УДК 539.389, 537.226, 536.241

ПРО ОПИС В'ЯЗКОПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

О.А. Комкова, асп.
Одеський національний політехнічний університет

На основі в'язкопружних властивостей невпорядкованого фрактального середовища встановлений зв'язок між фрактальною розмірностю, дробовою похідною і розмитістю релаксаційного спектра.

Установлення залежності між фрактальною розмірністю множини, дробовою похідною і розмитістю релаксаційного спектра дозволяло розширити фізичне тлумачення відомих експериментальних даних, отриманих при дослідженні релаксаційних властивостей неоднорідних середовищ [1]. Полімерні і композиційні матеріали належать до неоднорідних матеріалів з «довгою пам'яттю», тобто матеріалів, у яких деформація (напруги) у даній частині в даний момент часу залежить не тільки від поточних значень деформацій, температури й інших визначальних параметрів, але і від значень цих параметрів в усі попередні моменти. Для опису процесів з «пам'яттю» використаний дробовий інтеграл

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-y)^{q-1} f(yx) dy,$$

причому показник q у ньому вказує на частку збережених становищ і збігається з фрактальною розмірністю множини [1]. При описі матеріалів з «пам'яттю» інтегральні оператори можна замінити диференціальними, а при описі властивостей хаотичного середовища може бути використана дробова похідна.

Для визначення залежності щільності розподілу релаксаційного спектра від фрактальної розмірності множини розглянемо наступну задачу.

Нехай деформація описується східчастою функцією:

$\varepsilon = \varepsilon_0 \eta(t)$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_0 \delta(t)$, де $\eta(t)$- функція Хевісайда, $\delta(t)$- функція Дірака.

Тоді для напруги σ можна записати

$\sigma = 2\mu(t)\varepsilon_0$, $\mu(t) = \mu_0 + \Phi_\mu(t)$,

де для середовища Зінера функція $\Phi_\mu(t)$ має вигляд $\Phi_\mu(t) = (\mu_\infty - \mu_0)\exp\left(-\, t/\tau_\varepsilon\right)$.

У загальному випадку зв'язок функції $\mu(t)$ з функцією розподілу $f(\tau)$ подається виразом $\mu(t) - \mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\ln\tau$, де $f(\tau) = \delta(\tau)$ -функція Дірака. Тоді за визначенням $\mu(t) - \mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\ln\tau = (\mu_\infty - \mu_0)\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$,

де μ_0 і μ_∞ - релаксоване $(\omega \to 0)$ і нерелаксоване $(\omega \to \infty)$ значення комплексного модуля зрушення.

Подіємо оператором Фур'є F на обидві частин .Розглянемо ліву частину:

$F(\mu(t) - \mu_0) = \mu(i\omega)$.

Використовуючи вираз для комплексного модуля зрушення і виділяючи Re і Im частини , $\mu(i\omega) - \mu_\infty = -\frac{(\mu_\infty - \mu_0)}{1 + (\omega\tau)^2} + i\frac{(\mu_\infty - \mu_0)\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$.

З іншого боку, скориставшись представленням $i = \exp(i\pi/2)$, дістаємо

$$\mu(i\omega) = \mu_\infty - \frac{(\mu_\infty - \mu_0)\left(1 + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\omega\tau\right)}{1 + 2\omega\tau\cos\frac{\pi}{2} + (\omega\tau)^2} + i\frac{(\mu_\infty - \mu_0)\sin\frac{\pi}{2}\cdot\omega\tau}{1 + 2\omega\tau\cos\frac{\pi}{2} + (\omega\tau)^2} .$$

Розглянемо тепер праву частину $F(\mu(t) - \mu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_\infty - \mu_0) e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega t} \frac{dt}{\tau} = \frac{(\mu_\infty - \mu_0)}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right)t} dt =$

$$=\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\left(i\omega-\frac{1}{\tau}\right)t}}{\left(\tau i\omega-1\right)}=-\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^{\left(i\omega-\frac{1}{\tau}\right)t}}{1+\left(\omega\tau\right)^2}+i\frac{e^{\left(i\omega-\frac{1}{\tau}\right)t}\cdot\tau\omega}{1+\left(\omega\tau\right)^2}\right].$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\left(i\omega-\frac{1}{\tau}\right)t}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{i\omega t}$, отримуємо $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\left(i\omega-\frac{1}{\tau}\right)t}=1$.

Тепер розглянемо випадок, коли $f(\tau)\neq\delta(\tau)$.Тоді одержуємо

$$F\left(\mu(t)-\mu_0\right)=F\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}d\ln\tau\right).$$

Використовуючи вже доведені рівності, можна записати

$$\mu(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\left[\mu_\infty-\frac{\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\left(1-i\omega\tau\right)}{1+\left(\omega\tau\right)^2}\right]d\ln\tau\Rightarrow\mu(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\left[\mu_\infty-\frac{\left(\mu_\infty-\mu_0\right)}{1+\left(\omega\tau\right)^2}+i\frac{\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\omega\tau}{1+\left(\omega\tau\right)^2}\right]d\ln\tau\Rightarrow$$

$$\operatorname{Im}\mu(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\left[\frac{\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\omega\tau}{1+\left(\omega\tau\right)^2}\right]d\ln\tau.$$

Звідси $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx$, маємо

$$\operatorname{Im}\mu(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\frac{1}{\pi}\pi\frac{1}{1+x^2}dx=\pi\left(\mu_\infty-\mu_0\right)f(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\pi\left(\mu_\infty-\mu_0\right)f(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=\pi\left(\mu_\infty-\mu_0\right)f(\tau)\Rightarrow$$

$$f(\tau)=\frac{1}{\pi\left(\mu_\infty-\mu_0\right)}\operatorname{Im}\mu(i\omega).$$

Таким чином, отримали функцію розподілу для узагальненого стандартного лінійного тіла.

Якщо середовище описується дискретним розподілом часу релаксації τ_i, то можна записати

$$\Phi_\mu(t)=\left(\mu_\infty-\mu_0\right)\sum_i N_i\exp\left(-\,{}^{t}\!/_{\tau^i{}_\varepsilon}\right),\ \sum_i N_i=1.$$

З урахуванням переходу від інтегральної суми до інтеграла дістанемо [1]

$\Phi_\mu(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\exp\left(-\,{}^{t}\!/_{\tau_\varepsilon}\right)\left[d\tau\right]^\alpha$, де $f_1(\tau)$ - щільність релаксаційного спектра.

Формулу можна перетворити до вигляду $\Phi_\mu(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\exp\left(-\,{}^{t}\!/_{\tau_\varepsilon}\right)\left[d\ln\tau\right]^\alpha$. Для функції розподілу часу релаксації $f(\tau)$ умова нормування має вигляд $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left[d\ln\tau\right]^\alpha=\mu_\infty-\mu_0$.

Таким чином, залежність між модулем зрушення $\mu(t)$ і функцією розподілу $f(t)$ має вигляд $\mu(t)=\mu_0+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp\left(-\,{}^{t}\!/_{\tau_\varepsilon}\right)\left[d\ln\tau\right]^\alpha$.

Якщо відоме перетворення Фур'є $\mu(t)$, то Фур'є - перетворення функції $f(t)$ має вигляд $\bar{f}\left(\frac{1}{\omega}\right)=\pm\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\mu\left(\omega\exp(\pm i\pi)\right)$. Залежність нормованої щільності розподілу середовища Зінера $f_0(\tau)=\frac{f(\tau)}{\mu_\infty-\mu_0}=\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi\left\{ch\left[\alpha\ln(\tau/\tau_\varepsilon)\right]+\cos(\alpha\pi)\right\}}$ визначена для двох динамічних станів:

1) для $\alpha=0{,}9$, тобто середовища, близького до динаміки з неперервними становищами, функція f_0 в напівлогарифмічних координатах переходить у дельта-функцію Дірака при $\alpha=1$;

2) для середовища з хаотичною динамікою, що породжує становища з фрактальною розмірністю $\alpha = d_f = 0{,}63$ що дорівнює розмірності " канторовського пилу", функція f_0 має розмитий спектр, тобто порядок дробової похідної α можна розглядати як характеристику розмитості релаксаційного спектра.

Залежність між дисперсією часу релаксації хаотичної динаміки γ^2 і параметром α має вигляд

$$\gamma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2\left(\tau/\tau_\varepsilon\right) f_0(\tau) d\ln\tau = \frac{\pi^2}{3}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{3}\frac{1-{d_f}^2}{{d_f}^2}.$$

Таким чином, на основі в'язкопружних властивостей невпорядкованого фрактального середовища встановлений зв'язок між фрактальною розмірністю, дробовою похідною і розмитістю релаксаційного спектра.

SUMMARY

On the basis of viscoelastic properties disorder fractal environments connection between fractal dimension, a fractional derivative and relaxation a spectrum is established

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новиков В.В., Войцеховский К.В., Комкова О.А. Вязкоупругие свойства неоднородных сред с хаотической структурой // Труды Одесского политехнического университета: Научный и производственно – практический сборник по техническим и естественным наукам. – Одесса, 2001. – Вып. 5. – С. 240 – 249.

Надійшла до редакції 15 жовтня 2005 р.