

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРЕ, ВОЗБУЖДАЕМОМ СИСТЕМОЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

*М.Л. Фильштинский, вед. науч. сотр.*

Рассматривается антиплоская смешанная краевая задача электроупругости для пьезокерамического цилиндра с системой активных поверхностных электродов, возбуждающих его колебания. Получена разрешающая система сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода с разрывными ядрами. Описывается приближенная схема численной реализации построенного алгоритма. Приводятся результаты расчета, характеризующие распределение электроупругих полей как в области цилиндра, так и на его границе. Аналогичная задача для кругового цилиндра с системой двух симметрично расположенных электродов методом рядов исследована в [1].

Рассмотрим отнесенный к декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  бесконечно длинный вдоль оси  $x_3$  пьезокерамический цилиндр с осевой поляризацией, поперечное сечение которого ограничено гладким контуром  $C$ . Будем предполагать, что на свободной от механических усилий поверхности цилиндра располагаются  $2n$  бесконечно длинных (в направлении оси  $x_3$ ) тонких электродов с заданными разностями электрического потенциала, а неэлектродированные участки цилиндра сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы  $k$ -го электрода определены величинами  $\alpha_{2k-1}$  и  $\alpha_{2k}$  ( $k = 1, 2n$ ), а электрический потенциал на нем задан величиной  $\varphi_k^* = \text{Re}(\Phi_k^* e^{-i\omega t})$  (рис. 1).

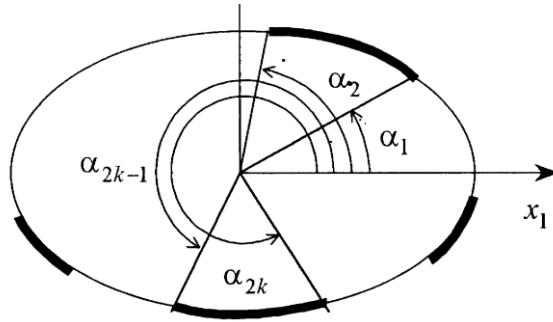


Рисунок 1

В данных условиях в цилиндре имеет место состояние антиплоской деформации, причем в квазистатическом приближении система исходных соотношений сводится к следующим дифференциальным уравнениям относительно перемещения  $u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t})$  и электрического потенциала  $\varphi = \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t})$  [1]:

$$c_{44} \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11} \nabla^2 \varphi = 0.$$

Здесь  $c_{44}^E, \varepsilon_{11}, e_{15}$  и  $\rho$  - соответственно модуль сдвига, диэлектрическая проницаемость, пьезоэлектрическая постоянная и плотность материала. Из (1) следуют соотношения

$$\nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 F = 0, \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}}}.$$

Механические и электрические величины выражаются через функции  $u_3$  и  $F$  формулами

$$\tau_{13} - i\tau_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right], \quad (3)$$

$$D_1 - iD_2 = -2\varepsilon_{11} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left( F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} u_3 \right), \quad z = x_1 + ix_2.$$

В (3)  $\tau_{ij}$  - напряжения продольного сдвига,  $D_j$  и  $E_j$  - соответственно компоненты векторов индукции и напряженности электрического поля.

Механические и электрические граничные условия на поверхности цилиндра при учете (2), (3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44} (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right\} = 0 \quad \text{на } C,$$

$$\varphi = F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} u_3 = \varphi^*(\zeta, t), \quad \zeta \in C_\varphi, \quad (4)$$

$$D_n = -\varepsilon_{11} \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \tilde{N} \setminus \tilde{N}_\varphi.$$

Здесь  $C_\varphi$  - часть контура  $C$ , соответствующая электродированной поверхности цилиндра,  $t$  - время. Переходя к амплитудным значениям, запишем равенства (2) в форме

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}.$$

Таким образом, задача заключается в определении функций  $U_3$  и  $F^*$  из дифференциальных уравнений (5) и граничных условий (4).

С целью сведения поставленной граничной задачи к интегральным уравнениям, представим искомые функции в виде:

$$U_3(x_1, x_2) = \int_C \rho(\zeta) H_0^{(1)}(\gamma r) ds, \quad (6)$$

$$F^*(x_1, x_2) = \int_C f(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln r ds, \quad r = |\zeta - z|, \quad \zeta \in C.$$

Здесь  $H_\nu^{(1)}(x)$  - функция Ханкеля первого рода порядка  $\nu$ ,  $ds$  - элемент дуги контура  $C$ .

Подставляя предельные значения функций (6) при  $z \rightarrow \zeta_0 \in C$  в граничные условия (4), приходим к системе интегродифференциальных уравнений второго рода

$$-2ip(\zeta_0) + \int_{\tilde{N}} \rho(\zeta) g_1(\zeta, \zeta_0) + f'(\zeta) g_2(\zeta, \zeta_0) ds = 0, \quad \zeta_0 \in C,$$

$$\pi f(\zeta_0) + \int_{\tilde{N}} \rho(\zeta) g_3(\zeta, \zeta_0) + f(\zeta) g_4(\zeta, \zeta_0) ds = \Phi^*(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in C_\varphi, \quad (7)$$

$$\int_{\tilde{N}} f'(\zeta) g_5(\zeta, \zeta_0) ds = 0, \quad \zeta_0 \in C \setminus C_\varphi,$$

$$g_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} + \gamma H_1(\gamma r_0) \cos(\psi_0 - \alpha_0), \quad f'(\zeta) = \frac{df}{ds},$$

$$g_2(\zeta, \zeta_0) = \frac{e_{15}}{c_{44}(1 + k_{15}^2)} g_5(\zeta, \zeta_0), \quad g_5(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0}, \quad H_1(x) = \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x),$$

$$g_3(\zeta, \zeta_0) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} H_0^{(1)}(\gamma r_0), \quad g_4(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi}}{\zeta - \zeta_0}, \quad r_0 = |\zeta - \zeta_0|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta - \zeta_0), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0).$$

Здесь  $\psi$  - угол между нормалью к контуру  $C$  и осью  $x_1$ .

Решение системы интегральных уравнений (7) существует для любой частоты  $\omega$ , не совпадающей с собственной. Определив функции  $\rho(\zeta)$  и  $f(\zeta)$ , по формулам (3) с использованием представлений (6) можно вычислить все компоненты электроупругого поля в области и на границе цилиндра.

Найдем, например, выражение для плотности распределения электрических зарядов  $q(\beta)$  на  $k$ -м электроде. Вводя параметризацию контура  $C$  с помощью равенств  $\zeta = \zeta(\beta)$ ,  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$  ( $0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi$ ), и учитывая то, что цилиндр контактирует с вакуумом, можно записать

$$q(\beta) = D_n(\beta), \quad \alpha_{2k-1} < \beta < \alpha_{2k}. \quad (8)$$

Здесь  $D_n(\beta)$  представляет собой нормальную компоненту вектора электрической индукции на соответствующем участке контура  $C$ . Используя интегральное представление (6) для функции  $F^*(x_1, x_2)$ , находим с учетом (8) и (4)

$$q(\beta_0) = -\varepsilon_{11} \int_N f'(\zeta) \operatorname{Im} \frac{e^{iN\zeta}}{\zeta - \zeta_0} ds, \quad \zeta_0 \in C_{\varphi_k}, \quad (9)$$

где  $C_{\varphi_k}$  - часть контура  $C$ , на которой расположен  $k$ -й электрод.

Интегрируя выражение (9) по переменной  $\beta_0$  в пределах от  $\alpha_{2k-1}$  до  $\alpha_{2k}$ , получим амплитудное значение суммарного заряда на  $k$ -м электроде. Ток, протекающий через данный электрод, можно определить по формуле

$$I = \operatorname{Re} \left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\alpha_{2k-1}}^{\alpha_{2k}} q(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \right\}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0}. \quad (10)$$

Равенство (10) позволяет найти антирезонансные частоты, при которых  $I = 0$ .

Ниже рассмотрим один из способов численного решения системы (7). Построим интерполяционный полином Лагранжа для искомых функций  $p(\zeta)$  и  $f'(\zeta)$  в узлах  $\beta_j = 2\pi(j-1)/N$  ( $j = \overline{1, N}$ ). Такой полином имеет вид (например, [2])

$$L_N[p_*(\beta); \beta] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j^0 \sin \frac{N(\beta_j - \beta)}{2} \operatorname{cosec} \frac{\beta_j - \beta}{2}, \quad p(\zeta) = p_*(\beta), \quad p_j^0 = p_*(\beta_j), \quad (11)$$

$$L_N[f_*'(\beta); \beta] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^0 \sin \frac{N(\beta_j - \beta)}{2} \operatorname{cosec} \frac{\beta_j - \beta}{2}, \quad f(\zeta) = f_*(\beta), \quad f_j^0 = f_*'(\beta_j).$$

Отметим, что формулы (11) справедливы для нечетного числа узлов разбиения контура  $C$ . Интегрирование второй формулы (11) с использованием равенства [3]

$$\int \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} dx = 2 \sum_{k=1}^m \frac{\sin 2kx}{2k} + x$$

приводит к следующему выражению для функции  $f_*(\beta)$ :

$$M_N[f_*(\beta); \beta] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^0 \Omega_j(\beta) + A, \quad (12)$$

$$\Omega_j(\beta) = -2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin k(\beta_j - \beta) - \sin k\beta_j}{k} + \beta.$$

Фигурирующая здесь константа  $A$  должна определяться из условия периодичности функции  $f_*(\beta)$ , которое в силу (12) имеет вид

$$\sum_{j=1}^N f_j^0 = 0. \quad (13)$$

Используя (12), находим также квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} f_*(\beta) G(\beta, \beta^*) d\beta = \frac{2\pi}{N^2} \sum_{j=1}^N f_j^0 \sum_{m=1}^N \Omega_{jm} G(\beta_m, \beta^*) + A \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N G(\beta_m, \beta^*), \quad (14)$$

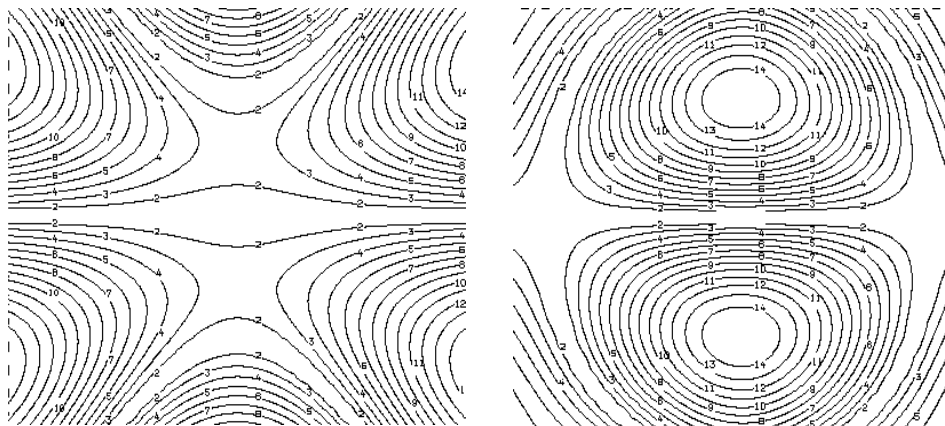
где  $\Omega_{jm} = \Omega_j(\beta_m)$ . В узлах коллокации  $\beta_l^* = \pi(2l-1)/N$  ( $l = \overline{1, N}$ ) при нечетном значении  $N$  полином (11) принимает значения

$$L_N[p_*(\beta); \beta_l^*] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j^0 (-1)^{l+j} \operatorname{cosec} \frac{\beta_l^* - \beta_j}{2} \quad (l = \overline{1, N}). \quad (15)$$

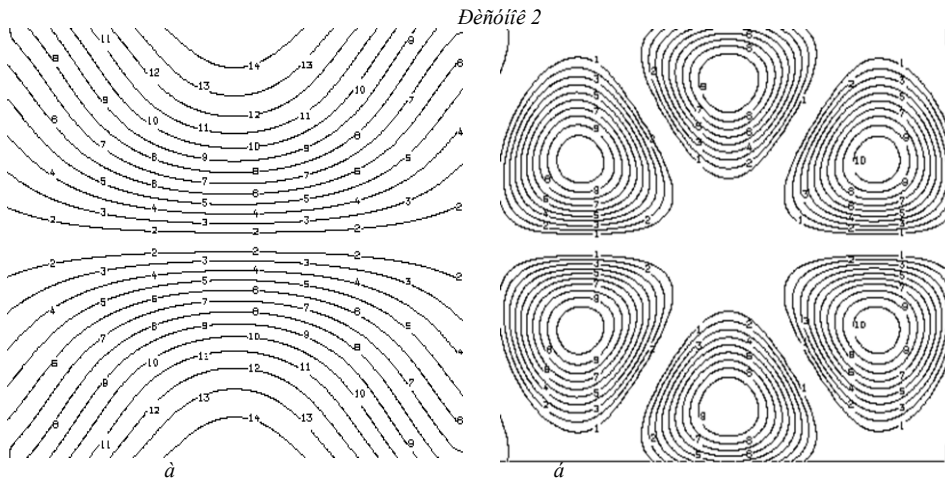
Для сингулярного интеграла в (7) имеет место формула, аналогичная формуле вычисления регулярных интегралов:

$$\int_0^{2\pi} f_*'(\beta) \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta(\beta) - \zeta_0(\beta_l^*)} s'(\beta) d\beta = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N f_j^0 \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0(\beta_l^*)}}{\zeta(\beta_j) - \zeta_0(\beta_l^*)} s'(\beta_j). \quad (16)$$

Заменяя теперь интегралы в (7) конечными суммами по формулам (14), (16) и привлекая равенства (11) - (13) и (15), приходим к системе  $2N+1$  алгебраических уравнений относительно значений функций  $\rho(\zeta)$  и  $f'(\zeta)$  в узлах интерполяции  $\beta_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) и постоянной  $A$ .



а



Дèñòòòè 2

а

Дèñòòòè 3

В качестве примера рассмотрим круговой цилиндр (материал - керамика  $PZT-4$  [1]) с двумя симметрично расположенными электродами с разностью амплитуд потенциала  $2\Phi^*$ . Для этого случая на рис. 2а и 2б представлены линии уровня величины  $|U_3|$  в области цилиндра при  $\gamma R = 4$  и 5 соответственно ( $R$  - радиус цилиндра). Линии уровня величины  $|\Phi|$  при  $\gamma R = 5$  и 8 иллюстрируются на рис. 3а и 3б. Расчетные параметры принимались

равными:  $\alpha_1 = 5\pi/14$ ,  $\alpha_2 = 9\pi/14$ ,  $\alpha_3 = 19\pi/14$ ,  $\alpha_4 = 23\pi/14$ . Графики,

характеризующие распределение величин  $\delta = c_{44}|U_3/\Phi^*|$  и  $\mu = |D_n/\epsilon_{11}\Phi^*|$  на контуре  $C$ , приведены на рис. 4 и 5. Кривые 1-4 на рис. 4 построены для значений  $\gamma R = 1, 2, 2.5$  и 3.5; на рис. 5 - для значений  $\gamma R = 0.01, 2$  и 5 соответственно. В расчетах принимали параметр  $N = 201, 251$  и 311, дальнейшее увеличение  $N$  практически не уточняло результатов.

Как следует из [1], плотность электрических зарядов на краях электродов обладает особенностью типа квадратного корня, что согласуется с графиками на рис. 5. Отметим существенное влияние частоты возбуждения на поведение электроупругих величин в исследуемых областях.

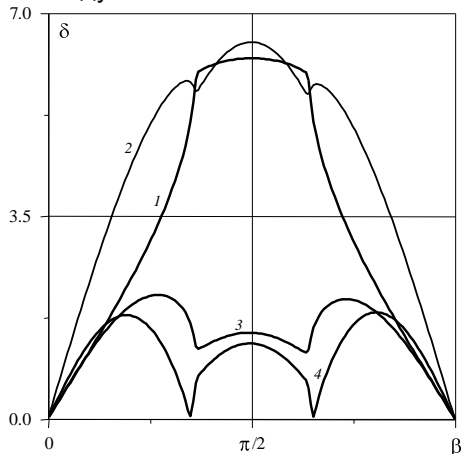


Рисунок 4

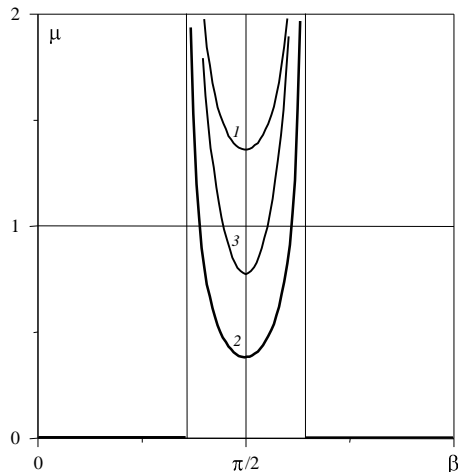


Рисунок 5

При определенных значениях частоты  $\omega$  система входит в состояние резонанса. Для иллюстрации этого явления на рис. 6 дано изменение величины  $Q^* = |Q / \varepsilon_{11} \Phi^*|$  в функции нормализованного волнового числа  $\gamma R$  в окрестности первых двух собственных частот колебаний ( $Q$  - суммарный заряд на электроде). Нормализованные волновые числа, соответствующие первым двум резонансам, приблизительно равны  $\gamma^{(1)} R = 1.66$  и  $\gamma^{(2)} R = 4.11$ .

На рис. 7 приведены зависимости  $Q_1^* = |Q_1 / \varepsilon_{11} \Phi_1^*|$  в функции  $\gamma R$  для первого из четырех электродов, расположение которых фиксируется значениями  $\alpha_k = (2k-1)\pi/8$  ( $k = \overline{1,8}$ ). В первом варианте расчета электрические потенциалы задавали равными  $\Phi_j^* = (-1)^{j+1}$  В ( $j = \overline{1,4}$ ; кривые 1), во втором -  $\Phi_1^* = 1$  В,  $\Phi_2^* = 1$  В,  $\Phi_3^* = -1$  В,  $\Phi_4^* = -1$  В (кривые 2).

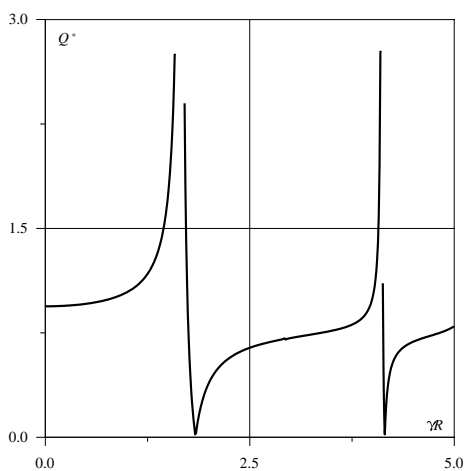


Рисунок 6

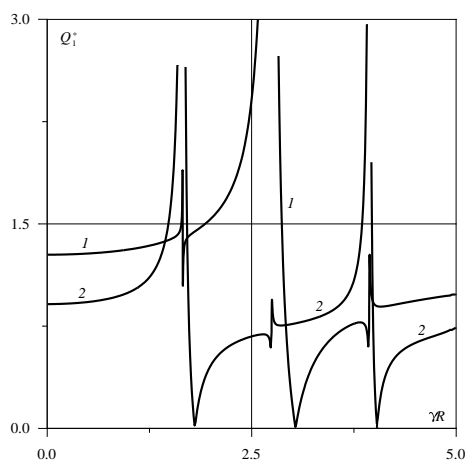
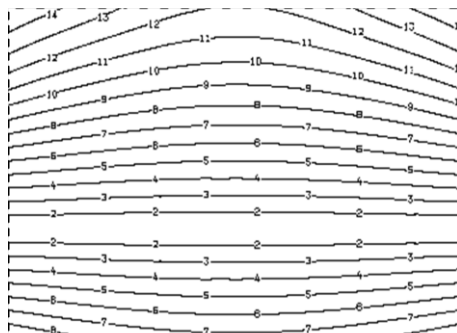
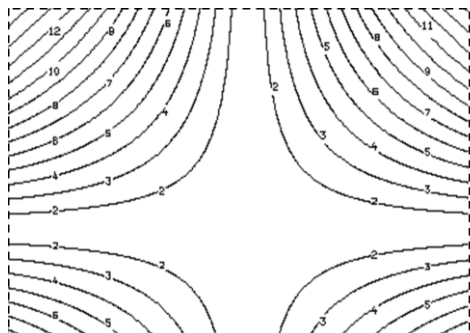


Рисунок 7

Линии уровня величины  $|U_3|$  в области цилиндра при  $\gamma R = 1$  для первого и второго вариантов нагружения изображены на рис. 8а и 8б соответственно (длина стороны квадрата составляет 0.7 от диаметра круга).



В заключение отметим, что при численном решении системы интегродифференциальных уравнений (7) по указанной выше схеме, в силу того, что некоторые ее ядра терпят разрывы, а плотности имеют особенности на краях электродов, для достижения удовлетворительной точности следует брать значительное число узлов разбиения контура сечения цилиндра, что приводит к увеличению процессорного времени. Несмотря на этот недостаток, рассмотренный подход привлекает своей универсальностью, позволяя исследовать различные варианты нагружения цилиндра без какого-либо принципиального усложнения алгоритма решения задач.

## SUMMARY

*Antiplane problem of the electroelasticity for the cylinder with arbitrary cross-section, an excitation of which has been done through by means of the electrodes system, set on its surface is considered. The initial boundary-value problem is reduced to the system of integro-differential equations of the second kind. The numerical realization scheme of constructed algorithm is suggested. The examples of calculations are presented.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. К.: Наук. думка, 1984. 344 с.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 799 с.