МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА СТЕПАНА ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.Літнарович

Основи математики

Дослідження результатів психолого – педагогічного експерименту експоненціальною функцією

Навчальний посібник
для студентів педагогічного
факультету

Частина 4

Рівне 2006

Літнарович Р.М. Основи математики.
Дослідження результатів психолого – педагогічного експерименту експоненціальною функцією. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 4. МЕГУ, Рівного, 2006, -17 ст.

Рецензенти:

В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
Е.С.Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск:
Й.В.Джунь, доктор фізико – математичних наук, професор

Розроблена методика обробки матеріалів за результатами психологічного і педагогічного експериментів. Обробка матеріалів проводиться за способом найменших квадратів. Встановлюється тіснота зв’язку між факторними і результативними ознаками, будується точкова діаграма, підбирається апроксимуюча функція, проводиться контроль і оцінка точності .Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

ЗМІСТ

„Сперва собирать факты и только
после этого связывать их мыслью”
Аристотель

ПЕРЕДМОВА

Для обробки матеріалів психологічного і педагогічного експериментів необхідно використати математичний апарат, який дав би можливість визначити зв'язок між факторними і результативними ознаками і вивести формулу такого зв'язку.

Прицьому доцільно використати спосіб найменших квадратів, як добре розроблений інструментарій оптимізації розрахунків експериментальних даних з оцінкою точності результатів.

Фундаментом математичної обробки результатів експерименту служить в основному математика, теорія ймовірностей і математична статистика.

В навчальні плани ВУЗів необхідно ввести таку дисципліну як Математична обробка педагогічного і психологічного експерименту. Основні задачі дисципліни можна формувати слідуючим чином:

1- вивчення законів виникнення і розподілу похибок вимірів і обчислень експериментальних даних;

2- встановлення критеріїв для виявлення в результатах вимірів систематичних похибок і промахів;
3- знаходження ймовірніших значень виміряємих величин із результатів їх багатократних вимірів;
4- попередній розрахунок сподіваної точності і оцінка точності отриманих результатів вимірів;
5- характеристики точності кінцевих значень результуючих ознак за результатами математичної обробки вимірів;
6- встановлення сили і форми зв'язку між факторними і результативними ознаками.

Матеріал підготовлений за курсом лекцій, прочитаних автором студентам педагогічного факультету Міжнародного Економіко – Гуманітарного Університету ім. Академіка Степана Дем'янчука у 2005 році.

Автор виражає щиру вдячність доктору фізико – математичних наук, профессору Йосипу Володимировичу Джуню, який позитивно оцінює науковий напрямок і дав можливість прочитати курс лекцій і підготовити матеріал до видання.

Дослідження результатів психологічного експерименту за допомогою експоненціальної функції $y = a \cdot e^{bx}$

1.Представлення операційних змінних результатів експерименту

В експериментальній психології існує поняття пілотного дослідження (тобто першого дослідження, під час якого перевіряється основна гіпотеза). Гіпотеза- це наукове припущення, яке базується на теорії або емпіричних даних і ще не має підтвердження або спростування. Розрізняють наукові і статистичні гіпотези.

Наукова гіпотеза формулюється як рішення проблеми, що припускається.

Статистична гіпотеза є твердженням щодо невідомого параметра, яке формулюється в термінах математичної статистики.

Після перевірки основної гіпотези здійснюють ”великий” експеримент (з більшою кількістю досліджуваних і суворим контролем зовнішніх змінних).

Існує також поняття польового (природного) експерименту, який здійснюють для вивчення зв’язку між реальними змінними у повсякденному житті. Прихильники польових експериментів вважають їх більш інформативними за лабораторні.

Таблиця 4.1. Операційні дані психологічного експерименту.

X	0.1	1.0	1.5	2.75	3.3	4.0	5.0	5.6	7.0	9.0
y	0.821	1.46	2.01	4.48	6.36	9.96	18.9	27.7	67.9	244

2. Побудова точкової діаграми

За даними експериментальних досліджень,приведених у таблиці 4.1 будуємо графік з метою виявлення закону для підбору апроксимуючої функції.

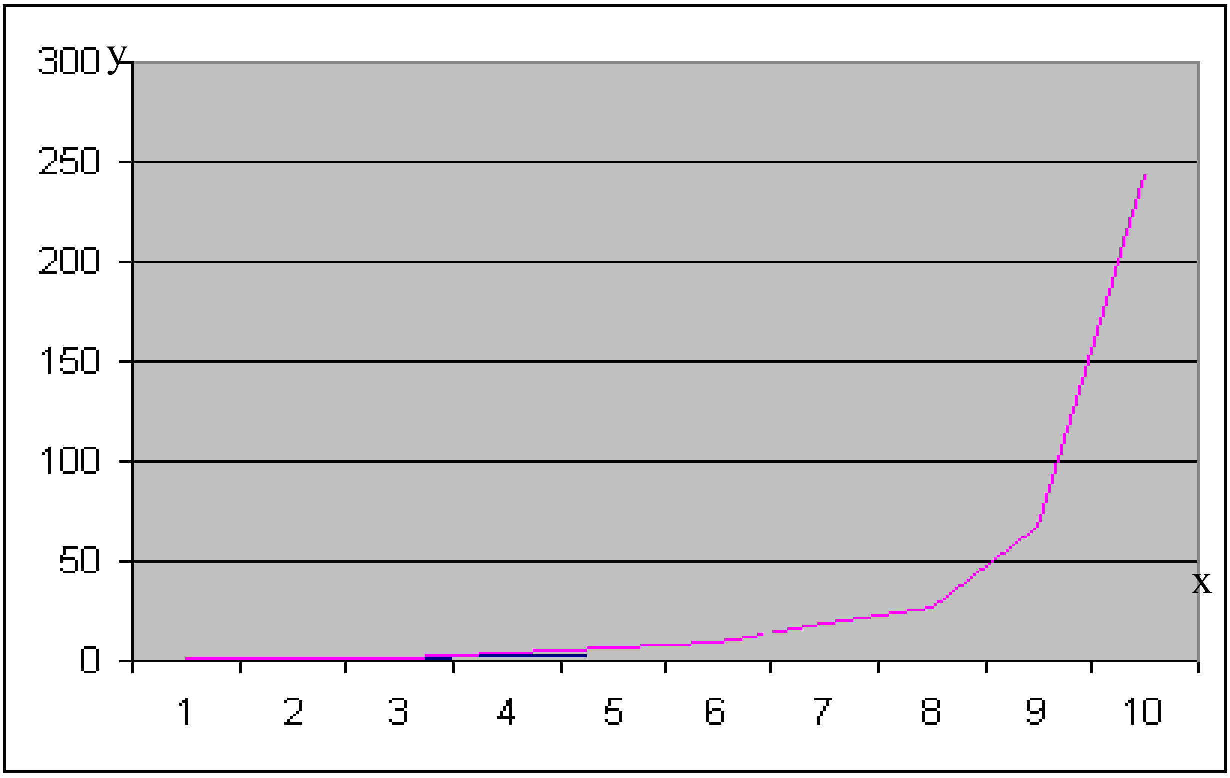

Рис.4.1. Точкова діаграма і апроксимуюча крива

3. Короткі відомості про логарифмічні рівняння

1. Логарифмічним є рівняння з невідомим під знаком логарифма.

Розв'язування найпростішого логарифмічного рівняння $\log_a x = b$ (a>0,a$\neq$1)

грунтується на властивості логарифмів: логарифми двох додатніх чисел за однією додатньою і відмінною від одиниці основою рівні тоді і тільки тоді, коли рівні ці числа. Тому

Log X=B<=> Log_a X= Log_a X= $Log_a a^b$ <=>X=a^b - (4.1)

-єдиний корінь. Це ж отримуємо і за означенням логарифма.

<u>**Примітка.**</u> Символом <=> позначається еквівалентність(тотожність).
Приклад вживання: A<=>B.
Читається: A еквівалентне B; (тоді і тільки тоді).
Символом => позначається імплікація.
Приклад вживання : A=>B
Читається: Якщо A, то B.

2. Логарифмічне рівнняння $log_a f(x)= log_a g(x)$

$(a>0,\ a\neq 1)$ рівносильне кожній(вибираємо простішу!) із систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \qquad (4,2)$$

Можна також розв'язати рівняння $f(x)= g(x)$, яке може мати корені, сторонні для заданого рівняння, і перевірити кожний із коренів підстановкою у задане рівняння.

3. При розв'язуванні рівнянь вигляд у

$$log_a f(x)+log_a g(x)= log_a h(x), \qquad (4,3)$$

$$log_a f(x)-log_a g(x)= log_a h(x), \qquad (4,4)$$

використання відповідних властивостей логарифмів призводить відповідно до рівнянь наслідків:

$$log_a(f(x)*g(x))= log_a h(x), \qquad (4,5)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a h(x), \qquad (4,6)$$

$$log_a((x))^p=log_a g(x), \qquad (4,7)$$

Їх далі розв'язують на основі розглянутої вище вказівки.

Приклад1. Розв'язати рівняння

$$lg(x^2+17x+6)-lg(2x+1)=1.$$

Нехай, допустимо, що рівняння має рішення, тоді

$$\lg \frac{x^2+17x+6}{2x+1} = \lg 10;$$

$$\frac{x^2+17x+6}{2x+1} = 10;$$

$$x^2-3x-4=0;$$

$$x_1=4;$$

$$x_2=-1.$$

Друге значення не є коренем, тому що 2x+1 при x = -1менше нуля, а логарифм від'ємного числа не існує.

X= 4 – корінь вихідного рівня, в чому можна переконатися перевіркою.

В данному випадку ми використали спосіб потенціювання.

Приклад 2. Розв'язування способом введення допоміжного невідомого.

$$\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1;$$ Позначимо $lgx=y$

Тоді

$$\frac{1}{5-y}+\frac{2}{1+y}=1,$$ звідки $y_1=3,\ y_2=2,$

тобто $x_1=10^3;\ x_2=10^2$

Перевірка показує, що ці числа задовольняють рівняння.

Приклад 3. Третій спосіб – логарифмування.

Для того, щоб не загубити корені, будемо виконувати лоогарифмування за формулою

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \qquad (4,8)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \qquad (4,9)$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|. \qquad (4,10)$$

$$\lg\left|(x+9)^2 X^4\right| = \lg X^2 + 2.$$

Прологарифмуємо

$$2\lg|x+9| + 4\lg|x| = 2\lg|x| + 2.$$

Проводячи подібні члени і потенціюючи, отримаємо

$$\lg|x(x+9)| = 1,$$

Звідки

$$|x(x+9)| = 10 .$$

Останнє рівняння рівносильно сукупності двох квадратних рівнянь:

$$x^2+9x-10=0, \; x^2+9x+10=0,$$

Рішаючи квадратні рівняння, отримаємо:

$$x_1=10; \quad x_2=1; \quad x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{2}$$

Перевірка показує, що всі найдені значення X задовільняють рівняння .

Освіживши в пам'яті операції з логарифмами, приведемо теоретичні положення обробки матеріалів психологічного експерименту за способом найменших квадратів.

4. Обчислення коефіцієнта кореляції r і коефіцієнтів a і b
Теоретичні положення

Коефіцієнт кореляції r розраховується за формулою

$$r^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} Xi \ln Yi - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} \ln Yi\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} Xi)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} (\ln Yi)^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \ln Yi)^2\right]}$$

Yi>0. *(4.11)*

Позначимо

$$\left[\sum_{i=1}^{n} Xi \ln Yi - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} \ln Yi\right] = A; \quad (4.12)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} Xi)^2\right] = B \quad (4.13)$$

формула (4.11) прийме вигляд

$$r^2 = \frac{A^2}{B\left[\sum_{i=1}^{n} (\ln Yi)^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \ln Yi)^2\right]} \quad (4.14)$$

5. Встановлення коефіцієнтів і виду формули

Коефіцієнт b розраховують за формулою

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi \ln Yi - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} \ln Yi}{\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} Xi)^2} \qquad (4.15)$$

або, прийнявши до уваги (4.12),(4.13), отримаємо

$$b = \frac{A}{B} . \qquad (4.16)$$

Коефіцієнт а розраховують за формулою

$$a = \exp\left[\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \ln Yi - b\sum_{i=1}^{n} Xi)\right] . \qquad (4.17)$$

Підставивши вирахуваний коефіцієнт в за формулою (4.16) у формулу (4.17), отримують коефіцієнт а.

Отримавши із результатів обчислень коефіцієнти a і b, записують апроксимуючу функцію у вигляді

$$y' = ae^{bx} . \qquad (4.18)$$

6. Практична реалізація

Підготовка даних ведеться в спеціальній обчислювальній таблиці

Таблиця 4.2. Обчислювальна таблиця

i	Xi	Yi	lnYi	XilnYi	Xi^2	(lnYi)2	$y=0,77e^{0,644x}$	V=y-y	V^2
1	0,1	0,821	-0,1972	-0,0197	0,01	0,0389	0,821	0	0
2	1	1,46	0,3784	0,3784	1	0,1432	1,46	0	0
3	1,5	2,01	0,6981	1,0472	2,5	0,4873	2,04	0	0
4	2,75	4,48	1,4996	4,1239	7,5625	2,2488	4,48	0	0
5	3,3	6,36	1,85	6,105	10,89	3,4225	6,36	0	0
6	4	9,96	2,2986	9,1944	16	5,2836	9,96	0	0
7	5	18,9	2,9392	14,696	25	8,6389	18,88	-0,02	0,0004
8	5,6	27,7	3,3214	18,5998	31,36	11,0317	27,72	0,02	0,0004
9	7	67,9	4,218	29,526	49	17,7915	67,89	-0,01	0,0001
10	9	244	5,4971	49,4739	81	30,2181	244,1	0,1	0,01
n=10	39,25	383,6	22,5032	133,1249	224,3225	79,3045	383,711	0,09	0,0109

Середня квадратична похибка отриманої функції

$$Y^{1=0,77}\ E^{0,64x} \qquad \textbf{(4.19)}$$

буде

$$My' = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,0109}{9}} = 0,035.$$

Розраховуючи на програмованому калькуляторі CITIZEN за програмою [2e^], отримали: r=0,999999939, а= 0,77021183, в=0,639853836. Контрольні обчислення y^1 за програмою, заокруглені до 0,01 приведені в табл.. 4.2.

Розрахунок коефіцієнта кореляції r

$$r^2 = \frac{\left[133,1249 - \frac{1}{10} * 39,25 * 22,5032\right]^2}{\left[224,0725 - \frac{1}{10}(39,25)^2\right]\left[79,3045 - \frac{1}{10}(22,5032)^2\right]};$$

$$A = \left[133{,}1249 - \frac{1}{10} * 39{,}25 * 22{,}5032\right] = 44{,}79984,$$

$$B = \left[224,0725 - \frac{1}{10}(39,25)^2 \right] = 70,01625 \ ,$$

$$r^2 = \frac{(44,79984)^2}{70,01625 * 28,6651} = \frac{2007,0257}{2007,0228} = 1,0000014 \ ,$$

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{1,0000014} = 1,0000007 \ ,$$

$$b = \frac{A}{B} = \frac{44,79984}{70,01625} = 0,639849 \ ,$$

$$a = \exp[2,25032 - 2,51141] = \exp[-0,26109] = 0,77021.$$

Таким чином, за результатами проведених досліджень ми отримали слідуючий тренд

$$y' = 0,77 e^{0,64x} \tag{4.19}$$

Висновки

1. За результатами проведених психологічних досліджень встановлено, що коефіцієнт кореляції між факторними і результативними ознаками дорівнює 1, що говорить про надто високий зв'язок.
2. Побудований тренд функціонального зв'язку.

Виведена формула має вигляд

$$y' = 0,77 e^{0,64x}$$

3. Виконана оцінка точності побудованого тренду і встановлено, що виведена нами функція має середню квадратичну похибку m=0.035 по відхиленнях розрахункових даних від експериментальних.
4. Встановлено, що для проведення досліджень нам повністю підходить програма 2e^ програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350, яку ми визиваємо із меню, підвівши курсор і натиснувши клавішу ENTER.
5. Дані експерименту кращим чином апроксимуються експоненціальною функцією, яка визначена при будь – яких значеннях X. Функція монотонно зростає, вісь X-асимптота.

Комп'ютерний набір, редагування і дизайн у редакторі Mikrosoft Office 2003
Якубович Інна Олександрівна
14.04.2006р.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяєв К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ.-М. : Наука, 1980,-975с.
2. Вища математика: Підручник/ За ред. Шинкарика М.І. – Тернопіль: видавництво Карп'юка, 2003,-480с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник .-К.:А.С.К., 2001,-648с.
4. Козира В.М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до вузів, студентів.- Тернопіль: СМП «АСТОН», 2004,-100с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М. :Наука,1973,-831с.
6. Літнарович Р.М. Елементи науково – дослідної роботи студентів під час вивчення теми «Математична обробка та оцінювання точності геодезичних вимірів». Нові технології навчання. Науково – методичний збірник. Випуск 14.-К.: ІСДО. 1995, с.123-126.
7. Лябах Б.В., Литнарович Р.М. Научно – исследовательская работа студентов как фактор интенсификации познавательной деятельности. Основные пути повышения качества подготовки специалистов для народного хозяйства. Брянск, БСХИ. 1984,-с.99-100,

8. Літнарович Р.М., Кравцов М.І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень. Інженерна геодезія. Науково-технічний збірник. Вип. 50,-К.: КНУБА, 2004,-с. 125-134.
9. Максименко С.Д., Носенко Є.Л. Експериментальна психологія.-К.:МАУП,-128с.
10. Опря А.Т. Статистика,-К.: Центр навчальної літератури, 2005,- 472с.
11. Очков В.Ф., Хмелюк В.А. От микрокалькулятора к персональному компьютеру / Под ред.А.Б.Бойко.- М.:Изд. МЭИ, 1990,-224с.
12. Рывкин А.А. и др. Справочник по математике. Изд. 3-е.М.: Высшая школа, 1975,-554с.
13. Статистическая обработка результатов экспериментов на микро-ЭОМ и программируемых калькуляторах / А.А. Костылев, П.В.Миляев, Ю.Д.Дорский и др..:Л.: Энергоатомиздат, 1991,-304с.
14. Трофименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах.- К.: Техніка, 1980,-384с.
15. Уманець Т.В., Пігарєв Ю.Б. Статистика :Навч.посібник К.:Вікар,2003,-623с.
16. Фільчаков П.Ф. справочник по высшей математике.К.:Наукова думка, 1972,-744с.
17. Франтішек Латка. Математичний міні лексикон. Львів:Світ, 1990,-107 с.
18. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник.-М.:Наука, 1985,-128с.

Літнарович Руслан Миколайович
доцент. кандидат технічних наук

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ
Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту експоненціальною функцією

Навчальний посібник
Для студентів педагогічного факультету

Частина 4

Комп'ютерний набір.верстка.редагування і дизайн у редакторі Microsoft Office 2003. Якубович Інна Олександрівна

Міжнародний Економіко-Гуманітарний Університет
ім. акад. Степана Дем'янчука

33027,м.Рівне, вул. акад. С.Дем'янчука, 4