

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛОВ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ РЕАЛЬНОЙ
ЖИДКОСТЬЮ.**

Часть 2. РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

С.Д. Косторной, А.С. Мартынов*

Сумский национальный аграрный университет, г. Сумы;

**Сумский государственный университет, г. Сумы*

Статья посвящена результатам численного решения задачи о развитии нестационарного, неустойчивого отрыва потока при обтекании цилиндра из состояния покоя на основе модели Навье-Стокса и пограничного слоя. Расчеты показали, что до момента возникновения неустойчивости распределение коэффициента трения, в рамках теории пограничного слоя и по уравнению Навье-Стокса, практически не отличается.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что все течения жидкостей и газов делятся на два типа: спокойные и плавные течения, называемые ламинарными, и их противоположность - так называемые турбулентные течения, при которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины беспорядочно пульсируют, крайне нерегулярно изменяясь в пространстве и во времени. Сложный характер колебаний скорости и температуры при турбулентном течении, множество пульсаций различных периодов и амплитуд иллюстрируют сложную внутреннюю структуру турбулентных течений, резко отличающихся в этом отношении от ламинарных. Эта сложная структура сказывается на многих свойствах течения, оказывающихся различными в ламинарном и турбулентном случаях. Так, турбулентные течения обладают гораздо большей способностью к передаче количества движения и поэтому во многих случаях оказывают гораздо большее силовое воздействие на обтекаемые жидкостью твердые тела. Аналогичным образом турбулентные потоки обладают повышенной способностью к передаче тепла и пассивных примесей, к распространению химических реакций, к переносу взвешенных частиц и т.д.

Перечисленные свойства турбулентных течений являются весьма существенными для многих задач естествознания и техники и, в частности, для повышения гидродинамических показателей энергетических машин и их надежности. Вопрос о том, часто ли встречаются турбулентные течения, представляет несомненный практический и теоретический интерес. Оказывается, что подавляющее большинство реально встречающихся в природе и технике течений являются именно турбулентными. Поэтому изучение турбулентности, безусловно, является очень важной практической задачей.

В условиях значительного сокращения финансирования научных исследований и фондов развития производства, экспериментальные работы по созданию новых технологий практически неосуществимы. В связи с этим задача развития и совершенствования численных методов исследования течений вязкой несжимаемой жидкости становится особенно актуальной.

Широкий класс течений вязкой жидкости представляют собой нестационарные и периодические течения, в которых малые возмущения могут привести к конечным изменениям структуры течения. К нестационарным течениям с неустойчивостью можно отнести турбулентные течения, нестационарный срыв потока, слой смешения,

свободноконвективные течения с неустойчивой стратификацией и многие другие.

Описание механизма нестационарного срыва потока и зарождения турбулентного пограничного слоя является актуальной задачей для многих практически важных приложений. В частности, резкие изменения гидродинамических характеристик профилей лопастных систем гидравлических машин, крыльев, летательных аппаратов при малых изменениях угла атаки, а также динамические нагрузки на различные конструкции под действием постоянного и резко меняющегося набегающего потока являются следствием нестационарного обтекания и срыва потока.

1 ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Турбулентность является свойством течения, а не физической характеристикой жидкости. Турбулентность, подобно любому другому недетерминированному строго физическому процессу, приходится рассматривать в рамках статистической теории, и плодотворные исследования таких процессов должны содержать как теоретическую, так и экспериментальную части. При экспериментальном исследовании обычно рассматриваются средние во времени значения изучаемых физических величин. С другой стороны, теоретические представления более логично развивать в рамках вероятностных подходов, поскольку при этом устраняются трудности с определением весовых функций в операторах осреднения. Если турбулентные процессы являются эргодическими, то проблема интерпретации экспериментальных данных разрешается, а более глубокий философский вопрос о возможности сопоставления теории и эксперимента в общем случае остается открытым.

Обычно предполагается, что логическую разработку теории можно продолжить и что ответ на вопрос: согласуется ли эта теория с наблюдаемыми явлениями или нет – дадут результаты последующих сравнительных исследований. Однако без ясного понимания физических процессов ни форма необходимых аксиом, ни направление теоретических исследований не являются очевидными. Поскольку же в настоящее время физические процессы турбулентности нельзя считать полностью известными, любое теоретическое исследование этого явления приходится в значительной степени основывать на предположениях.

Действительно, теория турбулентности, используемая на практике для расчетов турбулентных течений у стенок, включает в себя в той или иной форме эмпирические данные.

Другими словами, без общих гипотез, основанных на экспериментальных данных, нельзя провести в терминах теории вероятностей полное логически последовательное теоретическое исследование данного явления. Обнадеживающим фактором является то, что с использованием более сложной экспериментальной техники понимание физической природы турбулентности быстро улучшается.

Общие свойства течений жидкости, имеющие непосредственное отношение к турбулентности, можно продемонстрировать довольно просто.

Пусть вязкая жидкость, физические свойства которой остаются постоянными, движется внутри плоской области D . Если через Ω обозначить завихренность течения, то уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} \equiv \frac{D\Omega}{Dt} = \lambda \nabla^2 \Omega, \quad (1.1)$$

где $\Omega = -\nabla^2 \psi$.

Здесь ψ - функция тока, а λ - величина, обратная числу Рейнольдса, которое выражено через характерные для данной задачи длину и скорость.

Если граничные условия таковы, что набегающее течение является безвихревым и стационарным, то

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (1.2)$$

где $\nabla^2 \psi_0 \equiv 0$ и ψ_0 удовлетворяет граничным условиям вдали от тела, показывает, что

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_1 = -\nabla^2 \psi_1. \quad (1.3)$$

Следовательно, полная завихренность течения определяется функцией ψ_1 .

После этого уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{D_1}{Dt} = \lambda \nabla^2 \Omega_1, \quad (1.4)$$

откуда следует, что любая зависимость от времени и любые изменения завихренности, которые могут возникнуть в течении, непосредственно связаны с вязкими свойствами жидкости; так, при $\lambda = 0$ имеет место

$\frac{D\Omega}{Dt} = 0$, и для выполнения граничных условий в набегающем потоке необходимо, чтобы завихренность равнялась нулю во всем поле течения.

В начальный момент возникновения турбулентности в окрестности твердой поверхности такая зависимость турбулентного движения от вязкости жидкости соответствует действительности. Она также в основном является правильной для заключительной стадии диссипации энергии в мелкомасштабных вихревых образованиях. Однако с помощью вышеупомянутой двумерной модели нельзя объяснить многие фундаментальные свойства турбулентных течений. Невозможность полного описания механизма растяжения вихревых трубок является примером недостатков этой модели. Указанный механизм связан с каскадным процессом дробления вихрей в турбулентных потоках и определяет передачу энергии от основного движения к мелкомасштабным вихревым образованиям, в которых происходит вязкая диссипация. Полная энергия крупномасштабных вихрей в этом процессе остается приблизительно постоянной.

В неоднородной пристеночной турбулентности на внешней границе вязкого подслоя происходят спонтанные разрушения структуры течения. Значительная завихренность, образовавшаяся на стенке, развивается в отчетливо выраженные продольные вихри, которые затем уносятся из пристеночного подслоя и переносят с собой количество движений во внешнюю область. Существование такой структуры течения было установлено визуальными исследованиями, а исследования с помощью термоанемометров помогли лучше понять это явление.

Тейлором было сделано предположение о том, что течение ведет себя так, как если бы оно имело бесконечное число степеней свободы. Эта гипотеза могла бы оказаться полезной для обоснования необходимости статистического описания течений, если бы она, кроме всего прочего, не означала, что возмущения внутри течения носят неупорядоченный характер. Однако сделанные выше замечания показывают, что турбулентное течение (в особенности турбулентность в окрестности стенки) имеет, наоборот, хорошо упорядоченную структуру. Но даже и без учета этого факта течение должно удовлетворять законам сохранения. По-видимому, более плодотворно рассматривать поле турбулентного течения как недетерминированное в том смысле, что полный набор

начальных условий всегда остается неизвестным. Эта задача имеет тот же самый смысл, что и задача статистической механики, хотя с физической точки зрения они сильно различаются.

При условии выполнения сделанных выше предположений уравнения движения записываются в следующем виде:

уравнения количества движения

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right); \quad (1.5)$$

уравнение энергии

$$\Phi + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial e}{\partial x_i}; \quad (1.6)$$

В последнем уравнении e обозначает удельную внутреннюю энергию, а Φ – член, характеризующий диссипацию, который имеет вид

$$\Phi = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.7)$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.8)$$

выражает составляющие тензора напряжений, из которого исключено давление.

Применяя операцию дивергенции к соотношению (1.5), получим уравнение Пуассона для поля давления

$$\bar{\nabla}^2 p = -\rho \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} = -\rho \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (1.9)$$

2 ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Наличие неединственности и неустойчивости решений задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости требует повышения точности и эффективности численных методов расчета гидродинамики в областях произвольной формы.

Особенно важно обеспечить свойство консервативности и монотонности численного метода в произвольной системе координат, чтобы свести к минимуму возмущения, вносимые методом в решение за счет особенности разностной аппроксимации и кривизны сеточных линий. Для этой цели наиболее подходит семейство SIMPLE алгоритмов на основе метода контрольного объема и схемы типа TVD, модифицирование для расчета несжимаемых течений, а также подход [1], основанный на решении уравнений идеальной жидкости.

Для понимания особенностей моделирования турбулентных течений и следов методом гидродинамических особенностей и для правильного анализа получающихся результатов опишем общий алгоритм решения соответствующей задачи. Задачу о течении жидкости следует решать в

полной нестационарной постановке, полагая, что процесс начинается при $\tau = 0$ и $\rho = const$.

На поверхности обтекаемого тела должно выполняться условие о непротекании. Вне тела параметры жидкости должны удовлетворять уравнениям Эйлера и неразрывности.

Заменим поверхность обтекаемого тела, как это принято, дискретными гидродинамическими особенностями и будем решать задачу в нестационарной постановке.

Взяв в качестве основной гидродинамической особенности вихревой отрезок постоянной циркуляции, построим вихревую систему. Положения суммарных вихрей на S , первого свободного вихря и расчетных точек выбираются в соответствии с общими положениями метода. Циркуляции свободных вихрей, кроме первых, вновь образующихся, по времени не меняются.

Если обеспечены замкнутость вихревых систем и выполнение теорем о постоянстве циркуляций во времени, то поле скоростей, вызванное системой, потенциально и будет удовлетворять всем уравнениям гидродинамики. Остается обеспечить выполнение граничных условий на S и условия Чаплыгина – Жуковского о конечности скоростей на выходных кромках.

Скорости от вихревого отрезка зависят от координат начала и конца вихревого отрезка и координат расчетной точки. Как указывалось, тело и след заменяются системой вихревых отрезков. Часть их, расположенных на теле, моделирует суммарные вихри (свободные и присоединенные). Положение этих вихрей и первых свободных фиксированы, а циркуляции Γ_i^* по времени меняются. Общее число вихрей на теле (вместе с m первыми свободными) обозначим N_* . Число свободных вихрей, движущихся вместе с потоком на каждом дискретном расчетном шаге по времени τ , будет

$$N_\sigma = m(s - 1).$$

Важное значение имеет расчет вихревой структуры турбулентного следа (определение положения свободных вихрей, моделирующих ее границы). Пусть i – номер свободного вихря, движение которого изучается. Изменение координат его начала и конца во времени описывается следующими уравнениями:

$$\bar{W} \cdot \bar{n} = \bar{W}^* \cdot \bar{n}, \quad (2.1)$$

где

$$\bar{W} = \bar{i}W_x + \bar{j}W_y + \bar{k}W_z;$$

$$\bar{W}^* = V_\infty + \omega \bar{r}$$

$$\bar{n} = \bar{i} \cos nx + \bar{j} \cos ny + \bar{k} \cos nz,$$

здесь W -возмущенная скорость, W^* - невозмущенная скорость, \bar{n} - единичная нормаль к поверхности тела, \bar{r} - радиус-вектор точки, в которой выполняется условие непротекания.

$$dx_1^i = wx_1^i d\tau; \quad dy_1^i = wy_1^i d\tau; \quad dz_1^i = wz_1^i d\tau;$$

$$dx_2^i = wx_2^i d\tau; \quad dy_2^i = wy_2^i d\tau; \quad dz_2^i = wz_2^i d\tau. \quad (2.2)$$

Расчет обтекания тела содержит два основных взаимосвязанных этапа решения систем уравнений о непротекании тела для неизвестных циркуляций Γ_i^* и выстраивание вихревых структур с помощью соотношений (2.2). Строго говоря, то и другое должно осуществляться совместно, однако обычно это делается последовательно с задержкой всякий раз на один временной шаг. При известных положениях свободных вихрей находятся коэффициенты уравнений о непротекании поверхности тела, а затем Γ_j^* . После этого по формулам определяются все скорости и из (2.2), обычно методом Эйлера, находятся новые положения свободных вихрей. Заметим, что свободные вихри на каждом временном шаге располагаются на выходной кромке.

В рассмотренной выше схеме турбулентное движение моделируется с помощью свободных вихрей. По мере развития течения их число возрастает и может достигать многих тысяч. При этом на каждом расчетном шаге в поток сходит n свободных вихрей, так что в расчетный момент τ в уравнениях $i = 1, 2, 3, \dots, nr$. Одно это говорит о тех больших возможностях, которыми обладает модель для описания турбулентных характеристик потока и следа.

Полный математический анализ системы (2.2) весьма сложен, тем более, что она, строго говоря, решается совместно с (2.1). Однако логический анализ целого ряда численных экспериментов позволяет понять многие качественные особенности получающихся решений. Укажем некоторые из них. Прежде всего отметим, что модель явления обладает определенными эвристическими свойствами типа “искусственного” интеллекта”. Механизм явления, заложенный в схеме, постановке задачи и алгоритме решения, начинает жить и проявляться сам, уже без участия исследователя. Так, на концах тонких вихревых поверхностей индуктивные скорости обращаются в бесконечность. Дискретная модель не допускает этого: поверхности сворачиваются в спирали, образуя боковые и носовые жгуты, начальный вихрь Прандтля и т.д.

Автоматически в процессе установления выявляется предельная структура следа “в большом”. Она может быть одного из трех типов: стационарной, периодически меняющейся во времени или обладающей нерегулярной временной зависимостью. Примером стационарных структур могут служить боковые жгуты на крыльях при безотрывном обтекании. Периодические вихревые структуры типа дорожек Кармана наблюдаются при поперечном обтекании пластины и кругового цилиндра. Сложные так называемые когерентные структуры образуются при истечении струи в затопленное пространство.

Еще одно проявление эвристических возможностей рассматриваемого подхода связано с выделением устойчивых вихревых структур. Как известно, никаким периодическим построением точечных дискретных вихрей нельзя обеспечить устойчивость вихревой дорожки Кармана. Однако модель нашла выход в рамках своих возможностей: в процессе численного формирования вихревого следа образовались сгустки конечных размеров, обладающие устойчивостью. Кроме того, выявлен второй устойчивый режим обтекания пластины – с симметричным вихревым следом, что является также иллюстрацией неединственности решения поставленных задач.

Следует различать два вида информации, получаемой при решении уравнений (2.2) совместно с (2.1): построение вихревых макроструктур течения и изучение пульсаций скоростей. Последние всегда зависят от времени и носят хаотический, неупорядоченный характер. Возникает вопрос, имеющий принципиальное значение: можно ли на основе

указанных выше схем явления и алгоритмов моделировать случайные процессы и получать стохастические характеристики турбулентности?

Пусть на фоне сформировавшейся вихревой структуры изучаются пульсации скоростей, для чего при достаточно больших τ решаются уравнения (2.2) (о движении вихрей). Если течение “в большом” периодическое с периодом T , то рассмотрим сходственные моменты времени (τ_0 и $\delta_0 + m\delta_T$, m – целое число). Как при стационарном течении, так и при меняющемся во времени периодически уравнения (2.2) будут решаться каждый раз при различных начальных условиях (за счет того, что при различных τ_0 в потоке находится разное число свободных вихрей). А это приведет к различным мгновенным значениям скорости.

Цель данных рассуждений заключается в том, чтобы выявить возможный источник возникновения случайного процесса. Что касается полного ответа на поставленный вопрос, то он должен в первую очередь решаться путем совместных численно-физических исследований. В конечном счете только аккуратно поставленные физические эксперименты могут подтвердить или отвергнуть схему явления.

В условиях значительного сокращения финансирования научных исследований и фондов развития производства, экспериментальные работы по созданию новых технологий практически неосуществимы. В связи с этим задача развития и совершенствования численных методов исследования течений вязкой несжимаемой жидкости становится особенно актуальной.

Широкий класс течений вязкой жидкости представляют собой нестационарные и периодические течения, в которых малые возмущения могут привести к конечным изменениям структуры течения. К нестационарным течениям с неустойчивостью можно отнести турбулентные течения, нестационарный срыв потока, слои смещения и многие другие.

Описание механизма нестационарного срыва потока и зарождения турбулентного пограничного слоя является актуальной задачей для многих практически важных приложений. В частности, резкие изменения гидродинамических характеристик профилей лопастных систем гидравлических машин, крыльев, летательных аппаратов при малых изменениях угла атаки, а также динамические нагрузки на различные конструкции под действием постоянного и резко меняющегося набегающего потока являются следствием нестационарного обтекания и срыва потока.

В качестве модельной задачи для данного класса течений часто используется развитие нестационарного пограничного слоя на поверхности цилиндра, а также периодические течения в следе за цилиндром [2-4].

Для решения задачи о нестационарном обтекании цилиндра, мгновенно приведенного в движение из состояния покоя, при больших числах Рейнольдса часто используется приближение пограничного слоя. В связи с этим представляет интерес задача определения пределов применимости уравнений пограничного слоя, обусловленных развитием вихревой структуры за точкой отрыва. В настоящей работе основное внимание отводится исследованию причин и характера развития неустойчивости начальной стадии формирования структуры отрывного течения за цилиндром, приведенным в движение из состояния покоя.

Численный метод решения основан на использовании метода контрольного объема, записанного в криволинейной системе координат процедуры SIMPLER, и схемы TVD третьего порядка ISNAS [5,6].

В настоящей работе рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости. В качестве исходных уравнений выбраны уравнения Навье-Стокса, записанные в виде законов сохранения в интегральной векторной форме

$$\oint\oint (\vec{V}\bar{n}\rho) dS = 0, \quad (2.3)$$

$$\oint\oint_W \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} dW + \oint\oint_S \left[\vec{V}\bar{n}(\rho \vec{V}) - \mu \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial \bar{n}} \right) \right] dS = - \oint\oint_W \nabla p dW + \oint\oint_W G dW, \quad (2.4)$$

где W -контрольный объем, S – поверхность W , n - внешняя нормаль к S , V -вектор скорости, ρ - плотность (считается постоянной в рамках модели несжимаемой жидкости), p -давление, μ - коэффициент вязкости, G -вектор массовых сил.

Для реализации универсального численного метода уравнения (2.3)-(2.4) записываются в виде обобщенного закона сохранения физической величины Φ в контрольном объеме [4]

$$\oint\oint_W \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} dW + \oint\oint_S \left[\vec{V}\bar{n}(\rho \Phi) - \Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] dS = \oint\oint_W S_\Phi dW, \quad (2.5)$$

где Γ -коэффициент диффузии, S_Φ - мощность источников.

Дискретный аналог уравнения (2.5) имеет вид [4,5]

$$A_0 \Phi_0 = - \sum_k A_k \Phi_k + S_\Phi \Delta W + S'_\Phi + \frac{\rho \Delta W}{\Delta t} \Phi^{n-1}_0, \quad (2.6)$$

$$A_0 = - \sum_k A_k + \frac{\rho \Delta W}{\Delta t}, \quad (2.7)$$

$$S'_\Phi = -\Phi_0 \sum_k \left[(-1)^k V^i \rho \right] \frac{\Delta S_k}{|e^i|} + \sum_k d_k \Gamma \left((-1)^k g^{ij} \Delta_j \Phi \right)_k \frac{\Delta S_k}{|e^i|}, \quad (2.8)$$

где Φ^{n-1}_0 - значение переменной на предыдущем временном слое;

V^i - контрвариантные компоненты вектора скорости,

$k=2i-1, 2i; i=1,2,3;$

e^i, e^j - i -й ковариантный и j -й контрвариантный векторы локального базиса;

$g^{ij} = e^i e^j$ - компоненты метрического тензора;

$(\Delta_j \Phi)_k$ - конечно-разностная аппроксимация производных вдоль k -й грани контрольного объема.

$$A_k = \sum \left[(-1)^k V^i \rho C_k - d_k \Gamma \left(g^{ij} \frac{1}{\Delta x_k} \right)_k \right] \frac{\Delta S}{|e^i|}. \quad (2.9)$$

Дискретный аналог (2.4-2.9) обладает свойством консервативности, решение $\Phi=V=\text{const}$ тождественно удовлетворяет (2.4-2.9) на произвольной криволинейной неортогональной сетке. Кроме того, благодаря поправке, предложенной в [4], линейное сдвиговое поле скорости также тождественно удовлетворяет уравнениям (2.4-2.9).

Уравнения (2.4-2.9) имеют первый порядок аппроксимации по времени. Поскольку эта система уравнений нелинейная (коэффициенты A_k зависят от Φ), то для повышения точности, а также для того, чтобы решение на каждом временном шаге удовлетворяло уравнению сохранения массы, переход с одного шага по времени на другой осуществляется после нескольких итераций по неявной схеме

$$\Phi_0'' A_0(\Phi') = -\sum_k \Phi_k'' A_k(\Phi') + S_\Phi(\Phi') \Delta W + S'_\Phi(\Phi') + \frac{\rho \Delta W}{\Delta t} \Phi^{m-1}, \quad (2.10)$$

где Φ', Φ'' - решение, полученное на предыдущей и текущей итерациях.

Для расчета нестационарного обтекания цилиндра, без вращения, внезапно приведенного в движение при больших числах Рейнольдса используются приближение пограничного слоя и следующая постановка задачи. Задано потенциальное внешнее обтекание цилиндра, а в начальный момент времени ставятся условия прилипания на поверхности цилиндра. Более близка к реальности физическая постановка задачи, когда цилиндр разгоняется из состояния покоя с конечным ускорением. Для оценки влияния постановки задачи на дальнейшее развитие течения была проведена серия расчетов. Сравнение результатов, полученных в рамках двух постановок, показало – при использовании в качестве начальных условий потенциального течения максимальное значение коэффициента трения на начальном этапе получается на 3-8 % больше, чем при ускорении из состояния покоя. Поля давления в обоих случаях практически не отличаются. При дальнейшем развитии течения слабо зависит от начального приближения. В начальный момент времени на поверхности цилиндра ставится условие прилипания, что становится причиной формирования пограничного слоя, а затем и отрыва потока. На бесконечности при $0 < \theta < \pi/2$ (где θ отсчитывается от лобовой точки) задается потенциальное течение. На остальной части внешней границы задаются мягкие условия для скорости. Введя безразмерные переменные, уравнения нестационарного пограничного слоя в общепринятых обозначениях можно записать следующим образом [7]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{y} = 0, \\ \bar{u} \rightarrow W_e \quad \text{при} \quad \bar{y} \rightarrow \delta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (2.11) осуществляется по двухслойной некой двенадцатиточечной схеме [7]. Для определения поперечной скорости v в пограничном слое уравнение неразрывности (второе уравнение системы (2.11)) аппроксимируется по четырехточечной схеме. Коэффициенты конечно-разностного уравнения вычисляются методом итерации на соответствующем временном слое, которые определяются на временных слоях $(k-1)$ и (k) , используя линейную интерполяцию параметров, от которых они зависят, между сечениями $(n-1)$ и n . Система алгебраических уравнений решается методом прогонки.

Расчет вязкого течения в пограничном слое начинается от передней критической точки K (рис.1) Для интегрирования системы дифференциальных уравнений пограничного слоя профили продольной и поперечной скоростей в нем и его толщина на первом шаге от точки K задаются в соответствии с точным решением для плоского течения в окрестности критической точки. В дальнейшем вдоль криволинейной координаты X рассматривается развитие этих профилей скорости под действием граничных условий на внешней и внутренней границах пограничного слоя при ламинарном режиме течения в нем.

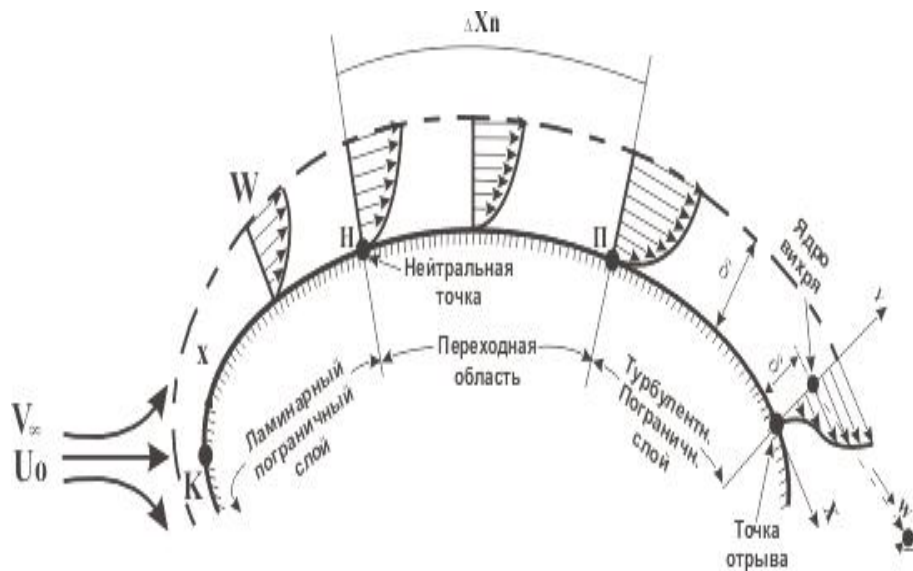


Рисунок 1 – Схема для расчета пограничного слоя

В точке H начинается переход ламинарного режима течения в пограничном слое в турбулентный. Он заканчивается в точке Π . Таким образом, пограничный слой на участке $H-\Pi$ рассчитывается как переходной. После точки Π вплоть до точки отрыва R течение в пограничном слое является полностью турбулентным и рассчитывается с использованием одной из моделей турбулентности. В данной работе использовалась двухслойная по толщине пограничного слоя модель турбулентной вязкости П.С.Клебанова и Е.Р.Ван-Дриста. В расчетах, представленных в работе, отрыв потока от обтекаемого тела определялся следующим образом. На каждом участке существования пограничного слоя он рассчитывался от критической точки до точки, в которой либо становилось предельно малым поверхностное трение, либо становился расходящимся итерационный процесс при интегрировании системы дифференциальных уравнений нестационарного пограничного слоя. Точка, в которой выполнялись одно из этих условий, а также при приближении к которой наблюдались резкое увеличение производных от толщины вытеснения и толщины потери импульса по криволинейной координате вдоль обтекаемой поверхности и интенсивный рост поперечной скорости в пограничном слое, идентифицировалась как точка отрыва пограничного слоя. На рис.2 показан фрагмент поля вектора скорости для момента времени $t=1,5$.

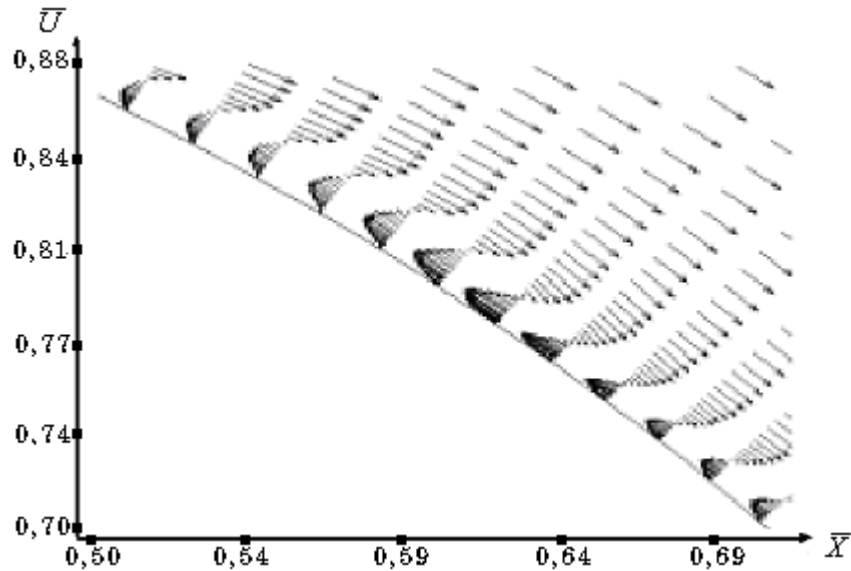


Рисунок 2 – Поле вектора скорости в момент времени $t=3$

3 АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Поскольку целью настоящей работы является определение пределов применимости приближения пограничного слоя, сделаем сравнение результатов расчета параметров вязкой жидкости по двум схемам: решением уравнений Навье - Стокса и пограничного слоя.

При числе $Re=10^5$ развитое течение вокруг цилиндра носит турбулентный характер. Это значит, что со временем изначально ламинарное течение должно постепенно потерять устойчивость. При этом течение проходит несколько стадий. Сначала начинают образовываться достаточно крупные вихри, которые впоследствии дробятся и сливаются, образуя весь спектр турбулентных вихрей от энергонесущих, крупномасштабных, квазиупорядоченных структур типа дорожки Кармана, вплоть до вихрей колмогоровского масштаба, диссипирующих кинетическую энергию в тепловую. Если рассматривать течение как нестационарное, то оценить величину промежутка времени, в течение которого расчеты в рамках описанного подхода будут справедливы, можно на основе сравнения решений, полученных на разностных сетках с различным количеством узлов. Если до определенного момента времени решения, полученные на разных сетках, совпадают, следовательно мелкомасштабные вихри еще не оказывают заметного влияния на решение. На рис.3 приведено сравнение распределений коэффициента трения C_f , полученных на сетках 80×120 и 120×200 . На графиках видно, что до момента времени $t=3$ положение и величина крупномасштабных максимумов и минимумов с удовлетворительной точностью совпадают. Мелкомасштабные пульсации C_f , которые соответствуют движению мелких вихрей, начинают заметно отличаться при $C_f > 3$. При $t > 4$ влияние мелкомасштабных вихрей становится существенным.

Основные этапы развития нестационарного отрыва и зарождения крупномасштабных вихревых структур видны после возникновения в начальный момент времени пограничного слоя. Его толщина постепенно растет, особенно быстро в кормовой части цилиндра. Противодавление в области кормой точки приводит к быстрому снижению касательной скорости в пограничном слое. При $t=0,5$ в кормовой точке возникает

отрыв потока и точка отрыва начинает двигаться вверх по поверхности цилиндра против направления движения основного потока.

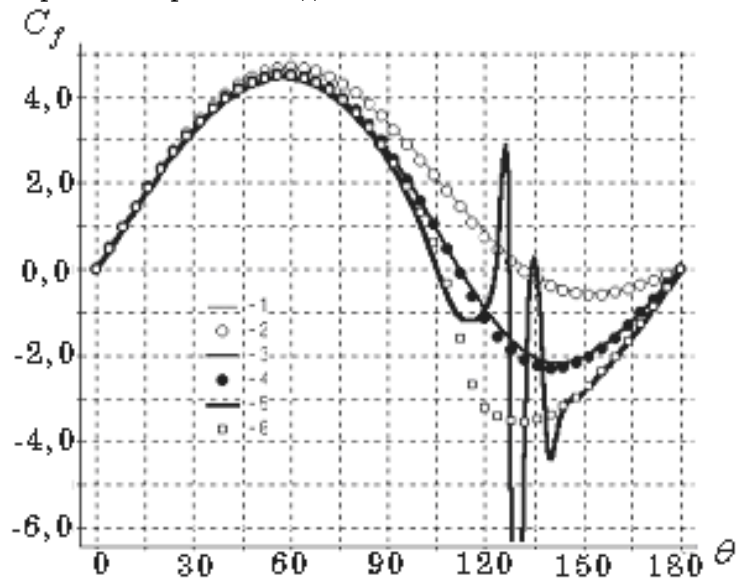


Рисунок 3 – Распределение коэффициента трения на поверхности цилиндра в моменты времени $Re=10^5$:
 2,4,6 – пограничный слой
 1,3,5 – уравнения Навье-Стокса
 o – $t=0.5$ ● – $t=1$ □ – $t=3$

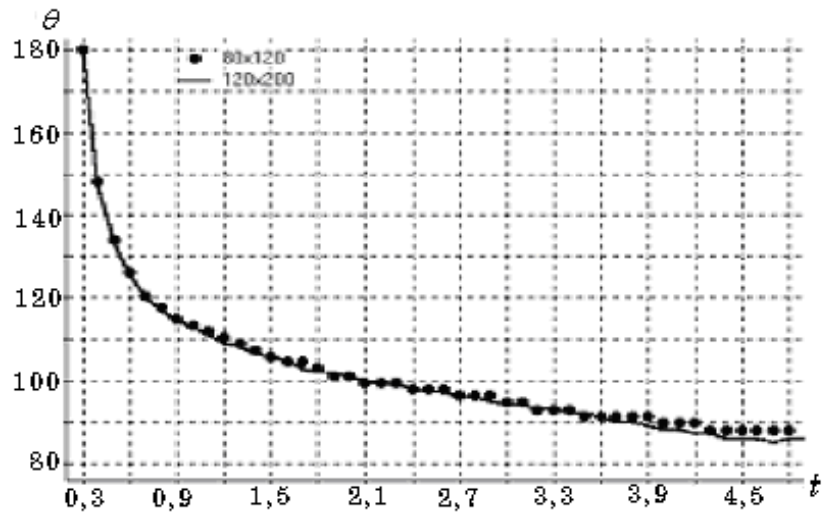


Рисунок 4 – Зависимость от времени положения точки отрыва

На рис.4 приведены графики зависимости положения точки отрыва от безразмерного времени t для сеток 80×120 и 120×200 . Заметные отличия в расчетах положения точки отрыва потока проявляются при $t > 3,5$. На рис.4 видно, что в начальный промежуток времени $0,3 < t < 1,0$ отрывная зона растет очень быстро. В дальнейшем положение точки отрыва медленно стремится к своему асимптотическому значению ~ 80 градусов. За точкой отрыва развивается и увеличивается по толщине

течение в обратном токе. Обратное течение и внешний поток образуют скоростной слой смешения, который является неустойчивым к малым возмущениям. По рисунку (2) можно проследить зарождение волнообразной неустойчивости Гельмгольца на границе внешнего течения и обратного тока. Образующиеся в результате развития неустойчивости вихри захватывают все большее пространство пограничного слоя и достигают стенки, вызывая образование вторичных вихрей, отрыва потока и осцилляции коэффициента трения C_f . Таким образом, индикатором развития вихревой неустойчивости и, как следствие, вторичного отрыва, может служить распределение C_f . На рис.3 видно, что при $t=1,5$ граница неустойчивости уже достигла поверхности цилиндра. В дальнейшем неустойчивость быстро развивается, а коэффициент трения совершает нарастающие по амплитуде периодические колебания. Со временем количество максимумов и минимумов растет, на крупномасштабные колебания накладываются высокочастотные осцилляции, при этом модули максимального и минимального значения C_f примерно равны между собой.

На рис. 3 приведено сравнение результатов расчета коэффициента трения на основе решения уравнений Навье-Стокса и в рамках приближения пограничного слоя. Видно, что результаты практически совпадают, вплоть до момента возникновения неустойчивости течения, при $t < 2$. Причину рассогласования в определении коэффициента трения следует искать в нарушении постулатов приближения пограничного слоя. На рис.5-7 показаны картины линий тока в различные моменты времени.

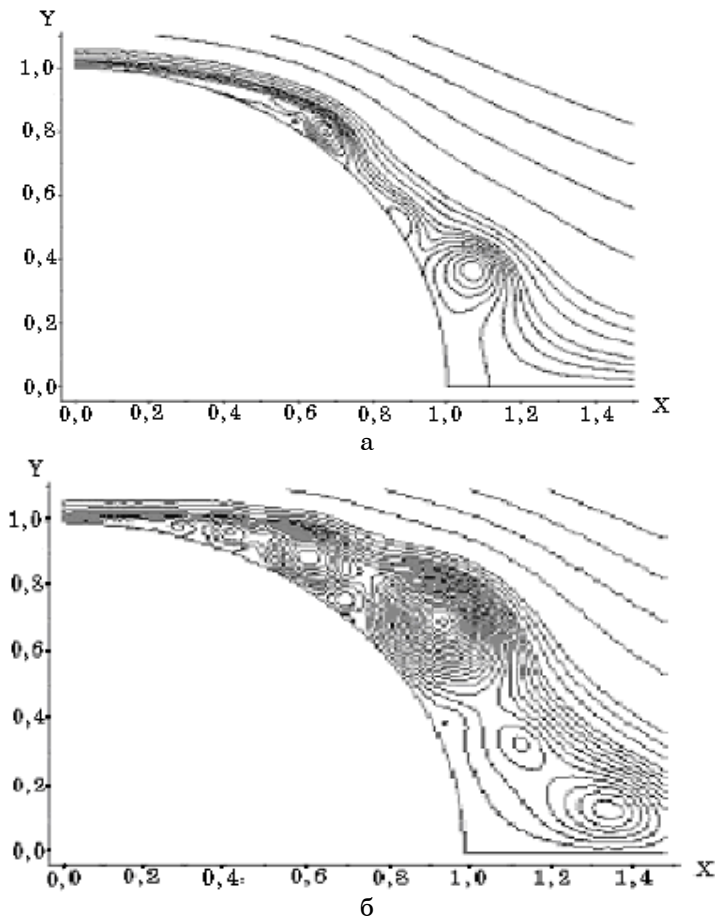


Рисунок 5- Линии тока в моменты времени а - $t=2$, б - $t=4$

Рисунок 6 – Линии тока в момент времени $t=1$
 а – эксперимент, б – расчет

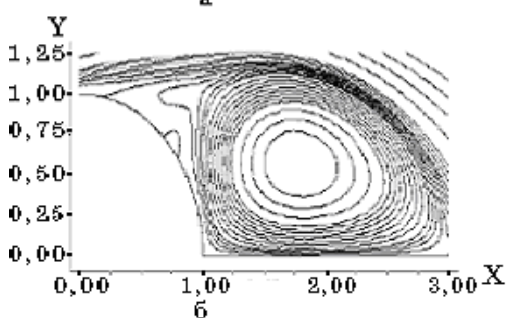
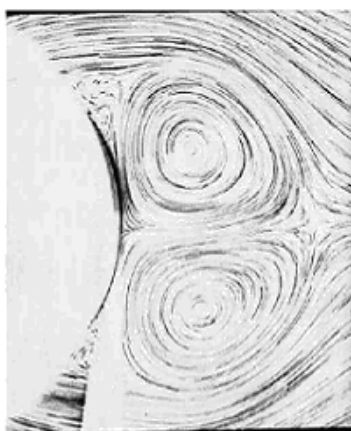
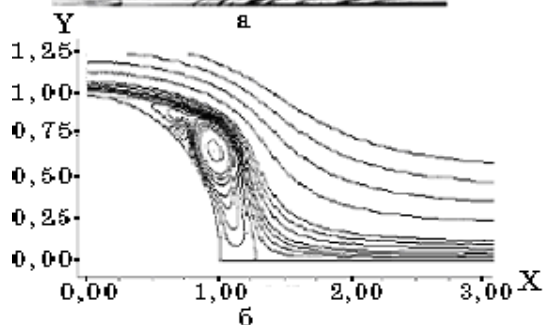
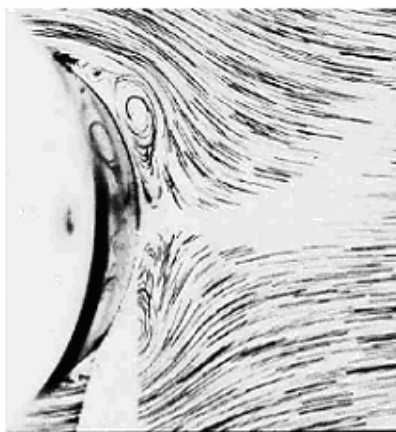


Рисунок 7- Линии тока в момент времени $t=3$: а - эксперимент, б – расчет

На рисунках можно проследить основные этапы развития вихревой неустойчивости. Первое заметное возмущение в виде небольшого вихря возникает в области примерно 130 градусов от носовой точки. Распространение возмущения вниз по потоку приводит к возникновению второго вихря, который увеличивается в размерах быстрее, чем первый, и спускается по направлению к кормовой точке цилиндра. Вихревая неустойчивость распространяется также и вверх по потоку, но значительно медленнее, чем вниз. Продвижение границы неустойчивости к точке отрыва сопровождается образованием цепочки вихрей, которые впоследствии попарно объединяются и сливаются в один большой вихрь в кормовой зоне.

На основании приведенных результатов расчета параметров потока при обтекании цилиндра в турбулентном режиме с числом $Re=10^5$ можно сделать следующие выводы.

ВЫВОДЫ

Расчеты показали, что до момента возникновения неустойчивости, давление практически совпадает с давлением при потенциальном обтекании цилиндра. При этом рассчитанные распределения коэффициента трения в рамках теории пограничного слоя и по уравнениям Навье - Стокса практически не отличаются. Возникновение вихревой неустойчивости приводит к существенному изменению распределения давления в пограничном слое по сравнению с потенциальным течением. Пренебрежение взаимным влиянием полей скорости и давления в рамках теории пограничного слоя приводит к расхождению результатов по сравнению с результатами по уравнениям Навье – Стокса.

SUMMARY

RESEARCHING THE AREA OF APPLICATION OF THE INTERFACE'S MODEL IN SUMS CONCERNING WITH STREAMLINING A BODY BY REALISTIC LIQUID 2 CALCULATION OF THE STREAMLINE A BODY BY TURBULENT FLOW

*S. D. Kostornoy, doctor of technical science, professor SNAU
A. S. Martinov, student, SumDU*

The article is devoted to results of the numerical decision of the problem about development of the unstable take-off of the flow under streamlined cylinder from condition rest basing on the Navie-Stoks model and border layer. The calculations have shown that before moment of the origin to vaguely the distribution friction coefficient, within the framework of theory border layer and using Navie-Stoks equation, practically does not differ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкостей // Пер. с англ.-М.:Энергоатомиздат, 1984.-152 с.
2. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.М., Гуцин В.А. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром //Ж. вычисл. и матем. физ.-1984.-Т.24. – С.1207-1216.
3. Деннис С., Станифорд А. Численный метод для расчета начальной стадии течения вязкой жидкости около цилиндра // Численные методы в механике жидкостей / Под ред.О.М. Белоцерковского. М.:Мир, 1973.- 304с.
4. Косторной С.Д. Исследование нестационарных характеристик потока в проточной части центробежного насоса // Насосы и оборудование.-2005. -№ 1(30). –С. 18-19
5. Кудинов П.И. К вопросу о точности расчета конвективного потока в криволинейных системах координат // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць. – Д.: Навчальна книга,1998.- Т.3- С.82-85.
6. Кудинов П.И.Метод расчета процессов гидродинамики и теплообмена в неортогональных криволинейных координатах // Вісник Дніпропетр ун-ту. Механіка.-1998.-Вип.1.-Т.1. - С.117-125.
7. Пасконов В.М.,Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.М.: Наука, 1984. – 286 с.
8. Косторной С. Д. Создание замкнутых математических моделей расчёта потерь механической энергии в проточной части гидравлических машин // Вісник Сумського державного університету.- 2004. – №2 (61). – С.5-13.
9. Давиденко А.К., Косторной А.С., Волик А.А. Численное моделирование течения жидкости в проточной части центробежного насоса с целью получения требуемой формы рабочей характеристики // Совершенствование турбоустановок методами математического моделирования. - Харьков: ПМАШ НАНУ.-2003.-Т2.-С. 577-581.
10. Давиденко А.К., Косторной А.С. Численное решение прямой задачи течения жидкости в проточной части центробежного насоса//Насосы и оборудование.-2004.-№2(25).-С.32-55.

Косторной С.Д., доктор техн. наук,
профессор, СНАУ, г. Сумы;
Мартынов А.С., студент, СумГУ, г. Сумы

Поступила в редакцию 29 апреля 2007 г.