

МІКРОВИХРОВА СТРУКТУРА ЛАМІНАРНИХ ТЕЧІЙ

І.О. Ковальов, Д.С. Кобизський

Сумський державний університет, м. Суми

У роботі на прикладі течії Хагена – Пуазейля зроблена спроба більш поглибленого аналізу структури і кінематики течії рідини при наявності градієнта швидкості.

Зокрема, показано, що навіть ламінарна течія має вихрову структуру. Знайдені компоненти вихрів, конфігурація сім'ї вихрових ліній і вихротокових поверхонь, встановлений зв'язок між величиною вихору $\bar{\Omega}$ і величиною дотичних напружень $\bar{\tau}$, отриманий закон розподілу інтенсивності вихрів по радіусу і показана ідентичність цього закону з епюрою розподілу дотичних напружень. На цій основі робиться спроба більш поглибленого пояснення першопричин виникнення дотичних напружень у потоці рідини.

Стверджується, що аналогічні висновки притаманні і для інших ламінарних течій, що мають градієнт швидкості.

ВСТУП

Класичне уявлення про ламінарну течію рідини пов'язане з відомими дослідженнями О.Рейнольдса [1] і характеризується сталим струминним характером та відсутністю перемішування окремих елементарних об'ємів між струминками чи поверхнями течії.

Згідно з теоремою Коші – Гельмгольда [2] у загальному випадку рідка частинка повинна знаходитись одночасно у поступальному, обертовому та деформаційному русі, тобто знаходитись у вихровому потоці. Проте загальноприйняте уявлення про ламінарну течію, на перший погляд, важко поєднується із наявністю у ній обертового руху кожного елементарного об'єму рідини, що нібито повинно викликати інтенсивне перемішування.

МЕТА

Мета даної роботи довести, що ламінарна течія одночасно може бути і вихровою, дослідити її вихрову природу на прикладі течії Хагена-Пуазейля та визначити основні кінематичні характеристики такої течії.

МІКРОВИХРОВА СТРУКТУРА ЛАМІНАРНИХ ТЕЧІЙ. ДОВЕДЕННЯ, ІЛЮСТРАЦІЇ

Як відомо, закон розподілу швидкості для ламінарної течії в круглій циліндричній трубці (так званій течії Хагена – Пуазейля) і має вигляд:

$$v = \frac{\Delta P}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) , \quad (1)$$

де r_0 – внутрішній радіус труби;

ΔP – перепад тиску між двома довільними перерізами потоку;

l – відстань між цими перерізами;

r – поточне значення радіуса перерізу.

Враховуючи, що $r^2 = z^2 + y^2$, зобразимо (1) у вигляді

$$v = \frac{\Delta P}{4\mu l} (r_0^2 - z^2 - y^2) . \quad (2)$$

Виходячи з відомих значень компонент вихрів:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \Omega_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\end{aligned}\quad (3)$$

і зваживши, що для такої течії $v_x \neq 0$, а $v_y = v_z = 0$ (рух рідини у напрямку осі x окремими шарами без перемішування, тому компоненти, нормальні до вектора v_x відсутні), вирази (3) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= 0; \\ \Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z}; \\ \Omega_z &= -\frac{\partial v_x}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4)$$

На основі останніх виразів для компонент вихрів можна стверджувати, що розглянута ламінарна течія є вихровою, оскільки для неї $\Omega_y \neq 0$, $\Omega_z \neq 0$, а тому і в цілому $\Omega \neq 0$.

Знайдемо значення цих компонентів.

Із (2) отримуємо:

$$\begin{aligned}\Omega_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\Delta P}{2\mu l} z; \\ \Omega_z &= -\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\Delta P}{2\mu l} y,\end{aligned}$$

тому

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{2\mu l}\right)^2 \cdot (y^2 + z^2)} = \frac{\Delta P}{2\mu l} \cdot r. \quad (5)$$

Знайдемо конфігурацію вихрових ліній у такому потоці. Виходячи з диференційного рівняння вихрових ліній:

$$\frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z},$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}-\frac{dy}{\frac{\Delta P}{2\mu l} z} &= \frac{dz}{\frac{\Delta P}{2\mu l} y}; \\ -\frac{dy}{z} &= \frac{dz}{y} \\ -ydy &= z dz\end{aligned}$$

або:

$$ydy + zdz = 0 ;$$

$$y^2 + z^2 = c \quad (6)$$

Тобто вихрові лінії являють собою сім'ю концентричних кіл з центром у початку координат і, відповідно, вихрові поверхні, як концентричні, вісесиметричні стосовно осі x , циліндричні поверхні (рис. 1)

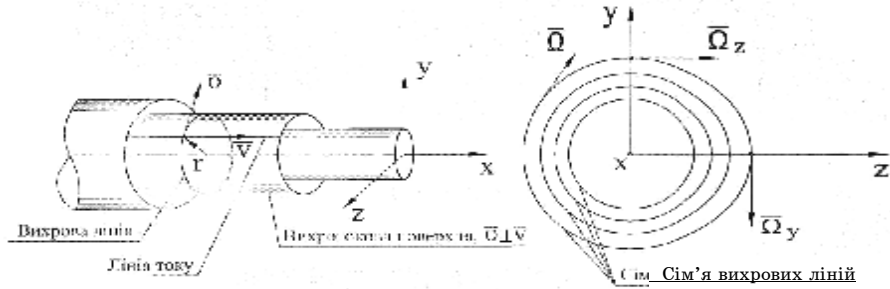


Рисунок 1 – Вихрові лінії

Важливо відзначити, що обертання кожного елементарного об'єму рідини відбувається в площині, перпендикулярній вектору $\vec{\Omega}$, а оскільки останній є дотичним до вихрової лінії, то $\vec{\Omega} \perp r, \vec{v}$, тобто доходимо висновку, що кожна частинка рідини обертається у радіальній площині навколо свого центру O , який рухається вздовж лінії току зі швидкістю v , не відриваючись від своєї лінії току (див. рис.2).

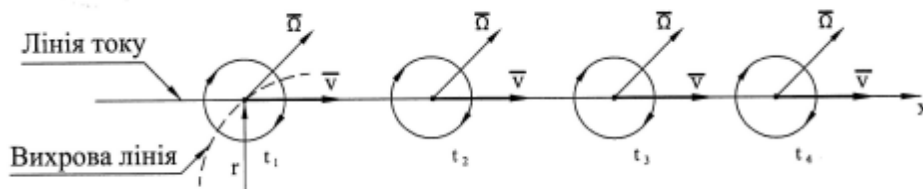


Рисунок 2 – Положення рідкої частинки на лінії току в різні моменти часу t_1, t_2, t_3, t_4

Потрібно звернути також увагу на те, що частинки рідини, які знаходяться на сусідніх радіусах r_1, r_2 і взаємодіють між собою, обертаються із різними кутовими швидкостями

$$\omega = \frac{\Omega}{2} = \frac{\Delta P}{4\mu l} \cdot r \quad (7)$$

і у точках контакту A їх лінійні швидкості обертового руху направлені у протилежні сторони (рис.3)

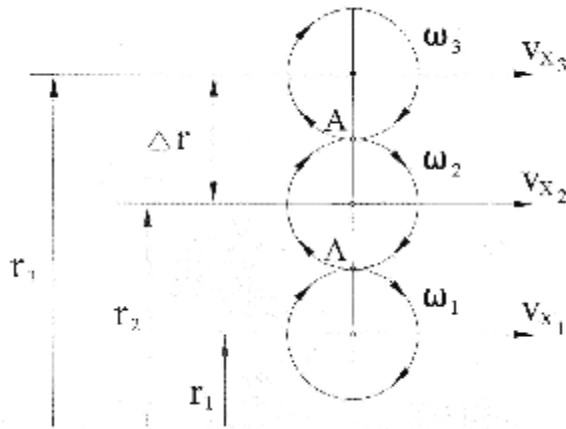


Рисунок 3

Очевидно, є прямий зв'язок величини дотичних напружень між окремими шарами рідини в такому потоці, які, як відомо, прямо пропорційні радіусу r , тобто

$$\tau = -\frac{\Delta P}{2l} r;$$

зі швидкістю обертання рідких частинок, яка згідно з вищевказаним дорівнює:

$$\omega = \frac{\Delta P}{4\mu l} \cdot r,$$

або:

$$\Omega = \frac{\Delta P}{2\mu l} \cdot r.$$

Звідки

$$\tau = -\mu \cdot \Omega,$$

або

$$\Omega = -\frac{\tau}{\mu}. \quad (8)$$

Про цей зв'язок між τ і Ω свідчить і те, що характер епюр τ і Ω ідентичний (рис.4).

Якщо ж узяти до уваги, що кожний елементарний об'єм рідини рухається вздовж лінії току разом зі своїм центром мас O , обертається навкруги цього центра (як показано вище) і при цьому ще й постійно деформується, не змінюючи положення центра мас стосовно лінії току, то стає очевидним, що причина виникнення дотичних напружень у такому потоці ще більш складна (окрім сил міжмолекулярної взаємодії). Але аналіз деформаційного руху і його вплив на виникнення внутрішніх дотичних напружень не входили до кола питань, розглянутих у даній роботі.

Необхідно також зазначити, що в процесі виконання цієї роботи були аналогічним чином проаналізовані й деякі інші ламінарні течії (наприклад, фрикційна та напірна течії між двома паралельними нерухомими та рухомими пластинами відповідно) і були отримані результати, аналогічні до вищевказаних.

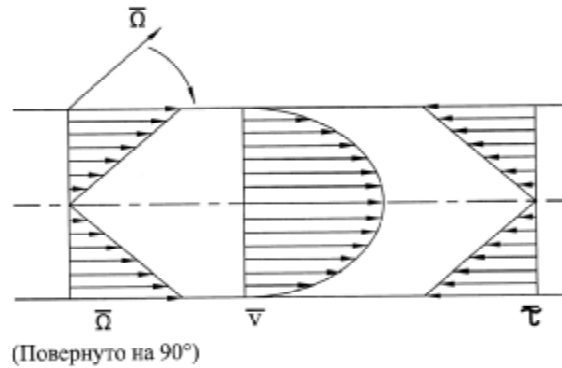


Рисунок 4 – Залежність $\bar{\Omega}, \bar{\tau}, \bar{v}$ від r

Ці результати відрізнялися лише конфігурацією сімей вихрових ліній, формою вихротокових поверхонь, величиною кутової швидкості обертання, але кожного разу підтверджувалися висновки про наявність у таких потоках компонент вихрів та їх взаємозв'язок із законом розподілу дотичних напружень.

ВИСНОВКИ

Отже, з вищезазначеного можна зробити висновок, що навіть ламінарна течія має вихрову структуру з відповідними значеннями компонент вихрів, конфігурацією сім'ї вихрових ліній і вихротокових поверхонь. Причому було доведено, що закон розподілу інтенсивності вихрів по радіусу ідентичний епюрі розподілу дотичних напружень, а це, у свою чергу, дає підстави для більш поглибленого пояснення першопричин виникнення дотичних напружень у потоці рідини.

Незважаючи на присутність у ламінарній течії обертового руху кожного елементарного об'єму рідини, що часто асоціюється із наявністю перемішування і розмивання окремих струминок, це явище, як показують експерименти, повністю відсутнє. Очевидно, пояснювати це потрібно так, як це стверджується в класичній гідромеханіці, а саме – співвідношенням у потоці сил інерції та сил в'язкості, що оцінюється числом Рейнольдса Re .

SUMMARY

In this article an attempt of deeper analyzing of the structure and kinematics of Hagen-Poisele's flow with a velocity gradient was made.

Besides, it was shown, that even laminar flow had a vortex structure. To illustrate the nature of this structure we found components of velocity, configuration of vortex lines and vortexflow sheath, established a link between magnitude of vortex $\bar{\Omega}$ and tangential stress $\bar{\tau}$, got a distribution law of vortex intensity by radius and showed an identity of this law with curve of tangential stress.

Based on these results we made an attempt to explain the basic reasons of appearance of tangential stress in the flow. It was stated, that the same conclusions were true for other laminar flows with velocity gradient.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Р.Р. Чугаев. Гидравлика. – М.: Энергия, 1970.
2. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970.

Ковальов І.О., канд. техн. наук, професор,
СумДУ, м. Суми;

Кобизський Д.С., студент, СумДУ, м. Суми

Надійшла до редакції 26 листопада 2007 р.