Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко — гуманітарний Університет
імені академіка Степана Дем'янчука

Р.М. Літнарович

Основи математики

Дослідження результатів психолого - педагогічного експерименту гіперболічною функцією

Навчальний посібник для студентів

педагогічного факультету

Частина 6

Рівне 2006

Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження Результатів психолого- педагогічного експерименту гіперболічною функцією. Навчальний посібник для студентів педагогічного факультету. Частина 6. МЕГУ, Рівне, 2006,-18 с.

Рецензенти: В. Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор
Е. С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В. О. Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор.

Розроблена методика обробки матеріалів за результатами психологічного і педагогічного експерименту. Обробка матеріалів проводиться за способом найменших квадратів гіперболічною функцією. Встановлюється тіснота зв'язку між факторними і результативними ознаками, будується точкова діаграма, підбирається апроксимуюча функція, проводиться контроль і оцінка точності.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

© Р.М. Літнарович

Зміст

Передмова

Для обробки матеріалів психологічного і педагогічного експерименту необхідно використати математичний апарат, який дав би можливість визначити зв'язок між факторними і результативними ознаками і вивести формулу такого зв'язку. При цьому доцільно використати спосіб найменших квадратів, як добре розроблений апарат оптимізації розрахунків експериментальних даних з оцінкою точності результатів.

Матеріал підготовлений за курсом лекцій, прочитаних автором, студентам педагогічного факультету Міжнародного економіко- гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука у 2006 році.

Автор виражає щиру вдячність доктору фізико - математичних наук, професору Йосипу Володимировичу Джуню, який позитивно оцінив науковий напрямок і дав можливість прочитати курс лекцій і підготовити матеріал до видання.

"Математика - замечательное орудие исследования. Она дает возможность до тонкости изучить явление и даже предугадать его"

А. М. Ляпунов

Дослідження результатів психолого - педагогічного експерименту гіперболічною функцією *Представлення операційних змінних*

Розглянемо планування експериментального дослідження. Насамперед потрібно виокремити зовнішні змінні, які можуть впливати на залежну змінну.

Вибір експериментального плану зумовлений різними факторами, зокрема кількістю досліджуваних.

Якщо в експерименті бере участь група досліджуваних, то найпростішим є план для двох груп: **експериментальної** і **контрольної.**

Якщо потрібно виявити вплив двох і більше незалежних змінних на одну залежну, вибирають факторний план. При цьому незалежні змінні можуть мати кілька рівнів інтенсивності. До простих факторних планів належать плани типу 2x2 або 2><2x2. У них використовуються відповідно *Z* або 3 незалежні змінні з двома рівнями інтенсивності.

Вирізняють такі основні плани експериментів:

- план для двох груп з попереднім тестуванням (до виконання експериментального завдання) і тестуванням після виконання експериментального завдання;
- план для двох рандомізованих груп без попереднього тестування з тестуванням після виконання експериментального завдання;
- план Соломона для чотирьох груп, що поєднує два попередні плани. Це плани істинних експериментів.

Якщо план істинного експерименту неможливо (або не потрібно) реалізувати, використовують так звані квазіекспериментальні плани (коли незалежна змінна не варіюється, а підбирається). Приведемо результати нашого експерименту, Таблиця 6.1. Операційні дані

Х	0,5	1,0	1,5	2,75	3,3	4,0	5,0	5,6	7,0	9,0
У	26,2	13,8	10,2	6,34	5,66	4,98	4,42	4,12	3,73	3,31

Для того щоб описати математично результати, приведені в таблиці 6.1., необхідно побудувати точкову діаграму і графік (якщо це можливо) по цим дискретним даним.

Після, на основі шаблонів графіків різних функцій підібрати саме ту функцію, яка описує даний графік

подальшому залишається лише вирахувати методом найменших квадратів, тобто щоб сума квадратів відхилень розрахункових результативних ознак мінімально відхилялась від експериментальних даних, коефіцієнти, попередньо встановивши тісноту взаємозв'язку між факторними і результативними ознаками.

2. Побудова точкової діаграми

За даними експериментальних досліджень, приведених у таблиці 6.1., будуємо графік з метою виявлення закону для підбору апроксимуючої функції

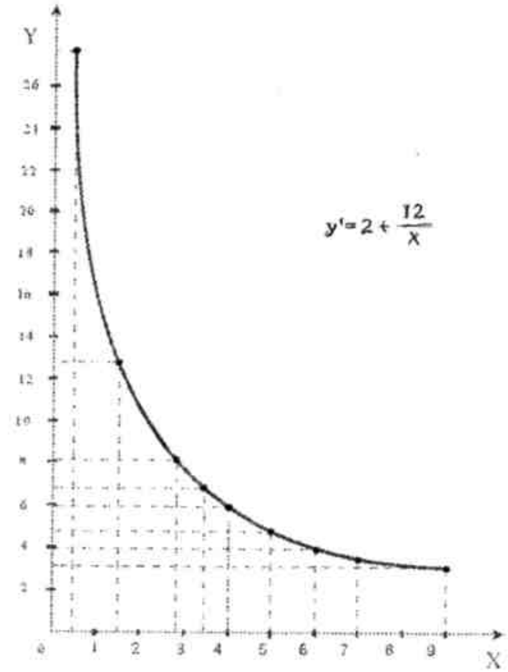

Рис. 6.1. Точкова діаграма і апроксимуюча крива

При нанесенні точок відносно координатних осей, ми не знаємо, чи можна буде провести апроксимуючу криву.

. Тому,спочатку будуємо точкову діаграму і після (якщо вийде) наносимо графік по експериментальним даним і лише після всіх розрахунків наносимо апроксимуючу криву.

3. Короткі довідникові дані Показникові рівняння.

Проводячи дослідження за допомогою показникових рівнянь (дивіться частину 5 посібника), буде корисно досліднику освіжити в пам'яті інформацію про показникові рівняння.

1. Розв'язування найпростіших показникових рівнянь ґрунтується на такій властивості степенів: два степеня з однаковими додатніми і відмінними від одиниці основами рівні тоді і тільки тоді, коли рівні показники.
2. Найпростіше показникове рівняння:

$$a^x = b \quad , \qquad (a > 0, \quad a \neq 1) \ : \qquad (6.1)$$

1) якщо $b \le 0$, то рівняння не має коренів;

2) якщо $b > 0$, то

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b. \qquad (6.2)$$

3. Основні методи розв'язування показникових рівнянь:

- зведення обох частин рівняння до однієї основи;

-метод заміни;

-метод розкладання на множники;

-логарифмування обох частин рівняння за однією основою (при умові, що обидві частини рівняння додатні).

4. Коренями рівняння

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)} \qquad (6.3)$$

Є розв'язки системи

$F(x) > 0,$

$f(x) \neq 1,$

$g(x) = h(x),$ і ті значення x, для яких $f(x) = 1,$ та визначені вирази g(x) I (h(x).

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$3^X \cdot 9^X = 81.$$

Представимо рівняння у вигляді

$$3^X \cdot 3^{2X} = 3^4,$$

або $\qquad 3^{3X} = 3^4.$

Степені числа 3 рівні, значить, рівні і їх показники:

$$3x = 4,$$

Звідки $\qquad x = 4/3.$

В даному випадку ми використали спосіб приведення рівняння до рівності з однаковими основами.

Приклад 2.

$$5^{2X+1} + 2 \cdot 5^{2X} + 5^{2X-1} = 900.$$

Виносимо за дужки 5^{2X-1} і отримуємо

$$5^{2X-1}(25 + 10 + 1) = 900,$$

Тому що $\qquad 900 = 36 \cdot 5^2, \quad i \quad 5^{2X-1} = 5^2.$

Тобто, $\qquad 2X - 1 = 2,$

звідки $X = 3/2$.

В даному випадку ми використали спосіб винесення за дужки.

Приклад 3. $3^{2X} - 8 \cdot 3^X - 9 = 0.$

Використаємо спосіб введення допоміжного невідомого.

Нехай, $3^X = Y$,

Тоді $Y^2 - 8Y - 9 = 0$,

Звідки $Y_1 = 9; \quad Y_2 = -1.$

Друге значення не є коренем вихідного рівняння, тому що 3^X не може бути від'ємним. Залишається $3^X = 9$, звідки $X = 2$.

Приклад 4.

Розглянемо четвертий спосіб розв'язування показникових рівнянь - логарифмування.

$$7^X = 23.$$

Це рівняння має єдине рішення. Логарифмуючи обидві частини рівняння, отримаємо:

$X \lg 7 = \lg 23$, звідки X = lg23/lg7.

4. Теоретичні положення визначення тісноти зв'язку факторних і результативних ознак

Для того, щоб вивести формулу апроксимуючої кривої, необхідно встановити тісноту взаємозв'язку між факторними і результативними ознаками. Лише в цьому випадку є сенс

говорити про можливість виводу формули апроксимуючої кривої.

Звичайно, в програмі *Exeі* персональних комп'ютерів є підпрограми розрахунку коефіцієнтів кореляції і відповідних коефіцієнтів апроксимуючої кривої. "Але, на жаль, немає формул за якими вони обраховуються і, крім того, досліднику необхідно самому вирахувати контрольний варіант.

Таким чином , коефіцієнт кореляції в нашому випадку розраховується за формулою

$$r^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} Xi^2\, Yi - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} Xi\, Yi\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Xi\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} (Xi\,Yi)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Xi\,Yi\right)^2\right]} \qquad (6.5)$$

Введемо позначення

$$\sum_{i=1}^{n} Xi^2\, Yi - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} Xi\, Yi = A, \qquad (6.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Xi\right)^2 = B, \qquad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Xi\,Yi)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Xi\,Yi\right)^2 = C, \qquad (6.8)$$

З врахуванням прийнятих позначень, формула (6.5) буде

$$r^2 = \frac{A^2}{B \cdot C} \qquad (6.9)$$

формули (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) і будуть робочими формулами для обчислення коефіцієнта кореляції з метою побудови апроксимуючої гіперболічної функції.

5. *Встановлення коефіцієнтів і вивід формули гіперболічної функції*

Поставивши за мету встановити коефіцієнти *а* і *в* для формули гіперболічної функції по способу найменших квадратів, тобто, щоб сума квадратів відхилень розрахункових параметрів від експериментальних була мінімальною, отримують слідуючі робочі формули

(6.10) $$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi^2\ Yi - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} Xi\ Yi}{\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} Xi \right)^2},$$

або, з врахуванням (6.6) і (6.7)

(6.11) $$a = \frac{A}{B},$$

$$в = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} Xi\,Yi - a \sum_{i=1}^{n} Xi \right),$$

(6.12)

де коефіцієнт *а* підставляється у формулу (6.12) із результатів розрахунків за формулою (6.11).

6. *Практична реалізація*

Підготовку даних виконаємо в розрахунковій таблиці

Таблиця 6.2. Підготовка даних

i	Xi	Yi	Xi^2Yi	Xi^2	XiYi	$(XiYi)^2$	12 X	V = y'-y	V^2
1	0,5	26,	6,55	0,25	13,1	171,61	26,13	-0,07	0,0049
2	1,0	13,8	13,8	1	13,8	190,44	14,05	+0,2	0,0625
3	1,5	10,2	22,95	2,25	15,3	234,09	10,03	-0,17	0,0289
4	2,75	6,3	47,94625	7,5625	17,435	303,9792	6,37	+0,0	0,0009
5	3,3	5,6	61,6374	10,89	18,678	348,8676	5,64	-0,02	0,0004
6	4,0	4,9	79,68	16	19,92	396,8064	5,00	+0,0	0,0004
7	5,0	4,4	110,5	25	22,1	448,41	4,39	-0,03	0,0009
8	5,6	4,1	129,2032	31,36	23,072	532,3171	4,13	+0,0	0,0001
9	7,0	3,7	182,77	49	26,11	681,7321	3,70	-0,03	0,0009
10	9,0	3,31	268,11	81	29,79	887,4441	3,32	+0,0	0,0001
n=1	139,6		£923,1468	224,31	199,30	4235,696		10	£0,100

$$A = \sum_{i=1}^{n} Xi^2\ Yi - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} Xi\ Yi = 923{,}14685 - \frac{1}{10}\, 39{,}65 \cdot 199{,}305 =$$

$$= 132{,}902525;$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} Xi \right)^2 = 224{,}3125 - 157{,}21225 = 67{,}10025$$

$$C = 4235{,}696693 - 3972{,}248303 = 263{,}44839;$$

$$r^2 = \frac{A^2}{B \cdot C} = \frac{(132{,}902525)^2}{67{,}10025 \cdot 263{,}44839} = \frac{17663{,}08115}{17677{,}45283} =$$

$$= 0{,}999187;$$

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0{,}999187} = 0{,}999593;$$

Таким чином, ми виявили надто високий зв'язок між факторними і результативними ознаками, що відкриває нам дорогу до розрахунку коефіцієнтів *а* і *в*.

$$a = \frac{A}{B} = \frac{132{,}902525}{67{,}10025} = 1{,}980656;$$

$$в = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - a\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{10}\,(199{,}305 - 1{,}980656 \cdot 39{,}65) = 12{,}07720;$$

Таким чином, ми отримали формулу

$$y' = a + \frac{в}{x} = 1{,}980 + \frac{12{,}077}{x} \qquad (6.13)$$

Для практичної реалізації формула (6.13) прийме вигляд

$$y' = 2 + \frac{12}{x}. \qquad (6.14)$$

Контрольні розрахунки були проведені на програмованому мікрокалькуляторі CITIZEN SRP - 350 по програмі [4 in v].

Вони були округлені до 0,01 і приведені у стовпчику у' таблиці 6.2. В даному випадку отримана сума відхилень V дорівнює нулю, чого не можна було сказати для степенної і експоненціальної функцій, що пояснюється наявністю похибок самих функцій, адже за способом найменших квадратів ми лише узгоджуємо умови, а остаточні істинні похибки, на жаль,

компенсувати не можемо і при самій лінеаризації цих функцій виникають остаточні істинні похибки.

Таким чином середня квадратична похибка апроксимованої функції буде

$$m_{y'} = \sqrt{\frac{\sum V^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{0{,}1}{9}} = 0{,}105\,,$$

нкпіл

Як бачимо, **Y** обернено пропорційно до**X**. При **в**>0 функція монотонно спадає.

При проведені досліджень слід розрізняти слідуючі види кореляційних зв'язків.

-*к*ореляція, зумовлена третьою змінною (наприклад, між швидкістю ідентифікації зображень при їх тахістоскопічному демонструванні і обсягом словникового запасу. Прихована (третя) змінна - загальний інтелект);

- випадкова кореляція;
- від'ємний кореляційний зв'язок (наприклад, між кількістю дітей у родині та рівнем їхнього інтелекту);
- нульова кореляція - відсутність зв'язку;
- нелінійний зв'язок (наприклад, закон Йеркса - Додсона).

Висновки

1. За результатами проведених психолого - педагогічних досліджень встановлено, що коефіцієнт кореляції між факторними і результативними ознаками дорівнює 0,99988, що говорить про надто високий зв'язок.
2. Побудований тренд функціонального зв'язку. Виведена формула має вигляд

$$y' = 2 + \frac{12}{X}$$

3. Виконана оцінка точності побудованого тренду і встановлено, що виведена нами формула має середню квадратичну похибку m = 0,105 по відхиленням розрахункових даних від експериментальних.
4. Встановлено, що для проведення досліджень при

$$y' = a + \frac{в}{x}$$

апроксимації гіперболічною функцією нам повністю підходить програми [4 in v] програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP - 350. 5. Дані експерименту кращим чином апроксимуються гіперболічною функцією.

Література

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.: Наука, 1980,-975с.
2. Вища математика: Підручник / За ред. Шинкарика М. І. - Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003, - 480с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навчальний посібник. -К.: А. С. К., 2001, - 648с.
4. Козира В. М. Елементарна та вища математика: Довідник для учнів, вступників до вузів, студентів. - Тернопіль: СМП "Астон", 2004, - 100с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973,-831с.
6. Літнарович Р. М. Елементи науково - дослідної роботи студентів під час вивчення теми "Математична обробка та оцінювання точності геодезичних вимірів". Нові технології навчання. Науково - методичний збірник. Випуск 14. К.: ІСДО, 1995, с 123 - 126.
7. Лябах Б. В., Литнарович Р. Н. Научно -исследовательская работа студентов как фактор интенсификации познавательной деятельности. Основные пути повышения качества подготовки специалистов для народного хозяйства. Брянск, БСХИ, 1984, - с. 99 - 100.
8. Літнарович Р. М., Кравцов М. І. До питання оцінки точності визначення координат пункту із GPS спостережень, інженерна геодезія, Вип. 50, - К. КНУБА; 2004, **-с.** 25- 134.
9. Максименко С. Д., Носенко С. Л. Експериментальна психологія, - К.: МАУП, 2004, -128 с
10. Опря А. Т. Статистика. - К.; Центр навчальної літератури, 2005, - 472 **с**

Літнарович Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

Основи математики дослідження результатів психолого - педагогічного експерименту гіперболічною функцією

Навчальний посібник
для студентів педагогічного факультету
Частина 6

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у редакторі Microsoft Office 2003®. Міркевич Наталія Петрівна

Міжнародний Економіко - Гуманітарний Університет імені академік Степана Дем'янчука
33027, м. Рівне, вул. акад. С. Дем'янчука, 4