектрична проникність скла  $\epsilon = 6,0$ .

## 4 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

### Основні формули

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}, \quad (4 \text{ а})$$

де  $U_{12}$  – напруга на цій ділянці.

Закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*), \quad (4 \text{ б})$$

де  $\vec{E}^*$  – напруженість поля сторонніх сил;  $\sigma = 1/\rho$  – провідність середовища;  $\rho$  – питомий опір середовища.

Правила Кірхгофа:

$$\sum I_k = 0, \quad \sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k. \quad (4 \text{ в})$$

Потужність струму  $P$  й тепла потужність  $dQ/dt$ :

$$P = UI = (\Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}) \cdot I, \quad dQ/dt = R \cdot I^2. \quad (4 \text{ г})$$

Густина електричного струму в металі

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{u}, \quad (4 \text{ г})$$

де  $\vec{u}$  – середня швидкість носіїв заряду.

### 4.1 Приклади розв'язування задач

#### Приклад 4.1

Довгий, рівномірно заряджений по поверхні циліндр радіусом  $a = 1$  см рухається зі швидкістю  $v = 10$  м/с уздовж своєї осі. Напруженість електричного поля безпосередньо біля поверхні циліндра  $E = 0,9$  кВ/см. Знайти струм, обумовлений механічним перенесенням заряду.

### Розв'язання

$I - ?$

$E = 0,9 \text{ кВ/см,}$

$a = 1 \text{ см,}$

$v = 10 \text{ м/с}$

Для того щоб визначити шуканий струм, використаємо означення для сили струму. Також візьмемо до уваги, що заряд, який створює електричний струм, одночасно створює й електричне поле, напруженість якого безпосередньо біля поверхні циліндра дорівнює  $E = 0,9 \text{ кВ/см.}$

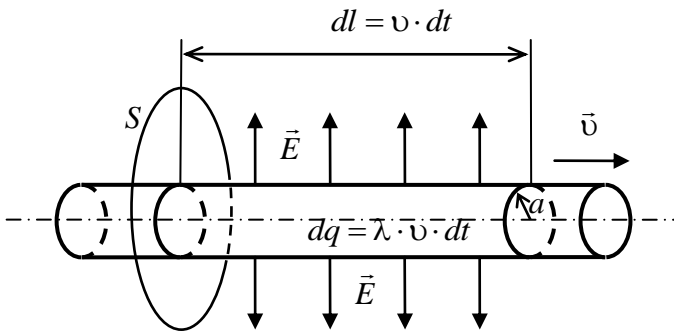


Рисунок 4.1

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Сила електричного струму за означенням дорівнює

$$I = dq / dt, \quad (1)$$

де  $dq$  – кількість заряду, що проходить через деякий переріз  $S$  (рис. 4.1) за час  $dt$ . Циліндр рухається зі швидкістю  $v$ . Тому зрозуміло, що час  $dt$  через переріз  $S$  пройде частина циліндра довжиною  $dl = v \cdot dt$ , на якій міститься заряд  $dq = \lambda \cdot v \cdot dt$ , де  $\lambda$  – лінійна густина заряду циліндра (рис. 4.1). Тоді зі співвідношення (1) випливає

$$I = dq / dt = \lambda \cdot v \cdot dt / dt = \lambda \cdot v. \quad (2)$$

Неважко за допомогою теореми Гауса (див. приклад 2.1 у розділі 2) знайти напруженість електричного поля  $E$ ,



створеного рівномірно розподіленим по поверхні циліндра зарядом із лінійною густиною  $\lambda$  (див. приклад 3.1):

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}, \quad (3)$$

де  $a$  – відстань між віссю циліндра і точкою, в якій визначають напруженість електричного поля  $E$ . Звідси знаходимо лінійну густину заряду циліндра  $\lambda$ , підставляємо у (2) та одержуємо шуканий електричний струм

$$I = 2\pi\epsilon_0 a E v. \quad (4)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (4), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$I = 2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} 10^{-2} \cdot 0,9 \cdot 10^5 \cdot 10 \text{ A} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ A}.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Спрямуємо напруженість електричного поля  $E$  до нуля:  $E \rightarrow 0$ . Це означає, що заряд, який створює електричне поле, буде дорівнювати нулю, а отже, і струм буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з одержаної формули: якщо  $E \rightarrow 0$ , то  $I = 2\pi\epsilon_0 a E v \sim E \rightarrow 0$ .

2 Спрямуємо швидкість циліндра до нуля:  $v \rightarrow 0$ . Це означає, що перенесення заряду відсутнє, тобто струм буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з одержаної формули: якщо  $v \rightarrow 0$ , то  $I = 2\pi\epsilon_0 a E v \sim v \rightarrow 0$ .

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $I = 2\pi\epsilon_0 a E v = 0,5 \text{ мкА}$ .

### Приклад 4.2

На рисунку 4.2 показане нескінченне електричне коло, утворене повторенням однакової ділянки кола з опорами  $R_1 = 4,0 \text{ Ом}$  і  $R_2 = 3,0 \text{ Ом}$ . Знайти опір між точками  $A$  й  $B$ .

#### Розв'язання

$R_x - ?$ $R_1 = 4,0 \text{ Ом},$ $R_2 = 3,0 \text{ Ом}$	Для розв'язування задачі візьмемо до уваги, що коли до нескінченного електричного кола приєднати ще одну ділянку, то це коло не зміниться, а отже, і опір його теж. Також використаємо формули для паралельного та послідовного з'єднань провідників.
--	---

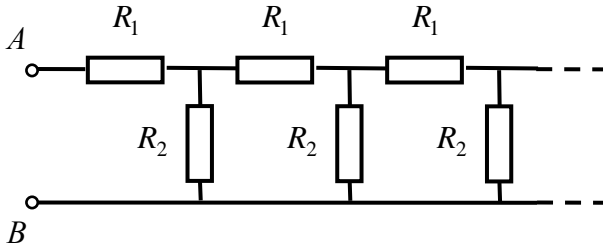


Рисунок 4.2

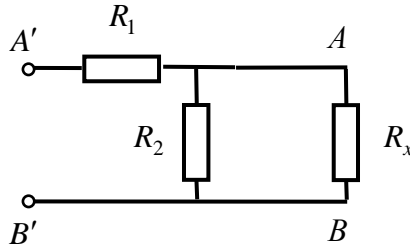
Позначимо шуканий опір між точками  $A$  і  $B$  через  $R_x$  та розглянемо схему, яка складається з опору  $R_x$  та ділянки кола з опорами  $R_1$  й  $R_2$  (рис. 4.3), і знайдемо опір  $R'$  між точками  $A'$  і  $B'$ . Зрозуміло, що  $R'$  буде дорівнювати

$$R' = R_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_x} \right)^{-1} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_x}{R_2 + R_x}. \quad (1)$$

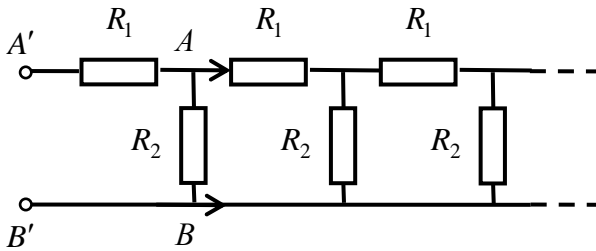
З іншого боку, порівнюючи дві схеми (рис. 4.2 та рис. 4.3 б), переконуємося, що  $R'$  – опір нескінченного

електричного кола з такими самими ділянками, що й коло з опором  $R_x$ . Тобто  $R' = R_x$ . Тому можемо записати

$$R_x = R_1 + R_2 R_x / (R_2 + R_x), \text{ або } R_x^2 - R_x \cdot R_1 - R_1 \cdot R_2 = 0. \quad (2)$$



а  
або



б

Рисунок 4.3

Розв'язуємо це квадратне рівняння. Враховуємо, що величина опору додатна, і знаходимо шуканий опір:

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 \cdot R_2}}{2} = \frac{R_1}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right). \quad (3)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$R_x = \frac{4,0}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{3,0}{4,0}} \right) O_m = 6,0 \text{ Ом}.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Спрямуємо опір  $R_1$  до нуля. Тоді опір кола буде визначатися нескінченним числом паралельних з'єднань опорів  $R_2$  та буде дорівнювати  $R_x = R_2 / n \sim 1/n \rightarrow 0$ , тому що  $n \rightarrow \infty$ .

Такий самий результат впливає з розрахункової формули: якщо  $R_1 \rightarrow 0$ , то

$$R_x = \frac{R_1}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right) = \frac{1}{2} \left( R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2} \right) \rightarrow 0.$$

2 Спрямуємо опір  $R_2$  до нуля. Замінивши у схемі (рис. 4.3) опір  $R_2$  провідником із нульовим опором, бачимо, що опір нескінченного кола  $R_x$  буде дорівнювати  $R_1$  (рис. 4.3). Такий самий результат впливає з розрахункової формули: якщо  $R_2 \rightarrow 0$ , то

$$R_x = \frac{R_1}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right) \Rightarrow \frac{R_1}{2} (1 + \sqrt{1}) = R_1.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $R_x = \frac{R_1}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right) = 6,0 \text{ Ом}.$

### Приклад 4.3

Знайти значення й напрямок струму через опір  $R$  у схемі (рис. 4.4), якщо  $\mathcal{E}_1 = 1,5$  В,  $\mathcal{E}_2 = 3,7$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом і  $R = 5,0$  Ом. Внутрішніми опорамі джерел струму знехтувати.

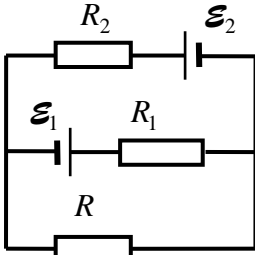


Рисунок 4.4

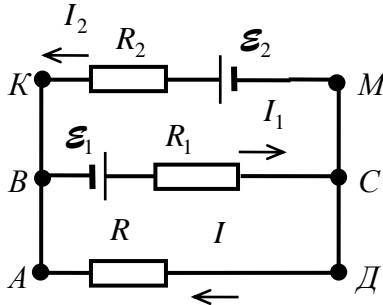


Рисунок 4.5

### Розв'язання

$I - ?$
$\mathcal{E}_1 = 1,5$ В,
$\mathcal{E}_2 = 3,7$ В,
$R_1 = 10$ Ом,
$R_2 = 20$ Ом,
$R = 5,0$ Ом

Для розв'язування задачі використаємо правила Кірхгофа. Позначимо струми, що проходять через опори  $R_1$ ,  $R_2$  і  $R$ , відповідно  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$  й виберемо напрямок цих струмів довільно, наприклад, як на рис. 4.5. Застосуємо перше правило Кірхгофа до точки  $C$  (рис. 4.5) та одержимо

$$I_1 - I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Застосуємо до контурів  $ABCD$  і  $AKMD$  друге правило Кірхгофа та одержимо (обхід контурів виконуємо за годинниковою стрілкою):

$$IR + I_1 R_1 = \mathcal{E}_1, \quad (2)$$

$$IR - I_2 R_2 = -\mathcal{E}_2. \quad (3)$$

Використовуюючи рівняння (2) і (3), визначимо струми  $I_1$  та  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{R_1}, \quad I_2 = \frac{IR + \mathcal{E}_2}{R_2}. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (1) та одержимо

$$\frac{\mathcal{E}_1 - IR}{R_1} - \frac{IR + \mathcal{E}_2}{R_2} - I = 0.$$

Із цього рівняння знайдемо  $I$ :

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}. \quad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} = \frac{1,5 \cdot 20 - 3,7 \cdot 10}{5 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20} \text{ А} = -0,02 \text{ А}.$$

#### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Спрямуємо значення ЕРС джерел  $\mathcal{E}_1$  і  $\mathcal{E}_2$  до нуля. Зрозуміло, що струм через опір  $R$  тоді теж буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з розрахункової формули: якщо  $\mathcal{E}_1 \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{E}_2 \rightarrow 0$ , то

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \sim \mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1 \rightarrow 0.$$

2 Спрямуємо значення опору  $R$  до нескінченності. Тоді струм, що проходить через цей опір, буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з

розрахункові формули: якщо  $R \rightarrow \infty$ , то

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $|I| = \left| \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \right| = 0,02 \text{ А}$ , напрямок

струму зліва направо (рис. 4.5).

### Приклад 4.4

Електродвигун постійного струму приєднали до напруги  $U$ . Опір обмотки якоря дорівнює  $R$ . Визначити струм через обмотку для випадку, якщо корисна потужність буде максимальною. Чому вона дорівнює? Чому дорівнює ККД двигуна?

#### Розв'язання

$P_{\max} - ?$ $I_m, \eta - ?$ $U, R$	Для розв'язування задачі виразимо за допомогою закону збереження енергії корисну потужність як функцію від сили струму, що проходить через двигун, а потім проведемо дослідження цієї функції на екстремум. Це дозволить визначити силу струму, що відповідає максимальній потужності, а отже, й саму максимальну потужність та максимальний ККД двигуна.
---	---

Позначимо струм, що проходить через двигун, через  $I$ . Тоді відповідно до закону збереження енергії потужність електричного струму, що підводиться до двигуна  $I \cdot U$ , буде витратитися на виконання механічної роботи  $P$  і на виділення теплоти  $I^2 R$  на опорі обмотки якоря двигуна:

$$IU = P + I^2 R, \text{ або } P = IU - I^2 R. \quad (1)$$

Для визначення максимального значення корисної потужності продиференціюємо вираз (1) за змінною  $I$  і прирівнюємо одержану похідну до нуля:

$$\frac{dP}{dI} = \frac{d}{dI}(IU - I^2R) = U - 2I_m R = 0.$$

Звідси знаходимо

$$I_m = \frac{U}{2R}. \quad (2)$$

Виходячи з того, що  $dP/dI < 0$ , якщо  $I > U/(2R)$  та  $dP/dI > 0$ , якщо  $I < U/(2R)$ , робимо висновок, що за умови  $I_m = U/(2R)$  корисна потужність максимальна. Підставляємо значення струму  $I_m$  (співвідношення (2)) в (1) і знаходимо величину цієї потужності

$$P_{\max} = \frac{U^2}{4R}, \quad (3)$$

а також коефіцієнт корисної дії двигуна ( $P$  – корисна потужність;  $I \cdot U$  – загальна потужність електричного струму):

$$\eta = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{(U^2/4R)}{(U \cdot U/2R)} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Таким чином, одержали шукані величини, що визначаються формулами (2), (3), (4).

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункових формул в граничних випадках.

1 Спрямуємо напругу, що подається на електродвигун  $U$ , до нуля. Тоді й струм  $I_m$ , і максимальна потужність  $P_{\max}$  будуть дорівнювати нулю. Такий самий результат



впливає і з одержаних формул: якщо  $U \rightarrow 0$ , то  $I_m = \frac{U}{2R} \sim U \rightarrow 0$ ;  $P_{\max} = \frac{U^2}{4R} \sim U^2 \rightarrow 0$ .

2 Спрямуємо опір якоря електродвигуна  $R$  до нескінченності. Тоді струм  $I_m$  буде прямувати до нуля, і максимальна корисна потужність буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з одержаних формул: якщо  $R \rightarrow \infty$ , то  $I_m = \frac{U}{2R} \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0$ ;  $P_{\max} = \frac{U^2}{4R} \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0$ .

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $I_m = \frac{U}{2R}$ ,  $P_{\max} = \frac{U^2}{4R}$ ,  $\eta = \frac{1}{2}$ .

### Приклад 4.5

Радіуси обкладок сферичного конденсатора дорівнюють  $a$  й  $b$ , причому  $a < b$ . Простір між обкладками заповнено однорідною речовиною з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  й питомим опором  $\rho$ . Спочатку конденсатор був незарядженим. У момент  $t = 0$  внутрішній обкладці надали заряду  $q_0$ . Знайти: а) закон зміни в часі заряду на внутрішній обкладці; б) кількість тепла, що виділилося під час розтікання заряду.

#### Розв'язання

$q = q(t) - ?$
$Q - ?$
$a, b, \varepsilon, \rho, q_0$

З'ясуємо сутність процесів, що мають місце в ситуації, описаній у задачі. Після передачі внутрішній обкладці конденсатора заряду  $q = q_0$  у початковий момент часу  $t = 0$  цей заряд створює центральносиметричне електричне поле (рис. 4.6). Під дією цього поля буде відбуватися перенесення

електричного заряду з внутрішньої обкладки сферичного конденсатора на зовнішню, тобто буде проходити електричний струм. Цей процес припиниться лише тоді, коли напруженість електричного поля на внутрішній обкладці стане такою, що дорівнює нулю:  $q = 0$ . За цей час заряд  $q_0$  перейде з внутрішньої обкладки конденсатора на зовнішню:  $q_2 = q_0$ .

Для визначення закону зміни заряду в часі використаємо закон Ома в диференціальній формі. Для визначення кількості тепла  $Q$  скористаємося законом збереження енергії.

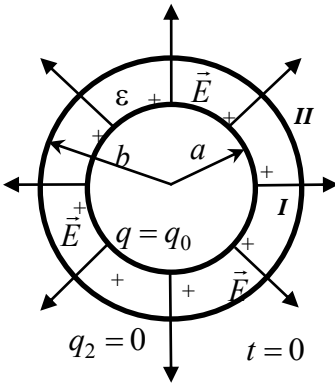


Рисунок 4.6

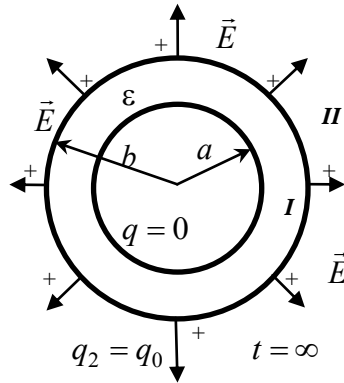


Рисунок 4.7

Знайдемо густину електричного струму біля внутрішньої обкладки конденсатора. Ця величина визначається законом Ома в диференціальній формі:

$$\vec{j} = (1/\rho) \cdot \vec{E}, \quad (1)$$

де  $\vec{E}$  – вектор напруженості електричного поля;  $\rho$  – питомий опір. Напруженість електричного поля біля поверхні сфери радіусом  $a$  буде залежати від заряду на цій

поверхні  $q$ . Незавжно знайти цю напруженість, використовуючи теорему Гауса:

$$E = q / (4\pi\epsilon_0 a^2). \quad (2)$$

З іншого боку, густина електричного струму біля поверхні внутрішньої обкладки конденсатора площею  $S = 4\pi a^2$  за визначенням дорівнює

$$j = \frac{I}{S} = \frac{(-1)}{4\pi a^2} \cdot \frac{dq}{dt}. \quad (3)$$

Знак « $\leftrightarrow$ » у формулі (3) пов'язаний із тією обставиною, що  $dq/dt < 0$ . Тобто з часом заряд  $q$  на внутрішній обкладці зменшується, а модуль густини електричного струму  $j$  є додатною величиною.

Порівнюючи (3) та (1) з урахуванням (2), одержуємо

$$-\frac{1}{4\pi a^2} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon a^2}. \quad (4)$$

Розв'язуємо це диференціальне рівняння методом розділення змінних. Ураховуємо початкові умови  $t = 0$ ,  $q = q_0$  та одержуємо шукану залежність заряду  $q = q(t)$  від часу:

$$\int_{q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{\rho\epsilon_0\epsilon} \cdot \int_0^t dt', \quad \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{1}{\rho\epsilon_0\epsilon} \cdot t.$$

Тобто

$$q = q_0 \cdot \exp(-t / (\rho\epsilon_0\epsilon)). \quad (5)$$

Кількість тепла, що виділилося під час проходження заряду, як зазначалося вище, визначимо із закону збереження енергії:

$$Q = W_1 - W_2, \quad (6)$$

де  $W_1$  – енергія електричного поля в момент часу  $t = 0$  (рис. 4.6);  $W_2$  – енергія електричного поля, коли заряд повністю перетече на зовнішню обкладку конденсатора  $t = \infty$  (рис. 4.7). Енергію електричного поля отримуємо зі співвідношення  $W = \int w \cdot dV$ , де  $w = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2$  – густина енергії електричного поля. З рис. 4.6 випливає, що електричне поле в початковому стані ( $t = 0$ ) зосереджене в областях  $I$  та  $II$ . А з рис. 4.7 випливає, що електричне поле в кінцевому стані ( $t = \infty$ ) зосереджене лише в області  $II$ . Незавжди перевірити, що напруженість електричного поля в області  $II$  з часом не змінюється, тобто є постійною. Тому різниця енергій електричного поля  $W_1 - W_2$  фактично буде дорівнювати енергії електричного поля в області  $I$ :

$$Q = W_1 - W_2 = \int_{I,II} w \cdot dV - \int_{II} w \cdot dV = \int_I w \cdot dV. \quad (7)$$

Тут  $I$  означає, що інтегрування відбувається в області простору між обкладками конденсатора,  $II$  – в області простору за межами конденсатора (рис. 4.6–4.7). Ураховуємо, що в області простору  $I$  в момент часу  $t = 0$  напруженість електричного поля визначається за формулою

$$E = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (8)$$

переходимо до сферичних координат у співвідношенні (7) і одержуємо шукану кількість теплоти

$$Q = \int_a^b dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \right)^2 \cdot r^2 \sin \theta = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (9)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Спрямуємо значення питомого опору  $\rho$  до нескінченності. Це буде означати, що між обкладками конденсатора знаходиться діелектрик, тобто заряд на внутрішній пластині змінюватися не повинен:  $q = q_0 = const$ . Такий самий результат впливає з одержаної формули: якщо  $\rho \rightarrow \infty$ , то

$$q = q_0 \cdot \exp(-t/(\rho\epsilon_0\epsilon)) \rightarrow q_0 \cdot e^{-1/\infty} = q_0 \cdot e^{-0} = q_0.$$

2 Спрямуємо значення початкового заряду конденсатора до нуля. Тоді кількість тепла, що виділилося під час розтікання цього заряду, буде дорівнювати нулю. Такий самий результат впливає з одержаної формули:

якщо  $q_0 \rightarrow 0$ , то  $Q = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \sim q_0^2 \rightarrow 0$ .

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $q = q_0 \cdot \exp(-t/(\rho\epsilon_0\epsilon))$ ,  $Q = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ .

### *Приклад 4.6*

Дві великі паралельні пластини знаходяться у вакуумі. Одна з пластин є катодом – джерелом електронів, початковою швидкістю яких можна знехтувати. Потік електронів, спрямований до протилежної пластини, створює в просторі об'ємний заряд, унаслідок цього потенціал у проміжку між пластинами змінюється за законом  $\varphi = a \cdot x^{4/3}$ , де  $a$  – додатна стала;  $x$  – відстань від

катода. Знайти: а) густину просторового заряду як функцію  $x$ ; б) густину електричного струму.

**Розв'язання**

$\rho = \rho(x) - ?$ $j - ?$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $\varphi = a \cdot x^{4/3}$	Для визначення густини просторового заряду використаємо теорему Гауса в диференціальній формі та зв'язок між потенціалом і напруженістю електричного поля. Для визначення густини електричного струму застосовуємо відоме співвідношення $\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{i}$ (4 г) та закон збереження електричного заряду.
---	---

Згідно з теоремою Гауса в диференціальній формі для вакууму

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0. \tag{1}$$

Із співвідношення між напруженістю електричного поля й потенціалом випливає, що

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi. \tag{2}$$

Підставивши вираз (2) в (1), отримаємо

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\varphi) = -\Delta\varphi = \rho / \epsilon_0,$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа. Тобто

$$\Delta\varphi = -\rho / \epsilon_0. \tag{3}$$

Одержане рівняння (3) називають рівнянням Пуассона. Виходячи з того, що задача одновимірна, тобто  $\varphi = \varphi(x)$ , можемо записати

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}. \tag{4}$$

Далі підставляємо в рівняння Пуассона (3) залежність  $\varphi(x) = a \cdot x^{4/3}$ , що дана за умовою, враховуємо (4) і одержуємо шукану густину просторового заряду:

$$\rho(x) = -\varepsilon_0 \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\varepsilon_0 \cdot \frac{d^2(a \cdot x^{4/3})}{dx^2} = -\frac{4}{9} \cdot a \cdot \varepsilon_0 \cdot x^{-2/3}. \quad (5)$$

Знайдемо густину електричного струму. З огляду на те, що добуток заряду електронів  $e$  на їх концентрацію  $n$  є густина просторового заряду  $\rho$ , можемо записати

$$j = e \cdot n \cdot u = \rho \cdot u, \quad (6)$$

де  $u$  – швидкість спрямованого руху електронів. Швидкість  $u$  знайдемо використовуючи закон збереження енергії

$$-|e| \cdot \varphi + \frac{m \cdot u^2}{2} = W_{\text{поч}} = 0,$$

де  $m$  – маса електрона;  $W_{\text{поч}}$  – початкова повна енергія електрона (коли  $x=0$ , потенціальна та кінетична енергії електрона за умовою задачі дорівнюють нулю), тут враховано, що  $e = -|e|$ . Тоді

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot |e| \cdot \varphi}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot |e| \cdot a \cdot x^{4/3}}{m}}. \quad (7)$$

Із співвідношення (6) з урахуванням (5) та (7) отримаємо

$$j = -\frac{4}{9} \cdot a \cdot \varepsilon_0 x^{-2/3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |e| \cdot a \cdot x^{4/3}}{m}} = -\frac{4}{9} \cdot \varepsilon_0 \cdot a^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |e|}{m}}. \quad (8)$$

Знак « $\leftarrow$ » свідчить про те, що струм спрямований у бік, протилежний напрямку осі  $X$ .

$$\text{Отже, } \rho(x) = -\frac{4}{9} \cdot a \cdot \varepsilon_0 x^{-2/3}, \quad j = -\frac{4}{9} \cdot \varepsilon_0 \cdot a^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |e|}{m}}.$$

### **Аналіз одержаного результату**

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Відповідно до рівняння неперервності маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

Для випадку, описаного в задачі, з рівняння неперервності одержуємо

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ або } j_x = \text{const}.$$

Тобто густина електричного струму не повинна залежати від відстані  $x$ .

Такий самий результат впливає з розв'язку задачі (8):

$$j = j_x = -\frac{4}{9} \cdot \epsilon_0 \cdot a^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |e|}{m}} = \text{const}.$$

2 Спрямуємо значення коефіцієнта  $a$  до нуля. Тоді й потенціал в усіх точках простору буде прямувати до нуля:  $\varphi = ax^{4/3} \sim a \rightarrow 0$ . Зрозуміло, що в цьому випадку як електричний струм, так і об'ємна густина заряду будуть такими, що дорівнюють нулю. Такий самий результат впливає з одержаного розв'язку: якщо  $a \rightarrow 0$ , то

$$\rho(x) = -\frac{4}{9} \cdot a \epsilon_0 x^{-2/3} \sim a \rightarrow 0,$$

$$j = -\frac{4}{9} \cdot \epsilon_0 \cdot a^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |e|}{m}} \sim a^{3/2} \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\rho(x) = -\frac{4}{9} \cdot a \cdot \epsilon_0 x^{-2/3}$ ,  $j = -\frac{4}{9} \cdot \epsilon_0 \cdot a^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |e|}{m}}$ .



### Приклад 4.7

Обкладкам конденсатора ємністю  $C = 2,00$  мкФ надали різнойменних зарядів  $q_0 = 1,00$  мкКл. Потім обкладки замкнули через опір  $R = 5,0$  МОм. Знайти: а)  $q_R$  заряд, що пройшов через цей опір за  $\tau = 2,00$  с; б) кількість тепла  $Q$ , що виділилося в опорі за той самий час.

### Розв'язання

$q_R, Q - ?$
$C = 2,00$ мкФ,
$q_0 = 1,00$ мкКл,
$R = 5,0$ МОм,
$\tau = 2,00$ с

Після того як конденсатор набув заряду  $q_0$ , в ньому створюється електричне поле, що характеризується різницею потенціалу між обкладками конденсатора 1 та 2  $\phi_1 - \phi_2$  (рис. 4.8). Таким чином, до опору  $R$  прикладена різниця потенціалів  $\phi_1 - \phi_2$ . Це приводить до появи електричного струму  $I_{12}$  через опір  $R$ . Зрозуміло, що такий електричний струм призводить до зменшення з часом заряду на обкладках конденсатора, а отже, й до зменшення з часом різниці потенціалів. У свою чергу, це призводить і до зменшення сили струму. Таким чином, через опір  $R$  проходить змінний у часі струм  $I_{12}$ .

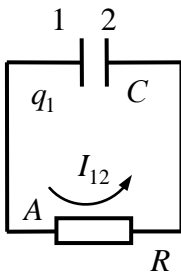


Рисунок 4.8

Для опису процесів в електричному колі (рис. 4.8) використаємо закон Ома (4 а). Це дозволить одержати диференціальне рівняння, яке допоможе знайти залежність заряду на конденсаторі від часу. Використовуючи одержану залежність, знайдемо шуканий заряд  $q_R$ , яка пройшов через опір

$R$  за час  $\tau$ . Для знаходження кількості теплоти, що виділиться на опорі  $R$  за такий самий час  $\tau$ , використаємо закон Джоуля – Ленца (4 г).

Розглянемо ділянку кола 1-А-2 (рис. 4.8). Згідно із законом Ома (4 а) електричний струм, що проходить цією ділянкою, дорівнює

$$I_{12} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \quad (1)$$

Тут ураховано, що на цій ділянці  $\mathcal{E}_{12} = 0$ ;  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$  – потенціали відповідно пластин 1 та 2 (рис. 4.8).

З іншого боку, згідно з означенням ємності конденсатора

$$C = q_1 / (\Phi_1 - \Phi_2), \text{ або } \Phi_1 - \Phi_2 = q_1 / C, \quad (2)$$

де  $q_1$  – заряд на пластині 1 конденсатора. Також зазначимо, що, виходячи з визначення сили електричного струму,

$$I_{12} = dq / dt = -dq_1 / dt, \quad (3)$$

де  $dq$  – кількість заряду, що пройшла через поперечний переріз провідника за час  $dt$ . Із закону збереження електричного заряду випливає, що  $dq = -dq_1$ . Тобто якщо сила струму  $I_{12} = dq / dt$  буде додатною, то заряд на пластині 1 конденсатора  $q_1$  буде зменшуватися (тобто  $dq_1$  буде від’ємним), саме цим фізичним міркуванням обумовлений знак « $\leftrightarrow$ » у формулі (3).

Далі підставляємо (2) та (3) в (1) і одержуємо

$$-dq_1 / dt = q_1 / (RC).$$

Звідси

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq'_1}{q'_1} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}, \quad \ln \frac{q_1}{q_0} = -\frac{t}{RC}, \quad q_1 = q_0 \exp(-t / (RC)). \quad (4)$$

Виходячи із закону збереження електричного заряду, зрозуміло, що заряд  $q_R$ , що пройшов через опір  $R$ , дорівнює зміні заряду на конденсаторі  $q_1$ . Тобто

$$q_R(t) = q_0 - q_1(t) = q_0(1 - \exp(-t/(RC))), \quad (5)$$

або

$$q_R(\tau) = q_0[1 - \exp(-\tau/(RC))]. \quad (6)$$

Знайдемо кількість теплоти, що виділяється на опорі  $R$ . Згідно із законом Джоуля – Ленца (4 г):

$$dQ = I_{12}^2 R dt = \left( \frac{dq_R}{dt} \right)^2 R dt = \left( \frac{q_0}{RC} e^{-t/(RC)} \right)^2 R dt. \quad (7)$$

У формулі (7) використали співвідношення (5). Далі знаходимо шукану теплоту

$$\int_0^Q dQ' = \int_0^\tau \frac{q_0^2}{RC^2} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt,$$

або

$$Q = -\frac{q_0^2}{2C} \exp\left(\frac{-2t}{RC}\right) \Bigg|_0^\tau = \frac{q_0^2}{2C} [1 - \exp(-2\tau/(RC))]. \quad (8)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (6) та (8), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\begin{aligned} q_R &= q_0[1 - \exp(-\tau/(RC))] = \\ &= 1 \cdot 10^{-3} [1 - \exp(-2/(5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6}))] \text{ Кл} = 0,18 \text{ мКл}, \\ Q &= \frac{q_0^2}{2C} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{RC}\right) \right] = \\ &= \frac{(1 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\right) \right] \text{ Дж} = 82 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Спрямуємо значення опору  $R$  до нескінченності. Це означає, що сила струму, яка проходить через цей опір, дорівнює нулю:  $I_{12} = 0$ . Отже, за час  $\tau$  через цей опір пройде заряд, який дорівнює нулю. Тобто  $q_R = 0$ . Такий самий результат впливає з одержаної формули: якщо  $R \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} q_R(\tau) &= q_0(1 - \exp(-\tau/(RC))) = \\ &= q_0(1 - \exp(-\tau/(\infty C))) = q_0(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Неважко з'ясувати, що якщо  $R \rightarrow \infty$ , то  $dQ = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 dt / R \rightarrow 0$ . Тобто кількість теплоти, яка виділяється на опорі  $R$ , дорівнює нулю:  $Q = 0$ . Такий самий результат впливає з одержаної формули. Якщо  $R \rightarrow \infty$ , то

$$Q = \frac{q_0^2}{2C} \left( 1 - \exp\left(\frac{-2\tau}{RC}\right) \right) = \frac{q_0^2}{2C} \left( 1 - \exp\left(\frac{-2\tau}{\infty \cdot C}\right) \right) = \frac{q_0^2}{2C} (1 - 1) = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $q_R = q_0[1 - \exp(-\tau / RC)] = 0,18$  мКл,

$$Q = [1 - \exp(-2\tau / RC)] q_0^2 / 2C = 82 \text{ мДж.}$$

### *Приклад 4.8*

Як із гальванометра з ціною поділки  $i_0 = 10$  мкА зробити: а) вольтметр для вимірювання напруги до  $U = 100$  В; б) амперметр для вимірювання струму до  $I = 1$  А. Шкала приладу має  $n = 100$  поділок, а внутрішній опір гальванометра  $r = 100$  Ом?

### Розв'язання

$R_V - ?$

$R_A - ?$

$i_0 = 10 \text{ мкА},$

$U = 100 \text{ В},$

$I = 1 \text{ А},$

$n = 100,$

$r = 100 \text{ Ом}$

Розглянемо завдання (а) задачі. З'ясуємо, як зробити з гальванометра вольтметр із можливістю вимірювання максимальної напруги 100 В. Для цього до гальванометра потрібно приєднати додатковий опір  $R_V$  так, щоб сила струму через гальванометр не перевищувала максимально допустимий для цього приладу струм  $I_G$  за умови максимальної напруги  $U = 100 \text{ В}$ . Додатковий опір  $R_V$  буде впливати на струм через гальванометр лише у разі послідовного з'єднання (рис. 4.9), призначення опору  $R_V$  – зосередити на собі зайву напругу. У випадку ж паралельного з'єднання опір  $R_V$  на струм через гальванометр впливати не буде.

Спочатку обчислимо струм через гальванометр  $I_G$ . Візьмемо до уваги, що гальванометр має  $n = 100$  поділок, а кожна поділка відповідає струму  $i_0 = 10 \text{ мкА}$ . Звідси неважко знайти, що

$$I_G = i_0 \cdot n. \quad (1)$$

Для знаходження опору  $R_V$  запишемо закон Ома для схеми, зображеної на рис. 4.9:

$$I_G = U / (R + r). \quad (2)$$

З урахуванням (1) знаходимо, що

$$R_V = \frac{U}{i_0 \cdot n} - r. \quad (3)$$

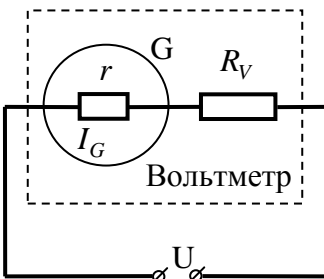


Рисунок 4.9

Розглянемо завдання (б) задачі. З'ясуємо, як зробити з гальванометра амперметр із можливістю вимірювання максимального електричного струму  $I = 1$  А. Для цього до гальванометра потрібно приєднати додатковий опір  $R_A$  так, щоб сила струму через гальванометр не перевищувала максимально допустимий для цього приладу струм  $I_G$  за умови максимального струму через систему  $I = 1$  А. Зрозуміло, що в такому випадку додатковий опір  $R_A$  потрібно приєднувати паралельно до гальванометра (рис. 4.10). Завдяки цьому надлишковий струм зможе пройти через опір  $R_A$ . Такий опір називають шунтом. Його призначення – проводити через себе надлишковий електричний струм.

Визначимо опір  $R_A$  (рис. 4.10). Зрозуміло, що на опорі  $R_A$  напруга така, як і на опорі  $r$ , через їх паралельне з'єднання

$$R_A \cdot I_1 = r \cdot I_G. \quad (4)$$

Тут  $I_1$  – струм через опір  $R_A$ . Тоді з (4) одержуємо

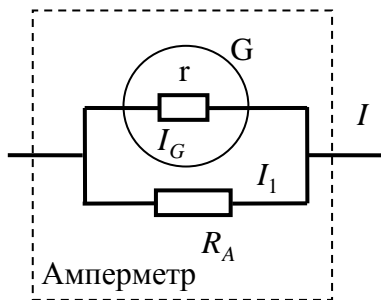


Рисунок 4.10

$$I_1 = r \cdot I_G / R_A = r n i_0 / R_A.$$

Загальний струм через систему

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_G = \frac{r \cdot I_G}{R_A} + I_G = \\ &= I_G \left( 1 + \frac{r}{R_A} \right) = n i_0 \left( 1 + \frac{r}{R_A} \right). \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$R_A = \frac{n i_0 r}{I - n i_0}. \quad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (3) та (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$R_V = \frac{U}{i_0 \cdot n} - r = \frac{100}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 100} - 100 \text{ Ом} \approx 100 \text{ кОм},$$

$$R_A = \frac{ni_0 r}{I - ni_0} = \frac{100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{1 - 100 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \text{ Ом} \approx 0,1 \text{ Ом}.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Спрямуємо значення напруги, яку потрібно виміряти вольтметром (рис. 4.9), до нескінченності:  $U \rightarrow \infty$ . З фізичних міркувань зрозуміло, що в цьому випадку на додатковому опорі  $R_V$  за умови скінченної сили струму  $I_G$  повинна зосередитися зайва напруга, яка теж має дорівнювати нескінченності. Таке можливо лише за умови, якщо величина цього опору дорівнює нескінченності:  $R_V \rightarrow \infty$ . Такий самий результат впливає з одержаної

формули (3): якщо  $U \rightarrow \infty$ , то  $R_V = \frac{U}{i_0 \cdot n} - r = \infty - r = \infty$ .

Спрямуємо значення сили струму, яку потрібно виміряти амперметром (рис. 4.10), до нескінченності:  $I \rightarrow \infty$ . З фізичних міркувань зрозуміло, що в цьому разі через шунтувальний опір  $R_A$  повинен за умови скінченної напруги пройти надлишковий струм, що дорівнює нескінченності. Це можливо, якщо шунтувальний опір дорівнюватиме нулю:  $R_A = 0$ . Такий самий результат впливає з одержаної формули (5): якщо  $I \rightarrow \infty$ , то

$$R_A = \frac{ni_0 r}{I - ni_0} = \frac{ni_0 r}{\infty - ni_0} = 0.$$

Таким чином, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:** а) увімкнути послідовно резистор опором  $R_V \approx 100$  кОм; б) увімкнути шунт (резистор паралельно гальванометру) опором  $R_A \approx 0,1$  Ом.

## 4.2 Задачі для самостійного розв'язування

**4.1** Зовнішнє коло, що споживає потужність  $P = 100$  Вт, приєднане до батареї з ЕРС  $\mathcal{E} = 80$  В та внутрішнім опором  $r = 5$  Ом. Визначте силу струму в колі, напругу на зовнішньому колі та її опір.

**4.2** Визначте струм короткого замикання джерела ЕРС, якщо для зовнішнього опору 8 Ом сила струму в колі дорівнює 0,8 А, а для опору 15 Ом сила струму дорівнює 0,5 А.

**4.3** Від джерела з напругою 800 В необхідно передати споживачу потужність 10 кВт на деяку відстань. Який найбільший опір може мати лінія передачі, щоб втрати енергії в ній не перевищували 10 %?

**4.4** Елемент, що має ЕРС 1,1 В і внутрішній опір 1 Ом, замкнений на зовнішній опір 9 Ом. Знайдіть силу струму в колі, напругу в зовнішньому колі. З яким ККД працює елемент?

**4.5** Елемент з ЕРС 2 В має внутрішній опір 0,5 Ом. Знайдіть напругу всередині елемента для сили струму в колі 0,25 А. Визначте зовнішній опір кола за цих умов.

**4.6** Електродвигун, увімкнений у мережу з напругою 220 В, споживає струм, сила якого дорівнює 5 А. Визначте потужність, споживану двигуном, і його ККД, якщо опір обмотки двигуна дорівнює 6 Ом.

**4.7** Джерело ЕРС, амперметр та опір з'єднані послідовно, Якщо взяти опір, виготовлений з мідного



дроту довжиною 100 м з площею поперечного перерізу  $2 \text{ мм}^2$ , то амперметр показує силу струму 1,43 А. Якщо ж опір виготовлений з алюмінієвого дроту довжиною 57,3 м із площею поперечного перерізу  $1 \text{ мм}^2$ , то амперметр показує силу струму 1 А. Опір амперметра дорівнює 0,05 Ом. Знайдіть ЕРС джерела та його внутрішній опір. Питомий опір міді  $\rho_1 = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ , алюмінію –  $\rho_2 = 26 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ .

**4.8** До амперметра з опором 0,16 Ом приєднаний шунт з опором 0,04 Ом. Амперметр показує силу струму 0,8 А. Знайдіть силу струму в колі.

**4.9** Від генератора з ЕРС 110 В потрібно передати енергію на відстань 250 м. Споживана потужність дорівнює 1 кВт. Знайдіть мінімальний переріз мідних дротів, якщо втрати потужності в мережі не повинні перевищувати 1 %. Питомий опір міді  $\rho = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ .

**4.10** У коло паралельно увімкнені мідний та сталевий дроти однакової довжини й діаметра. Знайдіть відношення кількості теплоти, що виділяються, в цих провідниках. Питомий опір міді  $\rho_1 = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ , сталі –  $\rho_2 = 98 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ .

**4.11** За час, що дорівнює 20 с, за умови рівномірно зростаючої сили струму від нуля до деякого максимуму в провіднику опором 5 Ом виділилася кількість теплоти 4 кДж. Визначте швидкість зростання сили струму.

**4.12** Сила струму в провіднику опором 10 Ом за час, що дорівнює 50 с, рівномірно збільшується від 5 до 10 А. Визначте кількість теплоти, що виділилася за цей час у провіднику.

**4.13** У провіднику за час, що дорівнює 10 с, за умови рівномірно зростаючої сили струму від 1 до 2 А виділилася кількість теплоти 5 кДж. Визначте опір провідника.

**4.14** За час, що дорівнює 10 с, за умови рівномірно зростаючої сили струму від нуля до деякого максимуму в

провіднику опором  $25 \text{ Ом}$  виділилася кількість теплоти  $40 \text{ кДж}$ . Визначте середню силу струму в провіднику.

**4.15** За час, що дорівнює  $8 \text{ с}$ , за умови рівномірно зростаючої сили струму від нуля до деякого максимуму в провіднику опором  $8 \text{ Ом}$  виділилася кількість теплоти  $500 \text{ кДж}$ . Визначте заряд, що проходить у провіднику, якщо сила струму в початковий момент часу дорівнює нулю.

**4.16** Визначте кількість теплоти, яка виділилася за час, що дорівнює  $10 \text{ с}$ , у провіднику опором  $10 \text{ Ом}$ , якщо сила струму в ньому, рівномірно зменшуючись, змінилася від  $10 \text{ А}$  до нуля.

**4.17** Повітряний циліндричний конденсатор, що підключений до джерела напруги  $U = 200 \text{ В}$ , занурюють у вертикальному положенні в посудину з дистильованою водою зі швидкістю  $v = 5,0 \text{ мм/с}$ . Проміжок між обкладками конденсатора  $d = 2,0 \text{ мм}$ , середній радіус обкладок  $r = 50 \text{ мм}$ . Приймаючи, що  $d \ll r$ , знайти електричний струм, який проходить по дротах, що з'єднують джерело напруги та конденсатор. Діелектрична проникність дистильованої води  $\epsilon = 81$ .

**4.18** Знайти опір  $R_x$  у колі (рис. 4.11), якщо опір між точками  $A$  і  $B$  не залежить від числа ділянок кола з опорами  $2R$  та  $R$  ?

**4.19** Однорідне слабопровідне середовище з питомим опором  $\rho$  заповнює простір між двома коаксіальними ідеально провідними тонкими циліндрами. Радіуси циліндра  $a$  і  $b$ , причому  $a < b$ , довжина кожного циліндра  $l$ . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти опір середовища між циліндрами.

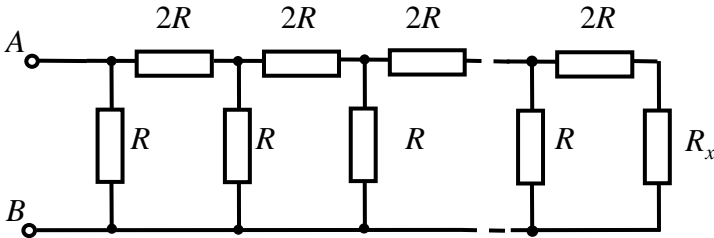


Рисунок 4.11

**4.20** Простір між двома провідними концентричними сферами, радіуси яких  $a$  і  $b$  ( $a < b$ ), заповнено однорідним слабopровідним середовищем. Ємність такої системи дорівнює  $C$ . Знайти питомий опір середовища, якщо різниця потенціалів між сферами, які відключені від зовнішньої напруги, зменшується в  $\eta$  разів за час  $\Delta t$ .

**4.21** Металева кулька радіусом  $a$  знаходиться на відстані  $l$  від нескінченної ідеальнопровідної площини. Простір навколо кульки заповнено однорідним слабopровідним середовищем із питомим опором  $\rho$ . Визначити для випадку  $a \ll l$ : а) густину струму біля провідної площини як функцію відстані від кульки, якщо різниця потенціалів між кулькою й площиною дорівнює  $U$ ; б) опір середовища між кулькою й площиною.

**4.22** Два довгих паралельних проводи знаходяться у слабopровідному середовищі з питомим опором  $\rho$ . Відстань між осями проводів  $l$ , радіус перерізу кожного проводу  $a$ . Знайти для випадку  $a \ll l$ : а) густину струму в точці, рівновіддаленій від осей проводів на відстань  $r$ , якщо різниця потенціалів між проводами дорівнює  $U$ ; б) опір середовища на одиницю довжини проводів.

**4.23** Провідник із питомим опором  $\rho$  межує з діелектриком, проникність якого  $\varepsilon$ . У точці  $A$  біля поверхні провідника електрична індукція дорівнює  $D$ ,

причому вектор  $\vec{D}$  спрямований від провідника і становить кут  $\alpha$  з нормаллю до поверхні. Знайти поверхневу густину зарядів на провіднику поблизу точки А й густину струму в провіднику поблизу цієї точки.

**4.24** Показати, що закон заломлення ліній постійного струму на межі поділу двох провідних середовищ має вигляд  $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1 = \sigma_2/\sigma_1$ , де  $\sigma_1$  й  $\sigma_2$  – провідності середовищ;  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути між лініями струму й нормаллю до поверхні поділу цих середовищ.

**4.25** Проміжок між обкладками плоского конденсатора заповнений послідовно двома діелектричними шарами 1 і 2 товщиною  $d_1$  і  $d_2$ , із проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  і питомими опорами  $\rho_1$  і  $\rho_2$ . Конденсатор перебуває під постійною напругою  $U$ , причому електричне поле спрямоване від шару 1 до шару 2. Знайти  $\sigma'$  – поверхневу густину сторонніх зарядів на межі поділу діелектричних шарів і умову, коли  $\sigma' = 0$ .

**4.26** Довгий провідник круглого перерізу радіусом  $a$  зроблено з матеріалу, питомий опір якого залежить лише від відстані  $r$  до осі провідника за законом  $\rho = \alpha/r^2$ , де  $\alpha$  – стала. Знайти: а) опір одиниці довжини такого провідника; б) напруженість електричного поля в провіднику, коли по ньому буде проходити струм  $I$ .

**4.27** Конденсатор ємністю  $C = 400$  пФ приєднали через опір  $R = 650$  Ом до джерела постійної напруги  $U_0$ . Через скільки часу напруга на конденсаторі стане  $U = 0,90 \cdot U_0$ ?

**4.28** Електричне коло складається із джерела постійної ЕРС  $\mathcal{E}$  і послідовно підключених до нього опору  $R$  і конденсатора ємністю  $C$ . Внутрішнім опором джерела можна знехтувати. У момент  $t = 0$  ємність конденсатора

швидко (стрибком) зменшили в  $\eta$  раз. Знайти струм у колі як функцію часу  $t$ .

**4.29** Амперметр і вольтметр приєднали послідовно до батареї з ЕРС  $\mathcal{E} = 6,0$  В. Якщо паралельно вольтметру підключити деякий опір, то показання вольтметра зменшиться в  $\eta = 2,0$  раза, а амперметра в стільки ж разів збільшиться. Знайти показання вольтметра після підключення опору.

**4.30** Напряга на шинах електростанції  $U = 10$  кВ, відстань від споживача  $l = 500$  км. Станція передає споживачу потужність  $P = 100$  кВт, причому втрата напруги не повинна перевищувати  $\eta = 5\%$ . Обчислити: 1) силу струму  $I$  у проводах; 2) площу поперечного перерізу  $S$  проводів; 3) масу  $m_1$  міді, що потрібна для проведення проводки. Як зміниться необхідна кількість  $m_2$  міді, якщо напругу на вході лінії збільшити в  $n = 10$  разів? Питомий опір міді  $\rho = 17$  нОм·м, її густина  $\rho_2 = 8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**4.31** Резистор з опором  $R$  і нелінійний опір, вольт-амперна характеристика якого має вигляд  $U = a\sqrt{I}$ , де  $a$  – стала, з'єднані послідовно і приєднані до джерела напруги  $U_0$ . Знайти струм у колі.

**4.32** На рисунку 4.12 показана схема потенціометра, за допомогою якого можна змінювати напругу  $U$ , що подається на деякий прилад з опором  $R$ . Потенціометр має довжину  $l$ , опір  $R_0$  і перебуває під напругою  $U_0$ . Знайти напругу  $U$  як функцію довжини  $x$ . Дослідити окремо випадок  $R \gg R_0$ .

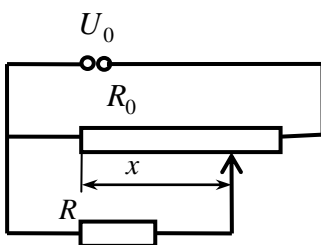


Рисунок 4.12

**4.33** Знайти струм через опір  $R$  у схемі (рис. 4.13). Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

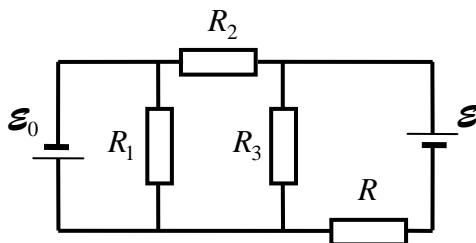


Рисунок 4.13

**4.34** Акумулятор з ЕРС  $\mathcal{E} = 2,6$  В, замкнений на зовнішній опір, дає струм  $I = 1,0$  А. За цих умов різниця потенціалів між полюсами акумулятора  $U = 2,0$  В. Знайти теплову потужність, що виділяється в акумуляторі, і потужність, що розвивають у ньому електричні сили.

**4.35** У колі, зображеному на рис. 4.14,  $\mathcal{E}_1 = 1,5$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1$  В,  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 50$  Ом і  $R_3 = 80$  Ом. Знайти силу струму, що проходить через резистор  $R_1$ .

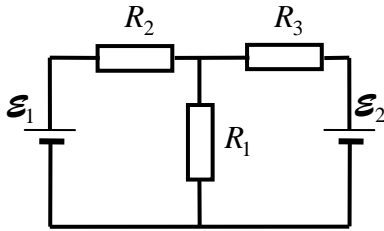


Рисунок 4.14

**4.36** Плоский конденсатор, заповнений діелектриком із проникністю  $\varepsilon = 2,1$ , втрачає за час  $\tau = 3,0$  хв половину заряду, що була передана йому. Вважаючи, що втрата заряду відбувається лише через діелектричну прокладку, знайти її питомий опір.

**4.37** Котушка радіусом  $r = 25$  см, що містить  $l = 500$  м тонкого мідного дроту, обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 300$  рад/с навколо своєї осі. Через контакти котушка підключена до балістичного гальванометра. Загальний опір всього кола  $R = 21$  Ом. Знайти питомий заряд носіїв струму в міді, якщо за умови різкого гальмування котушки через гальванометр пройшов заряд  $q = 10$  нКл.

**4.38** Однорідний пучок протонів, прискорених різницею потенціалів  $U = 600$  кВ, має круглий переріз  $r = 5$  мм. Знайти напруженість електричного поля на поверхні пучка й різницю потенціалів між поверхнею й віссю пучка, якщо сила струму  $I = 50$  мА.

## 5 ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ. МАГНЕТИКИ

### Основні формули

*Закон Біо – Савара – Лапласа*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \left[ d\vec{l} \times \vec{r} \right]}{r^3}. \quad (5 \text{ а})$$

*Індукція магнітного поля, що створюється відрізком провідника зі струмом:*

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (5 \text{ б})$$

*Індукція магнітного поля від нескінченного тонкого провідника із струмом*

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}. \quad (5 \text{ в})$$

*Індукція магнітного поля на осі колового струму*

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (5 \text{ г})$$

*Індукція магнітного поля всередині нескінченного соленоїда*

$$B = \mu_0 n I. \quad (5 \text{ г})$$

*Теорема для циркуляції вектора  $\vec{B}$  у вакуумі*

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (5 \text{ д})$$

*Теорема Гауса для вектора  $\vec{B}$*

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5 \text{ е})$$



*Сила Ампера*

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (5 \epsilon)$$

*Сила, що діє на магнітний диполь з магнітним моментом  $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$ :*

$$\vec{F} = p_m \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = (\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (5 ж)$$

*Момент сил, що діє на магнітний диполь:*

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (5 з)$$

*Робота переміщення замкнутого контура в магнітному полі*

$$A = I (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (5 и)$$

*Вектор  $\vec{H}$  та його циркуляція:*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i. \quad (5 і)$$

*Умова на межі поділу двох магнетиків:*

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (5 ї)$$

*Для магнетиків, у яких  $\vec{j} = \chi \cdot \vec{H}$ :*

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}, \quad \mu = 1 + \chi. \quad (5 й)$$

## **5.1 Приклади розв'язування задач**

### **Приклад 5.1**

Знайти індукцію магнітного поля в центрі контура, який має вигляд прямокутника, коли довжина його діагоналі дорівнює  $d = 16$  см, кут між діагоналями  $\varphi = 30^\circ$ , а струм у контурі –  $I = 5$  А.

### Розв'язання

$B_{II} - ?$

$$d = 16 \text{ см}, \varphi = 30^{\circ},$$

$$I = 5 \text{ А}$$

Шукану індукцію магнітного поля відповідно до принципу суперпозиції знаходимо як векторну суму індукцій магнітних полів, що створюються кожною стороною контура з електричним струмом (відрезком із струмом). Для знаходження індукції магнітного поля, що створюється однією стороною прямокутної рамки (відрезком зі струмом), використаємо співвідношення (5 б):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1)$$

Відповідно до принципу суперпозиції магнітна індукція  $B_{II}$  у центрі контура дорівнює

$$\vec{B}_{II} = \vec{B}_{AK} + \vec{B}_{KC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DA},$$

де  $\vec{B}_{AK}, \vec{B}_{KC}, \vec{B}_{CD}, \vec{B}_{DA}$  – магнітні індукції полів, створені відповідними відрізками прямокутного контура зі струмом  $I$  (рис. 5.1). Оскільки вектори  $\vec{B}_{AK}, \vec{B}_{KC}, \vec{B}_{CD}, \vec{B}_{DA}$  є паралельними, їх геометричну суму можна замінити алгебраїчною сумою:

$$B_{II} = B_{AK} + B_{KC} + B_{CD} + B_{DA}. \quad (2)$$

Використовуючи співвідношення (1), визначимо магнітну індукцію  $B_{AK}$ :

$$B_{AK} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot a_1} (\cos O\hat{A}K - \cos(180^{\circ} - O\hat{A}K)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a_1} \cos O\hat{A}K.$$

Оскільки  $O\hat{A}K = 90^{\circ} - \varphi/2$ , а  $a_1 = AO \cdot \cos(\varphi/2) = d/2 \cdot \cos(\varphi/2)$  (рис. 5.1), знаходимо

$$B_{AK} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin(\varphi/2)}{\pi d \cdot \cos(\varphi/2)}.$$

Зрозуміло, що  $B_{CD} = B_{AK}$ . Аналогічно знаходимо

$$B_{DA} = B_{KC} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin((180^\circ - \varphi)/2)}{\pi d \cdot \cos((180^\circ - \varphi)/2)} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \cos(\varphi/2)}{\pi d \cdot \sin(\varphi/2)}.$$

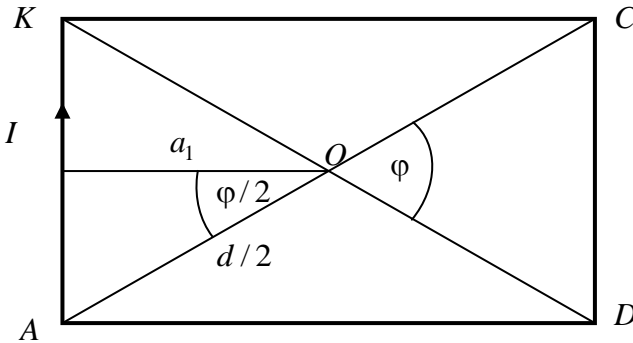


Рисунок 5.1

Тоді індукція магнітного поля (2) в центрі контура буде мати вигляд

$$\begin{aligned} B_{\Pi} &= 2 \left( \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin(\varphi/2)}{\pi d \cdot \cos(\varphi/2)} + \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \cos(\varphi/2)}{\pi d \cdot \sin(\varphi/2)} \right) = \\ &= \frac{2\mu_0 \cdot I}{\pi d \cdot \cos(\varphi/2) \cdot \sin(\varphi/2)} \cdot \left( \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) = \frac{4\mu_0 \cdot I}{\pi d \cdot \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$B_{\Pi} = \frac{4\mu_0 \cdot I}{\pi d \cdot \sin \varphi}. \quad (3)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$B_{\dot{\gamma}} = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0,16 \cdot \sin 30^0} \text{ Тл} = 0,1 \text{ мТл.}$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули (3) в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли струм  $I$ , що створює магнітне поле, дорівнює нулю. Зрозуміло, що тоді й індукція магнітного поля буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат:

$$\text{якщо } I = 0, \text{ то } B_{II} = \frac{4\mu_0 \cdot I}{\pi d \cdot \sin \varphi} \sim I = 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли довжина діагоналі прямокутної рамки  $d$  прямує до нескінченності. Зрозуміло, що магнітне поле на нескінченній відстані від його джерела буде відсутнім. Тобто індукція магнітного поля буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $d \rightarrow 0$ , то

$$B_{II} = \frac{4\mu_0 \cdot I}{\pi d \cdot \sin \varphi} \sim \frac{1}{d} \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $B_{II} = \frac{4\mu_0 \cdot I}{\pi d \cdot \sin \varphi} = 0,10 \text{ мТл.}$

### *Приклад 5.2*

Струм  $I = 11 \text{ А}$  проходить по довгому прямому провіднику, переріз якого має форму тонкого півкільця

радіусом  $R = 5$  см (рис. 5.2). Знайти індукцію магнітного поля в точці  $O$ .

**Розв'язання**

$B - ?$	Електричний
$I = 11$ А,	струм $I$ , що
$R = 5$ см	проходить по
	провіднику, пере-
	різ якого має форму тонкого
	півкільця, подамо як сукупність
	нескінченно довгих тонких

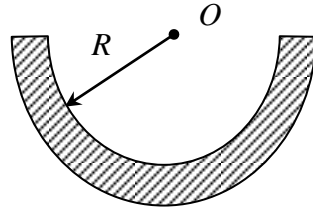


Рисунок 5.2

елементарних електричних струмів  $dI$  (рис. 5.3). Ці елементарні струми  $dI$  на осі провідника створюють магнітне поле з індукцією  $d\vec{B}$ . Відповідно до принципу суперпозиції шукану індукцію результуючого магнітного поля визначимо як суму елементарних магнітних полів  $\vec{B} = \int d\vec{B}$ . Для знаходження індукції  $d\vec{B}$  від нескінченного довгого електричного струму  $dI$  використаємо формулу для індукції магнітного поля від нескінченно довгого тонкого провідника зі струмом (5 в):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R} \tag{1}$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Безпосередньо застосувати формулу (1) для визначення індукції магнітного поля від струму  $I$ , що проходить по провіднику, переріз якого має форму тонкого півкільця, ми не можемо. Це пов'язано з тим, що струм  $I$  не є тонким (він за умовою має переріз у формі півкільця). Тому подаємо струм  $I$  як сукупність нескінченно довгих тонких елементарних електричних струмів  $dI$  (рис. 5.3), для яких маємо право застосувати формулу (1).

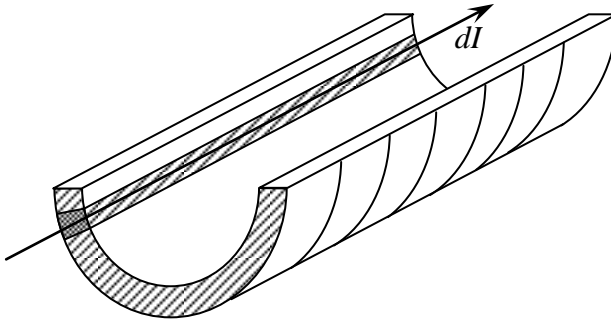


Рисунок 5.3

Знайдемо елементарний струм  $dI$ . Виділимо на півкільці його частину, що характеризується довжиною дуги  $dl$  (рис. 5.4). Через усе півкільце довжиною  $\pi R$  проходить струм  $I$ , який по півкільцю розподілений рівномірно. Тому через частину півкільця довжиною  $dl$  буде проходити струм

$$dI = \frac{I}{\pi R} \cdot dl. \quad (2)$$

Елементарний струм  $dI$  створює магнітне поле, індукція якого відповідно до формул (1) та (2) визначається співвідношенням

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{2\pi^2 R^2}. \quad (3)$$

Напрямок вектора індукції  $d\vec{B}$  магнітного поля від нескінченно довгого електричного струму визначається правилом правого гвинта і спрямований так, як показано на рис. 5.4.

Подамо вектор  $d\vec{B}$  у вигляді суми двох компонент:  $d\vec{B}_x$  – компоненти  $d\vec{B}$ , паралельної осі  $X$  (рис. 5.4);  $d\vec{B}_y$  –

компоненти  $d\vec{B}$ , паралельної осі  $Y$ . Позначимо кут між віссю  $X$  та вектором  $d\vec{B}$  через  $\alpha$  (рис. 5.4). Тоді

$$dB_x = dB \cdot \cos \alpha, \quad dB_y = dB \cdot \sin \alpha, \quad dl = R \cdot d\alpha.$$

З урахуванням (3) отримуємо

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} \cdot dl \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R \cdot d\alpha}{2\pi R \cdot \pi R} \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi^2 R} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha,$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} \cdot dl \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R \cdot d\alpha}{2\pi R \cdot \pi R} \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi^2 R} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

(4)

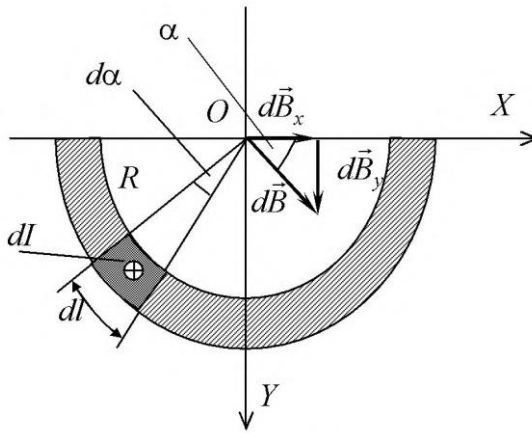


Рисунок 5.4

Відповідно до принципу суперпозиції проекції індукції магнітного поля  $\vec{B}$  знайдемо інтегруванням виразів (4). Також необхідно враховувати, що кут  $\alpha$  змінюється від  $+90^0$  до  $-90^0$ .

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi^2 R} \int_{90^\circ}^{-90^\circ} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi^2 R},$$

$$B_y = \int dB_y = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi^2 R} \int_{90^\circ}^{-90^\circ} \sin \alpha \cdot d\alpha = 0.$$

Таким чином, шукана індукція магнітного поля від електричного струму, що проходить по провіднику, переріз якого має форму тонкого півкільця, визначається співвідношенням

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi^2 R} \vec{e}_x. \quad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо

обчислення:  $B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 11}{\pi^2 \cdot 0,05} \text{ Тл} = 28 \text{ мкТл}.$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли струм  $I$ , що створює магнітне поле, дорівнює нулю. Зрозуміло, що тоді й індукція магнітного поля буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат:

якщо  $I = 0$ , то  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \sim I \rightarrow 0.$

2 Розглянемо випадок, коли радіус провідника  $R$  прямує до нескінченності. Зрозуміло, що індукція магнітного поля на нескінченній відстані від свого джерела буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $R \rightarrow \infty$ , то



$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 28 \text{ мкТл.}$

### *Приклад 5.3*

Дуже довгий прямий напівнескінченний соленоїд має радіус перерізу  $R$  й  $n$  витків на одиницю довжини. Через соленоїд проходить постійний електричний струм  $I$ . Нехай  $x$  є відстанню від деякої точки на осі соленоїда до його торця. Знайти індукцію магнітного поля на осі соленоїда як функцію  $x$ .

#### *Розв'язання*

$\frac{B = B(x) \text{ --?}}{R, n}$	<p>Для визначення індукції магнітного поля в на осі соленоїда в точці з координатою <math>x</math> подамо соленоїд у вигляді сукупності колових струмів. Індукцію магнітного поля, яку створює один такий коловий струм, можна визначити користуючись співвідношенням (5 г). Індукцію магнітного поля всього соленоїда відповідно до принципу суперпозиції знайдемо як суму (інтеграл) індукцій магнітних полів усіх колових струмів, з яких складається соленоїд.</p>
-------------------------------------	--

Реалізуємо вищевикладений план розв'язку задачі. Вісь  $X$  спрямуємо вздовж осі соленоїда (рис. 5.5). Будемо вважати, що торець напівнескінченного соленоїда збігається з початком координатної осі. Напруженість магнітного поля соленоїда будемо шукати в точці  $A$ , що характеризується координатою  $x$ . Виділимо в соленоїді малу ділянку довжиною  $dx'$ , координата якої дорівнює  $x'$ .

На цій ділянці соленоїда знаходиться  $dN = n \cdot dx'$  витків, по яких проходить струм  $I \cdot dN = I \cdot n \cdot dx'$ . Цю ділянку можемо розглядати як коловий струм  $I \cdot dN$  із радіусом  $R$ . Проекція індукції магнітного поля цього колового струму на вісь  $X$  визначається співвідношенням (5 г):

$$dB_x = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot n \cdot dx' \cdot R^2}{2(R^2 + (x - x')^2)^{3/2}} \cdot \frac{x - x'}{|x - x'|}. \quad (1)$$

У формулі (1) враховано, що відстань між точкою  $A$  та малою ділянкою соленоїда дорівнює  $|x - x'|$  (тут  $x'$  – координата малої ділянки соленоїда, має від'ємне значення, див. рис. 5.5). Точка  $A$  може знаходитись як за межами соленоїда, так і всередині соленоїда. Тому знак проекції вектора  $dB_x$  буде визначатися відношенням  $(x - x') / |x - x'|$ .

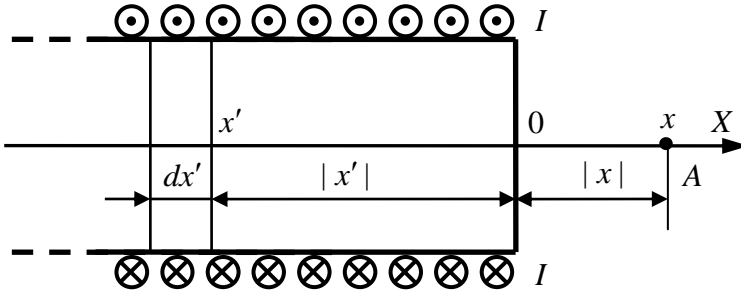


Рисунок 5.5

Для знаходження результуючої індукції магнітного поля відповідно до принципу суперпозиції проінтегруємо співвідношення (1). Розглянемо два випадки: 1) точка  $A$  знаходиться за межами соленоїда; 2) точка  $A$  знаходиться всередині соленоїда. У першому випадку проекція вектора  $dB_x$  завжди додатна і тому

$$B_x = \int_{-\infty}^0 \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot R^2}{2(R^2 + (x - x')^2)^{3/2}} dx'. \quad (2)$$

У другому випадку знак  $dB_x$  змінюється в точці  $x = x'$ . Тому

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{-\infty}^0 \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot R^2}{2(R^2 + (x - x')^2)^{3/2}} \cdot \frac{x - x'}{|x - x'|} dx' = \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot R^2}{2(R^2 + (x - x')^2)^{3/2}} dx' + \int_x^0 \frac{(-1) \cdot \mu_0 \cdot I \cdot n \cdot R^2}{2(R^2 + (x - x')^2)^{3/2}} dx'. \quad (3) \end{aligned}$$

Знайдемо інтеграл (2). Для цього замінімо змінну  $x'$  на змінну  $\alpha$  за допомогою співвідношення

$$x - x' = R \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4)$$

Знаходимо диференціал виразу (4) з урахуванням того, що тут величина  $x$  є фіксованою:

$$d(x - x') = -dx' = R \frac{d(\operatorname{ctg} \alpha)}{d\alpha} \cdot d\alpha = R \frac{(-1)}{\sin^2 \alpha} \cdot d\alpha.$$

Тобто

$$dx' = \frac{R}{\sin^2 \alpha} \cdot d\alpha. \quad (5)$$

Із виразу (4) також випливає, що

$$R^2 + (x - x')^2 = R^2 + R^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = R^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha}, \quad (6)$$

а значення  $x' = \infty$  відповідає  $\alpha_1$ :

$$x + \infty = +\infty = R \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1 \text{ або } \alpha_1 = 0. \quad (7)$$

Тоді значенню  $x' = 0$  відповідатиме  $\alpha = \alpha_2$ , тобто

$$x + 0 = R \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2, \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{x}{R}, \quad (8)$$

або

$$\cos \alpha_2 = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2}} = \frac{x/R}{\sqrt{1 + (x/R)^2}}. \quad (9)$$

Тоді, використовуючи (4)–(9), знаходимо інтеграл (2):

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n \cdot R^2}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\left(\frac{R^2}{\sin^2 \alpha}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \int_0^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot (\cos 0 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left(1 - \frac{x/R}{\sqrt{1 + (x/R)^2}}\right), \end{aligned}$$

або

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right). \quad (10)$$

Аналогічно знаходимо інтеграл (3). Візьмемо до уваги, що коли  $x' = x$ , то, як впливає з рівняння (4),

$$x - x = R \cdot \operatorname{ctg} \alpha_3, \operatorname{ctg} \alpha_3 = 0, \alpha_3 = \pi/2. \quad (11)$$

Тоді інтеграл (3) набуває значення

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left( \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cdot d\alpha - \int_{\pi/2}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha \right) = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot [(\cos 0 - \cos(\pi/2)) - (\cos \alpha_2 - \cos(\pi/2))] = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left(1 - \frac{x/R}{\sqrt{1 + (x/R)^2}}\right). \quad (12) \end{aligned}$$

Бачимо, що формула (12) збігається з формулою (10). Тому для всіх значень  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) можемо записати

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right). \quad (13)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли координата точки, в якій шукаємо індукцію магнітного поля, прямує до  $+\infty$ . Зрозуміло, що індукція магнітного поля на нескінченній відстані від соленоїда буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $x \rightarrow +\infty$ , то

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left( 1 - \frac{\infty}{\sqrt{R^2 + \infty^2}} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot (1 - 1) = 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли координата точки, в якій шукаємо індукцію магнітного поля, прямує до  $-\infty$ . Зрозуміло, що в цьому разі точка  $A$  буде знаходитись усередині нескінченно довгого з обох боків соленоїда, індукція магнітного поля якого, як відомо, дорівнює  $B = \mu_0 \cdot I \cdot n$ . Із розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $x \rightarrow -\infty$ , то

$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left( 1 - \frac{(-\infty)}{\sqrt{R^2 + (-\infty)^2}} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot (1 + 1) = \mu_0 \cdot I \cdot n.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $B_x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2} \cdot \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right).$

### Приклад 5.4

Тонкий диск радіусом  $R$ , який не проводить електричного струму і рівномірно заряджений з одного боку електричним зарядом із поверхневою густиною  $\sigma$ , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти: а) індукцію магнітного поля в центрі диска; б) магнітний момент диска.

#### Розв'язання

$B, p_m - ?$ $R, \omega, \sigma$	Щоб визначити індукцію магнітного поля та магнітний момент, подамо рухомий диск з електричним зарядом як систему тонких кілець, уздовж яких проходять елементарні електричні струми. Індукцію магнітного поля, що створюється таким елементарним коловим струмом, визначимо за допомогою співвідношення (5 г). Для знаходження індукції результуючого магнітного поля використаємо принцип суперпозиції. Елементарний коловий струм характеризується елементарним магнітним моментом, який знайдемо використовуючи його визначення. Результуючий магнітний момент отримаємо шляхом підсумовування елементарних магнітних моментів.
-------------------------------------	--

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Як зазначалося вище, подамо рухомий диск з електричним зарядом як систему тонких кілець, уздовж яких проходять елементарні електричні струми. Знайдемо величину такого елементарного струму. Виділимо на диску тонке кільце радіусом  $r$  та шириною  $dr$  (рис. 5.6). Площа цього тонкого кільця дорівнює  $dS = 2\pi r \cdot dr$ . Заряд цього кільця буде дорівнювати  $dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$ . Зрозуміло, що за час, який дорівнює періоду обертання  $T = 2\pi / \omega$ , увесь цей заряд  $dq$  пройде через поперечний переріз кільця. Таким

чином, елементарна сила електричного струму, що проходить по такому тонкому кільцю, буде дорівнювати

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi/\omega} = \sigma \omega r dr. \quad (1)$$

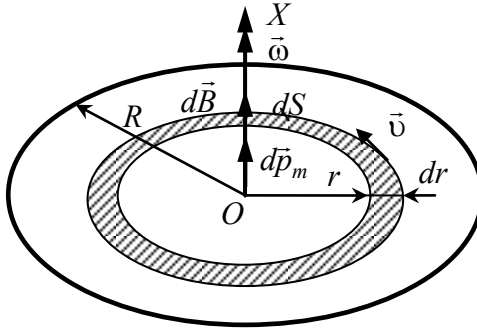


Рисунок 5.6

Індукція магнітного поля, що створюється на осі колового струму (в нашому випадку в центрі колового струму), визначається співвідношенням (5 г):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot dI \cdot r^2}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2 \cdot r} \vec{e}_x. \quad (2)$$

Тут взяли до уваги, що індукцію магнітного поля визначаємо в центрі колового струму (рис. 5.6), тобто  $x = 0$ . Підставимо у (2) формулу (1) та отримаємо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2r} \vec{e}_x = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} \vec{e}_x = \frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2}. \quad (3)$$

У співвідношенні (3) взяли до уваги, що  $\omega \cdot \vec{e}_x = \vec{\omega}$  (рис. 5.6). Далі проводимо інтегрування (підсумовування) і знаходимо результуючу індукцію магнітного поля в центрі диска:

$$\vec{B} = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \vec{\omega} dr}{2} = \frac{\mu_0 \sigma \cdot \vec{\omega} \cdot R}{2}. \quad (4)$$

Визначимо магнітний момент зарядженого диска, що обертається. Як було показано вище, елементарна сила електричного струму, що проходить по кільцю радіусом  $r$  та шириною  $dr$  (рис. 5.6), визначається за формулою (1). Магнітний момент цього колового струму згідно з визначенням дорівнює

$$d\vec{p}_m = dI \cdot \pi r^2 = \pi r^2 \cdot \sigma \vec{\omega} dr. \quad (5)$$

Якщо взяти до уваги напрямки векторів (рис. 5.6), формулу (5) можемо записати у вигляді

$$d\vec{p}_m = \pi r^2 \cdot \sigma \vec{\omega} dr. \quad (6)$$

Далі проводимо інтегрування (підсумовування) і знаходимо результуючий магнітний момент диска:

$$\vec{p}_m = \int_0^R \pi r^2 \cdot \sigma \vec{\omega} dr = \pi R^4 \sigma \vec{\omega} / 4. \quad (7)$$

Таким чином одержали формули (4) та (7), що є розв'язками задачі:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \sigma \cdot R}{2} \cdot \vec{\omega}, \quad \vec{p}_m = \frac{\pi \cdot \sigma \cdot R^4}{4} \cdot \vec{\omega}.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли кутова швидкість обертання диска  $\omega$  прямує до нуля. У цьому разі електричний заряд рухатися не буде. Як відомо, нерухомий електричний заряд магнітного поля не створює. Це означає, що в такій ситуації індукція магнітного поля



повинна бути такою, що дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $\omega \rightarrow 0$ , то

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \sigma \cdot R}{2} \cdot \omega \sim \omega \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли поверхнева густина електричного заряду прямує до нуля. Це означає, що рухомих електричних зарядів на диску не буде. Тобто еквівалентний електричний струм буде дорівнювати нулю. Зрозуміло, що в цій ситуації магнітний момент, який визначається електричним струмом, теж буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $\sigma \rightarrow 0$ , то  $p_m = \frac{\pi \cdot \sigma \cdot R^4}{4} \cdot \omega \sim \sigma \rightarrow 0$ .

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \sigma \cdot R}{2} \cdot \vec{\omega}$ ,  $\vec{p}_m = \frac{\pi \cdot \sigma \cdot R^4}{4} \cdot \vec{\omega}$ .

### Приклад 5.5

Два довгі прямі взаємно перпендикулярні провідники знаходяться один від одного на відстані  $a$ . По кожному провіднику проходить струм  $I$ . Знайти максимальне значення сили Ампера на одиницю довжини провідника в цій системі.

#### Розв'язання

$\left( \frac{dF}{dl} \right)_m - ?$	$a, I$	<p>Для визначення сили Ампера, що діє на одиницю довжини провідника, використаємо закон Ампера (5 е) й формулу для індукції магнітного поля довгого прямого провідника зі струмом (5 в). Далі з'ясуємо, за яких умов одержаний вираз має максимальне значення.</p>
--------------------------------------	--------	--

Реалізуємо план розв'язування задачі. Знайдемо силу Ампера  $d\vec{F}$ , що діє на елемент довжиною  $d\vec{l}$  зі струмом  $I_1 = I$  першого провідника з боку магнітного поля з індукцією  $\vec{B}$ , яке створює другий провідник зі струмом  $I_2 = I$  (рис. 5.7). Як відомо (див. формулу (5 ɛ)), ця сила дорівнює

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (1)$$

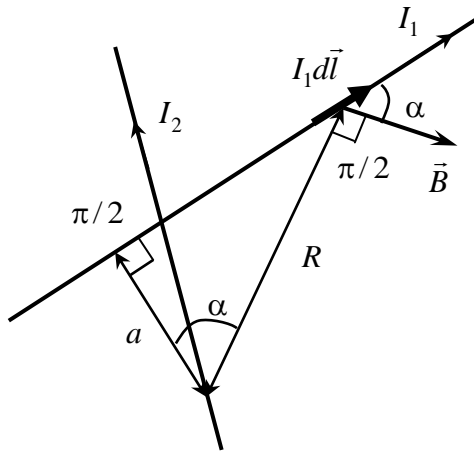


Рисунок 5.7

Індукція магнітного поля, яке створює нескінченно довгий другий провідник зі струмом, визначається співвідношенням (5 в):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R}, \quad (2)$$

де  $R$  – відстань від точки, в якій визначається індукція магнітного поля  $B$ , до провідника (довжина перпендикуляра до провідника). Силкові лінії цього магнітного поля, як відомо, мають вигляд концентричних

кіл із центром на осі провідника і пов'язані з напрямком електричного струму правилом правого гвинта. Ця властивість дозволяє визначити напрямок індукції магнітного поля в точці, де знаходиться елемент струму  $I_1 d\vec{l} = Id\vec{l}$  першого провідника (рис. 5.7).

Визначимо модуль вектора  $|d\vec{F}|$ , використовуючи співвідношення (1) та (2):

$$|d\vec{F}| = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I^2 \cdot dl}{2\pi \cdot R} \cdot \sin \alpha. \quad (3)$$

У цій формулі  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{B}$  й  $d\vec{l}$  (рис. 5.7). Звідси знаходимо, що сила Ампера, яка діє на одиницю довжини провідника, дорівнює

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot R} \cdot \sin \alpha. \quad (4)$$

Проаналізуємо одержаний результат. Зазначимо, що різні ділянки першого провідника із струмом  $I_1 d\vec{l}$  характеризуються різними значеннями  $R$  та  $\alpha$ . Зрозуміло, що між величинами  $R$  та  $\alpha$  є зв'язок. Знайдемо його. З рис. 5.7 випливає (співвідношення між сторонами в прямокутному трикутнику), що

$$R = a / \cos \alpha, \quad (5)$$

де  $a$  – відстань між провідниками, відома з умови задачі. Тоді формула (4) буде мати вигляд

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi \cdot a} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi \cdot a} \cdot \sin(2\alpha). \quad (6)$$

Зрозуміло, що  $dF/dl$  залежить лише від кута  $\alpha$  й буде максимальним за умови максимального значення  $\sin(2\alpha)$ . Максимальне значення синуса, як відомо, дорівнює одиниці ( $\sin(2\alpha) = 1$ ). Тоді максимальне значення сили

Ампера на одиницю довжини провідника буде дорівнювати

$$\left(\frac{dF}{dl}\right)_m = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi \cdot a}. \quad (7)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли сила струму  $I$ , що проходить по першому та другому проводах, прямує до нуля. Зрозуміло, що в цьому випадку сила Ампера буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $I \rightarrow 0$ , то

$$\left(\frac{dF}{dl}\right)_m = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi \cdot a} \sim I^2 \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли відстань між провідниками  $a$  прямує до нескінченності. Зрозуміло, що магнітне поле на нескінченній відстані від провідника буде дорівнювати нулю. Тому й сила, що діє з боку одного провідника зі струмом на інший, в цій ситуації теж буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $a \rightarrow \infty$ , то

$$\left(\frac{dF}{dl}\right)_m = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi \cdot a} \sim \frac{1}{a} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\left(\frac{dF}{dl}\right)_m = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4\pi \cdot a}.$

### Приклад 5.6

Квадратна рамка зі струмом  $I = 0,90$  А розміщена в одній площині з довгим прямим провідником, по якому проходить струм  $I_0 = 5,0$  А. Сторона рамки  $a = 8,0$  см. Вісь рамки, що проходить через середини протилежних сторін і паралельна проводу, знаходиться від нього на відстані, яка у  $\eta = 1,5$  разів більша за сторону рамки. Знайти: а) силу Ампера, що діє на рамку; б) механічну роботу, яку потрібно виконати для повороту рамки навколо її осі на  $180^\circ$ , якщо електричні струми підтримувати незмінними.

#### Розв'язання

$F, A' - ?$
$I = 0,9$ А,
$I_0 = 5$ А,
$a = 8$ см,
$\eta = 1,5$ ,
$\Delta\varphi = 180^\circ$

Довгий прямий провідник зі струмом  $I_0$  створює навколо себе магнітне поле, індукція якого  $\vec{B}$  (рис. 5.8). У цьому магнітному полі знаходиться квадратна рамка, по якій проходить струм  $I$ . Зрозуміло, що на сторони рамки, які знаходяться в магнітному полі, діють сили Ампера, які визначаються формулою (5 є). Геометрична сума цих сил і буде шуканою силою  $F$ , що діє на рамку. Механічна робота  $A'$ , яку потрібно виконати для повороту рамки на  $\Delta\varphi = 180^\circ$ , дорівнює за модулем та протилежна за знаком роботі  $A$ , яку виконують для повороту рамки сили магнітного поля:

$$A' = -A. \quad (1)$$

Саму ж роботу магнітного поля  $A$  знайдемо, використовуючи співвідношення (5 и).

Реалізуємо план розв'язування задачі. Спочатку знайдемо силу, що діє на рамку з боку магнітного поля, яке створюється довгим провідником із струмом  $I_0$ . Як

зазначалося вище, сила, що діє на цю рамку, дорівнює геометричній сумі сил, що діють на сторони квадратної рамки (рис. 5.8):

$$\vec{F} = \vec{F}_{AK} + \vec{F}_{KC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA}. \quad (2)$$

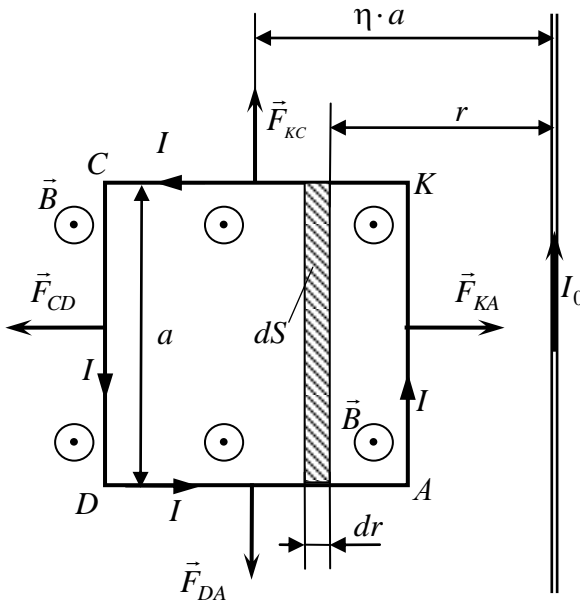


Рисунок 5.8

Відповідно до закону Ампера (5 є) можемо записати:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{AK} &= I \int_{AK} [d\vec{l} \times \vec{B}], & \vec{F}_{KC} &= I \int_{KC} [d\vec{l} \times \vec{B}], \\ \vec{F}_{CD} &= I \int_{CD} [d\vec{l} \times \vec{B}], & \vec{F}_{DA} &= I \int_{DA} [d\vec{l} \times \vec{B}], \end{aligned} \quad (3)$$

де інтегрування виконуємо вздовж відповідних сторін рамки. Модуль індукції магнітного поля  $B$ , створеного довгим провідником зі струмом  $I_0$ , дорівнює (5 в):

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}, \quad (4)$$

де  $r$  – відстань від провідника зі струмом  $I_0$  до точки, в якій визначаємо індукцію магнітного поля  $B$ . Напрямок цього поля  $\vec{B}$  (рис. 5.8) знаходимо за правилом правого гвинта.

Визначимо силу  $\vec{F}_{AK}$ , що діє на сторону рамки  $AK$ . Ця сторона паралельна проводу. Тому відстань від кожного елемента  $dl$  сторони  $AK$  до довгого провідника є однаковою (рис. 5.8) і рівною  $(\eta \cdot a - a/2)$ . У всіх точках цієї сторони значення індукції магнітного поля є однаковим як за модулем, так і за напрямком і дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi(\eta \cdot a - a/2)}. \quad (5)$$

Тоді з (3) з урахуванням (5) отримаємо

$$F_{AK} = I \cdot B \int_{AK} dl = I \cdot B \cdot |AK| = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I_0 \cdot a}{2\pi(\eta \cdot a - a/2)} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I_0}{2\pi(\eta - 1/2)}. \quad (6)$$

У цій формулі використано те, що, вектори  $\vec{B}$  й  $d\vec{l}$  на стороні  $AK$  перпендикулярні один до одного. Напрямок вектора  $\vec{F}_{AK}$  визначається правилом лівої руки (рис. 5.8).

Аналогічно знаходимо силу  $\vec{F}_{CD}$ :

$$F_{CD} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot I_0}{2\pi(\eta + 1/2)}. \quad (7)$$

Напрямок вектора  $\vec{F}_{CD}$  (рис. 5.8) визначається за правилом лівої руки.

Розглянемо сили  $\vec{F}_{KC}$  й  $\vec{F}_{DA}$ , які діють на сторони  $KC$  та  $DA$ . Струми в цих сторонах рамки проходять у протилежних напрямках, розміщені ці сторони однаково відносно довгого провідника. Тому сили, що діють на ці сторони, будуть однаковими за модулем та протилежними за напрямком. Геометрична сума цих сил буде дорівнювати нулю:

$$\vec{F}_{KC} + \vec{F}_{DA} = 0. \quad (8)$$

З урахуванням (6)–(8), а також того, що напрямки сил  $\vec{F}_{AK}$  і  $\vec{F}_{CD}$  протилежні (рис. 5.8), із співвідношення (2) знаходимо

$$F = |\vec{F}_{AK} + \vec{F}_{CD}| = |\vec{F}_{AK}| - |\vec{F}_{CD}| = \frac{2\mu_0 I \cdot I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)}. \quad (9)$$

Визначимо механічну роботу  $A'$ , яку потрібно виконати для повороту рамки на  $180^\circ$  відносно її осі. Як зазначалося вище, ця механічна робота рівна за модулем та протилежна за знаком роботі  $A$ , яку виконують для повороту рамки магнітні сили (1). Саму ж роботу магнітного поля  $A$  знайдемо використовуючи співвідношення (5 і):

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (10)$$

де  $\Phi_1$  й  $\Phi_2$  – потоки індукції магнітного поля через рамку із струмом  $I$  на початку та після повороту цієї рамки. Для визначення потоку індукції магнітного поля через рамку розіб'ємо площу рамки на елементарні площі:

$$dS = dr \cdot a, \quad (11)$$



як це показано на рис. 5.8. Індукція магнітного поля  $\vec{B}$ , що пронизує елементарну площу  $dS$  у всіх точках цієї площі постійна й визначається виразом (4). Напрямок вектора  $d\vec{S}$  визначаємо за напрямком переміщення правого гвинта, що обертається за напрямком струму  $I$  в рамці.

У початковому стані рамки напрямок вектора  $d\vec{S}$  збігається за напрямком із вектором  $\vec{B}$ , а в кінцевому положенні рамки ці вектори протилежні. Тому, використовуючи вирази (4), (11) та означення потоку вектора, отримуємо

$$\Phi_1 = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B \cdot dS = \int_{\eta^{-a/2}}^{\eta^{a/2}} \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot r} a \cdot dr = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \cdot \ln \frac{2\eta+1}{2\eta-1},$$

$$\Phi_2 = -\int B \cdot dS = -\Phi_1. \quad (12)$$

Тоді з формул (1), (10) та (12) знаходимо

$$A' = 2I \cdot \Phi_1 = \frac{\mu_0 I_0 \cdot I \cdot a}{\pi} \ln \frac{2\eta+1}{2\eta-1}. \quad (13)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (9) та (13), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$F = \frac{2\mu_0 I \cdot I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,90 \cdot 5,0}{\pi \cdot (4 \cdot 1,5^2 - 1)} \text{ Н} = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ Н},$$

$$A' = \frac{\mu_0 I_0 \cdot I \cdot a}{\pi} \ln \frac{2\eta+1}{2\eta-1} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,9 \cdot 5 \cdot 0,08}{\pi} \ln \frac{2 \cdot 1,5+1}{2 \cdot 1,5-1} \text{ Дж} = 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли струм у рамці  $I$  прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді шукані і сила  $F$ , і робота  $A'$  будуть дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $I \rightarrow 0$ , то

$$F = \frac{2\mu_0 \cdot I \cdot I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} \sim I \rightarrow 0; \quad A' = \frac{\mu_0 I_0 \cdot I \cdot a}{\pi} \ln \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \sim I \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли струм у довгому провіднику  $I_0$  прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді магнітне поле, в якому знаходиться рамка зі струмом, зникне. Отже, шукані сила  $F$  та робота  $A'$  будуть дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $I_0 \rightarrow 0$ , то

$$F = \frac{2\mu_0 \cdot I \cdot I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} \sim I_0 \rightarrow 0; \quad A' = \frac{\mu_0 I_0 \cdot I \cdot a}{\pi} \ln \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \sim I_0 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункові формули (9) та (13) не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $F = \frac{2\mu_0 \cdot I \cdot I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)} = 0,45 \text{ мкН},$

$$A' = \frac{\mu_0 I \cdot I_0 \cdot a}{\pi} \ln \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} = 0,29 \text{ мкДж}.$$

### **Приклад 5.7**

У середині однорідного довгого прямого провідника круглого перерізу є кругла довга циліндрична порожнина, вісь якої паралельна осі провідника й зміщена відносно останньої на величину  $\vec{a}$  (рис. 5.9). По провіднику проходить постійний струм густини  $\vec{j}$ . Знайти індукцію магнітного поля всередині порожнини.

### Розв'язання

$\frac{B \text{ -?}}{\vec{a}, \vec{j}}$  | Струм, що проходить у провіднику з порожниною, магнітне поле якого потрібно знайти, можна замінити системою двох струмів: струму із густиною  $\vec{j}_1 = \vec{j}$ , який проходить у такому самому провіднику, але без порожнини, та струму із густиною  $\vec{j}_2 = -\vec{j}$ , що проходить у просторі, де знаходиться порожнина (рис. 5.9). Тоді результуюча густина цих двох електричних струмів у просторі, де знаходиться порожнина, буде дорівнювати нулю:  $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j} + (-\vec{j}) = 0$ . А це якраз і відповідає випадку, що розглядається в задачі.

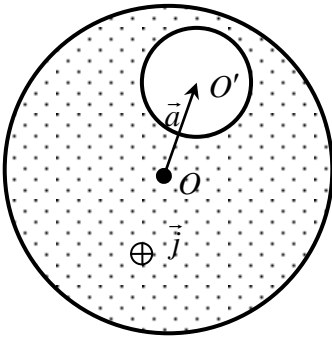


Рисунок 5.9

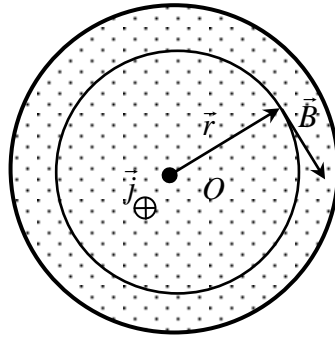


Рисунок 5.10

Зрозуміло, що магнітне поле в порожнині відповідно до принципу суперпозиції буде дорівнювати сумі магнітних полів:  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ , створених струмами з густиною  $\vec{j}_1 = \vec{j}$  та  $\vec{j}_2 = -\vec{j}$ . Поля  $\vec{B}_1$  та  $\vec{B}_2$  створюються струмами, що мають циліндричну симетрію. Тому для їх визначення використаємо теорему для циркуляції індукції магнітного поля.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Спочатку визначимо індукцію магнітного поля всередині однорідного довгого прямого провідника круглого перерізу (рис. 5.10), уздовж якого проходить постійний струм із густиною  $\vec{j}$  (порожнина відсутня). Як зазначалося вище, через те що електричний струм розподілений рівномірно по перерізу провідника, з міркувань симетрії можна зробити висновок, що індукція магнітного поля в усіх точках, рівновіддалених від осі провідника на відстань  $r$ , однакова за модулем і спрямована перпендикулярно до векторів  $\vec{r}$  та  $\vec{j}$  (рис. 5.10). Тому контур інтегрування для визначення циркуляції вектора  $\vec{B}$  беремо у вигляді кола радіусом  $r$  із центром на осі провідника у точці  $O$  (рис. 5.10). Циркуляція вектора  $\vec{B}$  у такому контурі буде мати вигляд

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B \cdot dl = B \cdot \oint_{\Gamma} dl = B \cdot 2\pi r . \quad (1)$$

Відповідно до теореми Гауса про циркуляцію індукції магнітного поля (5 д) можемо записати

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i , \quad (2)$$

де  $\sum_i I_i$  – струм, що пронизує контур інтегрування.

Зрозуміло, що цей струм дорівнює добутку площі контура інтегрування на густина електричного струму, який через нього проходить (рис. 5.10)

$$\sum_i I_i = \pi r^2 \cdot j . \quad (3)$$

Підставляємо вирази (1) та (3) в (2) і знаходимо

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \pi r^2 \cdot j ,$$

або

$$B = \mu_0 \cdot r \cdot j / 2. \quad (4)$$

Якщо врахувати напрямки векторів (рис. 5.10), то формулу (4) можемо записати у вигляді

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j} \times \vec{r}]}{2}. \quad (5)$$

Як зазначалося вище, струм, що проходить у провіднику з порожниною, можна подати як сукупність двох струмів: струму з густиною  $\vec{j}_1 = \vec{j}$ , який проходить у такому самому провіднику, але без порожнини, та струму із густиною струму  $\vec{j}_2 = -\vec{j}$ , що проходить у просторі, де знаходилася

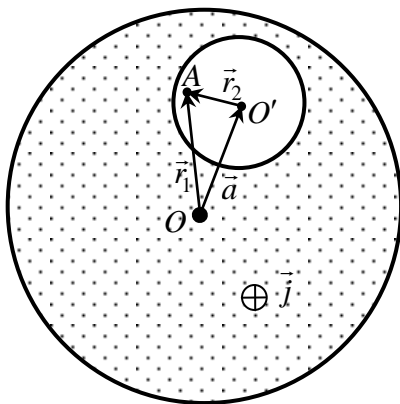


Рисунок 5.11

порожнина (рис. 5.11). Магнітні поля  $\vec{B}_1$  та  $\vec{B}_2$ , що створюють відповідно струми  $\vec{j}_1$  та  $\vec{j}_2$ , у довільній точці порожнини можна визначити за допомогою формули (5):

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j}_1 \times \vec{r}_1]}{2}, \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j}_2 \times \vec{r}_2]}{2}, \quad (6)$$

де  $\vec{r}_1$  – радіус-вектор, проведений від центра струму  $j_1$  (точки  $O$ ) до точки  $A$ , в якій шукаємо індукцію магнітного поля;  $\vec{r}_2$  – радіус-вектор, проведений від центра струму  $j_2$  (точки  $O'$ , що є центром порожнини) до точки  $A$  (рис. 5.11). Тоді індукція результуючого магнітного поля буде дорівнювати

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j}_1 \times \vec{r}_1]}{2} + \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j}_2 \times \vec{r}_2]}{2} = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j} \times \vec{r}_1]}{2} + \frac{\mu_0 \cdot [(-\vec{j}) \times \vec{r}_2]}{2} = \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{2} = \frac{\mu_0 \cdot [\vec{j} \times \vec{a}]}{2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Тут взяли до уваги, що  $\vec{j}_1 = \vec{j}$ ,  $\vec{j}_2 = -\vec{j}$  та, як випливає з рис. 5.11,  $\vec{a} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Таким чином,

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot [\vec{j} \times \vec{a}] / 2. \quad (8)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли густина електричного струму  $j$ , що створює магнітне поле, дорівнює нулю. Зрозуміло, що тоді й індукція магнітного поля буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $j = 0$ , то

$$|\vec{B}| = |\mu_0 \cdot [\vec{j} \times \vec{a}] / 2| \sim j \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\vec{B} = \mu_0 \cdot [\vec{j} \times \vec{a}] / 2$ .

### *Приклад 5.8*

Прямий нескінченно довгий провідник із струмом  $I$  лежить у площині поділу двох непровідних середовищ із магнітними проникностями  $\mu_1$  й  $\mu_2$ . Знайти модуль вектора індукції магнітного поля в усьому просторі як функцію відстані  $r$  до провідника. Мати на увазі, що силові лінії вектора  $\vec{B}$  є колами із центром на осі провідника.

$$\frac{B = B(r) \text{ --?}}{\mu_1, \mu_2, I}$$

**Розв'язання**

Виходячи з того, що силові лінії вектора  $\vec{B}$  є колами з центром на осі провідника, для визначення залежності модуля вектора індукції магнітного поля  $B$  від відстані  $r$  використаємо теорему про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (див. формулу (5 і)). Також візьмемо до уваги зв'язок між векторами  $\vec{H}$  й  $\vec{B}$  (див. формулу (5 й)).

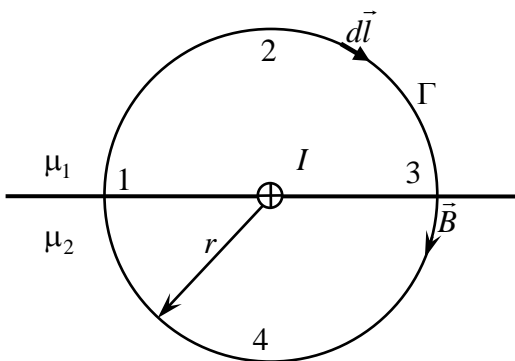


Рисунок 5.12

Перейдемо до реалізації плану розв'язування задачі. Відповідно до теореми про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (5 і) можна записати

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i, \tag{1}$$

де як контур інтегрування, як зазначалося вище, беремо коло радіусом  $r$  із центром на осі провідника (рис. 5.12). Зрозуміло, що в цьому випадку алгебраїчна сила струмів, що проходять через контур інтегрування, буде такою, що дорівнює струму провідника  $I$  :

$$\sum_i I_i = I. \quad (2)$$

Знайдемо циркуляцію вектора  $\vec{H}$ . Подамо цю циркуляцію у вигляді суми двох інтегралів: уздовж півкіл 123 та 341 (рис. 5.12):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{123} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{341} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}. \quad (3)$$

Як відомо, індукція і напруженість магнітного поля пов'язані між собою співвідношенням (5 й):

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}. \quad (4)$$

Тому для напруженості магнітного поля у двох середовищах можемо записати

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0 \cdot \mu_1}, \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0 \cdot \mu_2}, \quad (5)$$

де індексом «1» та «2» позначені величини відповідно 1-го та 2-го середовищ. Як відомо з умови задачі, лінії вектора  $\vec{B}$  є колами із центром на осі провідника. Це означає, що в кожній точці цього кола (зокрема, й у кожній точці контура інтегрування) вектор  $\vec{B}$  є дотичним до цього кола і має один і той самий модуль. Тобто в кожній точці контура інтегрування

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} &= \frac{\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}}{\mu_0 \cdot \mu_1} = \frac{B_1 \cdot dl \cdot \cos(0^\circ)}{\mu_0 \cdot \mu_1} = \frac{B \cdot dl}{\mu_0 \cdot \mu_1}, \\ \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} &= \frac{\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}}{\mu_0 \cdot \mu_2} = \frac{B_2 \cdot dl \cdot \cos(0^\circ)}{\mu_0 \cdot \mu_2} = \frac{B \cdot dl}{\mu_0 \cdot \mu_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

У співвідношеннях (6) взяли до уваги, що в кожній точці кола модуль вектора  $\vec{B}$  має одне й те саме значення (зокрема, й у різних середовищах):



$$B_1 = B_2 = B.$$

Підставляємо (6) в (3) і знаходимо

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{123} \frac{B \cdot dl}{\mu_0 \cdot \mu_1} + \int_{341} \frac{B \cdot dl}{\mu_0 \cdot \mu_2} = \frac{B}{\mu_0 \mu_1} \cdot \int_{123} dl + \frac{B}{\mu_0 \mu_2} \cdot \int_{341} dl =$$

$$= \left( \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_1} + \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_2} \right) \cdot \pi r. \quad (7)$$

Тут враховано, що довжина півкола дорівнює  $\pi r$ , тобто

$$\int_{123} dl = \int_{341} dl = \pi r.$$

Далі підставляємо (7) та (2) в (1) і знаходимо

$$B = B(r) = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi r}. \quad (8)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли електричний струм провідника  $I$  прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді й індукція магнітного поля, що створюється цим струмом, буде прямувати до нуля. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $I \rightarrow 0$ , то

$$B = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi r} \sim I \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли відстань від провідника до точки, в якій шукаємо індукцію магнітного поля,  $r$  прямує до нескінченності. Зрозуміло, що індукція магнітного поля на нескінченній відстані від його джерела буде прямувати до нуля. З розрахункової формули

впливає такий самий результат: якщо  $r \rightarrow \infty$ , то

$$B = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi r} \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $B(r) = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi r}.$

### Приклад 5.9

На залізне кільце середнього діаметра  $D = 25$  см намотано  $N = 1200$  витків проводу. У кільці зроблено поперечний проріз, внаслідок чого утворився повітряний проміжок завширшки  $h = 5$  мм. За умови, коли по обмотці проходить струм силою  $I = 2,5$  А, напруженість магнітного поля у проміжку буде  $H_1 = 570$  кА/м. Визначити магнітну проникність  $\mu$  заліза за цих умов. Розсіянням поля біля країв проміжку знехтувати.

#### Розв'язання

$\mu - ?$ <hr/> $D = 25$ см, $h = 5$ мм, $N = 1200$ , $I = 2,5$ А, $H_1 = 570$ кА/м	Для розв'язування задачі використаємо теорему про циркуляцію напруженості магнітного поля в речовині (5 і) та умови на межі поділу двох магнетиків (5 ї). Також візьмемо до уваги зв'язок між векторами $\vec{H}$ й $\vec{B}$ (5 й).
--	--

Перейдемо до реалізації плану розв'язування задачі. Відповідно до теореми про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (див. формулу (5 і)) можемо записати

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i. \quad (1)$$

За контур інтегрування  $\Gamma$  візьмемо коло діаметром  $D$ , центр якого збігається з центром залізного кільця (рис. 5.13, штрихова лінія). Зрозуміло, що кожний виток із струмом буде проходити через цей контур інтегрування (рис. 5.13). Тому алгебраїчна сума струмів, що проходять через контур інтегрування, буде дорівнювати добутку струму провідника  $I$  на кількість витків проводу:

$$\sum_i I_i = N \cdot I. \quad (2)$$

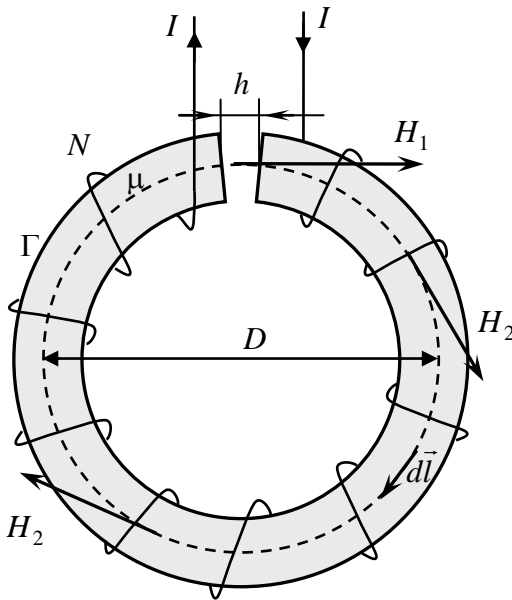


Рисунок 5.13

Знайдемо циркуляцію вектора  $\vec{H}$ . Подамо цю циркуляцію у вигляді суми двох інтегралів: у повітряному проміжку та всередині залізного кільця (рис. 5.13):

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}, \quad (3)$$

де індекс «1» відповідає величинам, що характеризують повітряний проміжок ширини  $h$ ; індекс «2» відповідає величинам, що характеризують залізне кільце. Виходячи із симетрії розміщення електричних струмів, можемо стверджувати, що лінія напруженості магнітного поля є колом із центром у центрі залізного кільця. Тобто вектори  $\vec{H}_1$  та  $\vec{H}_2$  в кожній точці контура інтегрування дотичні до нього. Це означає, що

$$\vec{H}_1 d\vec{l} = H_1 dl \cos(0^0) = H_1 dl, \quad \vec{H}_2 d\vec{l} = H_2 dl \cos(0^0) = H_2 dl.$$

Тоді вираз (3) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_{\Gamma_1} H_1 dl + \int_{\Gamma_2} H_2 dl = H_1 \int_{\Gamma_1} dl + H_2 \int_{\Gamma_2} dl = \\ &= H_1 \cdot h + H_2 \cdot (\pi D - h). \end{aligned} \quad (4)$$

У цій формулі враховано, що як у межах повітряного проміжку  $H_1$  не змінюється, так і в межах залізного кільця  $H_2$  теж не змінюється. Також зрозуміло, що довжини частин контура інтегрування дорівнюють (рис. 5.13):

$$\int_{\Gamma_1} dl = h, \quad \int_{\Gamma_2} dl = \pi D - h.$$

Із рисунка 5.13 випливає, що лінії напруженості магнітного поля входять до межі поділу двох магнетиків повітря – залізне кільце перпендикулярне до цієї межі. Як відомо, нормальні компоненти вектора індукції магнітного поля під час переходу через межу поділу двох магнетиків не змінюються (див. формулу (5 і)). Це означає, що

$$B_{1n} = B_{2n},$$

або

$$\mu_1\mu_0H_1 = \mu_2\mu_0H_2.$$

Останню рівність одержали використовуючи формулу (5 й). Тобто

$$B_{1n} = \mu_1 \cdot \mu_0 \cdot H_{1n} = \mu_1\mu_0H_1, \quad B_{2n} = \mu_2 \cdot \mu_0 \cdot H_{2n} = \mu_2\mu_0H_2.$$

Магнітну проникність повітря візьмемо такою, що дорівнює одиниці:  $\mu_1 = 1$ , магнітну проникність заліза, яку потрібно знайти в задачі, позначимо через  $\mu$  ( $\mu_2 = \mu$ ). Тоді

$$H_2 = H_1 / \mu. \quad (5)$$

Далі підставляємо (2) й (4) в (1), використовуємо (5) і одержуємо

$$H_1 \cdot h + H_1 \cdot (\pi D - h) / \mu = N \cdot I$$

або

$$\mu = \frac{H_1 \cdot (\pi D - h)}{N \cdot I - H_1 \cdot h}. \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\mu = \frac{H_1 \cdot (\pi D - h)}{N \cdot I - H_1 \cdot h} = \frac{570 \cdot 10^3 (\pi \cdot 0,25 - 0,005)}{1200 \cdot 2,5 - 570 \cdot 10^3 \cdot 0,005} = 2966.$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо аналогічну до дослідженої модель. Замінімо залізо в кільці повітрям і зменшимо проміжок  $h$  до нуля. Зрозуміло, що в такій моделі магнітна проникність речовини в тороїді, тобто в повітрі, дорівнює одиниці. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $h = 0$ , то

$$\mu = \frac{H_1 \cdot (\pi D - h)}{N \cdot I - H_1 \cdot h} = \frac{H_1 \pi D}{N \cdot I} = \frac{H_1}{(N / \pi D) \cdot I} = \frac{H_1}{n \cdot I} = \frac{n \cdot I}{n \cdot I} = 1. \quad (7)$$

Якщо  $h = 0$ , то система, що розглядається, перетвориться на тороїд. Для тороїда, як відомо, напруженість магнітного поля визначається співвідношенням  $H_2 = n \cdot I$ . Через те що і в проміжку, і в тороїді знаходиться повітря, напруженості магнітного поля в тороїді та в проміжку будуть однаковими:  $H_1 = H_2 = nI$ , що й було використано в (7).

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\mu = \frac{H_1 \cdot (\pi D - h)}{N \cdot I - H_1 \cdot h} = 2966.$

## 5.2 Задачі для самостійного розв'язування

**5.1** По двох нескінченно довгих провідниках, відстань між якими  $d = 10$  см, проходять струми в одному напрямку силою  $I = 20$  А кожний. Знайти індукцію  $B$  магнітного поля в точці, розміщеній на відстані  $r_1 = 8$  см від одного та  $r_2 = 6$  см від іншого провідника.

**5.2** Відстань  $d$  між двома довгими паралельними провідниками дорівнює 5 см. По провідниках у протилежних напрямках проходять однакові струми  $I = 30$  А. Знайти індукцію  $B$  магнітного поля в точці, що знаходиться на відстані  $r_1 = 4$  см від одного й  $r_2 = 3$  см від іншого провідника.

**5.3** Визначити магнітну індукцію  $B$  поля, що створює відрізок прямого провідника зі струмом  $I = 30$  А, в точці, яка рівновіддалена від кінців відрізка й знаходиться на

відстані  $r_0 = 20$  см від його середини. Довжина відрізка дорівнює  $l = 60$  см.

**5.4** По двох довгих прямолінійних провідниках, які знаходяться один від одного на відстані  $r = 5$  см, проходять однакові електричні струми  $I = 10$  А. Визначити магнітну індукцію  $B$  поля, яке створюється цими струмами в точці, що лежить посередині між провідниками, для випадків: а) провідники паралельні, струми проходять в одному напрямку; б) провідники паралельні, струми проходять у протилежних напрямках.

**5.5** По тонкому провідному кільцю радіусом  $R = 10$  см проходить струм  $I = 80$  А. Знайти магнітну індукцію  $B$  у точці, рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань  $r = 20$  см.

**5.6** Довгий провідник зі струмом  $I = 50$  А зігнутий під кутом  $\alpha = 2\pi/3$ . Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці  $A$  (рис. 5.14). Відстань  $d = 5$  см.

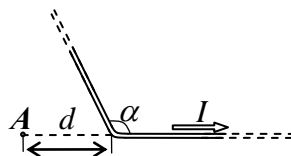


Рисунок 5.14

**5.7** По обмотці дуже короткої котушки радіусом  $r = 16$  см проходить струм  $I = 5$  А. Скільки витків  $N$  проводу намотано на котушку, якщо індукція  $B$  магнітного поля в її центрі дорівнює 1 мТл?

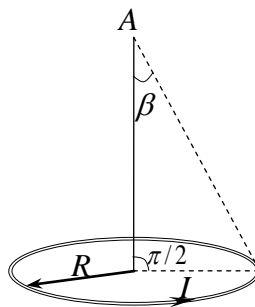


Рисунок 5.15

**5.8** По провіднику у вигляді тонкого кільця радіусом  $R = 10$  см проходить струм. Чому дорівнює сила струму  $I$ , якщо магнітна індукція  $B$  поля в точці  $A$  (рис. 5.15) дорівнює 1 мкТл? Кут  $\beta = 10^\circ$ .

**5.9** Котушка довжиною  $l = 20$  см містить  $N = 100$  витків. По обмотці котушки проходить струм  $I = 5$  А. Діаметр  $d$  котушки дорівнює 20 см. Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці, що лежить на осі котушки на відстані  $a = 10$  см від її кінця.

**5.10** Довгий прямий соленоїд із проводу діаметром  $d = 0,5$  мм намотаний так, що витки щільно прилягають один до одного. Знайти індукцію  $B$  магнітного поля всередині соленоїда, якщо сила струму  $I = 4$  А? Товщиною ізоляції знехтувати.

**5.11** Обмотка котушки діаметром  $d = 10$  см складається з тонкого проводу, намотаного в один шар практично впритул. Визначити мінімальну довжину  $l_{\min}$  котушки, якщо магнітна індукція всередині її відрізняється від магнітної індукції нескінченного соленоїда, що містить таку саму кількість витків на одиницю довжини, не більше ніж на 0,5%. Сила струму, що проходить по обмотці, в обох випадках однакова.

**5.12** Два нескінченно довгі прямі провідники схрещені під прямим кутом (рис. 5.16). По проводах проходять струми  $I_1 = 80$  А й  $I_2 = 60$  А. Відстань  $d$  між проводами дорівнює 10 см. Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці  $A$ , віддаленій від обох провідників на однакову відстань.

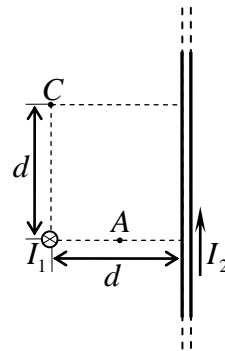


Рисунок 5.16

**5.13** По двох нескінченно довгих прямих провідниках, схрещених під прямим кутом, проходять струми  $I_1 = 30$  А та  $I_2 = 40$  А. Відстань  $d$  між провідниками дорівнює 20 см. Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці  $C$



(рис. 5.16), однаково віддаленій від обох провідників на відстань, що дорівнює  $d$ .

**5.14** Нескінченно довгий прямий провідник зігнутий під прямим кутом. По провіднику проходить струм  $I = 100$  А. Обчислити магнітну індукцію  $B$  у точках, що лежать на бісектрисі кута й віддалені від вершини кута на  $a = 10$  см.

**5.15** По контуру у вигляді рівностороннього трикутника проходить струм  $I = 40$  А. Довжина  $a$  сторони трикутника дорівнює 30 см. Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці перетину висот.

**5.16** По контуру у вигляді квадрата проходить струм  $I = 50$  А. Довжина сторони квадрата дорівнює  $a = 20$  см. Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці перетину діагоналей.

**5.17** По тонкому кільцю проходить струм. Не змінюючи сили струму в провіднику, йому надали форму квадрата. У скільки разів змінилася магнітна індукція в центрі контура?

**5.18** Електрон у незбудженому атомі водню рухається навколо ядра по колу радіусом  $r = 53$  пм. Обчислити силу еквівалентного колового струму  $I$  та індукцію  $B$  магнітного поля в центрі кола.

**5.19** Струм силою  $I$  проходить по порожньому провідному циліндру вздовж його осі. Внутрішній радіус циліндра  $R_1$ , зовнішній –  $R_2$ . Густина струму однакова по перерізу циліндра. Знайти індукцію  $B$  магнітного поля на відстанях від осі: а)  $r < R_1$ ; б)  $R_1 < r < R_2$ ; в)  $r > R_2$ .

**5.20** Обчислити циркуляцію вектора індукції магнітного поля вздовж контура, що охоплює струми  $I_1 = 10$  А та  $I_2 = 15$  А, які проходять в одному напрямку, і струм  $I_3 = 20$  А, що проходить у протилежному напрямку.

**5.21** По провіднику рівномірно розподілений струм густиною  $j = 2 \text{ MA/m}^2$ . Знайти циркуляцію вектора напруженості по колу радіусом  $R = 5 \text{ мм}$ , яке проходить усередині провідника й зорієнтовано таким чином, що його площина становить кут  $\alpha = 30^\circ$  з вектором густини струму.

**5.22** Квадратна рамка розміщена в одній площині з довгим прямим провідником так, що дві її сторони паралельні провіднику. По рамці й провіднику проходять однакові струми  $I = 1 \text{ кА}$ . Визначити силу  $F$ , що діє на рамку, якщо найближча до провідника сторона рамки знаходиться на відстані, яка дорівнює її стороні.

**5.23** Тонкий провідник у вигляді дуги є третиною кільця радіусом  $R = 15 \text{ см}$ . Він знаходиться в однорідному магнітному полі  $B = 20 \text{ мТл}$ . По провіднику проходить струм  $I = 30 \text{ А}$ . Площина, в якій лежить дуга, перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Визначити силу  $F$ , що діє на провідник.

**5.24** Шинами генератора є два паралельні мідні провідники великого перерізу довжиною  $l = 2 \text{ м}$  кожна, що знаходяться одна від одної на відстані  $d = 20 \text{ см}$ . Визначити силу  $F$  взаємного відштовхування шин у випадку короткого замикання, коли по них проходять струми  $I = 10 \text{ кА}$ .

**5.25** По трьох паралельних прямих проводах, що знаходяться на однаковій відстані  $a = 10 \text{ см}$  один від одного, проходять однакові струми  $I = 100 \text{ А}$ . У двох проводах напрямки струмів збігаються. Обчислити силу  $F$ , яка діє на відрізок довжиною  $l = 1 \text{ м}$ , кожного провідника.

**5.26** По двох тонких проводах, які мають форму кільця радіусом  $R = 10 \text{ см}$ , проходять однакові струми по  $I = 10 \text{ А}$ . Знайти силу  $F$  взаємодії цих кілець, якщо

площини, в яких лежать кільця, паралельні, а відстань між центрами кілець дорівнює  $d = 1$  мм.

**5.27** По двох однакових квадратних плоских контурах зі стороною  $a = 20$  см проходять однакові струми  $I = 10$  А. Визначити силу  $F$  взаємодії контурів, якщо відстань  $d$  між відповідними сторонами контурів дорівнює 2 мм.

**5.28** Магнітний момент тонкого провідного кільця  $p_m = 5$  А·м<sup>2</sup>. Визначити магнітну індукцію  $\vec{B}$  у точці  $A$ , яка знаходиться на осі кільця на відстані  $r = 20$  см від точок кільця.

**5.29** Стрижень довжиною  $l = 20$  см заряджений рівномірно розподіленим зарядом із лінійною густиною  $\tau = 0,2$  мкКл/м. Стрижень обертається з частотою  $n = 10$  с<sup>-1</sup> відносно осі, що перпендикулярна до стрижню та проходить через його кінець. Визначити магнітний момент  $p_m$ , обумовлений обертанням стрижня.

**5.30** Дуже коротка котушка містить  $N = 1000$  витків тонкого проводу. Котушка має квадратний переріз зі стороною  $a = 10$  см. Знайти магнітний момент  $p_m$  котушки, якщо сила струму  $I = 1$  А.

**5.31** Індукція  $B$  магнітного поля в центрі колового витка дорівнює  $B = 0,25$  мТл. Магнітний момент витка дорівнює  $p_m = 1$  А·м<sup>2</sup>. Обчислити силу струму  $I$  у витку й радіус витка  $R$ .

**5.32** Електрон в атомі водню рухається навколо ядра по коловій орбіті деякого радіуса. Знайти відношення магнітного моменту  $p_m$  еквівалентного колового струму до моменту імпульсу  $L$  орбітального руху електрона. Заряд електрона та його масу вважати відомими. Показати напрямки векторів  $\vec{p}_m$  і  $\vec{L}$ .

**5.33** По тонкому стрижню довжиною  $l = 20$  см рівномірно розподілений заряд  $Q = 240$  нКл. Стрижень обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega = 10$  рад/с відносно осі, яка перпендикулярна до стрижня і проходить через його середину. Визначити: а) магнітний момент  $p_m$ , обумовлений обертанням зарядженого стрижня; 2) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу ( $p_m/L$ ), якщо маса стрижня  $m = 12$  г.

**5.34** Тонке кільце радіусом  $R = 10$  см має заряд  $Q = 10$  нКл. Кільце рівномірно обертається із частотою  $n = 10$  с<sup>-1</sup> відносно осі, яка перпендикулярна до площини кільця й проходить через його центр. Знайти: а) магнітний момент  $p_m$  колового струму, який створює кільце під час обертання; б) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу ( $p_m/L$ ), якщо маса  $m$  кільця дорівнює 10 г.

**5.35** Виток радіусом  $R = 5$  см перебуває в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 2,5$  мТл. Площина витка утворює кут  $\alpha = 60^\circ$  із напрямком поля. По витку проходить струм  $I = 4$  А. Знайти механічний момент  $M$ , що діє на виток.

**5.36** Виток діаметром  $d = 20$  см може обертатися навколо вертикальної осі, що збігається з одним із діаметрів витка. Виток установили в площині магнітного меридіана й пустили по ньому струм  $I = 10$  А. Знайти механічний момент  $M$ , який потрібно прикласти до витка, щоб утримати його в початковому положенні. Горизонтальна складова магнітної індукції поля Землі дорівнює  $B_r = 20$  мкТл.

**5.37** Рамка гальванометра довжиною  $a = 4$  см і шириною  $b = 1,5$  см, що має  $N = 200$  витків тонкого проводу, знаходиться в магнітному полі з індукцією  $B = 0,1$  Тл. Площина рамки паралельна лініям індукції.

Знайти: а) механічний момент  $M$ , що діє на рамку, якщо по витку проходить струм  $I = 1$  мА; б) магнітний момент  $p_m$  рамки для цього струму.

**5.38** Коротка котушка площею поперечного перерізу  $S = 150$  см<sup>2</sup> має  $N = 200$  витків проводу, по якому проходить струм  $I = 4$  А. Котушка поміщена в однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 0,01$  Тл. Визначити магнітний момент  $p_m$  котушки, а також момент сили  $M$ , який діє на неї з боку поля, якщо вісь котушки становить кут  $\alpha = 60^\circ$  із лініями індукції.

**5.39** На осі контура зі струмом, магнітний момент якого  $p_m = 10$  мА·м<sup>2</sup>, знаходиться інший такий самий контур. Вектор магнітного моменту другого контура перпендикулярний до осі. Обчислити механічний момент  $M$ , що діє на другий контур. Відстань  $d$  між контурами дорівнює 50 см. Розміри контурів малі порівняно з відстанню між ними.

**5.40** Магнітне поле створене провідником у вигляді кільця радіусом  $R = 20$  см, по якому проходить струм  $I = 100$  А. На осі кільця розміщене інше кільце малих розмірів з магнітним моментом  $p_m = 10$  мА·м<sup>2</sup>. Площини кільця паралельні, а відстань  $d$  між центрами дорівнює 1 см. Знайти силу, що діє на мале кільце.

**5.41** Магнітне поле створене нескінченно довгим провідником зі струмом  $I = 100$  А. На відстані  $a = 10$  см від провідника знаходиться магнітний диполь, вектор магнітного моменту якого лежить в одній площині з провідником і перпендикулярний до нього, а модуль дорівнює  $p_m = 1$  мА·м<sup>2</sup>. Визначити силу  $F$ , що діє на магнітний диполь.

**5.42** Довгий прямий соленоїд, що має  $n = 5$  витків на кожний сантиметр довжини, розміщений перпендикулярно

до площини магнітного меридіана. Всередині соленоїда, в його середній частині, знаходиться магнітна стрілка, що встановилася в магнітному полі Землі. Коли по соленоїду пустили струм, стрілка відхилилася на кут  $\alpha = 60^\circ$ . Знайти силу струму  $I$ . Горизонтальну складову магнітної індукції поля Землі  $B_r$  прийняти такою, що дорівнює 20 мкТл.

**5.43** На виток зі струмом  $I = 2$  А, що розміщений між полюсами магніту, діє максимальний механічний момент  $M_{\max} = 6,5$  мкН. Радіус витка  $r = 10$  см. Визначити магнітну індукцію  $B$  поля між полюсами магніту. Дією магнітного поля Землі знехтувати.

**5.44** Плоский квадратний контур зі стороною довжиною  $a = 10$  см, по якому проходить струм  $I = 100$  А, вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 1$  Тл. Визначити роботу  $A$ , яку виконують зовнішні сили під час повороту контура відносно осі, що проходить через середину його протилежних сторін, на кут: а)  $\varphi_1 = 90^\circ$ ; б)  $\varphi_2 = 3^\circ$ . Під час повороту контура сила струму в ньому підтримується незмінною.

**5.45** Знайти магнітний потік  $\Phi$ , який створює соленоїд з перерізом  $S = 10$  см<sup>2</sup>, якщо він має  $n = 10$  витків на кожний сантиметр його довжини, за умови сили струму  $I = 20$  А.

**5.46** Соленоїд довжиною  $l = 1$  м і перерізом  $S = 16$  см<sup>2</sup> містить  $N = 2000$  витків. Обчислити повний потік індукції магнітного поля  $\Psi$  за умови сили струму в обмотці  $I = 10$  А.

**5.47** Квадратна рамка зі стороною  $a = 20$  см лежить в одній площині з нескінченно довгим прямим провідником, по якому проходить струм  $I = 100$  А. Рамка розміщена так, що найближча до провідника сторона паралельна до

нього й знаходиться на відстані  $l = 10$  см від провідника. Визначити магнітний потік  $\Phi$ , що пронизує рамку.

**5.48** Квадратна рамка зі стороною  $a = 20$  см розміщена в одній площині з прямим нескінченно довгим провідником зі струмом. Відстань  $l$  від провідника до середини рамки дорівнює  $1$  м. Обчислити відносну похибку, яку буде допущено під час розрахунку магнітного потоку, що пронизує рамку, якщо поле в межах рамки вважати однорідним, а магнітну індукцію такою, що дорівнює її значенню в центрі рамки.

**5.49** Тороїд квадратного перерізу містить  $N = 1000$  витків. Зовнішній діаметр  $D$  тороїда дорівнює  $40$  см, внутрішній  $d = 20$  см. Знайти магнітний потік  $\Phi$  у тороїді, якщо сила струму в обмотці дорівнює  $10$  А. Врахувати, що магнітне поле тороїда неоднорідне.

**5.50** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,01$  Тл знаходиться прямий провідник довжиною  $l = 8$  см, розміщений перпендикулярно до ліній індукції. По провіднику проходить струм  $I = 2$  А. Під дією сил поля провідник перемістився на відстань  $s = 5$  см. Знайти роботу  $A$  сил поля.

**5.51** Плоский контур, площа  $S$  якого дорівнює  $300$  см<sup>2</sup>, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,01$  Тл. Площина контура перпендикулярна до ліній індукції. У контурі підтримується незмінний струм  $I = 10$  А. Визначити роботу  $A$  зовнішньої сили з переміщенням контура зі струмом в область простору, де магнітне поле відсутнє.

**5.52** По провіднику, зігнутому у вигляді квадрата зі стороною  $a = 10$  см, проходить струм  $I = 20$  А, сила якого підтримується незмінною. Площина квадрата становить кут  $\alpha = 20^\circ$  з лініями індукції однорідного магнітного поля  $B = 0,1$  Тл. Обчислити роботу  $A$ , яку необхідно

виконати для того, щоб перемістити провідник за межі поля.

**5.53** По кільцю, виготовленому з тонкого гнучкого провідника радіусом  $R = 10$  см, проходить струм  $I = 100$  А. Перпендикулярно до площини кільця збуджене магнітне поле з індукцією  $B = 0,1$  Тл, що збігається за напрямком з індукцією власного магнітного поля кільця. Визначити роботу  $A$  зовнішньої сили, яку необхідно виконати, щоб деформувати провідник та надати йому форми квадрата. Сила струму підтримується постійною. Роботою проти пружних сил знехтувати.

**5.54** Виток, по якому проходить струм  $I = 20$  А, вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,016$  Тл. Діаметр  $d$  витка дорівнює 10 см. Визначити роботу  $A$ , яку потрібно виконати, щоб повернути виток на кут  $\alpha = \pi/2$  відносно осі, яка збігається з діаметром.

**5.55** Квадратна рамка зі стороною  $a = 10$  см, по якій проходить струм  $I = 200$  А, вільно встановилася в однорідному магнітному полі  $B = 0,2$  Тл. Визначити роботу, яку необхідно виконати під час повороту рамки навколо осі, що лежить у площині рамки й перпендикулярна до ліній магнітної індукції, на кут  $\theta = 2\pi/3$ .

**5.56** На залізному осерді у вигляді тора міститься обмотка з  $N = 700$  витків. Середній діаметр тора  $d = 20$  см, площа поперечного перерізу  $S = 6$  см<sup>2</sup>. Визначити потік магнітної індукції  $\Phi$  через поперечний переріз осердя, магнітну проникність  $\mu$  заліза, а також намагніченість  $J$  за умови сили струму  $I = 0,5$  А. Для розв'язування задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.



**5.57** Залізне осердя перебуває в однорідному магнітному полі напруженістю  $H = 1 \text{ кА/м}$ . Визначити індукцію  $B$  магнітного поля в осерді та магнітну проникність  $\mu$  заліза. Для розв'язування задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.58** На залізне кільце намотано в один шар  $N = 500$  витків провідника. Середній діаметр  $d$  кільця дорівнює 25 см. Визначити магнітну індукцію  $B$  у залізі та магнітну проникність  $\mu$  заліза, якщо сила струму  $I$  в обмотці: а) 0,5 А; б) 2,5 А. Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

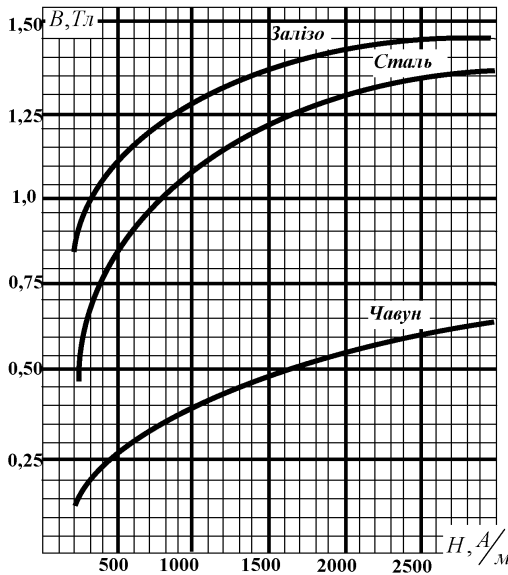


Рисунок 5.17

**5.59** Замкнений соленоїд (тороїд) зі сталевим осердямає  $n = 10$  витків на кожний сантиметр довжини. По соленоїду проходить струм  $I = 2 \text{ А}$ . Обчислити магнітний потік  $\Phi$  в осерді, якщо його переріз  $S = 4 \text{ см}^2$ . Для

розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.60** Соленоїд намотаний на чавунне кільце перерізом  $S = 5 \text{ см}^2$ . Для сили струму  $I = 1 \text{ А}$  магнітний потік  $\Phi = 250 \text{ мкВб}$ . Визначити число  $n$  витків соленоїда на  $1 \text{ см}$  середньої лінії кільця. Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.61** Електромагніт виготовлений у вигляді тороїда. Осердя тороїда із середнім діаметром  $d = 51 \text{ см}$  має вакуумний проміжок довжиною  $l_0 = 2 \text{ мм}$ . Обмотка тороїда рівномірно розподілена по всій його довжині. У скільки разів зменшиться індукція магнітного поля в проміжку, якщо, не змінюючи сили струму в обмотці, проміжок збільшити в 3 рази? Розсіюванням магнітного поля поблизу проміжку знехтувати. Магнітну проникність  $\mu$  осердя вважати постійною і брати такою, що дорівнює 800.

**5.62** У залізному осерді соленоїда індукція  $B = 1,3 \text{ Тл}$ . Залізне осердя замінили сталевим. Визначити, у скільки разів необхідно змінити силу струму в обмотці соленоїда, щоб індукція в осерді залишилася незмінною. Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.63** Сталеве осердя тороїда, довжина  $l$  якого по середній лінії дорівнює  $1 \text{ м}$ , має вакуумний проміжок довжиною  $l_0 = 4 \text{ мм}$ . Обмотка містить  $n = 8$  витків на  $1 \text{ см}$ . Знайти силу струму  $I$ , якщо індукція  $B$  у проміжку буде дорівнювати  $1 \text{ Тл}$ . Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.64** Обмотка тороїда, що має сталеве осердя з вузьким вакуумним проміжком, містить  $N = 1000$  витків. По обмотці проходить струм  $I = 1 \text{ А}$ . Знайти довжину  $l_0$

вакуумного проміжку, якщо індукція  $B$  магнітного поля в ньому буде дорівнювати  $0,5$  Тл. Довжина  $l$  тороїда по середній лінії дорівнює  $1$  м. Для розв'язання задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.65** Довжина  $l$  чавунного тороїда по середній лінії дорівнює  $1,2$  м, переріз  $S = 20$  см<sup>2</sup>. По обмотці тороїда проходить струм, що створює у вузькому вакуумному проміжку магнітний потік  $\Phi = 0,5$  мВб. Довжина  $l_0$  проміжку дорівнює  $8$  мм. Яка повинна бути довжина проміжку, щоб магнітний потік у ньому за умови тієї самої сили струму збільшився удвічі?

**5.66** У тороїді із залізним осердям, довжина якого по середній лінії  $l_1 = 1$  м, зроблено поперечний проріз, внаслідок цього утворився повітряний проміжок шириною  $l_2 = 3$  мм. По обмотці тороїда, що має  $N = 1300$  витків, пустили струм, у результаті чого індукція в проміжку стала  $B_2 = 1$  Тл. Визначити силу струму. Для розв'язку задачі необхідно використати графік, зображений на рис. 5.17.

**5.67** Після вимкнення струму в обмотці тороїда, параметри якого наведені в попередній задачі, залишкова індукція в проміжку стала  $B = 4,2$  мТл. Визначити залишкову намагніченість  $J$  осердя, а також напруженість  $H$  поля в залізі.

**5.68** Струм  $I$  проходить по тонкому провіднику, що має вигляд правильного  $n$ -кутника, який вписано в коло радіусом  $R$ . Знайти магнітну індукцію в центрі цього контура. Дослідити одержаний вираз, якщо  $n \rightarrow \infty$ .

**5.69** Знайти індукцію магнітного поля в точці  $O$  контура зі струмом  $I$ , який показано: а) на рис. 5.18 а; радіуси  $a$  і  $b$ , а також кут  $\varphi$  вважати відомими; б) на рис. 5.18 б; радіус  $a$  і сторону  $b$  вважати відомими.

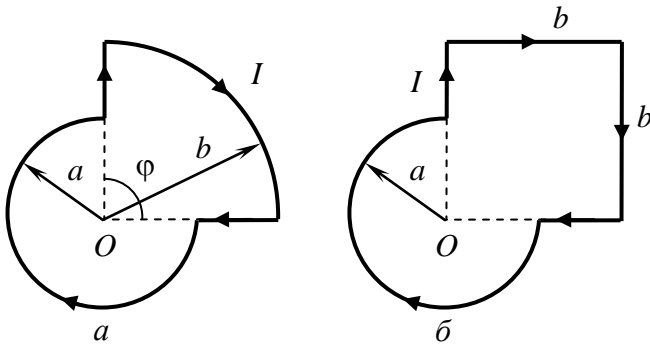


Рисунок 5.18

**5.70** Струм  $I$  проходить уздовж довгої тонкостінної труби радіусом  $R$ , яка має по всій довжині поздовжній проріз шириною  $h$ . Знайти індукцію магнітного поля всередині труби, якщо  $h \ll R$ .

**5.71** Визначити індукцію магнітного поля в точці  $O$  за умови, що провідник зі струмом  $I$  має вигляд, який показано: а) на рис. 5.19 а; б) на рис. 5.19 б; в) на рис. 5.19 в. Радіус вигнутої частини провідника дорівнює  $R$ , прямолінійні ділянки провідника вважати дуже довгими.

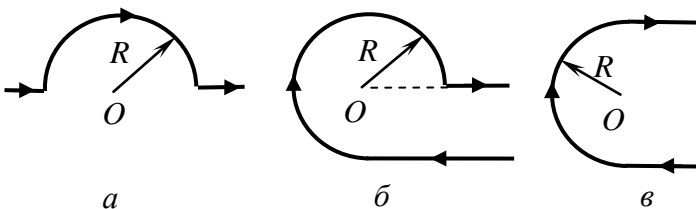


Рисунок 5.19

**5.72** Довгий провідник зі струмом  $I = 5,0$  А зігнуто під прямим кутом. Знайти індукцію магнітного поля в

точці, що розміщена на відстані  $l = 35$  см від площини провідника і знаходиться на перпендикулярі до провідників, що проходить через точку згину.

**5.73** Визначити індукцію магнітного поля струму, рівномірно розподіленого: а) по площині з лінійною густиною  $\vec{i}$ ; б) по двох паралельних площинах із лінійними густинами  $\vec{i}$  й  $-\vec{i}$ .

**5.74** Постійний струм  $I$  проходить по довгому прямому провіднику й далі розходить симетрично по провідній площині, перпендикулярній до провідника. Знайти індукцію магнітного поля в усіх точках простору.

**5.75** По однорідному прямому провіднику, радіус перерізу якого  $R$ , проходить постійний струм густини  $\vec{j}$ . Знайти індукцію магнітного поля цього струму в точці, положення якої відносно осі провідника визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ . Магнітна проникність усюди  $\mu = 1$ .

**5.76** Котушка з одним шаром обмотки (соленоїд) має довжину  $l$  і радіус перерізу  $R$ . Число витків на одиницю довжини  $n$ . Знайти індукцію магнітного поля в центрі котушки, якщо струм у котушці дорівнює  $I$ .

**5.77** Обмоткою довгого прямого соленоїда з радіусом перерізу  $R = 2,5$  см служить тонка стрічка-провідник шириною  $h = 2,0$  см, намотана в один шар практично впритул. По стрічці проходить струм  $I = 5,0$  А. Знайти індукцію магнітного поля всередині й поза соленоїдом як функцію відстані  $r$  від його осі.

**5.78** Непровідна сфера  $R = 50$  мм, заряджена рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma = 10,0$  мкК/м<sup>2</sup>, обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 70$  рад/с, що проходить через її центр. Знайти магнітну індукцію в центрі сфери.

**5.79** Заряд  $q$  рівномірно розподілено по об'єму однорідної кулі масою  $m$  і радіусом  $R$ , що обертається

навколо осі, яка проходить через його центр, із кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти відповідний магнітний момент і його відношення до механічного моменту.

**5.80** Тонке кільце радіусом  $R = 10$  см має заряд  $q = 10$  нКл. Кільце рівномірно обертається з частотою  $n = 10$  с<sup>-1</sup> відносно осі, що збігається з одним із діаметрів кільця. Знайти: а) магнітний момент  $p_m$  колового струму, який створює кільце під час обертання; б) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу ( $p_m/L$ ), якщо маса  $m$  кільця дорівнює 10 г.

**5.81** Тонкостінна металева сфера радіусом  $R = 10$  см має рівномірно розподілений по її поверхні заряд  $Q = 3$  мКл. Сфера рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 10$  рад/с відносно осі, що проходить через центр сфери. Знайти: а) магнітний момент  $p_m$  колового струму, який створює сфера під час обертання; б) відношення магнітного моменту до моменту імпульсу ( $p_m/L$ ), якщо маса  $m$  сфери дорівнює 100 г.

**5.82** Провід у вигляді тонкого півкільця радіусом  $R = 10$  см міститься в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 50$  мТл. По проводу проходить струм силою  $I = 10$  А. Знайти силу  $F$ , що діє на провід, якщо лінії індукції: а) лежать у площині півкільця перпендикулярно до його діаметра; б) перпендикулярні до площини півкільця.

**5.83** Знайти модуль і напрямок сили, що діє на одиницю довжини тонкого провідника зі струмом  $I = 8,0$  А в точці  $O$ , якщо провідник

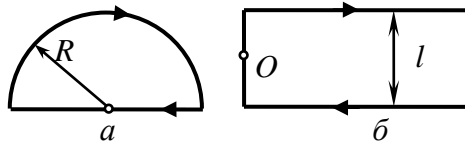


Рисунок 5.20

зігнути, як показано: а) на рис. 5.20а, радіус закруглення  $R = 10$  см; б) на рис. 5.20б, відстань між довгими паралельними один одному ділянками провідника  $l = 20$  см.

**5.84** Постійний струм  $I = 14$  А проходить по довгому прямому провіднику, переріз якого має форму тонкого півкілця радіусом  $R = 5,0$  см. Такий самий струм проходить у протилежному напрямку по тонкому провіднику,

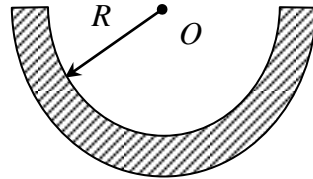


Рисунок 5.21

розміщеному на «осі» першого провідника (точка  $O$  на рис. 5.21). Знайти силу магнітної взаємодії цих провідників на одиницю їх довжини.

**5.85** Тонке провідне кільце зі струмом  $I = 40$  А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 80$  мТл. Площина кільця перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Радіус кільця дорівнює  $R = 20$  см. Знайти силу  $F$ , яка розтягує кільце.

**5.86** По двох довгих тонких паралельних провідниках, один з яких має вигляд смуги шириною  $b$  (рис. 5.22), проходять постійні струми  $I_1$  й  $I_2$ . Відстань між провідниками  $a$ , вони лежать в одній площині. Знайти силу магнітної взаємодії між провідниками на одиницю їх довжини.

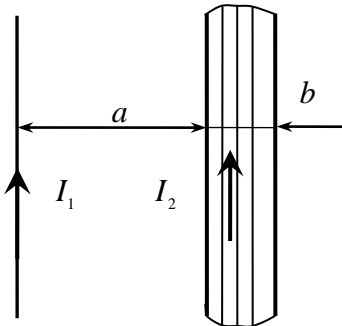


Рисунок 5.22

**5.87** Уздовж довгого тонкостінного круглого циліндра радіусом  $R = 5$  см проходить струм  $I = 50$  А. Який тиск зазнають стінки циліндра?

**5.88** Невеликий виток із струмом знаходиться на відстані  $r$  від довгого прямого провідника зі струмом  $I$ . Магнітний момент витка дорівнює  $\vec{p}_m$ . Знайти модуль і напрямок сили, що діє на виток, якщо  $\vec{p}_m$ : а) паралельний прямому провіднику; б) спрямований уздовж радіуса-вектора  $\vec{r}$ ; в) збігається за напрямком із магнітним полем струму  $I$  в місці розміщення витка.

**5.89** Невелика котушка зі струмом, що має магнітний момент  $\vec{p}_m$ , знаходиться на осі колового витка радіусом  $R$ , по якому проходить струм  $I$ . Знайти модуль сили, що діє на котушку, якщо відстань від центра витка до котушки дорівнює  $x$ , а вектор  $\vec{p}_m$  збігається за напрямком із віссю витка.

**5.90** В одній площині з нескінченно довгим проводом, по якому проходить струм силою  $I = 5$  А, розміщена прямокутна рамка ( $l_1 = 20$  см,  $l_2 = 10$  см), по якій проходить струм силою  $I_1 = 0,2$  А. Довгі

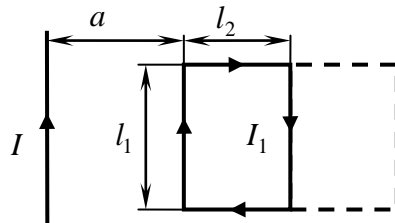


Рисунок 5.23

сторони рамки паралельні прямому струму, ближча сторона рамки міститься від нього на відстані  $a = 5$  см, струм у ній того самого напрямку, що й у проводі. Визначити роботу, яку необхідно виконати, щоб повернути рамку на кут  $\alpha = \pi$  навколо дальньої довгої сторони рамки (рис. 5.23).



**5.91** Два паралельних довгих провідники зі струмом  $I = 6,0$  А в кожному (струми спрямовані в один бік) віддалили один від одного так, що відстань між ними стала в  $\eta = 2,0$  раза більша від початкової. Яку роботу на одиницю довжини проводів виконали сили Ампера?

**5.92** Індукція магнітного поля у вакуумі біля плоскої поверхні однорідного ізотропного магнетика дорівнює  $B$ , причому вектор  $\vec{B}$  становить кут  $\alpha$  з нормаллю до поверхні. Магнітна проникність магнетика  $\mu$ . Знайти індукцію  $B'$  магнітного поля у магнетика біля його поверхні.

**5.93** Коловий контур зі струмом лежить на плоскій межі поділу вакууму та магнетика. Проникність останнього дорівнює  $\mu$ . Знайти індукцію  $\vec{B}$  магнітного поля в довільній точці на осі контура, якщо індукція поля в цій точці за умови відсутності магнетика дорівнює  $\vec{B}_0$ .

**5.94** На постійний магніт, який має форму циліндра довжиною  $l = 15$  см, намотали рівномірно  $N = 300$  витків тонкого проводу. Коли по ньому пропустили електричний струм  $I = 3,0$  А, поле за межами магніту зникло. Знайти коерцитивну силу  $H_c$  матеріалу магніту.

**5.95** На залізному осерді у вигляді тора із середнім радіусом  $R = 250$  мм є обмотка з загальною кількістю витків  $N = 1000$ . В осерді зроблено поперечний проміжок шириною  $b = 1,00$  мм. За умови сили струму  $I = 0,85$  А через обмотку індукція магнітного поля в проміжку  $B = 0,75$  Тл. Нехтуючи розсіянням магнітного потоку на краях проміжку, знайти магнітну проникність заліза в цих умовах.

## 6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

### Основні формули

Закон електромагнітної індукції Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -d\Phi / dt. \quad (6 \text{ а})$$

У випадку соленоїда або тороїда повний потік

$$\Psi = N \cdot \Phi_1, \quad (6 \text{ б})$$

де  $N$  – кількість витків;  $\Phi_1$  – магнітний потік через один виток.

Індуктивність соленоїда

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (6 \text{ в})$$

Енергія електричного струму

$$W = L \cdot I^2 / 2. \quad (6 \text{ г})$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w = B^2 / (2\mu\mu_0) = \vec{B} \cdot \vec{H} / 2. \quad (6 \text{ г})$$

### 6.1 Приклади розв'язування задач

#### Приклад 6.1

Квадратна рамка зі стороною  $a$  і довгий прямий провідник із струмом  $I$  знаходяться в одній площині (рис. 6.1). Рамку поступально переміщують вправо зі сталою швидкістю  $v$ . Знайти ЕРС індукції в рамці як функцію відстані  $x$ .

#### Розв'язання

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x) \text{ -?}$ $a, I, v, x$	Для визначення шуканої ЕРС індукції використаємо закон електромагнітної індукції Фарадея (6 а), визначення для
---	--

потіку індукції магнітного поля, а також формулу для індукції магнітного поля від нескінченно довгого прямого провідника зі струмом.

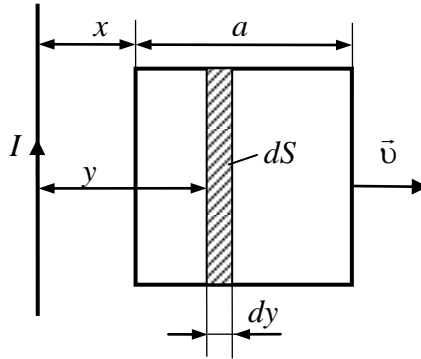


Рисунок 6.1

Потік вектора  $\vec{B}$  визначається формулою

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (1)$$

Індукція магнітного поля, що створюється довгим прямим провідником, як відомо (див. приклад 5.3, формула (3)), дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot y}, \quad (2)$$

де  $y$  – відстань від точки, де визначається індукція магнітного поля, до довгого провідника зі струмом  $I$  (рис. 6.1). Для деякого моменту часу відстань між рамкою і довгим провідником із струмом дорівнює  $x$  (рис. 6.1). Визначимо для цього моменту часу, використовуючи формули (1) та (2), потік індукції магнітного поля, що проходить через рамку. Для цього виберемо елементарну площу  $dS = a \cdot dy$ , як показано на рис. 6.1. Такий вибір

обумовлений тим, що вектор  $\vec{B}$  в усіх точках площі  $dS$  буде однаковим. Обираємо напрямок обходу контура таким, щоб вектор  $d\vec{S}$  збігався з напрямком вектора  $\vec{B}$ . Тоді з (1) та (2) знаходимо

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \vec{B} d\vec{S} = \int B \cdot dS \cdot \cos 0 = \int B \cdot a \cdot dy = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} a dy = \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot [\ln(x+a) - \ln x].\end{aligned}\quad (3)$$

У формулі (3) врахували, що відстань  $y$  змінюється в межах від  $x$  до  $x+a$  (рис. 6.1).

Підставимо одержаний вираз для потоку магнітного поля в закон Фарадея (6 а). Візьмемо також до уваги, що відстань  $x$  із часом змінюється, тобто згідно з визначенням швидкості  $v = dx/dt$ . Тоді шукана ЕРС індукції в рамці буде дорівнювати

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot a}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} [\ln(x+a) - \ln x] = \\ &= -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot a}{2\pi} \cdot \left[ \frac{d \ln(x+a)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d \ln x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right] = \\ &= -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot a}{2\pi} \cdot v \cdot \left[ \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right] = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2 \cdot v}{2\pi \cdot (x+a) \cdot x}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2 \cdot v}{2\pi \cdot (x+a) \cdot x}.\quad (4)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли струм  $I$ , що створює магнітне поле, зменшується до нуля. Зрозуміло, що тоді й

індукція магнітного поля буде прямувати до нуля, а отже, й шукана ЕРС буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $I \rightarrow 0$ ,

$$\text{то } \mathcal{E} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2 \cdot v}{2\pi(x+a) \cdot x} \sim I \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо ситуацію, коли рамка не рухається, тобто швидкість рамки  $v$  дорівнює нулю. У цьому випадку потік індукції магнітного поля через цю рамку змінюватися не буде. Це означає, що відповідно до закону електромагнітної індукції (6 а) ЕРС буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий

$$\text{результат: якщо } v \rightarrow 0, \text{ то } \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I \cdot a^2 \cdot v}{2\pi(x+a)x} \sim v \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула (4) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\mathcal{E}(x) = \frac{\mu_0 I \cdot a^2 \cdot v}{2\pi(x+a) \cdot x}.$

### **Приклад 6.2**

По П-подібному провіднику, розміщеному в горизонтальній площині, може ковзати без тертя перемичка  $PK$  (рис. 6.2). Остання має довжину  $l$ , масу  $m$  та опір  $R$ . Уся система знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$ . У момент  $t=0$  на перемичку почала діяти постійна горизонтальна сила  $F$ , і перемичка стала переміщуватися вправо. Знайти залежність швидкості перемички  $v$  від часу  $t$ . Самоіндукцією й опором П-подібного провідника знехтувати.

### **Розв'язання**

$v = v(t) - ?$	Під дією зовнішньої сили $\vec{F}$ перемичка $PK$ (рис. 6.2) починає
$l, m, R, B, F$	

рухатися в магнітному полі. Під час руху перемички в магнітному полі на ній виникає ЕРС індукції, а це, у свою чергу, викликає появу електричного струму в контурі  $PKDC$ . На перемичку з електричним струмом, яка рухається в магнітному полі, діє сила Ампера. Таким чином, перемичка рухається під дією двох сил: зовнішньої сили  $\vec{F}$  та сили Ампера  $\vec{F}_A$ . Щоб знайти швидкість перемички за відомими силами, використаємо другий закон Ньютона. Також застосуємо закон електромагнітної індукції, закон Ома, формулу для сили Ампера.

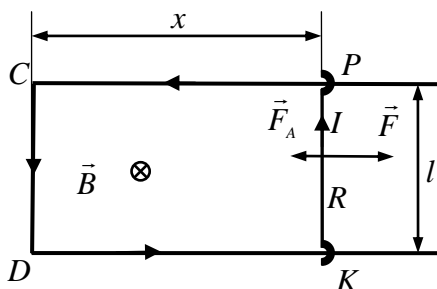


Рисунок 6.2

Під час руху перемички в магнітному полі в контурі  $PKDC$  (рис. 6.2) виникає ЕРС індукції, яку визначимо із закону електромагнітної індукції (6 а):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

де потік індукції магнітного поля через контур  $PKDC$  дорівнює

$$\Phi = B \cdot S_{PKDC} = B \cdot l \cdot x. \quad (2)$$

У формулі (2)  $x = PC$  (рис. 6.2). Далі підставляємо (2) в (1) і одержуємо

$$\mathcal{E} = -d\Phi / dt = -d(B \cdot l \cdot x) / dt = -B \cdot l \cdot v. \quad (3)$$

У формулі (3) враховано, що згідно з визначенням, швидкість руху перемички дорівнює  $v = dx / dt$ .

Під дією ЕРС  $\mathcal{E}$  у контурі *PKDC* із загальним опором  $R$  виникає електричний струм. Сила цього струму згідно із законом Ома та (3) дорівнює

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B \cdot l \cdot v}{R}. \quad (4)$$

Напрямок сили струму визначаємо відповідно до правила Ленца (рис. 6.2).

На перемичку зі струмом діє сила Ампера

$$F_A = I \cdot B \cdot l, \quad (5)$$

напрямок якої зображено на рис. 6.6. Підставляємо вираз (4) в (5) і одержуємо

$$F_A = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v}{R}. \quad (6)$$

Відповідно до другого закону Ньютона з урахуванням (6) можемо записати

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F - F_A = F - \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v}{R}. \quad (7)$$

Диференціальне рівняння (7) розв'язуємо методом розділення змінних:

$$\frac{m \cdot dv}{F - \frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot v} = dt, \text{ або } \int_0^v \frac{m \cdot dv'}{F - \frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot v'} = \int_0^t dt'. \quad (8)$$

У співвідношенні (8) враховано, що в момент  $t = 0$  швидкість дорівнювала нулю, в довільний момент часу  $t - v$ . Проінтегруємо (8):

$$\int_0^v \frac{m \cdot d\nu'}{F - \frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot \nu'} = \int_0^v \frac{d\nu'}{F - \frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot \nu'} = -\frac{mR}{B^2 l^2} \ln \left( \frac{F - \frac{B^2 l^2}{mR} \nu'}{m - \frac{B^2 l^2}{mR} \nu'} \right) \Big|_0^v =$$

$$= -\frac{m \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \left[ \ln \left( \frac{F - \frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot \nu}{m - \frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot \nu} \right) - \ln \frac{F}{m} \right], \quad (9)$$

$$\int_0^t dt' = t. \quad (10)$$

Звідси

$$\ln \left( \frac{\frac{F - \frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot \nu}{\frac{F}{m}}}{\frac{F}{m}} \right) = -\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t,$$

$$1 - \frac{B^2 \cdot l^2}{F \cdot R} \cdot \nu = \exp \left( -\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t \right),$$

$$\nu = \frac{F \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \left( 1 - \exp \left( -\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t \right) \right).$$

Таким чином, одержали шукану залежність швидкості перемички від часу

$$\nu(t) = \frac{F \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \left( 1 - \exp \left( -\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t \right) \right). \quad (11)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли зовнішня сила  $F$  відсутня, тобто дорівнює нулю. Зрозуміло, що тоді перемичка рухатися не буде, і її швидкість буде



дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $F \rightarrow 0$ , то

$$v = \frac{F \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} t\right) \right) \sim F \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо іншу ситуацію, коли опір дорівнює нескінченності:  $R = \infty$ . Тоді електричний струм через перемичку буде відсутнім, і вона буде рухатися лише під дією сталої зовнішньої сили  $F$ . Її прискорення буде дорівнювати  $a = F/m$ , а швидкість під час рівноприскореного руху буде дорівнювати  $v = a \cdot t = (F/m) \cdot t$ . Із розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $R \rightarrow \infty$ , то

$$\exp\left(-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} t\right) \approx 1 - \frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} t \quad (\text{якщо } \alpha \ll 1, \text{ то } e^\alpha \approx 1 + \alpha).$$

Тоді

$$v = \frac{F \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t\right) \right) \approx \frac{F \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot t}{m \cdot R} = \frac{F}{m} \cdot t.$$

Отже, розрахункова формула (11) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:** 
$$v(t) = \frac{F \cdot R}{B^2 \cdot l^2} \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{B^2 \cdot l^2}{m \cdot R} \cdot t\right) \right).$$

### Приклад 6.3

Визначити індуктивність тороїдального соленоїда, в якому  $N$  витків, внутрішній радіус дорівнює  $b$ , а поперечний переріз має форму квадрата зі стороною  $a$ . Простір усередині соленоїда заповнено однорідним парамагнетиком із магнітною проникністю  $\mu$ .

### Розв'язання

$L - ?$   
 $N, a, b, \mu$  | Індуктивність соленоїда  $L$  визначимо з означення  $L = \Psi / I$ , де  $\Psi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  є повним потоком індукції магнітного поля, що проходить через усі  $N$  витків соленоїда якщо сила електричного струму  $I$ . Оскільки розподіл струмів у тороїдальному соленоїді є симетричним, то для визначення індукції магнітного поля скористаємося теоремою про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  і співвідношенням  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}$ .

Перейдемо до реалізації вищевикладеного плану розв'язування задачі. Будемо вважати, що через соленоїд проходить електричний струм  $I$ . Використаємо теорему про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (1 і) для знаходження магнітного поля в соленоїді, який створює цей струм:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i. \quad (1)$$

Як контур інтегрування візьмемо коло радіусом  $r$ , центр якого знаходиться на осі симетрії всередині тороїда (рис. 6.3). Із міркувань симетрії випливає, що в довільній точці вибраного контура інтегрування  $\Gamma$  вектор  $\vec{H}$  є дотичним до нього, а його модуль залишається незмінним. Тому

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot \oint dl = H \cdot 2\pi r. \quad (2)$$

Через те що електричний струм  $I$  пронизує контур інтегрування  $N$  разів (у разі, якщо контур інтегрування знаходиться всередині соленоїда), можемо записати

$$\sum_i I_i = N \cdot I. \quad (3)$$

Підставляємо (2) та (3) в (1) й одержуємо

$$H = \frac{N \cdot I}{2\pi r}. \quad (4)$$

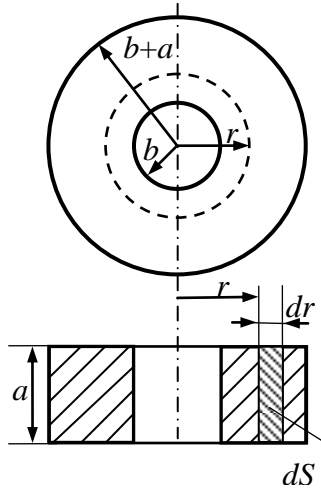


Рисунок 6.3

Далі використаємо зв'язок між вектором  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$  ( $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}$ , формула (5 й)) і знаходимо з (4) індукцію магнітного поля всередині соленоїда:

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot N \cdot I / (2\pi r). \quad (5)$$

Для визначення повного потоку  $\Psi$  через соленоїд виберемо малу площу  $dS$  так, як показано на рис. 6.3. Тоді  $dS = a \cdot dr$ , й на цій площі індукція магнітного поля має одне й те саме значення, яке визначається співвідношенням (5). Тоді

$$\Psi = N \int \vec{B} d\vec{S} = N \int B dS = N \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 \mu N I a dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \mu N^2 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}. \quad (6)$$

У цьому співвідношенні врахували, що формула (4) є правильною лише всередині соленоїда, тобто якщо  $b < r < b + a$ . За межами соленоїда магнітне поле дорівнює нулю. Далі використовуємо визначення індуктивності та знаходимо

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 \mu N^2 a}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right). \quad (7)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли кількість витків  $N$  прямує до нуля. Зрозуміло, що індуктивність соленоїда, в якому немає жодного витка, дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $N \rightarrow 0$ , то

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 a}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \sim N^2 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $L = \frac{\mu_0 \mu N^2 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$

### *Приклад 6.4*

Магнітний потік через нерухомий контур з опором  $R$  змінюється за час  $\tau$  за законом  $\Phi = at(\tau - t)$ . Знайти кількість теплоти, що виділяється в контурі за цей час. Індуктивністю контура знехтувати.

#### *Розв'язання*

$Q - ?$ $R, \tau, \Phi = at(\tau - t)$	Через зміну магнітного потоку в замкненому контурі виникає ЕРС індукції. У свою чергу, ЕРС в контурі створює електричний струм. Під час проходження
---	---

електричного струму через опір  $R$  виділяється теплота. Для обчислення цієї теплоти використаємо закони електромагнітної індукції, Ома та Джоуля-Ленца.

Використаємо закон електромагнітної індукції для знаходження ЕРС індукції (6 а):

$$\mathcal{E}_i = -d\Phi / dt = -\frac{d}{dt}(at(\tau - t)) = -(a\tau - 2at). \quad (1)$$

Згідно із законом Ома в контурі з ЕРС  $\mathcal{E}_i$  та опором  $R$  виникає електричний струм

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{a\tau - 2at}{R}. \quad (2)$$

Відповідно до закону Джоуля-Ленца на опорі  $R$  під час проходження електричного струму  $I$  за час  $dt$  виділяється теплота

$$dQ = I^2 R dt = \left( -\frac{a\tau - 2at}{R} \right)^2 R dt. \quad (3)$$

Загальну кількість теплоти за час проходження струму  $\tau$  знайдемо провівши інтегрування (підсумовування) (3) за час від 0 до  $\tau$ :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\tau \left( -\frac{a\tau - 2at}{R} \right)^2 R dt = \frac{a^2}{R} \int_0^\tau (\tau^2 - 4t\tau + 4t^2) dt = \\ &= \frac{a^2}{R} \left( \tau^2 t - 2t^2\tau + 4t^3/3 \right) \Big|_0^\tau = \frac{a^2\tau^3}{3R}. \end{aligned}$$

Таким чином, шукана кількість теплоти дорівнює

$$Q = \frac{a^2\tau^3}{3R}. \quad (4)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли опір контура дорівнює нескінченності. Зрозуміло, що тоді в контурі електричний струм проходить не буде, і теплота також виділятися не буде. З розрахункової формули впливає такий самий

результат: якщо  $R \rightarrow \infty$ , то  $Q = \frac{a^2 \tau^3}{3R} \sim \frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$ .

Отже, розрахункова формула (4) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $Q = \frac{a^2 \tau^3}{3R}$ .

### *Приклад 6.5*

На тор квадратного перерізу рівномірно намотана котушка з  $N=1000$  витків. Внутрішній радіус тора  $R_1 = 8$  см, зовнішній –  $R_2 = 10$  см. По обмотці проходить струм силою  $I = 5$  А. Осердя немагнітне. Визначити енергію магнітного поля струму.

#### *Розв'язання*

$W - ?$		Для визначення енергії
$N = 1000, R_1 = 8$ см,		магнітного поля використаємо
$R_2 = 10$ см, $I = 5$ А		формулу
		$W = \int w \cdot dV,$ (1)

де густина енергії магнітного поля визначається виразом (б г):

$$w = B^2 / (2\mu\mu_0). \quad (2)$$

Індукцію магнітного поля в такому торі було визначено за допомогою теореми про циркуляцію магнітного поля в прикладі 6.3, формула (5):

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot N \cdot I / (2\pi r), \quad (3)$$

де  $r$  – відстань від осі симетрії тора до точок, в яких визначається індукція магнітного поля всередині тороїда (рис. 6.4). Нагадаємо, що за межами тора індукція магнітного поля дорівнює нулю.

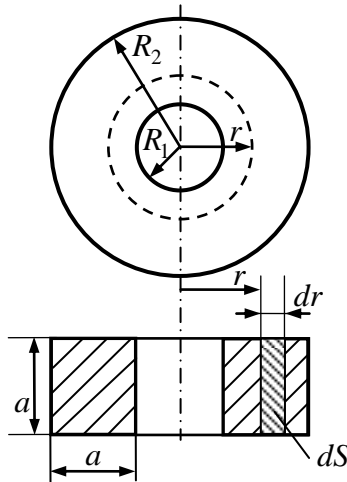


Рисунок 6.4

Реалізуємо вищевикладений план розв’язування задачі. Для проведення інтегрування співвідношення (1) виберемо елементарний об’єм  $dV$ , в якому густина енергії магнітного поля, а отже, і модуль індукції магнітного поля  $B$  мають однакове значення. Зрозуміло, що таким умовам відповідає тонкий циліндричний шар із радіусом  $r$ , товщиною  $dr$ , висотою  $a$  (площа поперечного перерізу

$dS = a \cdot dr$ ), див. рис. 6.4. Такий елементарний об'єм можна записати у вигляді

$$dV = dS \cdot 2\pi r = 2\pi r \cdot a \cdot dr. \quad (4)$$

Сторону  $a$  квадратного тора неважко знайти врахувавши, що внутрішній радіус тора  $R_1$ , а зовнішній –  $R_2$ . Тоді, як впливає з рис. 6.4,  $a = R_2 - R_1$ . Також беремо до уваги, що за умовою осердя немагнітне, тобто  $\mu = 1$ . Підставляємо в (1) формули (2)–(4) і одержуємо

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{(\mu_0 NI / (2\pi r))^2}{2\mu_0} \cdot 2\pi r a dr = \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi} \ln(r) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{4\pi} \ln(R_2 / R_1). \end{aligned}$$

Тут врахували, що за межами тора магнітне поле відсутнє, тобто величина  $r$  змінюється у межах від  $R_1$  до  $R_2$ . Таким чином, енергія магнітного поля струму тороїда визначається виразом

$$W = \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{4\pi} \ln(R_2 / R_1). \quad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$W = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000^2 \cdot 5^2 (0,1 - 0,08)}{4\pi} \ln\left(\frac{0,10}{0,08}\right) \text{ мДж} = 11 \text{ мДж}.$$

### ***Аналіз одержаного результату***

Розглянемо інший варіант розв'язування задачі.

Як відомо, енергія тороїда визначається співвідношенням (6 г):

$$W = LI^2 / 2. \quad (6)$$



Індуктивність тороїда ми визначили у прикладі 6.3, формула (7):

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 a}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right), \quad (7)$$

де

$$a = R_2 - R_1, \quad b = R_1, \quad \mu = 1. \quad (8)$$

Підставляємо (7)–(8) у (6) та одержуємо результат, який збігається з (5).

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $W = \frac{\mu_0 N^2 I^2 (R_2 - R_1)}{4\pi} \ln(R_2 / R_1) = 11 \text{ мДж.}$

### Приклад 6.6

Котушку індуктивності  $L = 300 \text{ мГн}$  та опір  $R = 140 \text{ мОм}$  приєднали до джерела сталої напруги. Через який час струм через котушку буде мати  $\eta = 50\%$  від усталеного значення?

#### Розв'язання

$t - ?$	Для розв'язування задачі
$L = 300 \text{ мГн,}$	використаємо закон самоіндукції та закон
$R = 140 \text{ мОм,}$	Ома для повної ділянки кола. Розв'яжемо
$\eta = 0,5$	одержане диференціальне рівняння і
	знайдемо шукану величину.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Розглядаємо процес установаження струму в електричному колі, зображеному на рис. 6.5. Вважаємо, що в момент часу  $t = 0$  ключ  $K$  замкнено. Електричний струм, який на цей момент часу дорівнював нулю ( $I = 0$ ), починає збільшуватися. Через зміну електричного струму в котушці виникає ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_s = -LdI / dt, \quad (1)$$

яка впливає на зростання струму  $I$  в електричному колі.

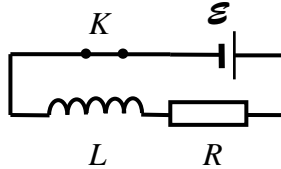


Рисунок 6.5

Величину струму в колі визначимо за допомогою закону Ома для повного кола:

$$I = (\mathcal{E} + \mathcal{E}_s) / R. \quad (2)$$

Тут враховано, що в колі, окрім ЕРС джерела струму  $\mathcal{E}$ , діє також і ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_s$ . Підставляємо (1) у (2) і одержуємо диференціальне рівняння стосовно сили електричного струму:

$$I = (\mathcal{E} - LdI / dt) / R, \quad LdI / dt = \mathcal{E} - IR,$$

яке розв'язуємо шляхом розділення змінних:

$$\frac{LdI}{\mathcal{E} - IR} = dt, \quad \int_0^I \frac{LdI}{\mathcal{E} - IR} = \int_0^t dt. \quad (3)$$

В останньому співвідношенні враховано, що на момент часу  $t=0$  електричний струм дорівнював нулю  $I=0$ , а в довільний момент часу  $t$  електричний струм має значення  $I$ . Проводимо інтегрування (3) і одержуємо

$$-\frac{L}{R} \ln\left(\frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{E}}\right) = t, \quad (4)$$

або

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right). \quad (5)$$

Із рівняння (5) неважко знайти електричний струм  $I_\infty$ , який встановлюється через достатньо тривалий час  $t \rightarrow \infty$ :

$$I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}\infty\right) \right) = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (6)$$

Таким чином, відповідно до умови задачі електричний струм у шуканий момент часу  $t$  можна записати у вигляді

$$I = I_\infty \eta = \mathcal{E} \eta / R. \quad (7)$$

Підставляємо (7) в (4) і знаходимо

$$t = -\frac{L}{R} \ln\left(\frac{\mathcal{E} - (\mathcal{E}\eta/R)R}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{L}{R} \ln(1 - \eta). \quad (8)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (8), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:  $t = -\frac{300 \cdot 10^{-3}}{140 \cdot 10^{-3}} \ln(1 - 0,5) \text{ с} = 1,5 \text{ с}$ .

### ***Аналіз одержаного результату***

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли електричний струм буде мати  $\eta = 0\%$  від усталеного значення. Зрозуміло, що цей електричний струм буде дорівнювати нулю  $I = I_\infty \eta = 0$ . Ми знаємо, що струм дорівнює нулю ( $I = 0$ ) в початковий момент часу  $t = 0$ . Тобто в цьому випадку шуканий момент часу дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $\eta \rightarrow 0$ , то  $t = -(L/R) \ln(1 - \eta) \rightarrow \ln(1) = 0$ .

Отже, розрахункова формула (8) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $t = -(L/R) \ln(1 - \eta) = 1,5$  с.

## 6.2 Задачі для самостійного розв'язування

**6.1** Магнітний потік  $\Phi = 40$  мВб пронизує замкнений контур. Визначити середнє значення ЕРС індукції  $\langle \mathcal{E}_i \rangle$ , що виникає в контурі, якщо магнітний потік зміниться до нуля за час  $\Delta t = 2$  мс.

**6.2** Прямий провідник довжиною  $l = 40$  см рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю  $v = 5$  м/с перпендикулярно до ліній індукції. Різниця потенціалів  $U$  між кінцями провідника дорівнює  $0,6$  В. Обчислити індукцію  $B$  магнітного поля.

**6.3** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 1$  Тл знаходиться прямий провідник довжиною  $l = 20$  см, кінці якого замкнені поза полем. Опір  $R$  усього кола дорівнює  $0,1$  Ом. Знайти силу  $F$ , яку потрібно прикласти до провідника, щоб він переміщувався перпендикулярно до ліній індукції зі швидкістю  $v = 2,5$  м/с.

**6.4** Прямий провідник довжиною  $l = 10$  см розміщений в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 1$  Тл. Кінці його замкнені гнучким проводом, що знаходиться поза полем. Опір  $R$  усього кола дорівнює  $0,4$  Ом. Яка потужність  $P$  необхідна для того, щоб переміщувати провідник перпендикулярно до ліній індукції зі швидкістю  $v = 20$  м/с?

**6.5** Прямий провідний стрижень довжиною  $l = 40$  см розміщений в однорідному магнітному полі  $B = 0,1$  Тл. Кінці стрижня замкнені гнучким провідником, який знаходиться поза полем. Опір всього кола  $R = 0,5$  Ом. Яка потужність  $P$  необхідна для рівномірного переміщення

стрижня перпендикулярно до ліній магнітної індукції зі швидкістю 10 м/с.

**6.6** До джерела струму з ЕРС  $\mathcal{E}_i = 0,5$  В та нескінченно малого внутрішнього опору приєднані два паралельні металеві стрижні, які розміщені горизонтально. Відстань  $l$  між стрижнями дорівнює 20 см. Стрижні розміщені в однорідному магнітному полі, спрямованому вертикально. Магнітна індукція  $B = 1,5$  Тл. По стрижнях під дією сил поля ковзає зі швидкістю  $v = 1$  м/с прямолінійний провідник опором  $R = 0,02$  Ом. Опір стрижнів не враховувати. Визначити: а) ЕРС індукції  $\mathcal{E}_i$ ; б) силу  $F$ , що діє на провідник з боку поля; в) силу струму  $I$  у колі; г) потужність  $P_1$ , що витрачається на рух провідника; г) потужність  $P_2$ , що витрачається на нагрівання провідника; д) потужність  $P_3$ , що віддається в коло джерелом струму.

**6.7** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,4$  Тл у площині, перпендикулярній до ліній індукції поля, обертається стрижень довжиною  $l = 10$  см. Вісь обертання проходить через один із кінців стрижня перпендикулярно до його осі. Визначити різницю потенціалів  $U$  на кінцях стрижня, якщо частота обертання  $n = 16$  с<sup>-1</sup>.

**6.8** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,35$  Тл рівномірно із частотою  $n = 480$  хв<sup>-1</sup> обертається рамка, що має  $N = 500$  витків площею  $S = 50$  см<sup>2</sup>. Вісь обертання лежить у площині рамки та перпендикулярна до ліній індукції. Визначити максимальну ЕРС індукції  $\mathcal{E}_{i_{\max}}$ , що виникає у рамці.

**6.9** Рамка площею  $S = 100$  см<sup>2</sup> має  $N = 10^3$  витків проводу опором  $R_1 = 12$  Ом. До кінців обмотки

підключений зовнішній опір  $R_2 = 20$  Ом. Рамка рівномірно обертається в однорідному магнітному полі  $B = 0,1$  Тл із частотою  $n = 8$  с<sup>-1</sup>. Визначити максимальну потужність  $P_{\max}$  змінного струму в колі.

**6.10** Магнітна індукція  $B$  поля між полюсами двополюсного генератора дорівнює  $0,8$  Тл. Ротор має  $N = 100$  витків площею  $S = 400$  см<sup>2</sup>. Визначити частоту  $n$  обертання якоря, якщо максимальне значення ЕРС індукції  $\mathcal{E}_i = 200$  В.

**6.11** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,1$  Тл рівномірно з частотою  $n = 10$  с<sup>-1</sup> обертається рамка, що має  $N = 1000$  витків. Площа  $S$  рамки дорівнює  $150$  см<sup>2</sup>. Визначити миттєве значення ЕРС  $\mathcal{E}_i$ , що відповідає куту повороту рамки  $30^\circ$ .

**6.12** Коротка котушка, що має  $N = 1000$  витків, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,04$  Тл із кутовою швидкістю  $\omega = 5$  рад/с відносно осі, що збігається з діаметром котушки й перпендикулярна до ліній індукції поля. Визначити миттєве значення ЕРС індукції  $\mathcal{E}_i$  для тих моментів часу, коли площа котушки становить кут  $\alpha = 60^\circ$  із лініями індукції поля. Площа  $S$  котушки дорівнює  $100$  см<sup>2</sup>.

**6.13** Виток радіусом  $r = 4$  см, що має опір  $R = 0,01$  Ом, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,04$  Тл. Площина рамки становить кут  $\alpha = 30^\circ$  із лініями індукції поля. Яка кількість заряду  $Q$  пройде по витку, якщо магнітне поле зникне?

**6.14** Між полюсами електромагніту розміщена котушка, з'єднана з балістичним гальванометром. Вісь котушки паралельна лініям індукції. Котушка опором  $R_1 = 4$  Ом має  $N = 15$  витків площею  $S = 2$  см<sup>2</sup>. Опір  $R_2$  гальванометра дорівнює  $46$  Ом. Коли струм в обмотці

електромагніту вимкнули, через коло гальванометра пройшла кількість заряду  $Q = 90$  мкКл. Обчислити магнітну індукцію  $B$  поля електромагніту.

**6.15** Рамка з провідником опором  $R = 0,01$  Ом рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,05$  Тл. Вісь обертання лежить у площині рамки й перпендикулярна до ліній індукції. Площа  $S$  рамки дорівнює  $100$  см<sup>2</sup>. Знайти, яка кількість заряду  $Q$  пройде через рамку за час повороту її на кут  $\alpha = 30^\circ$  у таких трьох випадках: а) від  $\alpha_0 = 0$  до  $\alpha_1 = 30^\circ$ ; б) від  $\alpha_1 = 30$  до  $\alpha_2 = 60^\circ$ ; в) від  $\alpha_3 = 90^\circ$ .

**6.16** У металеве кільце, з'єднане з балістичним гальванометром, усталили постійний магніт. Це призвело до того, що через коло пройшов заряд  $Q = 50$  мкКл. Визначити зміну магнітного потоку через кільце, якщо опір кола гальванометра  $R = 10$  Ом.

**6.17** Тонкий мідний провідник масою  $m = 1$  г зігнутий у вигляді квадрата, і кінці його замкнені. Квадрат поміщений в однорідне магнітне поле ( $B = 0,1$  Тл) так, що площина його перпендикулярна до ліній індукції поля. Визначити кількість заряду  $Q$ , що пройде через провідник, якщо квадрат, потягнувши за протилежні вершини, витягнути в лінію.

**6.18** По довгому прямому провіднику проходить струм. Біля провідника розміщена квадратна рамка з тонкого провідника опором  $R = 0,02$  Ом. Провідник лежить у площині рамки та паралельний до двох її сторін, відстані до яких від провідника відповідно дорівнюють  $a_1 = 10$  см та  $a_2 = 20$  см. Знайти силу струму  $I$  в провіднику, якщо після його ввімкнення через рамку пройшла кількість заряду  $Q = 693$  мкКл.

**6.19** Обмотка соленоїда складається з одного шару витків мідного провідника діаметром  $d = 0,2$  мм, які щільно прилягають один до одного. Діаметр  $D$  соленоїда дорівнює 5 см. По соленоїду проходить струм  $I = 1$  А. Визначити кількість заряду  $Q$ , що пройде через обмотку, якщо її кінці замкнути. Товщиною ізоляції знехтувати.

**6.20** По котушці індуктивністю  $L = 0,03$  мГн проходить струм  $I = 0,6$  А. Після розмикання кола сила струму змінюється практично до нуля за час  $\Delta t = 120$  мкс. Визначити середню ЕРС самоіндукції  $\langle \mathcal{E}_s \rangle$ , що виникає в контурі.

**6.21** За допомогою реостата рівномірно збільшують силу струму в котушці на  $\Delta I = 0,1$  А за 1 с. Індуктивність  $L$  котушки дорівнює 0,01 Гн. Знайти середнє значення ЕРС самоіндукції  $\langle \mathcal{E}_s \rangle$ .

**6.22** Соленоїд має  $N = 800$  витків. Переріз осердя (з немагнітного матеріалу)  $S = 10\text{см}^2$ . По обмотці проходить струм, що створює поле з індукцією  $B = 8$  мТл. Визначити середнє значення ЕРС  $\langle \mathcal{E}_s \rangle$  самоіндукції, яка виникає на затискачах соленоїда, якщо сила струму зменшується практично до нуля за час  $\Delta t = 0,8$  мс.

**6.23** На картонний каркас довжиною  $l = 50$  см і площею перерізу  $S = 4\text{см}^2$ , намотаний в один шар провідник діаметром  $d = 0,2$  мм так, що витки щільно прилягають один до одного (товщиною ізоляції знехтувати). Обчислити індуктивність  $L$  соленоїда.

**6.24** Індуктивність  $L$  соленоїда довжиною  $l = 1$  м, провід якого намотано в один шар на немагнітний каркас, дорівнює 1,6 мГн. Площа  $S$  перерізу соленоїда дорівнює  $20\text{см}^2$ . Визначити число  $n$  витків на кожний сантиметр довжини соленоїда.



**6.25** Скільки витків проводу діаметром  $d = 0,4$  мм з ізоляцією незначної товщини потрібно намотати на картонний циліндр діаметром  $D = 2$  см, щоб одержати одношарову котушку з індуктивністю  $L = 1$  мГн? Витки впритул прилягають один до одного.

**6.26** Котушка, яка намотана на немагнітний циліндричний каркас, має  $N_1 = 750$  витків та індуктивність  $L_1 = 25$  мГн. Щоб збільшити індуктивність котушки до  $L_2 = 36$  мГн, обмотку з котушки зняли й замінили обмоткою з більш тонкого проводу з таким розрахунком, щоб довжина котушки залишилася попередньою. Визначити число  $N_2$  витків котушки після перемотування.

**6.27** Соленоїд індуктивністю  $L = 4$  мГн має  $N = 600$  витків. Визначити магнітний потік  $\Phi$  через один виток, якщо сила струму  $I$ , що проходить по обмотці, дорівнює  $12$  А.

**6.28** Індуктивність  $L$  котушки без осердя дорівнює  $0,02$  Гн. Який повний магнітний потік  $\Psi$  виникає в котушці, якщо по обмотці проходить струм  $I = 5$  А?

**6.29** Довгий прямий соленоїд, намотаний на немагнітний каркас, має  $N = 1000$  витків та індуктивність  $L = 3$  мГн. Який магнітний потік  $\Phi$  і який повний магнітний потік  $\Psi$  створює соленоїд, коли сила струму  $I = 1$  А?

**6.30** Соленоїд, площа перерізу  $S$  якого дорівнює  $5$  см<sup>2</sup>, має  $N = 1200$  витків. Індукція  $B$  магнітного поля всередині соленоїда за умови сили струму  $I = 2$  А дорівнює  $0,01$  Тл. Визначити індуктивність  $L$  соленоїда.

**6.31** Соленоїд має  $N = 1000$  витків. Площа перерізу  $S$  осердя дорівнює  $10$  см<sup>2</sup>. По обмотці проходить струм, що створює поле з індукцією  $B = 1,5$  Тл. Знайти середню ЕРС

індукції  $\langle \mathcal{E}_i \rangle$ , що виникає в соленоїді, якщо струм зменшується до нуля за час  $\Delta t = 500$  мкс.

**6.32** Обмотка соленоїда із залізним осердяма має  $N = 500$  витків. Довжина  $l$  осердя дорівнює 50 см. Як і в скільки разів зміниться індуктивність  $L$  соленоїда, якщо сила струму, що проходить по обмотці, збільшиться від  $I_1 = 0,1$  А до  $I_2 = 1$  А. Для розв'язування задачі використати графік, що зображений на рис. 5.17.

**6.33** На картонний каркас довжиною  $l = 0,8$  см і діаметром  $D = 4$  см, намотаний в один шар провід діаметром  $d = 0,25$  мм так, що витки щільно прилягають один до одного (товщиною ізоляції знехтувати). Обчислити індуктивність  $L$  цього соленоїда.

**6.34** Джерело струму замкнули на котушку опором  $R = 20$  Ом. Через час  $t = 0,1$  с сила струму в котушці досягла  $\eta = 0,95$  граничного значення. Визначити індуктивність котушки.

**6.35** Дві котушки розміщені на невеликій відстані одна від одної. Коли сила струму в першій котушці змінюється зі швидкістю  $\Delta I / \Delta t = 5$  А/с, у другій котушці виникає ЕРС індукції  $\mathcal{E}_i = 0,1$  В. Визначити коефіцієнт  $M$  взаємної індукції котушок.

**6.36** Обмотка тороїда з немагнітним осердяма має  $N_1 = 251$  виток. Середній діаметр  $D$  тороїда дорівнює 8 см, діаметр  $d$  витків дорівнює 2 см. На тороїд намотана вторинна обмотка, що має  $N_2 = 100$  витків. Після замикання первинної обмотки в ній упродовж  $t = 1$  мс встановлюється сила струму  $I = 3$  А. Визначити середню ЕРС індукції  $\langle \mathcal{E}_i \rangle$ , що виникає на вторинній обмотці.

**6.37** Джерело струму можна відімкнути від кола, не розриваючи його. Визначити силу струму  $I$  в цьому колі

через  $t = 0,01$  с після вимкнення його від джерела струму. Опір  $R$  кола дорівнює  $20$  Ом, його індуктивність  $L = 0,1$  Гн, початкове значення сили струму  $I_0 = 50$  А.

**6.38** Джерело струму замкнули на котушку з опором  $R = 10$  Ом та індуктивністю  $L = 1$  Гн. Через який час сила струму досягне  $\eta = 0,9$  від граничного значення?

**6.39** Коло струму складається з котушки індуктивністю  $L = 1$  Гн та опору  $R = 10$  Ом. Джерело струму можна вимкнути, не розриваючи кола. Визначити час  $t$ , за який сила струму зменшиться до  $\eta = 0,001$  від початкового значення.

**6.40** До джерела струму із внутрішнім опором  $r = 2$  Ом приєднують котушку з індуктивністю  $L = 0,5$  Гн і опором  $R = 8$  Ом. Знайти час  $t$ , упродовж якого зростаючий струм у котушці досягне значення, що відрізняється від максимального на  $1\%$  ( $\eta = 0,01$ ).

**6.41** На стрижень із немагнітного матеріалу довжиною  $l = 50$  см намотаний в один шар провідник так, що на кожний сантиметр довжини стрижня припадає  $20$  витків. Визначити енергію  $W$  магнітного поля усередині соленоїда, якщо сила струму  $I$  в обмотці дорівнює  $0,5$  А. Площа перерізу  $S$  стрижня дорівнює  $2$  см<sup>2</sup>.

**6.42** По обмотці соленоїда індуктивністю  $L = 0,2$  Гн проходить струм  $I = 10$  А. Визначити енергію  $W$  магнітного поля соленоїда.

**6.43** Індуктивність  $L$  котушки (без осердя) дорівнює  $0,1$  мГн. Знайти силу струму  $I$ , якщо енергія  $W$  магнітного поля дорівнює  $100$  мкДж?

**6.44** Соленоїд має  $N = 1000$  витків. Сила струму  $I$  у його обмотці дорівнює  $1$  А, магнітний потік  $\Phi$  через поперечний переріз соленоїда дорівнює  $0,1$  мВб. Обчислити енергію  $W$  магнітного поля.

**6.45** На залізне кільце намотано в один шар  $N = 200$  витків. Визначити енергію  $W$  магнітного поля, якщо за умови сили струму  $I = 2,5$  А магнітний потік  $\Phi$  у залізі дорівнює  $0,5$  мВб.

**6.46** По обмотці тороїда проходить струм силою  $I = 0,6$  А. Витки провідника діаметром  $d = 0,4$  мм щільно прилягають один до одного (товщиною ізоляції знехтувати). Знайти енергію  $W$  магнітного поля в сталевому осердді тороїда, якщо площа  $S$  перерізу його дорівнює  $4$  см<sup>2</sup>, діаметр  $D$  середньої лінії дорівнює  $30$  см. Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.47** По обмотці довгого соленоїда зі сталевим осердям проходить струм  $I = 2$  А. Визначити об'ємну густину  $w$  енергії магнітного поля в осердді, якщо число  $n$  витків на кожний сантиметр довжини соленоїда дорівнює  $7$  см<sup>-1</sup>. Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.48** За умови індукції магнітного поля, що дорівнює  $1$  Тл, густина енергії  $w$  магнітного поля в залізі дорівнює  $200$  Дж/м<sup>3</sup>. Визначити магнітну проникність заліза в цих умовах. Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.49** Визначити об'ємну густину енергії  $w$  магнітного поля в сталевому осердді, якщо індукція  $B$  магнітного поля дорівнює  $0,5$  Тл. Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.50** Індукція магнітного поля тороїда зі сталевим осердям збільшилася від  $B_1 = 0,5$  Тл до  $B_2 = 1$  Тл. Знайти, у скільки разів змінилася об'ємна густина енергії  $w$  магнітного поля. Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.51** Напруженість магнітного поля тороїда зі сталевим осердям зростає від  $H_1 = 200$  А/м до  $H_2 = 800$  А/м. Визначити, у скільки разів змінилася об'ємна густина енергії  $w$  магнітного поля. Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.52** Коли через соленоїд проходить деякий струм  $I$ , густина енергії  $w$  магнітного поля соленоїда (без осердя) дорівнює  $0,2$  Дж/м<sup>3</sup>. У скільки разів збільшиться густина енергії поля за умови такої самої сили струму, якщо соленоїд буде мати залізне осердя? Для розв'язування задачі використати графік, зображений на рис. 5.17.

**6.53** Обмотка тороїда з немагнітним осердям має  $n=10$  витків на кожний сантиметр довжини. Визначити густину енергії  $w$  поля, якщо по обмотці проходить струм  $I=16$  А.

**6.54** Обмотка тороїда має  $n=10$  витків на кожний сантиметр довжини. Осердя немагнітне. Знайти силу струму  $I$  в обмотці, якщо густина енергії  $w$  магнітного поля дорівнює  $1$  Дж/м<sup>3</sup>.

**6.55** Довгий прямий провідник зі струмом  $I$  і П-подібний провідник із перемичкою, що може рухатися, розміщені в одній площині (рис. 6.6). Перемичку, довжина якої  $l$ , переміщують управо зі сталою швидкістю  $v$ . Знайти ЕРС індукції в контурі як функцію відстані  $r$ .

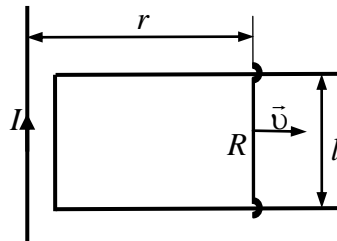


Рисунок 6.6

**6.56** Квадратна рамка, сторона якої  $a=10$  см, та довгий прямий провід із струмом силою  $I=10$  А розміщені в одній площині. Рамку поступально

переміщують праворуч зі швидкістю  $v = 0,5$  м/с. Знайти ЕРС індукції в рамці через  $t = 3$  с після початку руху, якщо у початковий момент часу рамка була від проводу на відстані  $b = 2$  см.

**6.57** Коловий контур, що має площу  $S$  та опір  $R$ , обертають із сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо його діаметра, перпендикулярного до однорідного магнітного поля з індукцією  $B$ . Нехтуючи магнітним полем індукційного струму, визначити, яким зовнішнім моментом сил  $M(t)$  потрібно діяти на контур у цих умовах. У момент часу  $t = 0$  площина контура перпендикулярна до напрямку магнітного поля.

**6.58** По двох гладких мідних шинах, установлених під кутом  $\alpha$  до горизонту, ковзає під дією сили тяжіння мідна перемичка масою  $m$  (рис. 6.7). Відстань між шинами  $l$ . Шини замкнені на опір  $R$ . Система знаходиться в однорідному магнітному полі з вектором індукцією  $B$ , перпендикулярним до площини, в якій переміщується перемичка. Опором шин, перемички, а також самоіндукцією контура можна знехтувати. Знайти усталену швидкість перемички.

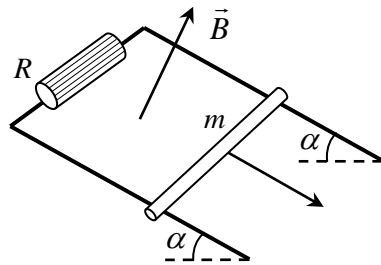


Рисунок 6.7

**6.59** Між полюсами електромагніту знаходиться невелика котушка, вісь якої збігається з напрямком магнітного поля. Площа поперечного перерізу котушки  $S = 3,0$  мм<sup>2</sup>, число витків  $N = 60$ . Коли котушку повернули на  $180^\circ$  відносно її діаметра, то через підключений до неї балістичний гальванометр пройшов

заряд  $q = 4,5$  мкКл. Знайти модуль індукції магнітного поля між полюсами, якщо опір електричного кола  $R = 40$  Ом.

**6.60** На відстанях  $a$  і  $b$  від довгого прямого провідника з постійним струмом  $I_0$  розміщені два паралельні йому провідники, замкнені на одному кінці опором  $R$  (рис. 6.8). По проводах без тертя переміщують зі сталою швидкістю  $v$  стрижень-перемичку. Нехтуючи опором проводів, стрижня, контактів, а також індуктивністю контура, визначити: а) значення й напрямок індукційного струму в стрижні; б) силу, яку необхідно прикласти для підтримання сталої швидкості.

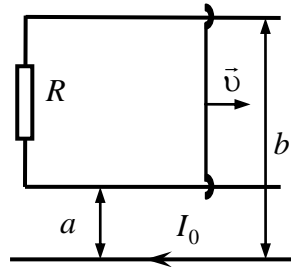


Рисунок 6.8

**6.61** Провідний стрижень  $AC$  масою  $m$  ковзає без тертя по двох довгих провідних рейках, розміщених на відстані  $l$  одна від одної (рис. 6.9). На лівому кінці рейки замкнені опором  $R$ . Система перебуває у вертикальному однорідному магнітному полі з індукцією  $B$ . У момент  $t = 0$  стрижню  $AC$  надали початкової швидкості  $v$ , спрямованої вправо. Нехтуючи опором рейок і стрижня  $AC$ , а також самоіндукцією, знайти: а) відстань, яку пройде стрижень до зупинення; б) кількість тепла, що виділиться на опорі.

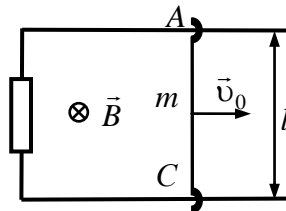


Рисунок 6.9

**6.62** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,84$  Тл із невеликою швидкістю обертається квадратна рамка, сторона якої  $a = 5$  см, що складається з

невеликої кількості витків мідного проводу з площею поперечного перерізу  $S = 0,5 \text{ мм}^2$ . Кінці рамки короткозамкнені. Максимальна сила струму, індукованого в рамці за умови обертання,  $I_{\text{max}} = 1,9 \text{ А}$ . Визначити частоту обертання  $n$  рамки. Питомий опір міді  $\rho = 17 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ .

**6.63** Плоский контур (рис. 6.10), що має вигляд двох квадратів зі сторонами  $a = 20 \text{ см}$  і  $b = 10 \text{ см}$ , перебуває в однорідному магнітному полі, перпендикулярному до його площини. Індукція поля змінюється з часом за законом  $B = B_0 \cdot \sin \omega t$ , де  $B_0 = 10 \text{ мТл}$  і

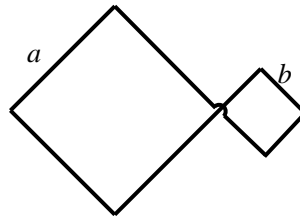


Рисунок 6.10

$\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ . Знайти амплітуду індукційного струму в контурі, якщо опір одиниці його довжини  $\rho = 50 \text{ мОм}/\text{м}$ . Індуктивністю контура знехтувати.

**6.64** У середині довгого соленоїда знаходиться котушка, яка має  $N$  витків та площу поперечного перерізу  $S$ . Котушку повертають зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі, що збігається з її діаметром, перпендикулярним до осі соленоїда. Знайти ЕРС індукції в котушці, якщо індукція магнітного поля в соленоїді змінюється як  $B = B_0 \sin \omega t$ , і в момент  $t = 0$  вісь котушки збігається з віссю соленоїда.

**6.65** На довгий прямий соленоїд, що має діаметр  $d = 5 \text{ см}$  і  $n = 20$  витків на один сантиметр довжини, щільно надіто коловий виток із мідного проводу перерізом  $S = 1,0 \text{ мм}^2$ . Знайти струм у витку, якщо струм в обмотці соленоїда збільшують зі сталою швидкістю  $\dot{I} = 100 \text{ А}/\text{с}$ .



**6.66** Обчислити сталу часу  $\tau$  прямого соленоїда довжиною  $l = 1,0$  м, що має одношарову обмотку з мідного проводу масою  $m = 1,0$  кг. Вважати, що діаметр перерізу соленоїда значно менший за його довжину. *Примітка.* Сталою часу  $\tau$  називають відношення  $L/R$ , де  $L$  – індуктивність;  $R$  – активний опір.

**6.67** Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю, що являє собою два тонкостінних коаксіальних металевих циліндри, якщо радіус зовнішнього циліндра в  $\eta = 3,6$  раза більший, ніж радіус внутрішнього. Магнітну проникність середовища між циліндрами вважати такою, що дорівнює одиниці.

**6.68** Знайти закон зміни в часі струму, що проходить через індуктивність  $L$  у схемі (рис. 6.11) після замикання ключа  $K$  у момент часу  $t = 0$ .

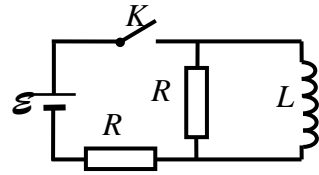


Рисунок 6.11

**6.69** Знайти індуктивність одиниці довжини двопровідної лінії, якщо радіус кожного проводу в  $\eta$  раз менший за відстань між їх осями. Полем усередині проводів знехтувати, магнітну проникність усюди вважати такою, що дорівнює одиниці й  $\eta \ll 1$ .

**6.70** Два довгих коаксіальних соленоїди містять  $n_1$  і  $n_2$  витків на одиницю довжини. Внутрішній соленоїд, що має площу поперечного перерізу  $S$ , заповнений магнетиком із проникністю  $\mu$ . Знайти взаємну індуктивність соленоїдів на одиницю їх довжини.

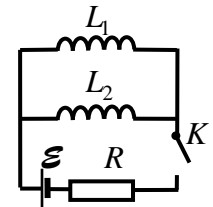


Рисунок 6.12

**6.71** У схемі (рис. 6.12) відомі ЕРС  $\mathcal{E}$  джерела, опір  $R$  та індуктивності котушок  $L_1$  і  $L_2$ .

Внутрішній опір джерела та опір котушок малі. Знайти усталені струми в котушках після замикання ключа  $K$ .

**6.72** Обчислити взаємну індуктивність довгого прямого проводу й прямокутної рамки зі сторонами  $a$  й  $b$ . Рамка і прямий провід лежать в одній площині, причому найближча до проводу сторона рамки довжиною  $b$  паралельна йому й знаходиться від нього на відстані  $l$ .

**6.73** Котушка індуктивністю  $L = 2,0$  мГн та опором  $R = 1,0$  Ом приєднана до джерела сталої ЕРС  $\mathcal{E} = 3,0$  В (рис. 6.13). Паралельно котушці увімкнений опір  $R_0 = 2,0$  Ом. Знайти кількість тепла, що виділиться в котушці після розмикання ключа  $K$ . Внутрішнім опором джерела знехтувати.

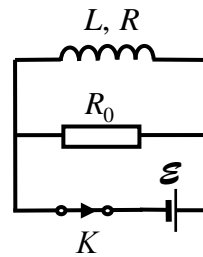


Рисунок 6.13

**6.74** Струм  $I$  проходить по довгому прямому провіднику круглого перерізу з магнітною проникністю  $\mu$ . Знайти енергію магнітного поля всередині провідника на одиницю його довжини.

**6.75** Коаксіальний кабель складається з внутрішнього суцільного провідника радіусом  $a$  й зовнішньої тонкостінної трубки радіусом  $b$ . Знайти індуктивність одиниці довжини кабелю для струмів достатньо малої частоти, для якої розподіл струму по перерізу практично рівномірний. Магнітну проникність всюди прийняти такою, що дорівнює одиниці.

**6.76** Довгий циліндр радіусом  $a$ , поверхня якого рівномірно заряджена, обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти енергію магнітного поля на одиницю довжини циліндра, якщо лінійна густина заряду циліндра дорівнює  $\lambda$  й  $\mu = 1$ .

## 7 РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ ПОЛЯХ

### *Основні формули*

*Сила Лоренца*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (7 \text{ а})$$

*Рівняння руху релятивістської частинки*

$$\frac{d}{dt} \cdot \left( \frac{m \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = \vec{F}. \quad (7 \text{ б})$$

*Період обертання зарядженої частинки в однорідному магнітному полі*

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (7 \text{ в})$$

*Бетатронна умова – умова руху електрона по коловій орбіті в бетатроні*

$$B_0 = \langle B \rangle / 2, \quad (7 \text{ г})$$

де  $B_0$  є індукцією магнітного поля на орбіті,  $\langle B \rangle$  є середнім значенням індукції магнітного поля всередині орбіти.

### **7.1 Приклади розв'язування задач**

#### ***Приклад 7.1***

Протон, прискорений різницею потенціалів  $U = 500$  кВ, пролітає однорідне поперечне магнітне поле з індукцією  $B = 0,51$  Тл. Ширина області з магнітним полем  $d = 10$  см (рис. 7.1). Знайти кут  $\alpha$  відхилення протона від початкового напрямку руху.

### Розв'язання

$\alpha$ –?
$U = 500$ кВ,
$B = 0,51$ Тл,
$d = 10$ см,
$q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг

Кінетична енергія протона, як впливає з умови задачі,  $U \cdot q_p = 500 \text{кВ} = 0,5 \text{МеВ}$  (тут  $q_p$  – електричний заряд протона) набагато менша за його енергію спокою  $m_p \cdot c^2 \approx 930 \text{МеВ}$  (тут  $m_p$  – маса протона). Тому для розв'язування

задачі будемо використовувати формули нерелятивістської механіки, а саме другий закон Ньютона.

Протон влітає в область магнітного поля перпендикулярно до напрямку індукції магнітного поля  $\vec{B}$ . Відомо, що в цьому разі частинка буде рухатися по колу радіусом  $R$ . Позначимо центр цього кола точкою  $O$  (рис. 7.1). Після вильоту за межі області магнітного поля протон буде рухатися рівномірно і прямолінійно, тому що на нього тут не будуть діяти сили. З рис. 7.1 бачимо, що шуканий кут відхилення  $\alpha$  дорівнює куту  $\angle COK$  (як кути між взаємно перпендикулярними прямими). З трикутника  $\triangle COK$  неважко знайти, що

$$\alpha = \angle COK = \arcsin(CK / OK) = \arcsin(d / R). \quad (1)$$

Тут використали, що, як впливає з рис. 7.1,  $OK = R$ ,  $CK = d$ . Таким чином, задача зводиться до визначення

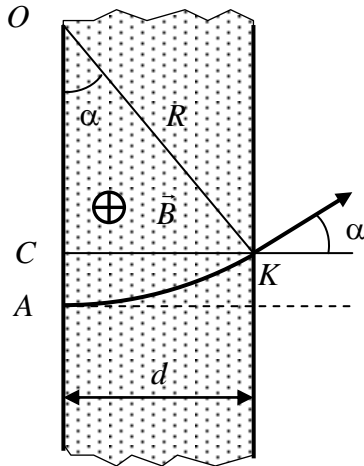


Рисунок 7.1

радіуса кривизни  $R$  руху протона в магнітному полі. Для знаходження цієї величини використаємо другий закон Ньютона:

$$m_p \vec{a} = \vec{F}, \quad (2)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення протона;  $\vec{F}$  – сила, що діє на нього. Оскільки протон рухається перпендикулярно до напрямку індукції магнітного поля  $\vec{B}$ , модуль магнітної складової сили Лоренца, яка діє на цю частинку, дорівнює

$$F = q_p \cdot v \cdot B. \quad (3)$$

Як було зазначено вище, протон у цьому випадку рухається по колу. Отже, його прискорення буде доцентровим:

$$a = v^2 / R. \quad (4)$$

Підставляємо (3)–(4) в (2) і знаходимо

$$\frac{m_p v^2}{R} = q_p \cdot v \cdot B \quad (5)$$

або

$$R = \frac{m_p v}{q_p B}. \quad (6)$$

Бачимо, що для визначення радіуса протона потрібно знайти його швидкість. Для цього застосуємо закон збереження повної механічної енергії. Після проходження протоном різниці потенціалів  $U$  потенціальна енергія протона в електричному полі  $W = q_p U$  перетворюється на кінетичну енергію  $T = m_p v^2 / 2$ . Тобто

$$q_p U + 0 = 0 + m_p v^2 / 2. \quad (7)$$

У співвідношенні (7) використали умову, що кінетична енергія в початковому стані та потенціальна енергія в

кінцевому стані дорівнювали нулю. Із (7) знаходимо, що швидкість протона дорівнює

$$v = \sqrt{2q_p U / m_p}. \quad (8)$$

Підставляємо (8) в (6), а далі (6) в (1) і знаходимо шуканий кут:

$$\alpha = \arcsin(d / R) = \arcsin\left(B \cdot d \cdot \sqrt{\frac{q_p}{2Um_p}}\right). \quad (9)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\alpha = \arcsin\left(0,51 \cdot 0,1 \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}}\right) = 0,59 \text{ рад.}$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли ширина області магнітного поля прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді кут відхилення теж буде прямувати до нуля. З розрахункової формули впливає такий самий результат: якщо  $d \rightarrow 0$ , то

$$\alpha = \arcsin\left(B \cdot d \cdot \sqrt{\frac{q_p}{2Um_p}}\right) \sim \arcsin(d) \rightarrow 0.$$

2 Розглянемо ситуацію, коли індукція магнітного поля прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді кут відхилення теж буде прямувати до нуля. З розрахункової формули впливає такий самий результат: якщо  $B \rightarrow 0$ , то

$$\alpha = \arcsin\left(B d \sqrt{\frac{q_p}{2Um_p}}\right) \sim \arcsin(B) \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула (9) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\alpha = \arcsin \left( B \cdot d \cdot \sqrt{\frac{q_p}{2Um_p}} \right) = 0,59 \text{ рад.}$

### Приклад 7.2

Із точки  $O$ , що лежить на осі прямого соленоїда, вилітає нерелятивістський електрон зі швидкістю  $v$  під кутом  $\alpha$  до осі. Індукція магнітного поля  $B$ . Знайти відстань  $r$  від осі до точки  $A$  потрапляння електрона на екран, що розміщений перпендикулярно до осі на відстані  $l$  від точки  $O$ .

#### Розв'язання

$r - ?$  | Магнітне поле соленоїда є однорідним  
 $v, \alpha, B, l$  | і спрямоване вздовж його осі  $X$  (рис. 7.2).

Тому електрон у цьому полі буде рухатися по спіралі. Як відомо, цей рух можна подати як сукупність двох рухів: рівномірного руху по колу під дією магнітної складової сили Лоренца в площині, перпендикулярній до осі соленоїда, та рівномірного руху вздовж осі соленоїда (вздовж осі  $X$ , див. рис. 7.2). Використовуючи закони механіки, знайдемо шукану відстань  $r$ .

Уздовж осі  $X$ , як зазначалося вище, електрон рухається рівномірно. Швидкість цього руху дорівнює (рис. 7.2):

$$v_x = v \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

Зрозуміло, що відстань  $l$  від точки вильоту  $O$  до екрана  $E$  (рис. 7.2) електрон пролетить за час

$$t = l / v_x = l / (v \cdot \cos \alpha). \quad (2)$$

Як зазначалося вище, у площині  $YZ$ , перпендикулярній до осі соленоїда  $X$ , електрон рухається

по колу з центром у точці  $K$  (рис. 7.3). За час руху від вихідної точки  $O$  до кінцевої точки  $A$  (рис. 7.2) в площині  $YZ$  електрон зміститься вздовж кола радіусом  $R$  на кут  $\varphi$  (рис. 7.3):

$$\varphi = (2\pi/T) \cdot t, \quad (3)$$

де  $T$  – період обертання частинки в однорідному магнітному полі, який визначається відповідно до формули (7 в) співвідношенням

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (4)$$

де  $m$ ,  $q$  – відповідно маса й заряд електрона.

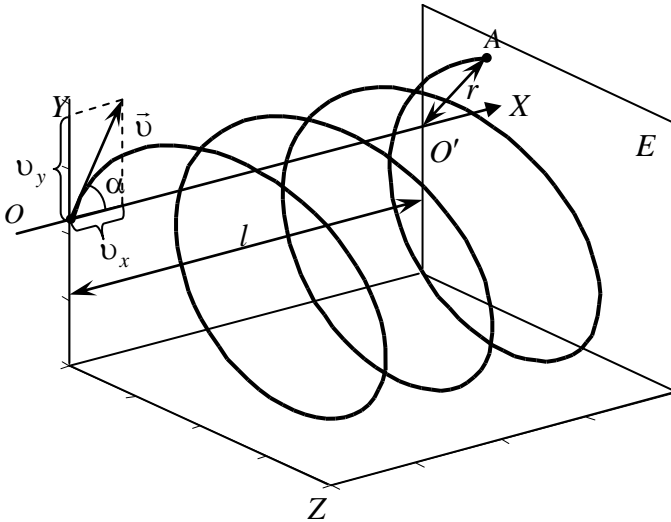


Рисунок 7.2

Оскільки за умовою електрон є нерелятивістським, тобто його швидкість  $v \ll c$ , то формулу (4) можна спростити:



$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}. \quad (5)$$

Підставляємо (2) і (5) у співвідношення (3) та одержуємо

$$\varphi = \frac{q \cdot B \cdot l}{m \cdot v \cdot \cos \alpha}. \quad (6)$$

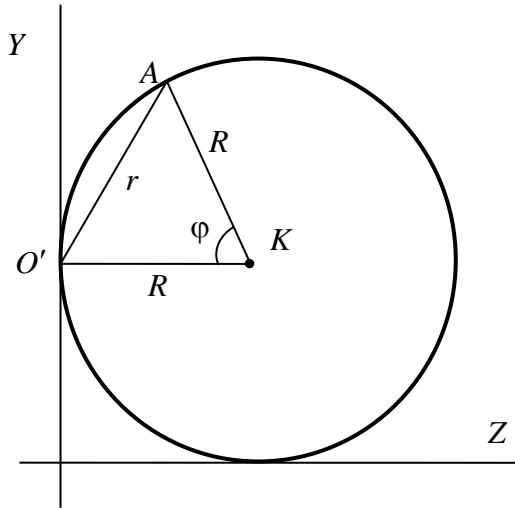


Рисунок 7.3

Радіус кола  $R$ , по якому обертається електрон, неважко визначити (див. приклад 7.1, формула (6)):

$$R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B}, \quad (7)$$

де  $v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha$  – компонента швидкості електрона, яка є перпендикулярною до вектора магнітної індукції. Отже, у трикутнику  $\Delta O'KA$  (рис. 7.3) нам відомі дві сторони ( $O'K = R$ ,  $KA = R$ ) і кут між ними  $\varphi$ . Тому для визначення відстані  $O'A = r$  від осі  $X$  до точки  $A$  потрапляння електрона на екран застосуємо теорему косинусів

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \varphi. \quad (8)$$

Формулу (8) можна перетворити:

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \varphi = 2R^2(1 - \cos \varphi) = 4R^2 \sin^2(\varphi/2),$$

або

$$r = 2R \sin(\varphi/2). \quad (9)$$

Підставляємо (7) та (6) в (9) і знаходимо шукану відстань

$$r = 2R \sin(\varphi/2) = 2 \frac{m\nu \cdot \sin \alpha \cdot l}{q \cdot B} \cdot \sin\left(\frac{q \cdot B \cdot l}{2m\nu \cdot \cos \alpha}\right). \quad (10)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли початкова швидкість електрона є паралельною осі соленоїда (лініям індукції магнітного поля), тобто кут  $\alpha$  прямує до нуля. Зрозуміло, що в цьому випадку електрон буде рухатися виключно вздовж осі  $X$ , тому що магнітна складова сили Лоренца  $F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha = 0$  буде такою, що дорівнює нулю. Отже, шукана відстань  $r$  від осі до точки  $A$  також дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $\alpha \rightarrow 0$ , то

$$r = 2 \frac{m\nu \cdot \sin \alpha \cdot l}{q \cdot B} \cdot \sin\left(\frac{q \cdot B \cdot l}{2m\nu \cdot \cos \alpha}\right) \rightarrow \sin \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow 0.$$

Тут враховано, що  $\cos \alpha \rightarrow \cos 0 = 1$ .

Отже, розрахункова формула (10) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $r = \frac{2m\nu \cdot \sin \alpha \cdot l}{q \cdot B} \cdot \sin\left(\frac{q \cdot B \cdot l}{2m\nu \cdot \cos \alpha}\right).$

### Приклад 7.3

Із початку координат  $O$  в області, де створені однорідні паралельні осі  $Y$ , електричне та магнітне поля з напруженістю  $E$  й індукцією  $B$  (рис. 7.4), вилітає в напрямку осі  $X$  нерелятивістська частинка з питомим зарядом  $q/m$  і початковою швидкістю  $v_0$ . Знайти: а) координату  $y$  частинки в момент, коли вона  $n$ -й раз перетне вісь  $Y$ ; б) кут  $\alpha$  між швидкістю частинки й віссю  $Y$  в цей момент.

#### Розв'язання

$y - ?$	Оскільки вектори напруженості електричного поля $\vec{E}$ та індукції магнітного поля $\vec{B}$ паралельні (рис. 7.4), електрична й магнітна складові сили Лоренца будуть перпендикулярними. У цьому разі електрична складова сили Лоренца
$\alpha - ?$	

$q/m, v_0$

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

є паралельною осі  $Y$ , а магнітна складова

$$\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

є перпендикулярною до осі  $Y$ . Тому рух частинки в таких полях можна подати як суперпозицію двох рухів: руху під дією електричної компоненти сили Лоренца  $\vec{F}_{el}$  вздовж осі  $Y$  та руху під дією магнітної складової сили Лоренца  $\vec{F}_m = q[\vec{v} \times \vec{B}]$  у площині, перпендикулярній до осі  $Y$ . Використовуючи закони механіки, знайдемо шукані в задачі величини.

Розглянемо рух частинки вздовж осі  $Y$ . Згідно з другим законом Ньютона проекція прискорення на вісь  $Y$  дорівнює

$$a_y = F_y / m = F_{en} / m = qE / m = \text{const.} \quad (1)$$

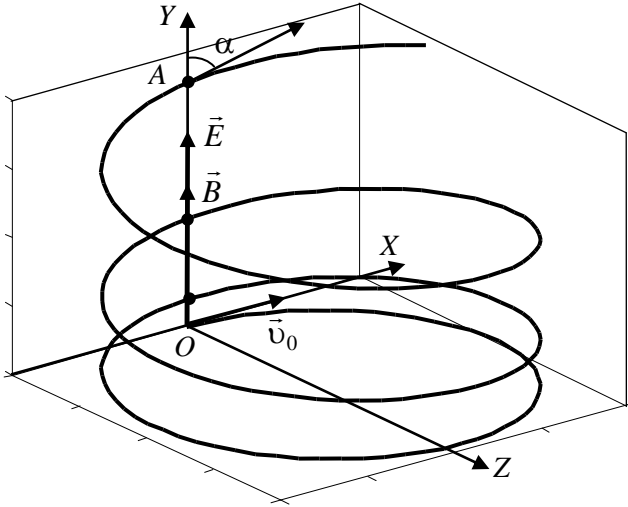


Рисунок 7.4

Оскільки напруженість електричного поля є сталою, рух частинки вздовж осі  $Y$  є рівноприскореним. Його швидкість та координата визначаються відомими формулами для рівноприскореного руху:

$$v_y = v_{0y} + a_y t = (qE / m)t, \quad (2)$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + a_y t^2 / 2 = (qE / m)t^2 / 2. \quad (3)$$

Тут використано (1) й те, що і проекція початкової швидкості на вісь  $Y$  ( $v_{0y}$ ), і початкова координата  $y_0$  за умовою задачі дорівнюють нулю.

Розглянемо рух частинки в площині, перпендикулярній до осі  $Y$ . Як зазначалося вище, у цій

площині частинка рухається під дією магнітної складової сили Лоренца. Як відомо, такий рух є рівномірним рухом по колу з періодом

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}, \quad (4)$$

який не залежить від швидкості частинки в нерелятивістському випадку. В цьому разі поперечна швидкість є сталою за модулем і дорівнює проекції початкової швидкості на площину  $XZ$ :

$$v_{\perp} = v_{0x} = v_0. \quad (5)$$

Нагадаємо, що за умовою задачі початкова швидкість частинки спрямована вздовж осі  $X$ .

Таким чином, вісь  $Y$  частинка буде перетинати через однакові проміжки часу  $T$ . Вісь  $Y$  в  $n$ -й раз частинка буде перетинати в момент часу

$$t = n \cdot T = n \cdot \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}. \quad (6)$$

Таким чином, частинка в поперечній до осі  $Y$  площині рухається по колу зі сталою швидкістю, а вздовж осі  $Y$  – рівноприскорено. Тобто траєкторією руху є спіраль (рис. 7.4), що збільшує свій крок.

Координату  $y$  частинки в момент, коли вона  $n$ -й раз перетне вісь  $Y$ , знайдемо використовуючи рівняння (3) та (6)

$$y = \frac{qE}{m} \frac{t^2}{2} = \frac{qE}{m} \cdot \left( n \cdot \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B} \right)^2 / 2 = \frac{2\pi^2 E \cdot m \cdot n^2}{q \cdot B^2}. \quad (7)$$

Кут  $\alpha$  між швидкістю частинки й віссю  $Y$  в момент її перетину знайдемо використовуючи рис. 7.4:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_{\perp}}{v_y}. \quad (8)$$

Підставляємо в цю формулу (2), (5) та (6) і знаходимо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0 B}{2\pi n E} \text{ або } \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 B}{2\pi n E}\right). \quad (9)$$

Отже, шукані величини визначаються формулами (7) та (9):

$$y = \frac{2\pi^2 \cdot E \cdot m \cdot n^2}{q \cdot B^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 B}{2\pi n E}\right).$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Спрямуємо значення напруженості електричного поля до нуля. Тоді частинка вздовж осі  $y$  рухатися не буде й  $y_n = 0$ . Кут  $\alpha$  буде дорівнювати  $90^\circ$ . З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $E \rightarrow 0$ , то

$$y = \frac{2\pi^2 \cdot E \cdot m \cdot n^2}{q \cdot B^2} \sim E \rightarrow 0,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 B}{2\pi n E}\right) \rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{E}\right) \rightarrow \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, розрахункові формули (7) та (9) не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $y = \frac{2\pi^2 \cdot E \cdot m \cdot n^2}{q \cdot B^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 B}{2\pi n E}\right).$

### Приклад 7.4

Протони прискорюються в циклотроні так, що максимальний радіус кривизни їх траєкторії  $R = 50$  см. Визначити: а) кінетичну енергію  $W_{k1}$  протонів наприкінці прискорення, якщо індукція магнітного поля в циклотроні  $B = 1$  Тл; б) мінімальну частоту генератора циклотрона, якщо наприкінці прискорення протони будуть мати кінетичну енергію  $W_{k2} = 20$  МеВ.

#### Розв'язання

$W_{k1} - ?$	Циклотрон – прискорювач заряджених частинок. Розглянемо принцип дії цього пристрою.
$v - ?$	
$R = 50$ см, $B = 1$ Тл; $W_{k2} = 20$ МеВ	

До складу циклотрона входять два електроди у вигляді половинок круглої невисокої коробки (рис. 7.5, позиція 1), які одержали назву дуантів. Дуанти розміщені в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ , спрямованою перпендикулярно до площини дуантів. На дуанти подається змінна напруга від генератора високої частоти (рис. 7.5, позиція 2).

Припустимо, що протон знаходиться в проміжку між дуантами в той момент, коли напруга між ними досягне найбільшої величини. Частинка буде втягнута електричним полем усередину від'ємно зарядженого електрода. Усі точки всередині дуанта мають однаковий електричний потенціал. Це означає, що там напруженість електричного поля буде дорівнювати нулю. Отже, протон у дуанті буде рухатися під впливом лише постійного магнітного поля. Відомо, що в цьому разі відбуватиметься рух зарядженої частинки по колу, радіус якого пропорційний до її швидкості (див. формулу (6) прикладу 7.1). Підберемо частоту зміни напруги між дуантами таким чином, щоб до моменту, коли частинка,

пройшовши половину кола, підійде до проміжку між дуантами, різниця потенціалів між ними змінила знак і досягла максимального значення. Тоді частинка буде знову прискорена електричним полем між дуантами і влетить у другий дуант з енергією, вдвічі більшою, ніж та, з якою вона рухалася в першому дуанті. Маючи більшу швидкість, частинка буде рухатися в другому дуанті по колу більшого радіуса, але час, за який вона пройде половину кола, залишиться сталим (він не залежить від швидкості у нерелятивістському випадку, див. формулу (7 в)). Тому до моменту, коли частинка влетить у проміжок між дуантами, напруга між ними знову змінить знак і стане максимальною за величиною.

Таким чином, якщо частоту зміни напруги зробити такою, що дорівнює періоду обертання частинки в постійному магнітному полі (7 в), то частинка буде рухатися по кривій, яка буде близькою до спіралі (рис. 7.5, позиція 3), одержуючи під час кожного проходження через проміжок між дуантами додаткову порцію енергії. Маючи джерело змінної напруги порівняно невеликої величини ( $\sim 10^5$  В), можна за допомогою циклотрона прискорити протони до енергій порядку 25 МеВ. Коли енергії стають більш високими, виникає необхідність урахувати релятивізм руху. Період обертання перестає бути сталим і синхронізм між рухом частинок і змінами прискорювального поля порушується.

Перейдемо до розв'язування задачі. Вважаємо, що протони рухаються з нерелятивістською швидкістю. Щоб переконатись у цьому для випадку а) підставимо у формули, які одержимо в результаті розв'язування задачі, чисельні значення. У випадку б)  $W_{k2} = 20 \text{ МеВ} \ll 930 \text{ МеВ} \approx m \cdot c^2$ , тобто протон є нерелятивістським.



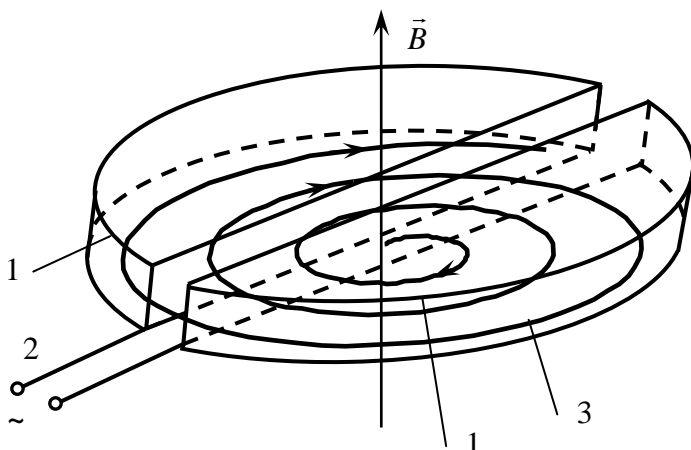


Рисунок 7.5

Для розв'язування задачі використаємо співвідношення, що пов'язує радіус кривизни траєкторії та швидкість руху (формула (6) прикладу 7.1), а потім визначимо шукану кінетичну енергію. У випадку б) використаємо одержану формулу для кінетичної енергії, щоб визначити індукцію магнітного поля. Знайшовши цю величину, визначимо частоту обертання протонів, що буде дорівнювати шуканій мінімальній частоті генератора циклотрона.

Розглянемо частину задачі а). Як відомо, радіус кривизни траєкторії руху протонів у магнітному полі дорівнює (приклад 7.1, формула (6)):

$$R = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}. \quad (1)$$

Звідси знаходимо швидкість протона

$$v = \frac{R \cdot e \cdot B}{m}, \quad (2)$$

а далі і його кінетичну енергію

$$W_{k1} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{R^2 \cdot e^2 \cdot B^2}{2m}. \quad (3)$$

Розглянемо частину задачі б). У магнітному полі циклотрона мінімальна частота  $\nu$  пов'язана з періодом обертання  $T$  співвідношенням

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (4)$$

Як відомо, період обертання (7 в) у нерелятивістському випадку ( $v \ll c$ ) має вигляд

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{e \cdot B}.$$

Тоді частота буде дорівнювати

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{e \cdot B}{2\pi \cdot m}. \quad (5)$$

Зі співвідношення для кінетичної енергії (3) визначимо величину індукції магнітного поля, коли наприкінці прискорення протони будуть мати кінетичну енергію  $W_{k2}$  і рухатися по траєкторії радіусом  $R$ :

$$B = \frac{1}{R \cdot e} \sqrt{2W_{k2} \cdot m}. \quad (6)$$

Підставимо вираз (6) в (5) і отримаємо шукану частоту

$$\nu = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{W_{k2}}{2m}}. \quad (7)$$

Отже,

$$W_{k1} = \frac{R^2 \cdot e^2 \cdot B^2}{2m}, \quad \nu = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{W_{k2}}{2m}}.$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$W_{k1} = \frac{(0,5)^2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \text{ Дж} = 1,92 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 12 \text{ МеВ.}$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул в граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса частинки прямує до нескінченності. Зрозуміло, що тоді частинка рухатися не буде. Тобто кінетична енергія і частота обертання будуть дорівнювати нулю (період обертання буде дорівнювати нескінченності). З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $m \rightarrow \infty$ , то

$$W_{k1} = \frac{R^2 \cdot e^2 \cdot B^2}{2m} \sim \frac{1}{m} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$v = \frac{1}{\pi \cdot R} \sqrt{\frac{W_{k2}}{2m}} \sim \sqrt{\frac{1}{m}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{\infty}} = 0.$$

Отже, розрахункові формули (3) та (10) не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $W_{k1} = \frac{R^2 e^2 B^2}{2m} = 12 \text{ МеВ}, v = \frac{1}{\pi \cdot R} \sqrt{\frac{W_{k2}}{2m}} =$   
 $= 19,7 \text{ МГц.}$

### *Приклад 7.5*

Поза циліндром радіусом  $R = 10 \text{ см}$  індукція однорідного магнітного поля зростає лінійно з часом за законом  $B_0 = \alpha t$  ( $\alpha = 10^{-3} \text{ Тл/с}$ ). Як повинна змінюватися з часом індукція однорідного магнітного поля  $B$  усередині циліндра (рис. 7.6), щоб електрон рухався по колу радіусом

$r = 15$  см? У початковий момент часу швидкість електрона дорівнювала нулю.

### Розв'язання

$$\begin{array}{l}
 B = B(t) \text{ --?} \\
 R = 10 \text{ см,} \\
 B_0 = \alpha t, \\
 \alpha = 10^{-3} \text{ Тл/с,} \\
 r = 15 \text{ см}
 \end{array}$$

Розглянемо фізичні процеси, які відбуваються у системі, описаній в умові задачі. За рахунок зміни з часом магнітного поля в системі виникає вихрове електричне поле. Силкові лінії вихрового електричного поля мають вигляд концентричних кіл, площа яких перпендикулярна до вектора індукції змінного магнітного поля (рис. 7.6). Таким чином, електрон рухається під дією сили Лоренца, що формується як вихровим електричним, так і магнітним полем. У цьому разі електрична складова сили Лоренца  $\vec{F}_{el}$  відповідає за збільшення модуля швидкості  $v$ , а магнітна складова  $\vec{F}_m$  визначає величину доцентрового (нормального) прискорення  $a_n$ . Радіус кривизни криволінійного руху електрона легко визначити використовуючи відому формулу для доцентрового прискорення  $r = v^2 / a_n$ . Звідси випливає: для того щоб рух електрона відбувався по колу (радіус кривизни  $r$  був сталою величиною), потрібна узгоджена зміна швидкості та прискорення з часом. Знайшовши відповідні функціональні залежності, ми визначимо шукані величини в цій задачі.

Знайдемо величину вихрового електричного поля  $E$  на рівноважній орбіті радіусом  $r$  (рис. 7.6), використовуючи закон електромагнітної індукції (6 а):

$$\mathcal{E}_i = -d\Phi / dt. \quad (1)$$

Електрорушійна сила  $\mathcal{E}_i$ , що виникає на рівноважній орбіті радіусом  $r$ , обумовлена напруженістю вихрового

електричного поля  $E$  в точках цієї орбіти. Застосуємо визначення ЕРС:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A_{cm}}{e} = \frac{2\pi r F_{el}}{e} = \frac{2\pi r e E}{e} = 2\pi r E. \quad (2)$$

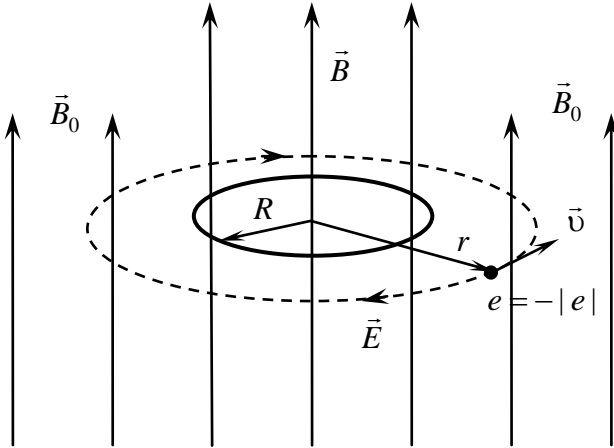


Рисунок 7.6

У формулі (2)  $e = -|e|$  – заряд електрона. Тепер розглянемо магнітний потік  $\Phi$ . Він складається з двох доданків. Перший доданок – потік через поперечний переріз циліндра  $B \cdot \pi R^2$ , другий доданок – потік  $B_0 \cdot (\pi r^2 - \pi R^2)$  через циліндричний шар між циліндром та рівноважною орбітою радіусом  $r$ . Тобто

$$\Phi = B \cdot \pi R^2 + B_0 \cdot (\pi r^2 - \pi R^2). \quad (3)$$

Підставляємо (2) та (3) в (1) та одержуємо вираз для напруженості електричного поля

$$E = \left( \frac{dB}{dt} \cdot \frac{R^2}{2r} + \frac{dB_0}{dt} \cdot \frac{r^2 - R^2}{2r} \right). \quad (4)$$

У (4) знак « $\leftrightarrow$ » не враховано, тому що вираз (4) встановлює співвідношення між модулями величин без урахування їх напрямків.

Запишемо електричну та магнітну складові сили Лоренца, що діють на електрон на його орбіті радіусом  $r$ :

$$F_{el} = eE = e \left( \frac{dB}{dt} \cdot \frac{R^2}{2r} + \frac{dB_0}{dt} \cdot \frac{r^2 - R^2}{2r} \right), \quad (5)$$

$$F_m = eB_0 v. \quad (6)$$

Напрямок цих сил зображено на рис. 7.7. Із цього рисунка бачимо, що електрична складова сили Лоренца відповідає за тангенціальну складову прискорення:

$$F_{el} = ma_\tau = m \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (7)$$

а магнітна складова – за доцентрове прискорення:

$$F_m = ma_n = m \cdot \frac{v^2}{r}. \quad (8)$$

Підставляємо (5) у (7) і знаходимо швидкість електрона на рівноважній орбіті радіусом  $r$ :

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = e \left( \frac{dB}{dt} \cdot \frac{R^2}{2r} + \frac{dB_0}{dt} \cdot \frac{r^2 - R^2}{2r} \right), \quad (9)$$

або

$$v = \frac{e}{m} \left( B \cdot \frac{R^2}{2r} + B_0 \cdot \frac{r^2 - R^2}{2r} \right). \quad (10)$$

Під час інтегрування (9) ураховано, що в момент часу  $t = 0$  швидкість  $v$  та магнітне поле  $B_0$  дорівнювали нулю.

Підставимо (6) та (10) у (8) і отримаємо співвідношення для визначення невідомої функціональної залежності  $B = B(t)$ :

$$eB_0v = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{або} \quad eB_0 = m \cdot \frac{v}{r} = \frac{m}{r} \cdot \frac{e}{m} \left( B \cdot \frac{R^2}{2r} + B_0 \cdot \frac{r^2 - R^2}{2r} \right).$$

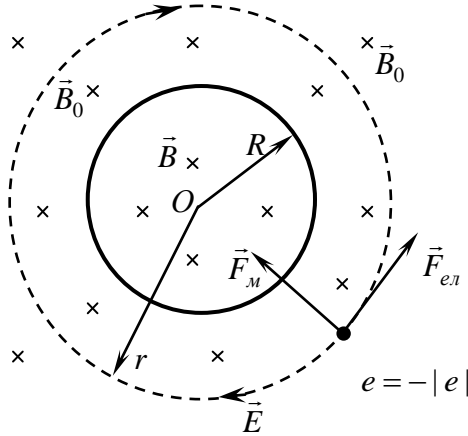


Рисунок 7.7

Звідси знаходимо

$$B = B_0 \left( R^2 + r^2 \right) / R^2 = \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot t.$$

Таким чином, шукана залежність індукції однорідного магнітного поля  $B$  усередині циліндра від часу визначається таким співвідношенням:

$$B = \beta t, \quad \text{де} \quad \beta = \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (11)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (11), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\beta = 10^{-3} \left( 1 + \frac{0,15^2}{0,10^2} \right) \text{ Тл/с} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ Тл/с.}$$

### *Аналіз одержаного результату*

Розглянемо інший варіант розв'язування задачі.

Фактично, в задачі йде мова про прискорення електрона в бетатроні. Відомо, в бетатроні електрон рухається по коловій орбіті зі сталим радіусом  $r$ , якщо виконується так звана бетатронна умова (див. формулу (7 г)):

$$B_0 = \langle B \rangle / 2, \quad (12)$$

де  $B_0$  є індукцією магнітного поля на орбіті, а

$$\langle B \rangle = \Phi / (\pi r^2) \quad (13)$$

є середнім значенням індукції магнітного поля всередині орбіти. Підставляємо (3) в (13), а потім одержаний результат – у (12) і знаходимо

$$B_0 = \frac{\Phi}{2\pi r^2} = \frac{B \cdot \pi R^2 + B_0 \cdot (\pi r^2 - \pi R^2)}{2\pi r^2}.$$

Звідси одержуємо

$$B = B_0 (R^2 + r^2) / R^2 = \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot t,$$

що повністю збігається з (11).

Отже, розрахункова формула (11) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $B = \beta t$ , де  $\beta = \alpha \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ Тл/с.}$



### Приклад 7.6

Індукція магнітного поля в бетатроні на рівноважній орбіті радіусом  $r$  зростає за час прискорення від нуля до  $B_m$  практично зі сталою швидкістю. Вважаючи початкову швидкість електрона такою, що дорівнює нулю, знайти енергію, яку одержує електрон за час прискорення.

#### Розв'язання

$\frac{\Delta W}{r, B_m} - ?$  | Бетатрон – пристрій, в якому електрони прискорюються за рахунок вихрового електричного поля, створюваного змінним у часі магнітним полем. Силкові лінії вихрового електричного поля мають вигляд концентричних кілець, площина яких перпендикулярна до вектора індукції  $\vec{B}$  змінного магнітного поля (рис. 7.8). Таким чином, у бетатроні електрон рухається під дією як вихрового електричного поля, так і магнітного поля. У загальному випадку електрон у цих полях рухається по спіралі. Однак можна підібрати параметри системи так, щоб електрон рухався по коловій орбіті. Таку орбіту називають рівноважною, а умову, коли електрон рухається по коловій орбіті – бетатронною умовою (7 г). У бетатроні електрон рухається по рівноважній орбіті. Завдяки тому, що електрон рухається весь час по замкненій силівній лінії вихрового електричного поля, його швидкість постійно збільшується, і відбувається прискорення електрона. Кінетична енергія електрона зростає до релятивістських значень.

Як було зазначено вище, електрон у бетатроні рухається під дією як вихрового електричного, так і магнітного поля. Величину вихрового електричного поля визначимо, використовуючи закон електромагнітної індукції (6 а) та бетатронну умову (7 г). Далі розв'яжемо рівняння руху (7 б) і знайдемо імпульс електрона, а потім і його енергію.

Перейдемо до розв'язування задачі. Вважаємо, що електрон рухається по рівноважній орбіті радіусом  $r$  (рис. 7.8) по силовій лінії вихрового електричного поля. Оскільки електрон має від'ємний електричний заряд, він рухається у протилежному напрямку до вектора напруженості електричного поля. Визначимо напруженість вихрового електричного поля  $E$  на рівноважній орбіті радіусом  $r$ , використовуючи закон електромагнітної індукції (6 а):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

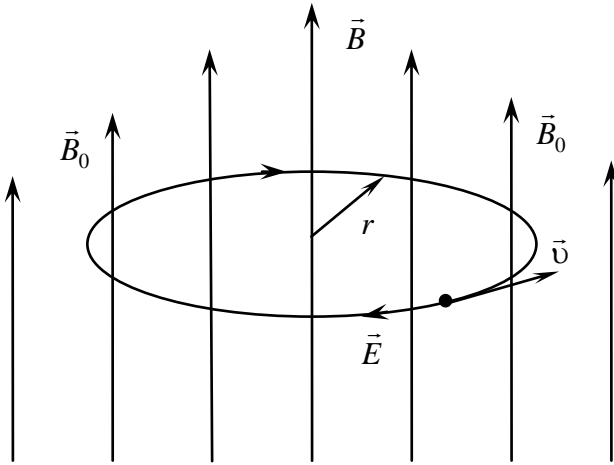


Рисунок 7.8

Оскільки ЕРС індукції  $\mathcal{E}_i$  на рівноважній орбіті радіусом  $r$  створена вихровим електричним полем, то відповідно до визначення ЕРС можемо записати

$$\mathcal{E}_i = \frac{A_{em}}{e} = \frac{2\pi r F_{el}}{e} = \frac{2\pi r e E}{e} = 2\pi r E. \quad (2)$$

У формулі (2)  $e = -|e|$  – заряд електрона. Тепер розглянемо магнітний потік  $\Phi$ :

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \langle B \rangle \cdot \pi r^2, \quad (3)$$

де  $\langle B \rangle = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} / (\pi r^2)$  – середнє значення індукції магнітного поля всередині орбіти. Підставляємо (3) та (2) в (1) і одержуємо

$$2\pi r \cdot E = \pi r^2 \frac{d}{dt} (\langle B \rangle) \text{ або } E = \frac{r}{2} \frac{d}{dt} (\langle B \rangle). \quad (4)$$

Оскільки електрон рухається по рівноважній орбіті, індукція магнітного поля на рівноважній орбіті  $B_0$  й середнє значення індукції магнітного поля всередині цієї орбіти  $\langle B \rangle$  зв'язані бетатронною умовою (див. (7 г)):

$$B_0 = \langle B \rangle / 2. \quad (5)$$

Сутність бетатронної умови полягає в такому. Для того щоб електрон рухався по орбіті зі сталим радіусом, зміна в часі швидкості електрона (визначається напруженістю вихрового електричного поля і середнім значенням індукції магнітного поля на орбіті) та зміна в часі доцентрової сили (визначається магнітною складовою сили Лоренца та індукцією магнітного поля на орбіті) повинні бути узгодженими. Більш детально ця умова розглянута у прикладі 7.5 (див. також аналіз одержаного результату до прикладу 7.5).

Далі підставляємо (5) у (4) та одержуємо

$$E = r \frac{dB_0}{dt}, \quad (6)$$

де, нагадаємо,  $B_0$  – індукція магнітного поля на рівноважній орбіті. Запишемо рівняння руху електрона (7 б):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}_0]), \quad (7)$$

де  $\vec{p}$  – релятивістський імпульс частинки. Тангенціальна компонента цього рівняння має вигляд

$$\frac{dp}{dt} = eE = e \cdot r \frac{dB_0}{dt}. \quad (8)$$

Потрібно врахувати, що в цьому рівнянні  $p$  є модулем релятивістського імпульсу. Проінтегруємо це рівняння, враховуючи що в початковий момент часу імпульс та індукція магнітного поля дорівнювали нулю, та отримаємо

$$p = \int_0^t \frac{dp}{dt} dt = \int_0^t e \cdot r \frac{dB_0}{dt} dt = e \cdot r \cdot B_0. \quad (9)$$

Далі використаємо співвідношення між повною енергією релятивістської частинки та її імпульсом і знайдемо

$$W(t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \cdot (r \cdot e \cdot B_0(t))^2}. \quad (10)$$

Шукану енергію, яку електрон одержує за час прискорення, визначаємо як різницю відповідних повних енергій:

$$\begin{aligned} \Delta W = W(\tau) - W(0) &= mc^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{erB_0(\tau)}{m \cdot c} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{erB_0(0)}{m \cdot c} \right)^2} \right) = \\ &= mc^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{erB_m}{m \cdot c} \right)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Тут використали, що за умовою задачі в початковий момент часу  $B_0(0) = 0$ , а в кінцевий момент часу  $\tau$  індукція магнітного поля на рівноважній орбіті дорівнювала  $B_0(\tau) = B_m$ .

Отже, енергія, яку електрон одержує за час прискорення, дорівнює

$$\Delta W = mc^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{erB_m}{m \cdot c} \right)^2} - 1 \right). \quad (11)$$

### *Аналіз одержаного результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули в граничних випадках.

Спрямуємо максимальне значення індукції магнітного поля  $B_m$  до нуля. Це означає, що магнітне поле в системі буде відсутнім, а отже, й вихрове електричне поле виникати не буде. За цих обставин електрон рухатися не буде, і енергія  $\Delta W$ , яку електрон одержує за час прискорення, буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо  $B_m \rightarrow 0$ , то

$$\Delta W = mc^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{e \cdot r \cdot B_m}{m \cdot c} \right)^2} - 1 \right) \sim mc^2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{e \cdot r \cdot B_m}{m \cdot c} \right)^2 \sim B_m^2 \rightarrow 0.$$

Отже, розрахункова формула (11) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:** 
$$\Delta W = mc^2 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{erB_m}{m \cdot c} \right)^2} - 1 \right).$$

## **7.2 Задачі для самостійного розв'язування**

**7.1** Іон, що має один елементарний заряд, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,015$  Тл по колу радіусом  $R = 10$  см. Визначити імпульс  $p$  іона.

**7.2** Частинка, що має один елементарний заряд, влетіла в однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 0,5$  Тл. Визначити момент імпульсу  $L$ , який має частинка під час руху в магнітному полі, коли її траєкторія є дугою кола радіусом  $R = 0,2$  см.

**7.3** Електрон рухається в магнітному полі з індукцією  $B = 0,02$  Тл по колу радіусом  $R = 1$  см. Визначити кінетичну енергію  $T$  електрона (у джоулях і електронвольтах).

**7.4** Заряджена частинка влетіла перпендикулярно до ліній індукції в однорідне магнітне поле, створене в речовині. У результаті взаємодії з речовиною частинка втратила половину своєї енергії. У скільки разів будуть відрізнятися радіуси кривизни траєкторії на початку й в кінці шляху?

**7.5** Заряджена частинка, що рухається в магнітному полі по дузі кола радіусом  $R_1 = 2$  см, пройшла через свинцеву пластину, розміщену на шляху частинки. Внаслідок втрати частинкою енергії радіус кривизни траєкторії змінився й став дорівнювати  $R_2 = 1$  см. Визначити відносну зміну енергії частинки.

**7.6** Заряджена частинка, що пройшла прискорювальну різницю потенціалів  $U = 2$  кВ, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 15,1$  мТл по колу радіусом  $R = 1$  см. Визначити відношення заряду частинки до її маси  $|e|/m$  й швидкість  $v$  частинки.

**7.7** Заряджена частинка з енергією  $T = 1$  кеВ рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом  $R = 1$  мм. Знайти силу  $F$ , що діє на частинку з боку поля.

**7.8** Визначити частоту  $n$  обертання електрона по коловій орбіті в магнітному полі, індукція  $B$  якого дорівнює  $0,2$  Тл.

**7.9** Електрон влетів в однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 0,2$  Тл і став рухатися по колу радіусом  $R = 5$  см. Визначити магнітний момент  $p_m$  еквівалентного колового струму.

**7.10** Два іони, що мають однаковий заряд, але різні маси, влетіли в однорідне магнітне поле. Перший іон почав рухатися по колу радіусом  $R_1 = 5$  см, другий іон – по колу радіусом  $R_2 = 2,5$  см. Знайти відношення  $m_1 / m_2$  мас іонів, якщо вони пройшли однакову прискорювальну різницю потенціалів.

**7.11** Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 9$  мТл по гвинтовій лінії, радіус  $R$  якої дорівнює  $1$  см і крок  $h = 7,8$  см. Визначити період  $T$  обертання електрона і його швидкість  $v$ .

**7.12** Електрон влітає в однорідне магнітне поле напруженістю  $H = 16$  кА/м зі швидкістю  $v = 8$  Мм/с. Вектор швидкості становить кут  $\alpha = 60^\circ$  із напрямком ліній індукції. Визначити радіус  $R$  та крок  $h$  гвинтової лінії, по якій буде рухатися електрон у магнітному полі. Визначити також крок гвинтової лінії для електрона, який влітає під малим кутом до ліній індукції.

**7.13** Електрон рухається по колу в однорідному магнітному полі зі швидкістю  $v = 0,8 \cdot c$  ( $c$  – швидкість світла у вакуумі). Магнітна індукція  $B$  поля дорівнює  $0,01$  Тл. Визначити радіус кола у двох випадках: а) не враховувати залежність маси від швидкості руху електрона; б) враховувати цю залежність.

**7.14** Електрон рухається в магнітному полі по колу радіусом  $R = 2$  см. Магнітна індукція  $B$  поля дорівнює  $0,1$  Тл. Визначити кінетичну енергію  $T$  електрона. Під час розв'язування задачі врахувати залежність маси частинки від її швидкості.

**7.15** Електрон, що влетів у камеру Вільсона, залишив слід у вигляді дуги кола радіусом  $R = 10$  см. Камера знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10$  Тл. Визначити кінетичну енергію  $T$  електрона. Під час розв'язування задачі врахувати залежність маси частинки від її швидкості.

**7.16** Кінетична енергія  $T$   $\alpha$ -частинки дорівнює 500 МеВ. Частинка рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом  $R = 80$  см. Визначити магнітну індукцію  $B$  поля. Під час розв'язування задачі врахувати залежність маси частинки від її швидкості.

**7.17** Електрон, що має кінетичну енергію  $W_k = 1,5$  МеВ, рухається в однорідному магнітному полі по колу. Магнітна індукція  $B$  поля дорівнює 0,02 Тл. Визначити період  $T$  обертання. Під час розв'язування задачі врахувати залежність маси частинки від її швидкості.

**7.18** Протон пройшов деяку прискорювальну різницю потенціалів  $U$  і влетів у схрещені під прямим кутом магнітне ( $B = 5$  мТл) та електричне ( $E = 20$  кВ/м) поля. Визначити різницю потенціалів  $U$ , якщо протон у схрещених полях рухається прямолінійно.

**7.19** Протон влітає зі швидкістю  $v = 100$  км/с в область простору, де є електричне ( $E = 210$  В/м) і магнітне ( $B = 3,3$  мТл) поля. Вектори напруженості  $\vec{E}$  електричного поля та магнітної індукції  $\vec{B}$  збігаються за напрямком. Визначити прискорення протона для початкового моменту руху в полях, якщо напрямком вектора його швидкості  $\vec{v}$ : а) збігається із загальним напрямком векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ ; б) перпендикулярний до цього напрямку.

**7.20** Альфа-частинка пройшла прискорювальну різницю потенціалів  $U = 104$  В і влетіла в схрещені під прямим кутом електричне ( $E = 10$  кВ/м) і магнітне ( $B = 0,1$  Тл) поля. Знайти відношення заряду альфа-частинки до її маси,



якщо, рухаючись перпендикулярно до обох полів, частинка не відхиляється від прямолінійної траєкторії.

**7.21** Протон влетів у схрещені під кутом  $\alpha = 120^\circ$  магнітне ( $B = 50$  мТл) та електричне ( $E = 200$  В/м) поля. Визначити прискорення протона  $a$ , якщо його швидкість  $\vec{v}$  ( $|\vec{v}| = 4 \cdot 10^5$  м·с) перпендикулярна до векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ . Прискорення визначити в момент входження зарядженої частинки в область простору, де локалізовані однорідні магнітне й електричне поля.

**7.22** Заряджена частинка рухається по колу радіусом  $R = 1$  см в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,1$  Тл. Паралельно магнітному полю створене електричне поле напруженістю  $E = 100$  В/м. Обчислити проміжок часу  $\Delta t$ , упродовж якого повинно діяти електричне поле, для того щоб кінетична енергія частинки збільшилася вдвічі.

**7.23** Середня швидкість зміни магнітного потоку  $\langle \Delta\Phi / \Delta t \rangle$  у бетатроні, розрахованому на енергію  $T = 60$  МеВ, становить 50 Вб/с. Визначити: а) число  $N$  обертів електрона на орбіті за час прискореного руху; б) шлях  $l$ , який пройде електрон, якщо радіус  $r$  орбіти дорівнює 20 см.

**7.24** У бетатроні швидкість зміни середнього значення індукції магнітного поля  $d\langle B \rangle / dt = 60$  Тл/с. Визначити: а) напруженість  $E$  вихрового електричного поля на орбіті електрона, якщо її радіус  $r = 0,5$  м; б) силу  $F$ , що діє на електрон.

**7.25** Електрон у бетатроні рухається по орбіті радіусом  $r = 0,4$  м та одержує за один оберт кінетичну енергію  $T = 20$  еВ. Обчислити швидкість зміни середнього значення індукції магнітного поля  $d\langle B \rangle / dt$ , вважаючи цю швидкість сталою впродовж часу, що нас цікавить.

**7.26** Електрон, прискорений різницею потенціалів  $U = 1,0$  кВ, рухається в однорідному магнітному полі під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до вектора  $\vec{B}$ , модуль якого 29 мТл. Знайти крок гвинтової траєкторії електрона.

**7.27** Слаборозбіжний пучок нерелятивістських заряджених частинок, прискорених різницею потенціалів  $U$ , виходить із точки  $A$  вздовж осі прямого соленоїда. Пучок фокусується на відстані  $l$  від точки  $A$  для двох послідовних значень індукції магнітного поля:  $B_1$  і  $B_2$ . Знайти питомий заряд  $q/m$  частинок.

**7.28** Пучок нерелятивістських протонів проходить, не відхиляючись, через область, в якій створені однорідні поперечні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля з  $E = 120$  кВ/м і  $B = 50$  мТл. Потім пучок потрапляє на заземлену мішень. Знайти силу, з якою пучок діє на мішень, якщо струм у пучку  $I = 0,80$  мА.

**7.29** Пучок заряджених нерелятивістських частинок проходить, не відхиляючись, через область  $A$  (рис. 7.9), у якій створені поперечні взаємно перпендикулярні електричні й магнітні поля з напруженістю  $E$  й індукцією  $B$ . Якщо магнітне поле вимкнути, слід пучка на екрані  $E_k$  зміщується на  $\Delta x$ . Вважаючи відомими відстані  $a$  й  $b$ , знайти питомий заряд  $q/m$  частинок.

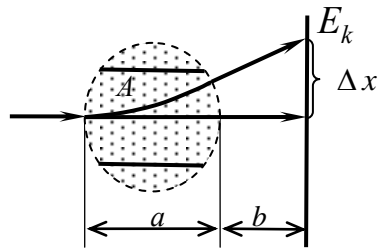


Рисунок 7.9

**7.30** Частинка з питомим зарядом  $q/m$  рухається в області, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне й магнітне поля з напруженістю  $\vec{E}$  й індукцією  $\vec{B}$  (рис. 7.10). У момент  $t = 0$  частинка знаходилася в точці

$O$  і мала нульову швидкість. Знайти для нерелятивістського випадку: а) закон руху частинок  $x(t)$  і  $y(t)$ ; який вигляд має траєкторія; б) довжину ділянки траєкторії між двома найближчими точками, в яких швидкість частинки стає нульовою; в) середнє значення проекції швидкості частинки на вісь  $x$  (дрейфова швидкість).

**7.31** Магнетрон – це прилад, що складається з нитки розжарення радіусом  $a$  й коаксіального циліндричного анода радіусом  $b$ , які знаходяться в однорідному магнітному полі, індукція якого паралельна нитці. Між ниткою й анодом прикладена прискорювальна різниця потенціалу  $U$ . Знайти значення індукції магнітного поля, коли електрони, що вилітають із нульовою початковою швидкістю з нитки, будуть досягати анода.

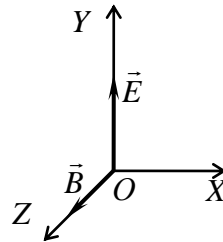


Рисунок 7.10

**7.32** Заряджена частинка з питомим зарядом  $q/m$  починає рухатися в області, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне й магнітне поля. Магнітне поле постійне й має індукцію  $B$ , електричне ж змінюється у часі як  $E = E_m \cdot \cos \omega t$ , де  $\omega = q \cdot B/m$ . Знайти для нерелятивістського випадку закон руху частинки  $x(t)$  й  $y(t)$ , якщо в момент  $t=0$  вона знаходилась у точці  $O$  (рис. 7.10). Який приблизно вигляд має траєкторія частинки?

**7.33** Однократно іонізовані іони  $He^+$  прискорюють у циклотроні так, що максимальний радіус орбіти  $r = 60$  см. Частота генератора циклотрона  $\nu = 10,0$  МГц, ефективна

прискорювальна напруга між дуантами  $U = 50$  кВ. Нехтуючи проміжком між дуантами, знайти: а) повний час процесу прискорення іона; б) наближене значення шляху, пройденого іоном за весь цикл прискорення.

**7.34** Частинка з питомим зарядом  $q/m$  знаходиться усередині соленоїда круглого перерізу на відстані  $r$  від його осі. В обмотці увімкнули струм, і індукція магнітного поля почала дорівнювати  $B$ . Знайти швидкість частинки  $v$  й радіус кривизни її траєкторії  $R$ , якщо за час зростання струму в соленоїді зміщенням частинки можна знехтувати.

**7.35** У бетатроні магнітний потік усередині рівноважної орбіти радіусом  $r = 25$  см зростає за час прискорення практично зі сталою швидкістю  $\dot{\Phi} = 5,0$  Вб/с. За цих умов електрони одержують енергію  $W = 25$  МеВ. Знайти число обертів, зроблених електроном за час прискорення, і відповідне значення пройденого ними шляху.

**7.36** У бетатроні індукція магнітного поля на рівноважній орбіті радіусом  $r = 20$  см змінюється за час  $\Delta t = 1,0$  мс практично зі сталою швидкістю від нуля до  $B = 0,40$  Тл. Знайти енергію, яку одержує електрон за кожний оберт.

**7.37** Знайти за допомогою бетатронної умови радіус колової орбіти електрона. Для розв'язування задачі використати залежність індукції магнітного поля від відстані до осі поля  $r$ . Розглянути це питання на прикладі поля  $B = B_0 - a \cdot r^2$ , де  $B_0$  й  $a$  – додатні сталі.

**7.38** Показати, що електрони в бетатроні будуть рухатися по коловій орбіті постійного радіуса за умови, що індукція магнітного поля на орбіті дорівнює половині середнього значення індукції поля всередині орбіти (бетатронна умова).

## ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

**1.1**  $F = q_3 q \sqrt{1 - (a/(2b))^2} / (2\pi\epsilon_0 b^2) = 1,0 \cdot 10^{-4}$  Н; сила спрямована перпендикулярно до лінії, що з'єднує два заряди  $q$ .

**1.2**  $x = l / (1 + \sqrt{q_2 / q_1}) = 5,5$  см.

**1.3**  $\sigma = 2\epsilon_0 F / q = 1,1 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ .

**1.4**  $q = 2a \sqrt{\frac{mg \tan \alpha \epsilon_0}{\sqrt{4l^2 - a^2}}} = 61$  нКл.

**1.5**  $q = (d \cdot mg \cdot \tan \alpha) / U = 3,84$  нКл.

**1.6**  $\Delta\varphi = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2\epsilon_0} d = 1,9$  кВ.

**1.7**  $a = \frac{\Delta\varphi N e}{m d} = 2,4 \cdot 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>.

**1.8**  $q_1 = -\sqrt{3} \cdot q / 3 = -58$  нКл, рівновага нестійка.

**1.9**  $\Phi_E = \pi \sigma r^2 / (2\epsilon_0) = 1,78 \cdot 10^3$  В·м.

**1.10**  $\Phi_E = \sigma a^2 \sin \beta / (2\epsilon_0) = 2,82$  В·м.

**1.11** 1)  $E = 0$ ; 2)  $E = \sigma / \epsilon_0 = 113$  В/м; див. графік на рис. 1.

**1.12** 1)  $E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\epsilon_0} = 113$  В/м;

2)  $E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{\epsilon_0} = 226$  В/м; див. графік на рис. 2.

**1.13** 1) 396В/м; 2) 170В/м; див. графік на рис. 3.

**1.14**  $E = \frac{|q_1 - q_2|}{2\epsilon_0 ab} = 377$  кВ/м.

$$1.15 \quad p = \frac{F}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\varepsilon_0} = 17 \text{ мкПа.}$$

$$1.16 \quad |q| = R\sqrt{2\pi\varepsilon_0 F} = 33,3 \text{ нКл.}$$

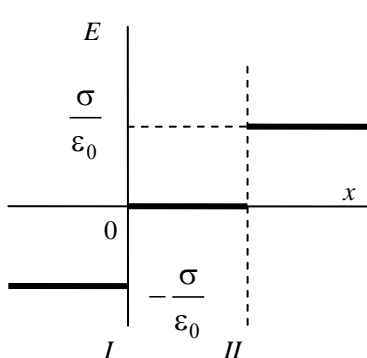


Рисунок 1

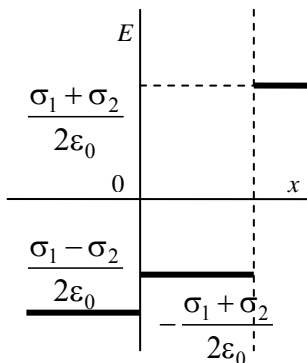


Рисунок 2

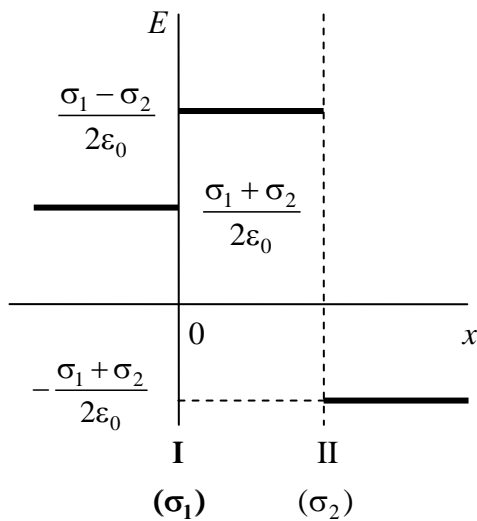


Рисунок 3

$$1.17 \Phi_E = qS / (4\pi\epsilon_0 R^2) = 4,5 \text{ В}\cdot\text{м}.$$

$$1.18 \Phi_E = q(1 - a / \sqrt{a^2 + R^2}) / (2\epsilon_0) = 1,2 \cdot 10^3 \text{ В}\cdot\text{м}.$$

$$1.19 E = \rho r / (2\epsilon_0), \text{ якщо } r \leq R; E = \rho R^2 / (2\epsilon_0 r), \text{ якщо } r \geq R.$$

$$1.20 E_1 = \rho r_1 / (3\epsilon_0) = 264 \text{ В/м}, E_2 = \rho R^3 / (3\epsilon_0 r_2^2) = 234 \text{ В/м}.$$

$$1.21 q_3 = -q_1 \cdot q_2 / (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2, \vec{r}_3 = \frac{\vec{r}_1 \cdot \sqrt{q_2} + \sqrt{r_2} \cdot \sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

$$1.22 \vec{E} = 2,7\vec{e}_x - 3,6\vec{e}_y, E = 4,5 \text{ кВ/м}.$$

$$1.23 E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x_0 (l + x_0)} = 450 \text{ В/м},$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{l + x_0}{x_0}\right) = 109 \text{ В}.$$

$$1.24 \text{ а) } E = q / [4\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}]; \text{ б) } E = q / [4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)]. \text{ В обох випадках для } r \gg a \text{ напруженість } E \approx q / 4\pi\epsilon_0 r^2.$$

$$1.25 E = q / 2\pi^2 \epsilon_0 R^2 = 0,10 \text{ кВ/м}.$$

$$1.26 E = ql / \left[ 4\pi\epsilon_0 (r^2 + l^2)^{3/2} \right]. \text{ Якщо } l \gg r, \text{ напруженість}$$

$$E \approx q / 4\pi\epsilon_0 l^2, \text{ як для точкового заряду.}$$

$$E_{\max} = q / (6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 r^2), \text{ якщо } l_m = r / \sqrt{2}.$$

$$1.27 \text{ а) } E = \lambda_0 / (4\epsilon_0 R); \text{ б) } E = \lambda_0 R^2 / \left[ 4\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2} \right], \text{ якщо}$$

$$x \gg R, \text{ напруженість } E \approx (\pi R^2 \lambda_0) / (4\pi\epsilon_0 x^3).$$

$$1.28 \text{ а) } E = \lambda \sqrt{2} / (4\pi\epsilon_0 R); \text{ б) } E = 0.$$

$$1.29 \vec{E} = -\vec{a}r / 3\epsilon_0.$$

$$1.30 \vec{E} = -\vec{e}_z \sigma_0 / 3\epsilon_0, \text{ де } \vec{e}_z \text{ - орт осі } Z, \text{ від напрямку якої обчислюється кут } \theta. \text{ Поле всередині цієї сфери однорідне.}$$

**1.31**  $E_{\max} = \lambda / (\pi \epsilon_0 l) = 40 \text{ кВ/м.}$

**1.32**  $E = \sigma_0 / (2\epsilon_0)$ ; напрямком вектора  $\vec{E}$  збігається з напрямком радіальної лінії, якій відповідає кут  $\varphi = \pi$ .

**1.33**  $v_{\max} = q / \sqrt{6\pi\epsilon_0 m a}$ .

**1.34**  $\varphi_1 - \varphi_2 = (\lambda / 2\pi\epsilon_0) \ln \eta = 5 \text{ кВ.}$

**1.35**  $A = \left(1 - 1 / \sqrt{1 + (l/R)^2}\right) \cdot Qq / (4\pi\epsilon_0 R) = 0,10 \text{ Дж.}$

**1.36**  $\varphi = (\sigma \cdot l / 2\epsilon_0) \cdot \left(\sqrt{1 + (R/l)^2} - 1\right)$ ;

$E = (\sigma / 2\epsilon_0) \cdot \left(1 - l / \sqrt{l^2 + R^2}\right)$ . Якщо  $l \rightarrow 0$ , потенціал

$\varphi \approx \sigma R / 2\epsilon_0$ ,  $E \approx \sigma / 2\epsilon_0$ ; якщо  $l \gg R$ , потенціал  $\varphi \approx q / 4\pi\epsilon_0 l$ ,  $E \approx q / (4\pi\epsilon_0 l^2)$ , де  $q \approx \sigma \pi R^2$ .

**1.37**  $\vec{E} = -\vec{a}$ , тобто поле однорідне.

**1.38**  $E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = (p / 4\pi\epsilon_0 r^3) \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$ , де  $E_r$  – радіальна, а  $E_\theta$  – перпендикулярна до неї складова вектора  $\vec{E}$ .

**1.39** а)  $p = 2qa / \pi$ ; б)  $E = qa / \pi^2 \epsilon_0 x^3$ .

**1.40**  $\rho = -2\epsilon_0 a$ .

**1.41**  $\Phi_E = \frac{q}{2\epsilon_0} \frac{h}{\sqrt{(h/2)^2 + r^2}} = 24 \text{ кВ/м,}$

$\Phi_E = \frac{q}{2\epsilon_0} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = 15 \text{ кВ/м.}$

**1.42**  $q = 4\pi a(R_2 - R_1)$ ;  $E = 0$ ,  $\varphi = \frac{a}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$ , якщо  $r \leq R_1$ ;

$E = \frac{a}{\epsilon_0 r^2} (r - R_1)$ ,  $\varphi = \frac{a}{\epsilon_0} \left(1 - \ln \frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r}\right)$ , якщо  $R_1 \leq r \leq R_2$ ;



$$E = \frac{a}{\varepsilon_0 r^2} (R_2 - R_1), \quad \varphi = \frac{a(R_2 - R_1)}{\varepsilon_0 r}, \quad \text{якщо } R_2 \leq r.$$

**1.43**  $E = \rho_0 [1 - \exp(-\alpha r^3)] / (3\varepsilon_0 \alpha r)$ . Відповідно  $E \approx \rho_0 r / 3\varepsilon_0$  і  $E \approx \rho_0 / 3\varepsilon_0 \alpha r^2$ .

**1.44**  $\Phi = 4\pi R a$ .

**1.45** а)  $E = (\rho_0 r / 3\varepsilon_0) \cdot (1 - 3r/4R)$ , якщо  $r \leq R$ ,

$E = \rho_0 R^3 / (12\varepsilon_0 r^2)$ , якщо  $r \geq R$ ; б)  $E_{\max} = \rho R / 9\varepsilon_0$ , якщо  $r_m = 2R/3$ .

**1.46**  $\vec{E} = \vec{a} \rho / 3\varepsilon_0$ .

**2.1**  $F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} = 0,9 \text{ мкН}$ .

**2.2**  $\sigma = \varepsilon_0 E_0 = 17,7 \text{ нКл/м}^2$ .

**2.3** 1)  $E_1 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_1 = 3,78 \text{ В/м}$ ,  $D_1 = \frac{1}{3} \rho r_1 = 0,1 \text{ нКл/м}^2$ ;

2)  $E'_2 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} R = 6,28 \text{ В/м}$ , якщо  $r \leq R$ ;

$E''_2 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_0} R = 18,8 \text{ В/м}$ , якщо  $r \geq R$ ;  $D_2 = \frac{1}{3} \rho R = 167 \text{ пКл/м}^2$ ;

3)  $E_3 = \frac{1}{3} \frac{\rho R^3}{\varepsilon_0 r_2^2} = 4,72 \text{ В/м}$ ,  $D_3 = \frac{1}{3} \rho \frac{R^3}{r_2^2} = 41,7 \text{ пКл/м}^2$ ;

див. графік на рис. 4.

**2.4** 1)  $E_1 = 0$ ,  $D_1 = 0$ ;

2)  $E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \left( r_2 - \frac{R_1^3}{r_2^2} \right) = 13,6 \text{ В/м}$ ,  $D_2 = 843 \text{ пКл/м}^2$ ;

3)  $E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} = 229 \text{ В/м}, D_3 = 2,02 \text{ нКл/м}^2$ ; див. графік

на рис. 5.

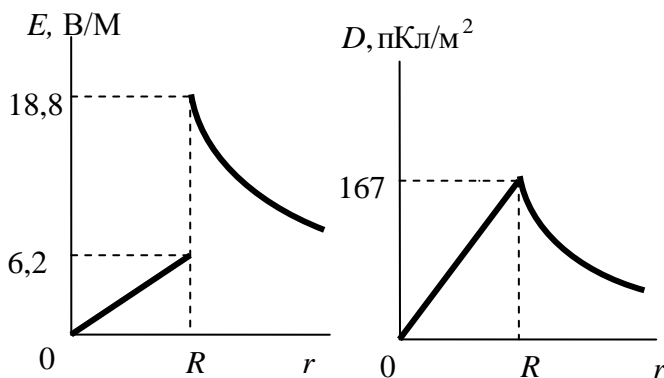


Рисунок 4

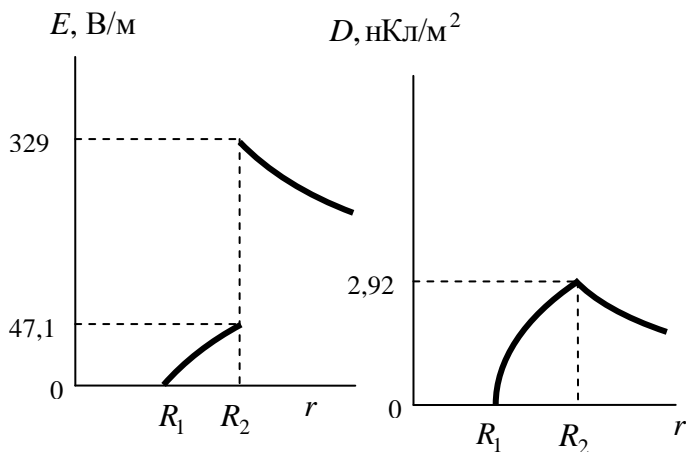


Рисунок 5

2.5 1)  $E_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} r_1 = 2,83 \text{ В/м}, D_1 = 50 \text{ пКл/м}^2$ ;

2)  $E_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = 7,55 \text{ В/м}$ ,  $D_2 = 66,7 \text{ пКл/м}^2$ ; див. графік на

рис. 6.

2.6  $F = 3q^2 / (32\pi\varepsilon_0 h^2) = 5,4 \text{ мкН}$ .

2.7  $E = \lambda / (\pi\varepsilon_0 h) = 0,36 \text{ МВ/м}$ ;  $\varphi = 0$ .

2.8  $\sigma' = \frac{(q / 4\pi a^2) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}$ .

2.9  $\sigma' = -\sigma(\varepsilon - 1) / \varepsilon$ .

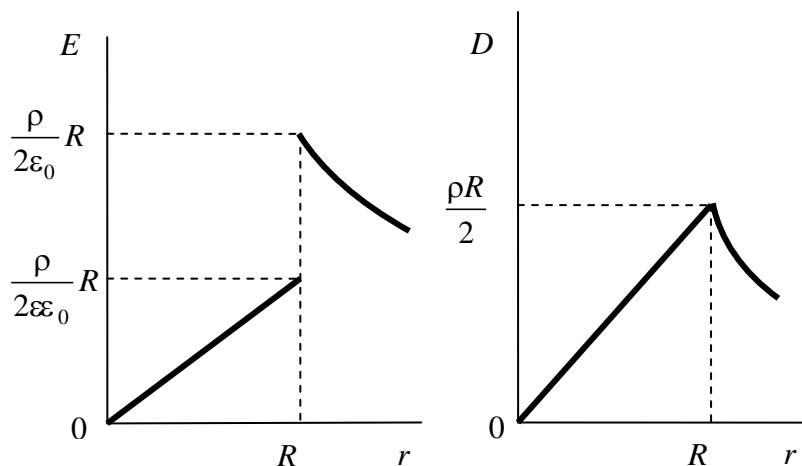


Рисунок 6

2.10 Див. рис. 7.

2.11  $\vec{E} = -\vec{P} \cdot d / 4\varepsilon_0 \cdot R$ .

2.12  $\vec{E} = -\vec{P}_0(1 - x^2 / d^2) / \varepsilon_0$ ;  $U = 4P_0 \cdot d / 3\varepsilon_0$ .

2.13  $E = (E_0 / \varepsilon) \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_0} = 5,2 \text{ В/м}$ ;

$\text{tg} \alpha = \varepsilon \cdot \text{tg} \alpha_0$ , звідси  $\alpha = 74^\circ$ ;  $\sigma' = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot E_0 \cdot \cos \alpha_0 =$   
 $= 64 \text{ пКл/м}^2$ .

**2.14** а)  $E_1 = 2\varepsilon E_0 / (\varepsilon + 1)$ ,  $E_2 = 2E_0 / (\varepsilon + 1)$ ,  
 $D_1 = D_2 = 2\varepsilon_0 E_0 / (\varepsilon + 1)$ ; б)  $E_1 = E_0$ ,  $E_2 = E_0 / \varepsilon$ ,  
 $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 \cdot E_0$ .

**2.15**  $\rho = \frac{\rho_0 \cdot \varepsilon}{(\varepsilon - 1)} = 1,6 \text{ г/см}^3$ , де  $\varepsilon$  й  $\rho_0$  – діелектрична проникність і густина гасу відповідно.

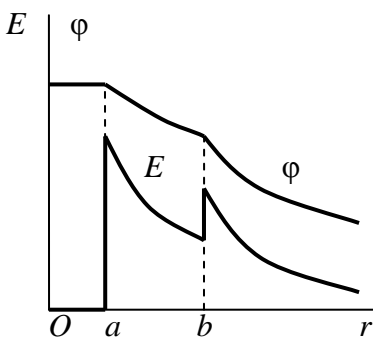


Рисунок 7 а

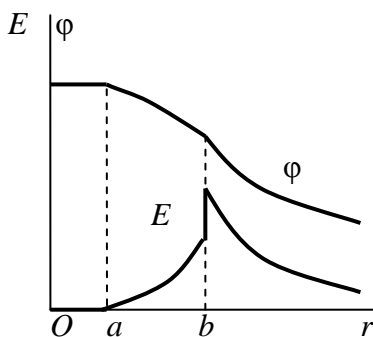


Рисунок 7 б

**2.16**  $\sigma'_{\text{макс}} = (\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot E = 3,5 \text{ мКл/м}^2$ ,

$q' = \pi \cdot R^2 (\varepsilon - 1) \cdot \varepsilon_0 \cdot E = 1,0 \text{ пКл}$ .

**2.17**  $\sigma' = ql(\varepsilon - 1) / (2\pi r^3 \varepsilon)$ .

**3.1**  $q_1 = q_2 = q_3 = U \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 164 \text{ мКл}$ ;

$U_1 = U(C_2 C_3) / (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) = 163,7 \text{ В}$ ;

$U_2 = U(C_1 C_3) / (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) = 81,8 \text{ В}$ ;

$U_3 = U(C_1 C_2) / (C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3) = 54,5 \text{ В}$ .

**3.2**  $q_1 = U(C_1 C_1) / (C_1 + C_2) = 67 \text{ мКл}$ .

**3.3**  $q_1 = q_2 = \varepsilon(C_1 C_2) / (C_1 + C_2) = 246 \text{ мКл}$ ;

$$\Delta\varphi_1 = \mathcal{E}(C_2)/(C_1 + C_2) = 49,2 \text{ В};$$

$$\Delta\varphi_2 = \mathcal{E}(C_1)/(C_1 + C_2) = 30,8 \text{ В}.$$

$$3.4 \text{ Збільшиться в } 1/(1-\eta) = 2,5.$$

$$3.5 \text{ а) } q = (\varepsilon_0 \pi R^2 U) / d = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}, \quad E = U / d = 4 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$\text{б) } q = (\varepsilon_0 \pi R^2 U) / d = 7,77 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}, \quad E = U / d = 4 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

$$3.6 \quad E_1 = \frac{U\varepsilon_2 / d_2}{(\varepsilon_1 / d_1 + \varepsilon_2 / d_2)d_1} = 24 \text{ кВ/м},$$

$$U_1 = \frac{U\varepsilon_2 / d_2}{\varepsilon_1 / d_1 + \varepsilon_2 / d_2} = 48 \text{ В};$$

$$E_2 = \frac{U\varepsilon_1 / d_1}{(\varepsilon_1 / d_1 + \varepsilon_2 / d_2)d_2} = 84 \text{ кВ/м};$$

$$U_1 = \frac{U\varepsilon_1 / d_1}{\varepsilon_1 / d_1 + \varepsilon_2 / d_2} = 252 \text{ В}.$$

$$3.7 \quad W = \varepsilon_0 S U^2 / 2d = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ Дж};$$

$$w = \varepsilon_0 (U / d)^2 / 2 = 0,3 \text{ Дж/м}^3.$$

$$3.8 \quad C = \varepsilon_0 S / d_2 = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}; \quad \Delta\varphi_2 = (d_2 / d_1) \Delta\varphi_1 = 6000 \text{ В};$$

$$W = (\varepsilon_0 S d_2 U^2) / (2d_1^2) = 2,52 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

$$3.9 \quad \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 \varepsilon d_1 / (\varepsilon(d_1 - d_2) + d_2) = 1800 \text{ В}.$$

$$3.10 \quad Q = (\varepsilon_0 S U^2) / (2d) = 0,2 \text{ Дж}.$$

$$3.11 \quad W = qU / 2 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

$$3.12 \quad U_1 = nU = 1500 \text{ В}.$$

$$3.13 \quad W = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2 = 5,55 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

$$3.14 \quad q_1 = \sqrt{8\pi\varepsilon_0 W r_2} (1 + r_1 / r_2) = 2,72 \text{ мкКл}.$$

$$3.15 \quad W = q^2 / (4\pi\varepsilon_0 d) = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

$$3.16 \text{ а) } C = \varepsilon_0 S / (d_1 / \varepsilon_1 + d_2 / \varepsilon_2);$$

$$\text{б) } \sigma' = \varepsilon_0 U (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1).$$

3.17 а)  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon ab/(b-a)$ ; б)  $C = 4\pi\epsilon_0 a/\ln(b/a)$ .

3.18  $C = 2\pi\epsilon_0(1+\epsilon)ab/(b-a)$ .

3.19 За умови  $\epsilon_1 R_1 E_{1m} - \epsilon_2 R_2 E_{2m}$ .

3.20  $q = |\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2| \cdot C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$ .

3.21  $\Delta W = -U^2 \cdot C_1 \cdot C_2 / 2(C_1 + C_2) = -0,03$  мДж.

3.22  $A = q(q_0 + q/2) \cdot (1/R_1 - 1/R_2) / (4\pi\epsilon_0) = 1,8$  Дж.

3.23  $q_1 = -\mathcal{E} \cdot C_2$ ;  $q_2 = \mathcal{E} \cdot C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$ .

3.24  $A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ .

3.25 а)  $A = CU^2 \cdot \eta / 2(1-\eta)^2 = 1,5$  мДж;

б)  $A = CU^2 \cdot \eta \cdot \epsilon(\epsilon-1) / 2 \cdot [\epsilon - \eta(\epsilon-1)]^2 = 0,8$  мДж.

4.1  $I = \mathcal{E} / (R+r) = 1,37$  А,  $U = P(R+r) / \mathcal{E} = 73$  В, де

$$R = [(\mathcal{E}^2 / P - 2r) + \mathcal{E}^2 / P \sqrt{1 - 4rP / \mathcal{E}^2}] / 2 = 53,5 \text{ Ом.}$$

Або  $I = \mathcal{E} / (R+r) = 14,6$  А,  $U = P(R+r) / \mathcal{E} = 6,8$  В, де

$$R = [(\mathcal{E}^2 / P - 2r) - \mathcal{E}^2 / P \sqrt{1 - 4rP / \mathcal{E}^2}] / 2 = 0,47 \text{ Ом.}$$

4.2  $I_k = I_1 I_2 (R_2 - R_1) / (I_2 R_2 - I_1 R_1) = 2,55$  А.

4.3  $R = \eta U^2 / [P(1+\eta)^2] = 5,82$  Ом.

4.4  $I = \mathcal{E} / (R+r) = 0,11$  А;  $U_R = \mathcal{E} R / (R+r) = 0,99$  В;

$\eta = R / (R+r) = 0,9$ .

4.5  $U_r = \mathcal{E} r / (R+r) = 0,125$  В;  $R = \mathcal{E} / I - r = 7,5$  Ом.

4.6  $P = UI = 1100$  Вт;  $\eta = 1 - IR / U = 0,86$ .

4.7  $\mathcal{E} = I_1 I_2 / (I_1 - I_2) (\rho_2 l_2 / S_2 - \rho_1 l_1 / S_1) = 2,13$  В;

$r = (I_2 \rho_2 l_2 / S_2 - I_1 \rho_1 l_1 / S_1) / (I_1 - I_2) - R_a = 0,59$  Ом.

4.8  $I = I_a (1 + R_a / R_{\text{вн}}) = 4,0$  А.

4.9  $S = 2\rho l P (1+\eta)^2 / (\eta \cdot \mathcal{E}^2) = 71,2$  мм<sup>2</sup>.

4.10  $Q_1 / Q_2 = \rho_2 / \rho_1 = 5,8$ .

- 4.11  $dI / dt = (1 / \tau) \sqrt{(3Q) / (R\tau)} = 0,55 \text{ A/c.}$
- 4.12  $Q = R\tau(I_1^2 + I_0^2 + I_0 I_1) / 3 = 2,9 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$
- 4.13  $R = 3Q / (I_1^2 + I_0^2 + I_0 I_1) \tau = 214 \text{ Ом.}$
- 4.14  $\langle I \rangle = (1/2) \sqrt{(3Q) / (R\tau)} = 11 \text{ A.}$
- 4.15  $q = (1/2) \sqrt{3Q\tau / R} = 612 \text{ Кл.}$
- 4.16  $Q = R\tau \cdot I_0^2 / 3 = 3,3 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$
- 4.17  $I \approx 2\pi\epsilon_0(\epsilon - 1)r\omega U / d = 0,11 \text{ мкА.}$
- 4.18  $R_x = R(\sqrt{3} - 1).$
- 4.19  $R = (\rho / 2\pi l) \ln(b/a).$
- 4.20  $\rho = 4\pi \cdot \Delta t \cdot ab / ((b-a) \cdot C \cdot \ln \eta).$
- 4.21 а)  $j = 2alU / \rho r^3$ ; б)  $R \approx \rho / 4\pi a.$
- 4.22 а)  $j = Ul / 2\rho r^2 \ln(l/a)$ ; б)  $R_l = (\rho / \pi) \ln(l/a).$
- 4.23  $\sigma = D_n = D \cos \alpha, j = D \sin \alpha / \epsilon_0 \rho.$
- 4.25  $\sigma' = \epsilon_0 U (\epsilon_2 \rho_2 - \epsilon_1 \rho_1) / (\rho_1 d_1 - \rho_2 d_2),$   
 $\sigma = 0, \text{ якщо } \epsilon_1 \rho_1 = \epsilon_2 \rho_2.$
- 4.26 а)  $R_l = 2\alpha / \pi a^4$ ; б)  $E = 2\alpha I / \pi a^4.$
- 4.27  $t = -RC \cdot \ln(1 - U / U_0) = 0,6 \text{ мкс.}$
- 4.28  $I = [(\eta - 1)\mathcal{E} / R] \exp(-\eta t / RC).$
- 4.29  $U = \mathcal{E} / (\eta + 1) = 2,0 \text{ В.}$
- 4.30  $I = P / (U(1 - \eta)) = 10,5 \text{ А,}$   
 $S = 2\rho l \cdot P / (\eta(1 - \eta)U^2) = 3,6 \text{ см}^2,$   
 $m_1 = (2l)^2 \cdot \rho \cdot \rho_2 P / (\eta(1 - \eta)U^2) = 3,2 \cdot 10^6 \text{ кг, } m_2 = m_1 / n^2.$
- 4.31  $I = (a / 2R)^2 \cdot \left( \sqrt{1 + 4RU_0 / a^2} - 1 \right)^2.$
- 4.32  $U = U_0 R x / [Rl + R_0(l - x)x / l]$ ; якщо  $R \gg R_0$ , величина  $U \approx U_0 \cdot x / l.$

**4.33**  $I = [\mathcal{E}(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_0 R_3] / [R(R_2 + R_3) + R_2 R_3]$ . Від  $R_1$  не залежить.

**4.34**  $Q = I(\mathcal{E} - U) = 0,6$  Вт;  $P = -IU = -2,0$  Вт.

**4.35**  $I_1 = 10$  мА.

**4.36**  $\rho = \tau / (\varepsilon_0 \varepsilon \ln 2) = 1,4 \cdot 10^{13}$  Ом·м.

**4.37**  $\frac{e}{m} = l\omega r / (ql) = 1,8 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

**4.38**  $E = (1/2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r) \cdot \sqrt{m/(2eU)} = 32$  В/м;

$\Delta\varphi = (I/4\pi \cdot \varepsilon_0) \cdot \sqrt{m/(2eU)} = 0,80$  В.

**5.1**  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{(r_1 \cdot r_2)^2}} = 83,3$  мкТл.

**5.2**  $B = 0,25$  мТл.

**5.3**  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} = 24,9$  мкТл.

**5.4** а)  $B = 0$ ; б)  $B = 2\mu_0 I / (\pi r) = 160$  мкТл.

**5.5**  $B = \mu_0 I R^2 / (2r^3) = 62,8$  мкТл.

**5.6**  $B = \sqrt{3}\mu_0 I / (4\pi d) = 34,6$  мкТл.

**5.7**  $N = 500$ .

**5.8**  $I = 2BR / (\mu_0 \sin^3 \beta) = 305$  А.

**5.9**  $B = \frac{\mu_0 NI}{2l} \left( \frac{a+l}{\sqrt{d^2 + (a+l)^2}} - \frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right) = 606$  мкТл.

**5.10**  $B = 0,01$  Тл.

**5.11**  $l_{\min} = 1$  м.

**5.12**  $B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 400$  мкТл.



$$5.13 \quad B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 50 \text{ мкТл.}$$

$$5.14 \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\sqrt{2} + 1) = 482 \text{ мкТл;}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\sqrt{2} - 1) = 82,8 \text{ мкТл.}$$

$$5.15 \quad B = 9\mu_0 I / (2\pi a) = 240 \text{ мкТл.}$$

$$5.16 \quad B = 2\mu_0 I / (\pi a) = 282 \text{ мкТл.}$$

$$5.17 \quad 8\sqrt{2} / \pi^2 = 1,15.$$

$$5.18 \quad I = 1,1 \text{ МА; } B = 12,6 \text{ Тл.}$$

$$5.19 \quad \text{а) } B = 0; \text{ б) } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; \text{ в) } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$$5.20 \quad \oint B_l dl = \mu_0 \sum_3 I_k = 6,28 \text{ мкТл} \cdot \text{м.}$$

$$5.21 \quad \oint H_l dl = \pi r^2 j \sin \alpha = 78,6 \text{ А.}$$

$$5.22 \quad F = \mu_0 I^2 / (4\pi) = 0,1 \text{ Н.}$$

$$5.23 \quad F = IBR\sqrt{3} = 0,156 \text{ Н.}$$

$$5.24 \quad F = 200 \text{ Н.}$$

$$5.25 \quad F_1 = F_2 = \mu_0 I^2 / (2\pi a) = 20 \text{ мН,}$$

$$F_3 = \sqrt{3}\mu_0 I^2 / (2\pi a) = 34,6 \text{ мН.}$$

$$5.26 \quad F = \mu_0 I^2 r / d = 12,6 \text{ мН.}$$

$$5.27 \quad F = 2\mu_0 I^2 a / (\pi d) = 8 \text{ мН.}$$

$$5.28 \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{r^3} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

$$5.29 \quad p_m = \tau n \pi l^3 / 3 = 16,75 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.30 \quad p_m = 10 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.31 \quad I = \sqrt[3]{4(B/\mu_0)^2 p_m / \pi} = 37 \text{ А,}$$

$$R = \sqrt[3]{p_m \mu_0 / (2\pi B)} = 9,27 \text{ см.}$$

$$5.32 \quad \frac{p_m}{L} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} = 87,9 \cdot 10^9 \text{ Кл/кг.}$$

$$5.33 \text{ а) } p_m = Ql^2\omega / 24 = 4 \text{ нА} \cdot \text{м}^2;$$

$$\text{б) } p_m / L = Q / (2m) = 10 \text{ мкКл/кг.}$$

$$5.34 \text{ а) } p_m = \pi q n R^2 = 3,14 \text{ нА} \cdot \text{м}^2; \text{ б) } p_m / L = 500 \text{ нКл/кг.}$$

$$5.35 \quad M = \pi I B R^2 \cos \alpha = 39,5 \text{ мкН/м.}$$

$$5.36 \quad M = 0,25 \pi B_r I d^2 = 6,28 \text{ мкН/м.}$$

$$5.37 \text{ а) } M = 12 \text{ мкН/м; б) } p_m = 120 \text{ мкА} \cdot \text{м}^2.$$

$$5.38 \quad p_m = 12 \text{ А} \cdot \text{м}^2; \quad M = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$5.39 \quad M = \mu_0 p_m^2 / (2\pi d^3) = 160 \text{ пН} \cdot \text{м.}$$

$$5.40 \quad F = 3\mu_0 I p_m d / (2r^3) = 5,89 \text{ мН.}$$

$$5.41 \quad F = \mu_0 p_m I / (2\pi a^2) = 2 \text{ мкН.}$$

$$5.42 \quad I = 55 \text{ мА.}$$

$$5.43 \quad B = M_{\max} / (\pi r^2 I) = 104 \text{ мкТл.}$$

$$5.44 \text{ а) } A = I B a^2 = 1 \text{ Дж; б) } A = I B a^2 (1 - \cos \varphi_2) = 1,37 \text{ мДж.}$$

$$5.45 \quad \Phi = \mu_0 n I S = 25,2 \text{ мкВб.}$$

$$5.46 \quad \Psi = \mu_0 I N^2 S / l = 80,5 \text{ мВб.}$$

$$5.47 \quad \Phi = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \ln \frac{l+a}{a} = 1,62 \text{ мкВб.}$$

$$5.48 \quad \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{1}{24} \left( \frac{a}{l} \right)^2 = 0,617\%$$

$$5.49 \quad \Phi = \frac{\mu_0 I N}{4\pi} (D-d) \ln \frac{D}{d} = 139 \text{ мкВб.}$$

$$5.50 \quad A = 80 \text{ мкДж.}$$

5.51  $A = 3 \text{ мДж.}$

5.52  $A = 6,84 \text{ мДж.}$

5.53  $A = \pi IBR^2(1 - \pi/4) = 67,4 \text{ мДж.}$

5.54  $A = IB \frac{\pi d^2}{4} (1 - \cos \alpha) = 5 \text{ мДж.}$

5.55  $A = IBa^2(1 - \cos \theta) = 0,6 \text{ Дж.}$

5.56  $\Phi \approx 0,705 \text{ мВб; } \mu \approx 1686; J \approx 0,94 \text{ МА/м.}$

5.57 1,29 Тл, 1030.

5.58 а) 1 Тл;  $2,5 \cdot 10^3$ ; б) 1,4 Тл; 700.

5.59  $\Phi = 0,53 \text{ мВб.}$

5.60 15.

5.61 У 2 рази.

5.62 У 2,4 раза.

5.63 5 А.

5.64 5,8 кА.

5.65 1,8 мм.

5.66  $I = 2 \text{ А.}$

5.67  $H = \frac{B}{\mu_0} \frac{l_2}{l_1} = 10 \text{ А/м; } J = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1} = 3,4 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$

5.68  $B = n \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \text{tg}(\pi/n)/(2\pi \cdot R)$ . Якщо  $n \rightarrow \infty$ , індукція  
 $B = \mu_0 \cdot I/(2R)$ .

5.69 а)  $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \left( \frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right)$ ; б)  $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \left( \frac{3\pi}{4a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right)$ .

5.70  $B \approx \mu_0 \cdot h \cdot I/(4\pi^2 R \cdot r)$ , де  $r$  – відстань від прорізу.

5.71 а)  $B = \frac{\mu_0 \cdot h \cdot I}{4\pi \cdot R}$ ; б)  $B \approx \left( 1 + \frac{3\pi}{2} \right) \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ ;

в)  $B \approx \frac{(2 + \pi) \cdot \mu_0 I}{4\pi R}$ .

5.72  $B = \sqrt{2} \cdot \mu_0 I/(4\pi l) = 2,0 \text{ мкТл.}$

**5.73** а)  $B = \frac{\mu_0 I}{2}$ ; б)  $B = \mu_0 i$  між площинами й  $B = 0$  за

площинами.

**5.74** У напівпросторі, де знаходиться прямий провідник,  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ ,  $r$  – відстань від провідника. В іншому напівпросторі  $B = 0$ .

**5.75**  $\vec{B}(r \leq R) = \mu_0 [\vec{j} \times \vec{r}] / 2$ ,  $\vec{B}(r \geq R) = \mu_0 [\vec{j} \times \vec{r}] \cdot R^2 / (2r^2)$ .

**5.76**  $B = \mu_0 n I / \sqrt{1 + (2R/l)^2}$ .

**5.77**  $B(r < R) = \frac{\mu_0 \cdot I}{h} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2} = 0,3$  мТл,

$B(r > R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

**5.78**  $B = 2\mu_0 \sigma \omega R / 3 = 29$  пТл.

**5.79**  $p_m = q \cdot R^2 \cdot \omega / 5$ ,  $p_m / L = q / 2m$ .

**5.80** а)  $p_m = 0,5 \pi q n R^2 = 1,57$  нА·м<sup>2</sup>; б)  $p_m / L = 500$  нКл/кг.

**5.81** а)  $p_m = 1$  нА·м<sup>2</sup>; б)  $p_m / L = 1,5$  нКл/кг.

**5.82** а)  $F = 2BIR = 0,1$  Н; б)  $F = 2BIR = 0,1$  Н.

**5.83** а)  $F_1 = \mu_0 I^2 / (4R) = 0,20$  мН/м;

б)  $F_1 = \mu_0 I^2 / (\pi l) = 0,13$  мН/м.

**5.84**  $F_1 = \mu_0 \cdot I^2 / (\pi^2 R) = 0,5$  мН/м.

**5.85**  $F = IB2\pi R \sin \alpha = 4$  Н.

**5.86**  $F_1 = \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \ln(1 + b/a) / (2b)$ .

**5.87**  $p = \mu_0 \cdot I^2 / (8\pi^2 \cdot R^2) = 16$  мПа.

**5.88** а)  $F = 0$ ; б)  $F = \mu_0 I p_m / 2\pi r^2$ ,  $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{B}$ ;

в)  $F = \mu_0 I p_m / (2\pi r^2)$ ,  $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{r}$ .

**5.89**  $F = (\mu_0 / 4\pi) \cdot 6\pi \cdot R^2 \cdot I \cdot p_m \cdot x / (R^2 + x^2)^{5/2}$ .

$$5.90 \quad A = \frac{\mu_0 I \cdot I_1 l_1}{2\pi} \ln \frac{a + 2l_2}{a} = 64 \text{ нДж.}$$

$$5.91 \quad A_1 = -\mu_0 \cdot I^2 \cdot \ln \eta / (2\pi) = -5,0 \text{ мкДж/м.}$$

$$5.92 \quad B' = B \sqrt{\mu^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

$$5.93 \quad \vec{B} = 2\vec{B}_0 \mu / (1 + \mu).$$

$$5.94 \quad H_c = NI / l = 6 \text{ кА/м.}$$

$$5.95 \quad \mu \approx 2\pi RB / (\mu_0 NI - bB) = 3,7 \cdot 10^3.$$

$$6.1 \quad \langle \mathcal{E}_i \rangle = 20 \text{ В.}$$

$$6.2 \quad B = 0,3 \text{ Тл.}$$

$$6.3 \quad F = B^2 l^2 \nu / R = 1 \text{ Н.}$$

$$6.4 \quad P = 10 \text{ Вт.}$$

$$6.5 \quad P = (Bl\nu)^2 / R = 0,32 \text{ Вт.}$$

$$6.6 \text{ а) } \mathcal{E}_i = 0,3 \text{ В; б) } F = 3 \text{ Н; в) } I = 10 \text{ А; г) } P_1 = 3 \text{ Вт;}$$

$$\text{д) } P_2 = 2 \text{ Вт; е) } P_3 = 5 \text{ Вт.}$$

$$6.7 \quad U = \pi n B l^2 \sin \alpha = 201 \text{ мВ.}$$

$$6.8 \quad \mathcal{E}_{i\max} = 2\pi n N B S = 132 \text{ В.}$$

$$6.9 \quad P_{\max} = (2\pi n B N S)^2 / (R_1 + R_2) = 79 \text{ Вт.}$$

$$6.10 \quad n = 600 \text{ хв}^{-1}.$$

$$6.11 \quad \mathcal{E}_i = 2\pi n N B S \sin 30^\circ = 47,1 \text{ В.}$$

$$6.12 \quad \mathcal{E}_i = \omega B N S \cos \alpha = 1 \text{ В.}$$

$$6.13 \quad Q = \pi B r^2 \sin \alpha / R = 10 \text{ мКл.}$$

$$6.14 \quad B = 1,5 \text{ Тл.}$$

$$6.15 \quad Q = \Delta\Phi / R; \text{ а) } Q = BS(1 - \cos \alpha_1) / R = 6,7 \text{ мКл;}$$

$$\text{б) } Q = BS(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) / R = 18 \text{ мКл; в) } Q = 25 \text{ мКл.}$$

$$6.16 \quad \Delta\Phi = Q / R = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

**6.17**  $Q = mB\sigma/16\rho = 41,4$  мкКл (  $\sigma$  – питома провідність міді,  $\rho$  – густина).

$$\mathbf{6.18} \quad I = \frac{2\pi RQ}{\mu_0(a_2 - a_1)\ln(a_2/a_1)} = 1 \text{ кА.}$$

$$\mathbf{6.19} \quad Q = \pi\mu_0 dDI/(16\rho) = 363 \text{ мкКл.}$$

$$\mathbf{6.20} \quad \langle \mathcal{E}_s \rangle = 0,15 \text{ В.}$$

$$\mathbf{6.21} \quad \langle \mathcal{E}_s \rangle = 1 \text{ мВ.}$$

$$\mathbf{6.22} \quad \langle \mathcal{E}_s \rangle = N \cdot S \cdot B / \Delta t = 8 \text{ В.}$$

$$\mathbf{6.23} \quad L = 6,28 \text{ Гн.}$$

**6.24** 8 витків на 1 см.

$$\mathbf{6.25} \quad N = 10^3.$$

$$\mathbf{6.26} \quad N_2 = 90.$$

$$\mathbf{6.27} \quad \Phi = 80 \text{ мкВб.}$$

$$\mathbf{6.28} \quad \Psi = L \cdot I = 0,1 \text{ Вб}$$

$$\mathbf{6.29} \quad \Phi = 3 \text{ мкВб}; \quad \Psi = 3 \text{ мВб.}$$

$$\mathbf{6.30} \quad L = 3 \text{ мГн.}$$

$$\mathbf{6.31} \quad \langle \mathcal{E}_e \rangle = NBS/t = 3 \text{ кВ.}$$

$$\mathbf{6.32} \quad L_2/L_1 = \mu_2/\mu_1 = 1/5,8.$$

$$\mathbf{6.33} \quad L = \mu_0\pi(D+2d)^2l/(4d^2) \approx 0,02 \text{ Гн.}$$

$$\mathbf{6.34} \quad L = -Rt_1/\ln(1-\eta) = 0,67 \text{ Гн.}$$

$$\mathbf{6.35} \quad M = 20 \text{ мГн.}$$

$$\mathbf{6.36} \quad \langle \mathcal{E}_e \rangle = 118 \text{ мВ.}$$

$$\mathbf{6.37} \quad I = 6,75 \text{ А.}$$

$$\mathbf{6.38} \quad t = 0,23 \text{ с.}$$

$$\mathbf{6.39} \quad t = 0,69 \text{ с.}$$

$$\mathbf{6.40} \quad t = L \ln(1/\eta)/(R+r) = 0,23 \text{ с.}$$

$$\mathbf{6.41} \quad W = \mu_0 n^2 I^2 Sl/2 = 126 \text{ мкДж.}$$

$$\mathbf{6.42} \quad W = 10 \text{ Дж.}$$

- 6.43  $I = 1,4 \text{ A}$ .
- 6.44  $W = 50 \text{ мДж}$ .
- 6.45  $W = 0,15 \text{ Дж}$ .
- 6.46  $W = \pi D S I B / (2d) = 324 \text{ мДж}$ .
- 6.47  $w = 840 \text{ Дж/м}^3$ .
- 6.48  $\mu = 2 \cdot 10^3$ .
- 6.49  $w = 25 \text{ Дж/м}^3$ .
- 6.50  $w_2 / w_1 = B_2 H_2 / B_1 H_1 = 6,4$ .
- 6.51 Збільшилася в 10,5 рази.
- 6.52 В  $1,6 \cdot 10^3$  рази.
- 6.53  $w = 61 \text{ Дж/м}^3$ .
- 6.54  $I = (1/n) \sqrt{2w / \mu_0} = 1,26 \text{ A}$ .
- 6.55  $\mathcal{E}_i = \mu_0 \cdot l \cdot \nu \cdot I / (2\pi r)$ .
- 6.56  $\mathcal{E}_i = \mu_0 I a^2 \nu / (2\pi(\nu t + b)(\nu t + a + b)) = 4,1 \text{ нВ}$ .
- 6.57  $M(t) = (\omega \cdot S^2 \cdot B^2 / R) \cdot \sin \omega t$ .
- 6.58  $\nu = mg \cdot R \cdot \sin \alpha / (B^2 \cdot l^2)$ .
- 6.59  $B = qR / (2NS) = 0,5 \text{ Тл}$ .
- 6.60 а)  $I = \frac{\mu_0 I_0 \nu}{2\pi R} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ; б)  $F = \left(\frac{\mu_0 I_0 \ln(b/a)}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\nu}{R}$ .
- 6.61 а)  $s = \nu_0 m R / (l^2 B^2)$ ; б)  $Q = m \nu_0^2 / 2$ .
- 6.62  $n = 6,4 \text{ с}^{-1}$ .
- 6.63  $I_0 = \omega \cdot B_0 (a - b) / (4\rho) = 0,5 \text{ A}$ .
- 6.64  $\mathcal{E}_i = B_0 N S \omega \cdot \cos(2\omega t)$ .
- 6.65  $I = \mu_0 n S d \dot{I} / (4\rho) = 2 \text{ мА}$ , де  $\rho$  – питомий опір міді.
- 6.66  $\tau = (\mu_0 / 4\pi) \cdot m / (l\rho \cdot \rho_0) = 0,7 \text{ мкс}$ , де  $\rho$  – питомий опір міді;  $\rho_0$  – густина міді.
- 6.67  $L_1 = (\mu \cdot \mu_0 / 2\pi) \cdot \ln \eta = 0,26 \text{ мкГн/м}$ .
- 6.68  $I = [1 - \exp(-tR / (2L))] \mathcal{E} / R$ .

**6.69**  $L_1 \approx (\mu_0 / \pi) \ln \eta$ . Точний вираз  $L_1 = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \cdot (1 + 4 \ln \eta)$ .

**6.70**  $L_{12od} = \mu_0 \cdot \mu \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot S$ .

**6.71**  $I_1 = \mathcal{E}L_2 / (RL_1 + RL_2)$ ,  $I_2 = \mathcal{E}L_1 / (RL_1 + RL_2)$ .

**6.72**  $L_{12} = (\mu_0 \cdot b / 2\pi) \cdot \ln(1 + a/l)$ .

**6.73**  $Q = L\mathcal{E}^2 / (2R^2(1 + R_0/R)) = 3 \text{ мкДж}$ .

**6.74**  $W_{od} = \mu\mu_0 I^2 / (16\pi)$ .

**6.75**  $L_{od} = (\mu_0 / 2\pi)[1/4 + \ln(b/a)]$ . Тут необхідно використати визначення  $L$  через енергію магнітного поля.

**6.76**  $W_1 = \mu_0 \lambda^2 \omega^2 a^2 / (8\pi)$ .

**7.1**  $p = 2,4 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

**7.2**  $L = B |e| R^2 = 3,2 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ .

**7.3**  $T = B^2 R^2 l^2 / (2m) = 0,563 \text{ фДж} = 3,52 \text{ кеВ}$ .

**7.4**  $R_1 / R_2 = \sqrt{T_1 / T_2} = \sqrt{2}$ .

**7.5**  $\Delta T / T = 1 - (R_2 / R_1)^2 = 0,75$ .

**7.6**  $|e| / m = 175 \text{ Гкл/кг}$ ,  $v = 26,5 \text{ Мм/с}$ .

**7.7**  $F = 2T / R = 0,32 \text{ пН}$ .

**7.8**  $n = B |e| / (2\pi m) = 562 \text{ МГц}$ .

**7.9**  $p_m = Be^2 R^2 / (2m) = 7,04 \text{ пА} \cdot \text{м}^2$ .

**7.10**  $m_1 / m_2 = 4$ .

**7.11**  $T = 3,97 \text{ нс}$ ;  $v = 25 \text{ Мм/с}$ .

**7.12**  $R = 1,96 \text{ мм}$ ;  $h = 7,1 \text{ мм}$ ;  $h_{\alpha \rightarrow 0} = 14,2 \text{ мм}$ .

**7.13** а)  $R = 13,7 \text{ см}$ ; б)  $R = 22,8 \text{ см}$ .

**7.14**  $T = 0,28 \text{ МеВ}$ .

**7.15**  $T = 300 \text{ МеВ}$ .

**7.16**  $B = 4,2 \text{ Тл}$ .



$$7.17 \quad T = 2\pi(E_0 + W_k)/(c^2 |e| B) = 7,02 \text{ нс.}$$

$$7.18 \quad U = (m/(2q)) \cdot (E/B)^2 = 8,35 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

$$7.19 \text{ а) } a = |e| E/m = 20,1 \text{ ГМ/с}^2;$$

$$\text{б) } a = \frac{e}{m} \sqrt{(\upsilon B)^2 + E^2} = 37,5 \text{ ГМ/с}^2.$$

$$7.20 \quad Q/m = E^2/(2UB^2) = 48,1 \text{ МКл/кг.}$$

$$7.21 \quad a = (q/m) \sqrt{(\upsilon B)^2 + E^2} + 2\upsilon BE \cos \alpha = 5 \cdot 10^{15} \text{ М/с}^2.$$

$$7.22 \quad \Delta t = BR/E = 10 \text{ мкс.}$$

$$7.23 \text{ а) } N = 1,2 \cdot 10^6 \text{ об; б) } l = 1,51 \text{ ММ.}$$

$$7.24 \text{ а) } E = 12 \text{ В/м; б) } F = 1,92 \cdot 10^{-18} \text{ Н.}$$

$$7.25 \quad d\langle B \rangle/dt = 40 \text{ Тл/с.}$$

$$7.26 \quad \Delta l = 2\pi \cdot \sqrt{2m \cdot U/(e \cdot B^2)} \cdot \cos \alpha = 2,0 \text{ см.}$$

$$7.27 \quad q/m = 8\pi^2 U/(l^2(B_2 - B_1)^2).$$

$$7.28 \quad F = mEI/(q \cdot B) = 20 \text{ мН.}$$

$$7.29 \quad q/m = a(a + 2b)B^2/(2E \cdot \Delta x).$$

$$7.30 \text{ а) } x = a(\omega t - \sin \omega t); y = a(1 - \cos \omega t), \text{ де}$$

$$a = \frac{m \cdot E}{q \cdot B^2}, \omega = \frac{q \cdot B}{m}. \text{ Траєкторією є циклоїда. Рух частинки}$$

являє собою рух точки на ободі кола радіусом  $a$ , який котиться без ковзання вздовж осі  $X$  так, що його центр переміщується зі швидкістю  $\upsilon = E/B$ ;

$$\text{б) } s = (8m \cdot E)/(q \cdot B^2); \text{ в) } \langle \upsilon_x \rangle = E/B.$$

$$7.31 \quad B \leq \left[ b/(b^2 - a^2) \right] \cdot \sqrt{8(m/e) \cdot U}.$$

$$7.32 \quad y = (a/2\omega) \cdot t \cdot \sin \omega t, \quad x = (a/2\omega^2) \cdot (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t),$$

де  $a = q \cdot E_m/m$ . Траєкторія має вигляд спіралі, що розкручується.

**7.33** а)  $t = \pi^2 \nu m r^2 / (eU) = 17 \text{ нс}$ ;

б)  $s \approx 4\pi^3 \nu^2 m r^2 / (3eU) = 0,74 \text{ нм}$ .

**7.34**  $\nu = r \cdot q \cdot B / (2m)$ ,  $R = r / 2$ .

**7.35**  $N = W / (e \cdot \dot{\Phi}) = 5 \cdot 10^6$  обертів,  $s = 2\pi \cdot r \cdot N = 8 \cdot 10^3 \text{ нм}$ .

**7.36**  $\Delta W = 2\pi r^2 e B / \Delta t = 0,10 \text{ кеВ}$ .

**7.37**  $r_0 = \sqrt{2B_0 / 3a}$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И. В. Курс физики : учебник : в 3 т. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев. – Москва : Наука, 1989. – 469 с.
2. Бушок Г. Ф. Курс фізики : навч. посібник : у 2 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – 2-ге вид. – Київ : Либідь, 2001. – 448 с.
3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – 9-е изд., перераб. – Москва : Бинум. Лаборатория знаний, 2012. – 431 с.
4. Чертов А. Г. Задачник по физике : учеб. пособие / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. – Москва : Издательство физико-математической литературы, 2001. – 640 с.

Навчальне видання

**Лисенко** Олександр Володимирович,  
**Олексієнко** Галина Андріївна

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ:  
ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ**

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки В. В. Коваля  
Редактор С. М. Симоненко  
Комп'ютерне верстання Г. А. Олексієнко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 16,51. Обл.-вид. арк. 14,84. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.