УДК 620.178.5:001.891.54:517.928

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

И.Д. Пузько
Сумский государственный университет, г. Сумы

В работе рассмотрена математическая модель в виде дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Получены новые аналитические соотношения для определения параметров математической модели при использовании асимптотического метода КБМ для уравнений первого приближения амплитуды и фазы решения и метода временных интервалов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В практике технических приложений находят применение математические модели систем с распределенными параметрами, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными или интегродифференциальными уравнениями гиперболического, параболического или эллиптического типов [1].

В частности, при решении задач вибродиагностики, при проведении виброиспытаний на вибропрочность, виброустойчивость, вибронадежность, при разработке новых технологий вибрационного типа возникает необходимость построения математических моделей и определения параметров таких моделей, т. е. имеет место процесс структурной параметрической идентификации [1, 2].

На актуальность решения задач идентификации систем с распределенными параметрами, а также на возникающие в таких задачах трудности в математическом плане при решении уравнений в частных производных было отмечено в ряде исследований [1].

В работах [3,4,5] рассматривается асимптотический метод решения уравнения в частных производных третьего порядка для прямоугольной тонкой пластинки с учетом ползучести ее материала. Рассматриваются простой и комбинационный резонансы и устойчивость режимов.

Однако вопросы оценки параметров при использовании уравнений первого приближения остались вне поля зрения исследователей. В нашем исследовании частично ликвидирован этот пробел.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть имеет место квазилинейная краевая задача для однородного уравнения в частных производных [4,5]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^3\omega}{\partial t^3}+\xi\frac{\partial^2\omega}{dt^2}+\frac{\partial}{dt}\left(\omega^2\nabla^4\omega+\eta\omega\right)+\xi\left(\omega^2\nabla^4\omega+\eta\omega\right)=\\&=\varepsilon\left[-\xi\beta\omega^3-\beta\frac{\partial}{dt}\omega^3-\frac{E_2\omega^2}{E_1}\frac{\partial}{dt}\left(\nabla^4\omega\right)\right]\end{aligned}\tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\omega\big|_{x=0,b}=0,\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+V\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\bigg|_{x=0,b}=0;\ \ \omega\big|_{y=0,c}=0,\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+V\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\bigg|_{y=0,c}=0,\tag{2}$$

где $\beta > 0$, $\eta > 0$, $\omega = \omega(x, y, t)$, ω, ξ - постоянные; $\xi > 0$ - малый параметр; t - время; x, y - пространственные координаты; ∇ - линейный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Уравнение (1) описывает колебания прямоугольной тонкой пластинки, лежащей на упругом основании с учетом ползучести материала.

Амплитуда X_a и ψ фаза решения определяются из уравнений первого приближения [4,5]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_a}{dt} &= -\varepsilon\xi\zeta X_a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \Omega_{11} + \varepsilon\Omega_{11}\zeta + \varepsilon\frac{27\beta X_a^2}{2\cdot 64 X_a}, \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где

$$\Omega_{11}^2 = \omega\left[\left(\pi b^{-1}\right)^2 + \left(\pi c^{-1}\right)^2\right]^2 + \eta,$$

$$\zeta = E_2\omega^2\left[\left(\pi b^{-1}\right)^2 + \left(\pi c^{-1}\right)^2\right]^2\left\{2E_1\left(\Omega_{11}^2 + \xi^2\right)\right\}^{-1}.$$

После несложных преобразований из системы (3) получим уравнение

$$d\psi - \Omega_{11}dt = -\left(\frac{\Omega_{11}}{\xi} + \frac{27\beta X_a}{2\cdot 64\xi\zeta}\right)\frac{dX_a}{X_a}. \tag{4}$$

Принимая во внимание выражение $\psi = 2\pi n$, где n - число циклов (число периодов) и фиксируя временной интервал Δt при изменении амплитуды в заданном интервале от значения $X_{a(2j-1)}$ до значения X_{a2j} после проведения операции интегрирования, получим уравнение

$$2\pi n - \Omega_{11}\Delta t = -\frac{\Omega_{11}}{\xi}\ln\frac{X_{a2j}}{X_{a(2j-1)}} - \frac{27\beta}{2\cdot 64\xi\zeta}\left(X_{a2j} - X_{a(2j-1)}\right). \tag{5}$$

Представим уравнение (5) при условии задания $j = 1, 2, 3$ и получим систему трех уравнений:

$$2\pi n_1 - \Omega_{11}\Delta_1 t = -\frac{\Omega_{11}}{\xi}\ln\frac{X_{a2}}{X_{a1}} - \frac{27\beta}{2\cdot 64\xi\zeta}\left(X_{a2} - X_{a1}\right); \tag{6}$$

$$2\pi n_2 - \Omega_{11}\Delta_2 t = -\frac{\Omega_{11}}{\xi}\ln\frac{X_{a4}}{X_{a3}} - \frac{27\beta}{2\cdot 64\xi\zeta}\left(X_{a4} - X_{a3}\right); \tag{7}$$

$$2\pi n_3 - \Omega_{11}\Delta_3 t = -\frac{\Omega_{11}}{\xi}\ln\frac{X_{a6}}{X_{a5}} - \frac{27\beta}{2\cdot 64\xi\zeta}\left(X_{a6} - X_{a5}\right). \tag{8}$$

Проведем преобразование уравнений (6), (7), (8). Разделим (6) на (7), (6) на (8) и получим:

$$\frac{2\pi n_1 - \Omega_{11}\Delta_1 t + \xi^{-1}\Omega_{11}\ln\dfrac{X_{a2}}{X_{a1}}}{2\pi n_2 - \Omega_{11}\Delta_2 t + \xi^{-1}\Omega_{11}\ln\dfrac{X_{a4}}{X_{a3}}} = \frac{(X_{a2}-X_{a1})}{(X_{a4}-X_{a3})}; \tag{9}$$

$$\frac{2\pi n_1 - \Omega_{11}\Delta_1 t + \xi^{-1}\Omega_{11}\ln\dfrac{X_{a2}}{X_{a1}}}{2\pi n_3 - \Omega_{11}\Delta_3 t + \xi^{-1}\Omega_{11}\ln\dfrac{X_{a6}}{X_{a5}}} = \frac{(X_{a2}-X_{a1})}{(X_{a6}-X_{a5})}. \tag{10}$$

Из (9), (10) получим два уравнения относительно Ω_{11} и $\xi^{-1}\Omega_{11}$:

$$\begin{aligned}&\Omega_{11}\left[(X_{a4}-X_{a3})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_2 t\right]-\xi^{-1}\Omega_{11}\Big[(X_{a4}-X_{a3})\ln\left(X_{a2}X_{a1}^{-1}\right)-\\&-(X_{a2}-X_{a1})\ln\left(X_{a4}X_{a3}^{-1}\right)\Big]=2\pi\left[n_1(X_{a4}-X_{a3})-n_2(X_{a2}-X_{a1})\right];\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\Omega_{11}\left[(X_{a6}-X_{a5})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_3 t\right]-\xi^{-1}\Omega_{11}\Big[(X_{a6}-X_{a5})\ln\left(X_{a2}X_{a1}^{-1}\right)-\\&-(X_{a2}-X_{a1})\ln\left(X_{a6}X_{a5}^{-1}\right)\Big]=2\pi\left[n_1(X_{a6}-X_{a5})-n_3(X_{a2}-X_{a1})\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Система (11), (12) уравнений решается относительно неизвестных Ω_{11}, $\xi^{-1}\Omega_{11}$ матричным методом Крамера

$$\Omega_{11}=\frac{\Delta_\Omega}{\Delta},\ \xi^{-1}\Omega_{11}=\frac{\Delta_{\xi\Omega}}{\Delta}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_\Omega&=2\pi(X_{a2}-X_{a1})\left\{\ln\left[\left(\frac{X_{a4}}{X_{a3}}\right)^{n_3}\left(\frac{X_{a5}}{X_{a6}}\right)^{n_2}\right]^{(X_{a2}-X_{a1})}-\right.\\&\left.-\ln\left[\left(\frac{X_{a2}}{X_{a1}}\right)^{n_3}\left(\frac{X_{a5}}{X_{a6}}\right)^{n_1}\right]^{(X_{a4}-X_{a3})}-\ln\left[\left(\frac{X_{a4}}{X_{a3}}\right)^{n_1}\left(\frac{X_{a1}}{X_{a2}}\right)^{n_2}\right]^{(X_{a6}-X_{a5})}\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta_\Omega&=2\pi(X_{a2}-X_{a1})\ln\left\{\left(X_{a1}X_{a2}^{-1}\right)^{\left[n_3(X_{a4}-X_{a3})-n_2(X_{a6}-X_{a5})\right]}\times\right.\\&\left.\times\left(X_{a3}X_{a4}^{-1}\right)^{\left[n_1(X_{a6}-X_{a5})-n_3(X_{a2}-X_{a1})\right]}\left(X_{a5}X_{a6}^{-1}\right)^{\left[n_2(X_{a2}-X_{a1})-n_1(X_{a4}-X_{a3})\right]}\right\};\end{aligned} \tag{15}$$

$$\Delta_{\xi^{-1}\Omega}=\begin{vmatrix}(X_{a4}-X_{a3})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_2 t & 2\pi\left[n_1(X_{a4}-X_{a3})-n_2(X_{a2}-X_{a1})\right]\\ (X_{a6}-X_{a5})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_3 t & 2\pi\left[n_1(X_{a6}-X_{a5})-n_3(X_{a2}-X_{a1})\right]\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi(X_{a2}-X_{a1})\left\{(X_{a2}-X_{a1})(n_3\Delta_2 t-n_2\Delta_3 t)-(X_{a4}-X_{a3})(n_3\Delta_1 t-n_1\Delta_3 t)-\right.$$
$$\left.-(X_{a6}-X_{a5})(n_1\Delta_2 t-n_2\Delta_1 t)\right\}; \qquad (16)$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}(X_{a4}-X_{a3})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_2 t & -\left[\ln\left(\frac{X_{a2}}{X_{a1}}\right)^{(X_{a4}-X_{a3})}-\ln\left(\frac{X_{a4}}{X_{a3}}\right)^{(X_{a2}-X_{a1})}\right]\\ (X_{a6}-X_{a5})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_3 t & -\left[\ln\left(\frac{X_{a2}}{X_{a1}}\right)^{(X_{a6}-X_{a5})}-\ln\left(\frac{X_{a6}}{X_{a5}}\right)^{(X_{a2}-X_{a1})}\right]\end{vmatrix}=$$

$$=(X_{a2}-X_{a1})\ln\left\{\left(X_{a1}X_{a2}^{-1}\right)^{\left[(X_{a4}-X_{a3})\Delta_3 t-(X_{a6}-X_{a5})\Delta_2 t\right]}\left(X_{a3}X_{a4}^{-1}\right)^{\left[(X_{a6}-X_{a5})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_3 t\right]}\times\right.$$
$$\left.\times\left(X_{a5}X_{a6}^{-1}\right)^{\left[(X_{a2}-X_{a1})\Delta_2 t-(X_{a4}-X_{a3})\Delta_1 t\right]}\right\}. \qquad (17)$$

Таким образом, имеем соотношения для определения параметров Ω_{11}, $\xi^{-1}\Omega_{11}$

$$\Omega_{11}=2\pi\frac{\ln\left\{\left(X_{a2}X_{a1}^{-1}\right)^{\left[n_3(X_{a4}-X_{a3})-n_2(X_{a6}-X_{a5})\right]}\left(X_{a3}X_{a4}^{-1}\right)^{\left[n_1(X_{a6}-X_{a5})-n_3(X_{a2}-X_{a1})\right]}\times\left(X_{a5}X_{a6}^{-1}\right)^{\left[n_2(X_{a2}-X_{a1})-n_1(X_{a4}-X_{a3})\right]}\right\}}{\ln\left\{\left(X_{a1}X_{a2}^{-1}\right)^{\left[(X_{a4}-X_{a3})\Delta_3 t-(X_{a6}-X_{a5})\Delta_2 t\right]}\times\left(X_{a3}X_{a4}^{-1}\right)^{\left[(X_{a6}-X_{a5})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_3 t\right]}\times\left(X_{a5}X_{a6}^{-1}\right)^{\left[(X_{a2}-X_{a1})\Delta_2 t-(X_{a4}-X_{a3})\Delta_1 t\right]}\right\}}; \qquad (18)$$

$$\xi^{-1}\Omega_{11}=2\pi\frac{\left\{(X_{a2}-X_{a1})(n_3\Delta_2 t-n_2\Delta_3 t)-(X_{a4}-X_{a3})(n_3\Delta_1 t-n_1\Delta_3 t)-(X_{a6}-X_{a5})(n_1\Delta_2 t-n_2\Delta_1 t)\right\}}{\ln\left\{\left(X_{a1}X_{a2}^{-1}\right)^{\left[(X_{a4}-X_{a3})\Delta_3 t-(X_{a6}-X_{a5})\Delta_2 t\right]}\left(X_{a3}X_{a4}^{-1}\right)^{\left[(X_{a6}-X_{a5})\Delta_1 t-(X_{a2}-X_{a1})\Delta_3 t\right]}\times\left(X_{a5}X_{a6}^{-1}\right)^{\left[(X_{a2}-X_{a1})\Delta_2 t-(X_{a4}-X_{a3})\Delta_1 t\right]}\right\}}. \qquad (19)$$

Из соотношений (18), (19) получим выражение для определения параметра ξ:

$$\xi = \frac{\ln\left\{\left(X_{a2}X_{a1}^{-1}\right)^{\left[n_3\left(X_{a4}-X_{a3}\right)-n_2\left(X_{a6}-X_{a5}\right)\right]}\left(X_{a3}X_{a4}^{-1}\right)^{\left[n_1\left(X_{a6}-X_{a5}\right)-n_3\left(X_{a2}-X_{a1}\right)\right]}\times \times\left(X_{a5}X_{a6}^{-1}\right)^{\left[n_2\left(X_{a2}-X_{a1}\right)-n_1\left(X_{a4}-X_{a3}\right)\right]}\right\}}{\left\{\left(X_{a2}-X_{a1}\right)\left(n_3\Delta_2 t-n_2\Delta_3 t\right)-\left(X_{a4}-X_{a3}\right)\left(n_3\Delta_1 t-n_1\Delta_3 t\right)- -\left(X_{a6}-X_{a5}\right)\left(n_1\Delta_2 t-n_2\Delta_1 t\right)\right\}}. \qquad (20)$$

Соотношения (18), (20) для определения параметров Ω_{11}, ξ получены при неучете ошибок измерения, фиксации и запоминания значений временных интервалов, чисел циклов и амплитудных значений колебательных процессов.

При проведении дальнейших исследований необходимо сформировать информационные массивы множества временных интервалов, чисел циклов в этих временных интервалах и множество амплитудных значений колебательных процессов. При таком подходе формирование регрессионных зависимостей решает задачу учета случайных погрешностей измерений.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена математическая модель в виде дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. Получены новые аналитические соотношения для определения параметров математической модели при использовании асимптотического метода Крылова – Боголюбова – Митропольского (КБМ) для уравнений первого приближения амплитуды и фазы решения и применении метода временных интервалов.

SUMMARY

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF EQUATIONS IN PRIVATE DERIVED FUNCTIONS OF THE THIRD ORDER USING ASYMPTOTIC DECISIONS

I. Puz'ko,
Sumy State University

In the scientific paper the mathematic model in the form of differential equation in private derived functions of the third order is considered. New analytic parities were received to define parameters of the mathematic model using asymptotic method KBM for the equations of the first approaching of amplitude and phase of decision and method of temporal intervals.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Редько С.Ф., Ушкалов В.Ф., Яковлев В.П. Идентификация механических систем. Определение динамических характеристик и параметров. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216с.
2. Божко А.Е., Личкатый Е.А., Полищук О.Ф., Пузько И.Д., Савченко В.И. Резонансные виброиспытательные системы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248с.
3. Чан Ким Тьи. Асимптотические решения уравнений в частных производных высшего порядка // Укр. мат. журнал.- 1982. - Т. 34, №2. - С. 255 – 259.
4. Хоанг ван Да. Построение асимптотических решений уравнения в частных производных высокого порядка с двумя пространственными переменными// Укр. мат. журнал. – 1984. - Т. 36, №1. - С. 87 – 93.
5. Митропольский Ю.А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344с.

Пузько И.Д., канд. техн. наук, доцент, СумГУ, г. Сумы

Поступила в редакцию 10 июня 2008 г.