

## ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХМАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМОЙ

Шварцкопф А.А., доц.

Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления системой, схема которой показана на рис 1:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), & \frac{dx_2}{dt} &= u(t), & \frac{dx_3}{dt} &= x_4(t)/l_1, & \frac{dx_4}{dt} &= -gx_3(t)+u(t), \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6(t)/l_2, & \frac{dx_6}{dt} &= -gx_5(t)+u(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Эта система использована для иллюстрации принципа построения оптимального по быстродействию алгоритма управления, поскольку имеет прозрачную физическую интерпретацию. В [1] приведено обоснование использования этой модели для описания динамики контейнерного крана, учитывающей в первом приближении эффект упругих деформаций конструкции крана, обусловленных перемещением груза вдоль стрелы. Модели, содержащие колебательные составляющие процесса, применяются при описании широкого класса объектов. В том числе и при описании электромеханических систем с колебательными составляющими, с помощью которых учитывается неабсолютная жесткость сочленения вала двигателя с рабочим органом. В системе (1) приняты следующие обозначения:  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – перемещение и скорость тележки с маятниками;  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$  и  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$  – перемещение и скорость маятников длиной  $l_1$  и  $l_2$  соответственно;  $g$  – ускорение свободного падения;  $u(t)$  – управляющее воздействие-ускорение тележки. Ставится следующая задача позиционирования: из заданного начального состояния  $x(t_0)=x^0$  перевести систему в заданное конечное состояние  $x(t_1)$  за минимальное время  $(t_0-t_1)$  и при этом для всех  $t$  из интервала  $(t_0-t_1)$  должно выполняться условие  $|u(t)| \leq 1$ .

В соответствии с принципом максимума Понтрягина оптимальное управление находится из условия

$$H(x, u, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_3 x_4 / l_1 + \psi_5 x_6 / l_2 \cdot g (\psi_4 x_3 + \psi_6 x_5) + (\psi_2 + \psi_4 + \psi_6) u \rightarrow \max, \quad (2)$$

где  $\psi(t)$  – решение сопряженной к (1) системы:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^T \psi, \quad (3)$$

а  $A$ -матрица системы (1). Условию (2) удовлетворяет

$$u = \text{sgn}(\psi_2 + \psi_4 + \psi_6), \quad (4)$$

то есть уравнение может принимать только граничные значения  $\pm 1$ .  
 Функции, входящие в (4), имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= \psi_2(0) - t\psi_1(0), \\ \psi_4(t) &= -\sin(\omega_1 t)\psi_3(0)/\sqrt{g l_1} + \cos(\omega_1 t)\psi_4(0), \\ \psi_6(t) &= -\sin(\omega_2 t)\psi_5(0)/\sqrt{g l_2} + \cos(\omega_2 t)\psi_6(0), \end{aligned}$$

где  $\omega_i = \sqrt{g l_i}$  - частоты колебаний маятников. Видно, что число переключений управляющего воздействия конечно для ненулевых начальных условий сопряженной системы. Задача управления решается довольно просто, когда для любых заданных начальных условий  $x^0$  известны начальные условия  $\Psi(0)$ . Поиск соответствующих начальных условий системы (3) составляет основную проблему синтеза оптимального управления. Известны численные процедуры, позволяющие приближенно находить  $\Psi(0)$ . Методы синтеза управления, основанные на поиске подходящих начальных условий для  $\Psi$ , обладают следующими недостатками. Во-первых, при изменении начальных условий системы (1) необходимо выполнять достаточно громоздкие вычисления, что при управлении в реальном времени может оказаться недопустимым. Во-вторых, решением задачи синтеза является набор моментов переключения управляющего воздействия, т.е. реализуется разомкнутое управление, что весьма рискованно при практической реализации из-за высокой чувствительности такого управления к изменению или недостаточно точному определению параметров системы. В значительной мере избавиться от этих недостатков можно, построив синтезирующую функцию  $V(x)$ , позволяющую по вектору состояния системы определять управляющее воздействие. Но для этого необходимо либо аналитическое описание поверхности переключения, либо определение достаточного количества точек этой поверхности для аппроксимации её. Для систем размерности больше трех получение аналитического описания поверхности переключения - практически невыполнимая задача. В [2] описана эффективная методика аппроксимации поверхности переключения для непрерывных систем. В данной работе предлагается решение задачи управления, основанное на синтезе поверхности переключения для дискретной системы, соответствующей (1). Основанием для этого является то, что решение о значении управляющего воздействия принимается вычислительным устройством и, следовательно, естественно рассматривать объект управления с точки зрения управляющего устройства. Кроме того, следует иметь в виду, что при численном решении задачи управления оперируют не производными, а их разностными аналогами, т.е. пользуются дискретным описанием управляемой системы. Для получения дискретной системы, соответствующей (1), воспользуемся одной из стандартных процедур [3]. Известно, что решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t - t_k)x(t_k) + \int_0^{t-t_k} \Phi(\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (5)$$

где  $\Phi$ -фундаментальная матрица системы (1);  $B$ -вектор-столбец из коэффициентов при управлении,  $t_k < t < t_{k+1}$ . Интервал  $[t_k, t_{k+1}]$  - интервал

дискретизации величиной  $T$ , которую в дальнейшем будем считать постоянной. Вектор состояния системы (1) в моменты времени, кратные  $T$ , получим из (5), полагая  $t=t_{k+1}$  и учитывая, что внутри интервала дискретизации управляющее воздействие не меняется:

$$x(t_{k+1}) = \Phi(T)x(T_k) + \Gamma(T)u(t_k), \quad (6)$$

где  $\Gamma(T)$  - значение интеграла из (5) в пределах от 0 до  $T$  при  $u = \text{const}$ . Заметим, что (6) определяет точные значения вектора состояния системы (1) в моменты, кратные периоду дискретности  $T$ . В данном случае определение матриц  $\Phi$  и  $\Gamma$  не представляет сложности, поскольку матрица системы (1) состоит из трех диагональных блоков  $2 \times 2$ . В дальнейшем будем исчислять время в количестве периодов дискретности. Выполнив все необходимые вычисления, получим следующее дискретное описание системы (1):

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + T x_2(k) + 0,5 T^2 u(k), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + T u(k), \\ x_3(k+1) &= x_3(k) \cos(\omega_1 T) + x_4(k) \sin(\omega_1 T) / \sqrt{g l_1} + (1 - \cos(\omega_1 T)) u(k) / g, \\ x_4(k+1) &= -x_3(k) \sin(\omega_1 T) \sqrt{g l_1} + x_4(k) \cos(\omega_1 T) + \sin(\omega_1 T) u(k) / \omega_1, \\ x_5(k+1) &= x_5(k) \cos(\omega_2 T) + x_6(k) \sin(\omega_2 T) / \sqrt{g l_2} + (1 - \cos(\omega_2 T)) u(k) / g, \\ x_6(k+1) &= -x_5(k) \sin(\omega_2 T) \sqrt{g l_2} + x_6(k) \cos(\omega_2 T) + \sin(\omega_2 T) u(k) / \omega_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для уменьшения количества параметров системы (7) введем новые переменные:  $y_1(k) = x_1(k) / T^2$ ,  $y_2(k) = x_2(k) / T$ ,  $y_3(k) = x_3(k)$ ,  $y_4(k) = \omega_1 x_4(k)$ ,  $y_5(k) = x_5(k)$ ,  $y_6(k) = \omega_2 x_6(k)$  и определим следующие параметры:  $\omega_1 / \omega_2 = 1 / \mu$ ,  $T / T_1 = \beta$ , где  $T_1 = 2\pi / \omega_1$  - период колебаний первого маятника,  $2\pi\beta = \alpha$ . Тогда  $\omega_1 T = 2\pi\beta = \alpha$ ,  $\omega_2 T = 2\pi\beta\mu = \alpha\mu$  и окончательный вид дискретной системы будет следующим:

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= y_1(k) + y_2(k) + 0,5 u(k), \\ y_2(k+1) &= y_2(k) + u(k), \\ y_3(k+1) &= y_3(k) \cos(\alpha) + y_4(k) \sin(\alpha) / g + (1 - \cos(\alpha)) u(k) / g, \\ y_4(k+1) &= -g y_3(k) \sin(\alpha) + y_4(k) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) u(k), \\ y_5(k+1) &= y_5(k) \cos(\alpha\mu) + y_6(k) \sin(\alpha\mu) / g + (1 - \cos(\alpha\mu)) u(k) / g, \\ y_6(k+1) &= -g y_5(k) \sin(\alpha\mu) + y_6(k) \cos(\alpha\mu) + \sin(\alpha\mu) u(k). \end{aligned} \quad (8)$$

При выборе значений параметров  $\beta$  и  $\mu$  необходимо учитывать следующее:  $\mu$  не должно быть равно 1. В противном случае система (8), равно как и (1), не является полностью управляемой, и задача управления разрешима только тогда, когда  $y_3(0) = y_5(0)$ ,  $y_4(0) = y_6(0)$ , что эквивалентно наличию в системе только одного маятника. В соответствии с теоремой

Котельникова-Шеннона частота дискретизации  $\omega_0 = 2\pi/T$  должна быть по крайней мере вдвое выше частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Отсюда следует, что  $0 < \beta < 0,5$ ;  $0 < \beta_m < 0,5$ . В граничных точках интервала значений  $\beta$  система (8) не является полностью управляемой.

Решение задачи управления системой (8) начинается с синтеза поверхности переключения. Процедура синтеза детально описана в [4]. В результате решения задачи синтеза получим набор векторов  $p_0, p_1, \dots, p_N$ , с помощью которых можно определить положение точки фазовой траектории относительно поверхности переключения. Количество векторов  $p_i$  определяется необходимостью построения поверхности переключения для части области управляемости системы (8), включающей множество начальных условий, для которых решается задача управления. Это можно сделать, например, следующим образом. Определим множество значимых начальных состояний как шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. Синтезируя поверхность переключения, получаем вектора  $p_i$  до тех пор, пока точки поверхности не выйдут за пределы шара.

Определим функцию

$$\varphi(y) = \text{sgn}(p_{N-1}y + \text{sgn}(p_{N-1}y + \dots + \text{sgn}(p_1y + \text{sgn}(p_0y)) \dots)), \quad (9)$$

где  $y$  — точка фазового пространства системы (8). В [4] показано, что управляющее воздействие для дискретной системы может принимать не только граничные значения. Существует слой линейного уравнения, прилегающий к поверхности переключения. Для точек фазового пространства из этого слоя  $|u| < 1$ , а значение определяется проекцией точки фазовой траектории на поверхность переключения в направлении вектора  $v_1 = A^{-1}B$ , где  $A$  — матрица системы (8), а  $B$  — столбец коэффициентов при управлении. Точка фазовой траектории принадлежит слою линейного управления, если выполнено условие

$$\varphi(y - v_1)\varphi(y + v_1) < 0. \quad (10)$$

Для точек слоя линейного управления, как и в [5], предлагается приближенно вычислять значение управления по формуле

$$\tilde{u} = m^{-1} \sum_{l=1}^{m/2} \left( \varphi(y - \frac{2l}{m}v_1) + \varphi(y - \frac{2l}{m}v_1) \right). \quad (11)$$

Абсолютная погрешность приближенного вычисления управления по формуле (11) не превышает  $2/m$  для слоя линейного управления и в точности совпадает с управлением вне его. Точное определение  $u$  как  $v_1$ -проекции с точки зрения количества вычислений достаточно "громоздко", а при управлении в реальном времени управление должно быть рассчитано в течение периода дискретности. Использование формулы (11) позволяет так организовать вычисления, что линейные формы  $p_i y$  и  $p_i v_1$  вычисляются только один раз для каждого  $u(k)$ . Управляющее воздействие будем определять по следующему правилу:

$$u(k) = \begin{cases} \varphi(y(k)), & \text{если условие (10) не выполнено} \\ p_0 y(k), & \text{если условие (10) выполнено и } |p_0 y(k)| < 1 \\ \text{по формуле (11),} & \text{если условие (10) выполнено и } |p_0 y(k)| > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Первые две строки определяют точное значение управления. Сформулированное правило позволяет сократить время процесса принятия решения.

На рисунках 2 и 3 иллюстрируется использование предложенного алгоритма для управления системой (8). Ставится задача перевода системы из начала координат в точку  $(50, 0, 0, 0, 0)$ . Конечной точкой траектории в задаче быстрогодействия является начало координат, поэтому, перенеся его в заданную конечную точку, получим начальное условие для системы (8):  $(-50, 0, 0, 0, 0)$ . Исходные значения параметров системы (1) следующие: длины маятников - 40м и 50м, период дискретности  $T=4$  с, количество векторов  $p_i=20$ , число  $m$  в формуле (11)-100. На рисунках приняты следующие обозначения:  $U$ -управление;  $V, X$  - скорость и теремещение тележки;  $V_1, V_2$ , - линейные скорости маятников. На рисунке 3 приведено решение задачи для случая, когда длина второго маятника на 20% больше, чем в модели, использованной при синтезе поверхности переключения. Сравнение результатов моделирования позволяет сделать вывод о том, что при изменении параметров объекта управления применение предложенного алгоритма не приводит к существенному ухудшению качества управления.

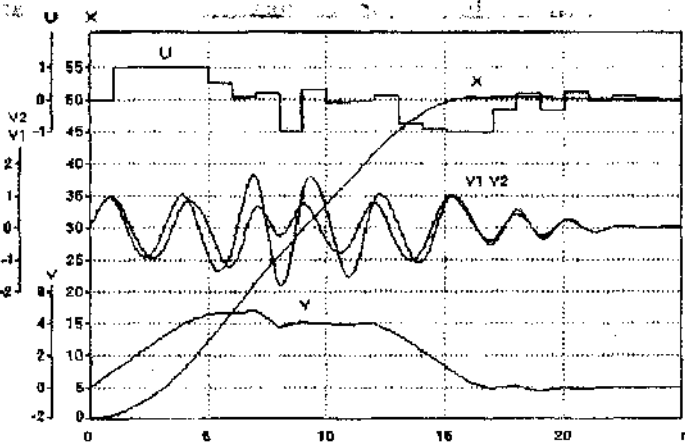


Рис. 2

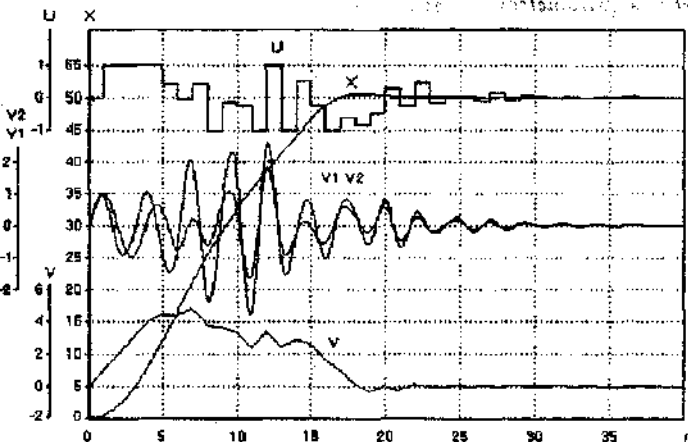


Рис.3

При решении задачи позиционирования в практической постановке необходимо учитывать кроме ограничения на управляющее воздействие еще и ограничение скорости перемещения тележки. Качественное решение этой задачи известно: закон управления должен обеспечить треугольную или трапецидальную диаграмму скорости в зависимости от того, достигается или нет ограничение скорости при позиционировании. В данном случае требуется ограничение координаты  $y_2$ . Ограничение этой координаты обеспечивается ограничением управления на уровне 0 при достижении скоростью граничного значения. Иллюстрация решения данной задачи приведена на рисунке 4.

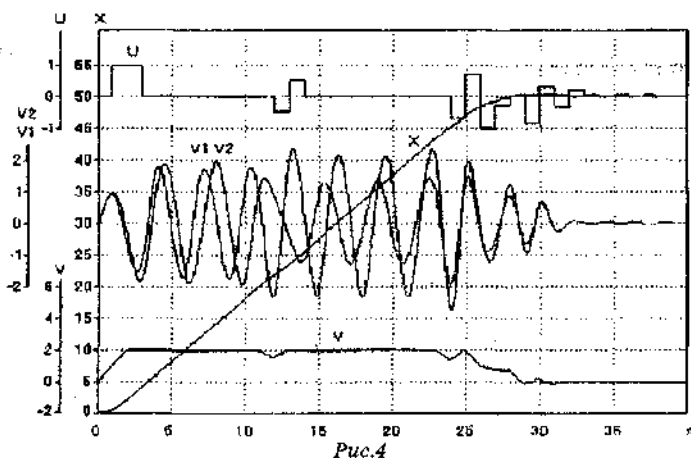


Рис.4

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен алгоритм решения задачи оптимального быстрогодействия, проиллюстрированный на примере двухмаятниковой системы. Показана принципиальная возможность использования алгоритма при изменении параметров системы в процессе функционирования. Иллюстрируется решение задачи с фазовым ограничением. Приведены результаты моделирования работы алгоритма на ЭВМ.

## SUMMARY

The paper describes an algorithm for time optimal controlling with illustrating by two pendulums system in digital form is presented. It's shown principle ability to use this algorithm in case system's parameters changing. The solution with bounding of phase co-ordinate is illustrated. The result of simulation by computer is presented.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F.Palis и др. Optimal motions of swinging load with respect to elastic crane construction. / Печатные материалы НТК "Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика". - Харьков, 1994 г., 4-9 октября.
2. Moroz A.I. REIOL-time-sub-optimal variable structure control law. /INT. J.Control, 1990, vol. 52.No.3,665-668.
3. Куо Б. Теория и практика проектирования цифровых систем управления. -М.: Машиностроение, 1987.-387 с.
4. Шварцкопф А.А. Синтез поверхности переключения в задаче быстрогодействия для линейных дискретных систем /Вис. СумДУ, N 4, Суми, 1995.
5. Мороз А.И. Курс теории систем. -М.: Высш.шк., 1987.-304 с..

Поступила в редколлегию 2 апреля 1996 г.