

## НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВЛИЯНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МОМЕНТА НА ПЕРВУЮ КРИТИЧЕСКУЮ ЧАСТОТУ ДВУХОПОРНОГО РОТОРА

**Л.Ю. Равлюк, В.И. Симоновский**

*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*Рассмотрены общие закономерности влияния гироскопического момента на критическую частоту однодискового двухопорного ротора.*

Как известно, критические частоты синхронной прецессии роторов, вычисленные с учетом гироскопических моментов, имеют большие значения, нежели найденные без их учета. Ден-Гартом [1] был проведен исчерпывающий анализ влияния гироскопического момента для случая консольного однодискового ротора. Было показано, что при изменении относительного параметра  $D = \frac{I_d}{ml^2}$  от нуля (неучет гироскопического момента) до бесконечности расчетные значения критической частоты увеличивается от  $\omega_0$  (критическая частота без учета гироскопического момента) до  $2\omega_0$ . В случае однодисковой двухопорной схемы (рис. 1) обобщенный (в относительных параметрах) анализ, как будет показано ниже, дает существенно иные закономерности.

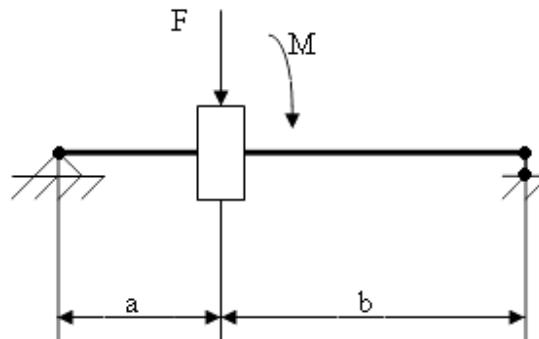


Рисунок 1 – Однодисковая схема ротора

Рассмотрим частотные уравнения однодисковой модели двухопорного ротора (рис. 1). Сопроматовские формулы для прогиба  $y$  и угла поворота вала  $\varphi$  в точке крепления диска имеют вид:

$$\begin{aligned} y &= \delta_{11}F + \delta_{12}M; \\ \varphi &= \delta_{21}F + \delta_{22}M, \end{aligned} \quad (1)$$

где сила  $F$  и момент  $M$  приложены в центре диска; их положительные направления, показанные на рисунке, совпадают с положительными направлениями обобщенных координат  $y$  и  $\varphi$ . Коэффициенты податливости  $\delta_{ij}$  определяются, как известно, по формулам:

$$\delta_{11} = \frac{a^2b^2}{3EI(a+b)}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{ab(b-a)}{3EI(a+b)}, \quad \delta_{22} = \frac{a^3 + b^3}{3EI(a+b)^2}, \quad (2)$$

где  $E$  - модуль Юнга;  $I$  - момент инерции поперечного сечения вала; размеры  $a, b$  показаны на рисунке 1.

При синхронной прецессии уравновешенного ротора на вал будут действовать силы инерции элементарных масс диска, которые приводятся к силе инерции  $F$  центра масс диска

$$F = y\omega^2 m \quad (3)$$

и к моменту сил инерции диска  $M$  (который принято называть гироскопическим моментом)

$$M = -I_d \omega^2 \varphi, \quad (4)$$

где  $m$  - эквивалентная масса ротора;  $I_d$  - диаметральный момент инерции диска,  $\omega$  - частота вращения ротора.

После подстановки (3) и (4) в соотношения (1) получим систему двух однородных уравнений для прогиба  $y$  и угла поворота  $\varphi$ . Из условия нетривиальности решения следует частотное уравнение в виде:

$$\begin{bmatrix} m\omega^2\delta_{11} - 1 & -I_d\omega^2\delta_{12} \\ \delta_{21}m\omega^2 & -(\delta_{22}I_d\omega^2 + 1) \end{bmatrix} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) удобно представить в безразмерном виде, положив:

$$z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}, \quad D = \frac{I_d}{ml^2}, \quad \alpha = \frac{a}{l}.$$

В этих обозначениях:  $\omega_0^2$  - квадрат критической частоты ротора, полученной без учета гироскопического момента;  $D$  - безразмерный параметр Ден-Гартога, отражающий «удельный вес» момента инерции  $I_d$ , которому пропорционален гироскопический момент;  $l = a + b$  - межопорная длина вала ротора. Частотное уравнение (5) для введенных параметров с учетом формул (2) приводится после ряда алгебраических преобразований к виду

$$z^2 + z \left[ 3 + \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{D} \right] - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{D} = 0. \quad (6)$$

Положительный корень этого уравнения, которому соответствует квадрат относительной критической частоты при учете гироскопического момента, определяется по формуле

$$z_\Gamma = -0,5 \left[ 3 + \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{D} \right] + \sqrt{0,25 \left[ 3 + \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{D} \right]^2 + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{D}}. \quad (7)$$

По найденному из (7)  $z_\Gamma$  определяется первая критическая частота с учетом гироскопического момента  $\omega_\Gamma$ :

$$\omega_\Gamma = \sqrt{z_\Gamma} \omega_0 \quad \left( \text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta_{11}}} \right),$$

а поправка, вносимая этим учетом, вычисляется по формуле

$$\Delta = \frac{(\omega_{\Gamma} - \omega_0)}{\omega_0} \cdot 100\% = (\sqrt{z_{\Gamma}} - 1) \cdot 100\%.$$

На рисунке 2 приведены подсчитанные при разных  $\alpha$  графики зависимостей  $z_{\Gamma}(D)$  согласно формуле (7). Численные расчеты показывают, что с уменьшением  $\alpha$  от 0,5 до нуля значение  $z_{\Gamma}$  возрастает от единицы до (теоретически) бесконечности.

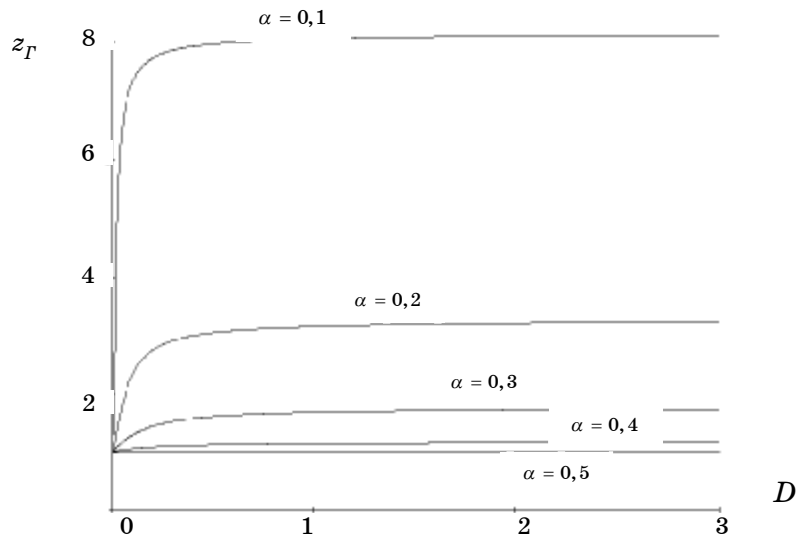


Рисунок 2 – Зависимость  $z_{\Gamma}(D)$

На рисунке 3 показана кривая  $z_{\Gamma}(\alpha, \infty)$ , дающая представление о пределах возможных поправок, вносимых с учетом гироскопического момента. Из рисунка, а также из анализа функции

$$z_{\Gamma}(\alpha, \infty) = \lim_{D \rightarrow \infty} z_{\Gamma}(\alpha, D) = \sqrt{\frac{9\alpha^4 - 18\alpha^3 + 15\alpha^2 - 6\alpha + 1}{4\alpha^4 - 8\alpha^3 + 4\alpha^2}} + \frac{1}{2\alpha - 2\alpha^2} - \frac{3}{2}$$

следует, что при малых  $\alpha$  (т.е. при расположении диска вблизи опоры) эти поправки могут достигать сколь угодно больших значений.

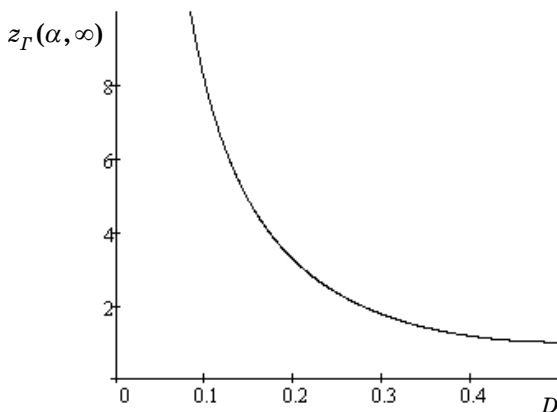


Рисунок 3 – Кривая  $z_{\Gamma}(\alpha, \infty)$

В этом существенные отличия схемы двухопорного ротора от консольного. В консольном однодисковом роторе, как это было установлено в [1],  $\lim_{D \rightarrow \infty} z_{\Gamma} = 4$ . В двухопорной схеме оказывается

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0, D \rightarrow \infty} z_{\Gamma} = \infty.$$

При  $\alpha = 0,5$  значение  $z_{\Gamma} = 1$  при любых  $D$  (рис. 2). Это соответствует тому физически очевидному обстоятельству, что при синхронной прецессии по первой форме ротора с симметрично расположенным диском нет поворота диска.

Таким образом, можно сделать вывод, что при расположении дисков (насадных деталей) вблизи опор неучет гироскопических моментов может привести к существенным погрешностям. Для этих погрешностей, как показано выше, в отличие от консольной конструкции теоретически нет ограничений.

## SUMMARY

*In the article general patterns of influencing of gyroscopic moments on critical frequency of single-disk two-supporting rotor were considered.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж.П. Ден-Гартог. Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960.– 580 с.

**Симоновский В.И.**, доктор техн. наук,  
профессор, СумГУ, г. Сумы;  
**Равлюк Л.Ю.**, студентка, СумГУ, г. Сумы

*Поступила в редакцию 26 ноября 2007 г.*