

Продовження роботи у цьому напрямку автори бачать в безпосередньому застосуванні методів розв'язання задач з параметрами до прикладних задач.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ З КРИХКОЮ МАТРИЦЕЮ, ХАОТИЧНО АРМОВАНОЮ КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Долгих В.М., УАБС, Шаповалов С.П., СумДУ

Руйнування композитного матеріалу з крихкою матрицею розпочинається з розвитку тріщин у матриці. Волокна, що перетинають тріщину, чинять опір її розкриттю, що приводить до збільшення межі міцності композита.

Метою досліджень є визначення міцності композитного матеріалу в залежності від геометричних і механічних характеристик його компонентів.

Нехай крихка матриця хаотично армована короткими гнучкими волокнами, послаблена плоскою дископодібною тріщиною радіуса a . На нескінченності, перпендикулярно тріщині, діє напруга σ^∞ , що розтягує, (мал.1).

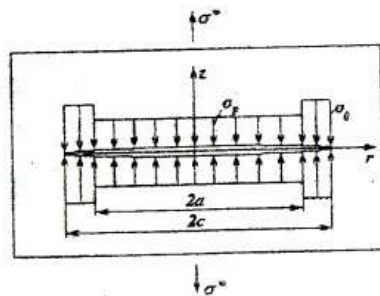


Рис. 1. Схема композита з тріщиною

Область $0 \leq r \leq a$ відповідає розірваним зв'язкам між берегами тріщини. Замінімо дію волокон, що стримують розкриття тріщини, рівномірно розподіленими по її поверхні навантаженнями σ_p . Вважаємо, у кільцевій області $a \leq r \leq c$ протилежні береги тріщини притягаються з постійною напругою σ_0 , якщо відстань між ними не перевищує граничної величини

СЕКЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

розкриття тріщини δ_k . Величина σ_0 дорівнює межі міцності композита. Умова поширення тріщини має вигляд [1]:

$$2w(a,0) = \delta_k \quad (1)$$

де $w(r, z)$ – переміщення уздовж осі Z точки з координатами (r, z) .

Переміщення точок матеріалу на поверхні тріщини [1]

$$w(r,0) = B_k \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^{c \sin \alpha} \frac{q(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}, \quad B_k = \frac{4(1 - \nu_k^2)}{\pi E_k}, \quad (2)$$

$$q(r) = \begin{cases} \sigma^\infty - \sigma_p, & 0 \leq r \leq a \\ \sigma^\infty - \sigma_0, & a < r \leq c \end{cases}, \quad c = a \left[1 - \frac{(\sigma^\infty - \sigma_p)^2}{(\sigma_0 - \sigma_p)^2} \right]^{-1/2}$$

де ν_k, E_k – коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга композита.

Переміщення точок на лінії, що розділяє зону зчеплення й зону розірваних зв'язків

$$w(a,0) = B_k (\sigma_0 - \sigma_p) a (1 - a/c). \quad (3)$$

Використовуючи критерій (1), знаходимо границю міцності композиту

$$\sigma_*^\infty = \sigma_p^* + (\sigma_0 - \sigma_p^*) \sqrt{\frac{2a_*}{a}} \sqrt{1 - \frac{a_*}{2a}}, \quad a \geq a_* = \frac{\pi E_k \sigma_k}{8(1 - \nu_k^2)}, \quad (4)$$

де a_* – критичний розмір тріщини. При $a = a_*$ досягається найбільша величина міцності композита

$$\sigma_*^\infty = \sigma_p^* + \sigma_m^*, \quad (\sigma_m^* = \sigma_0 - \sigma_p^*) \quad (5)$$

При подальшому збільшенні радіуса тріщини ($a > a_*$), гранична напруга σ_*^∞ зменшується, тому σ_*^∞ є руйнівним навантаженням для композитного матеріалу з дископодібною тріщиною радіусом $a \geq a_*$. Композит із тріщиною радіусом $a < a_*$ має міцність бездефектного матеріалу.

Оцінимо середню величину зусиль, що діють на береги тріщини з боку волокон, перетинаючи її в різних напрямках. Розглянемо пружне циліндричне волокно, анкероване в матрицю на глибину l під кутом θ до осі Z , що витягається силою P із пружної матриці (рис. 2)

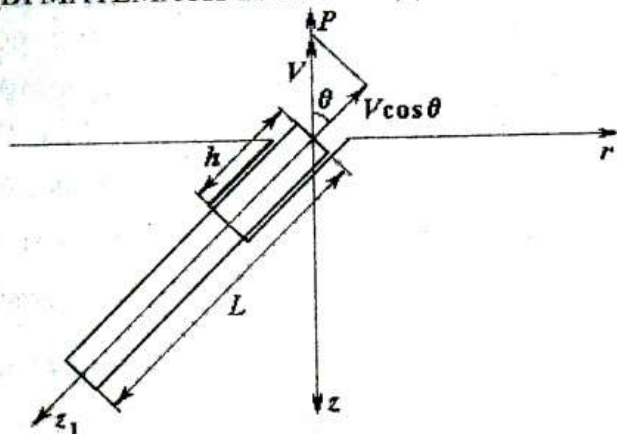


Рис. 2. Схема витягування волокна з матриці

При зростанні сили P максимальне дотичне напруження збільшується, досягаючи деякого граничного значення $\langle \tau \rangle$, при якому відбувається відшарування волокна від матриці. Припускаючи, що на ділянці відшарування діє рівномірно розподілене по поверхні волокна дотичне напруження тертя τ_s , знайдемо зусилля у волокні $\sigma_z^f(z)$ (6)

$$\sigma_z^f(0) = \left\{ 2\tau_s \sqrt{VE_f \cos \theta / (R\tau_s)} + 2\langle \tau \rangle \chi \text{th}[(l - h_\theta) / (\chi R)] \right\} \cos \theta, \quad l_0 \leq l \leq L, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_*$$

$$\sigma_z^f(0) = 2\tau_s l \cos \theta / R, \quad 0 \leq l < l_0 = \sqrt{RVE_f \cos \theta / \tau_s}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_*$$

$$\sigma_z^f(0) = E_f V \cos^2 \theta \text{th}(l / (\chi R)) / (\chi R), \quad \theta_* \leq \theta < \pi/2, \quad 0 \leq l \leq L.$$

Тут $h_\theta = \sqrt{RV \cos \theta E_f / \tau_s}$, $\theta_* = \arccos \left\{ \langle \tau \rangle R \ln(r/R) / (VG_m) \right\}$ – граничний кут (при $0 \leq \theta < \theta_*$ волокна відшаровуються, при $\theta_* \leq \theta < \pi/2$ – волокна не відшаровуються), $2L$ – довжина волокна. Далі прийmemo $\theta_* = \pi/2$.

Усреднюючи співвідношення (6) по орієнтаціям і глибинах анкерів, одержимо значення середньої напруги у волокні $\langle \sigma_f \rangle$, що перетинає тріщину. Наприклад, при статистично однорідному в площині армуванні воно дорівнює

$$\langle \sigma_f \rangle = \frac{4}{\pi L} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^L \sigma_z^f(l, \theta) dl = \frac{8\tau_s}{\pi} \left\{ 0,8741 \sqrt{\frac{VE_f}{R\tau_s}} + \chi \frac{\langle \tau \rangle}{\tau_s} - \frac{\pi VE_f}{8 L \tau_s} \right\} \quad (7)$$

СЕКЦІЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Кількість волокон N , що перетинають поверхню тріщини площею F при статистично однорідному об'ємному армуванні визначається за формулою $N = \mu_f F / (2f)$, при площинному армуванні $N = 2\mu_f F / (\pi f)$, де μ_f – об'ємна доля волокон, f – площа поперечного перерізу волокна. Межі міцності композита $\sigma_k = \langle \sigma_f \rangle \mu_f / 2 + \sigma_m (1 - \mu_f)$ – для об'ємного армування, (8)

$$\sigma_k = \langle \sigma_f \rangle \mu_f / \pi + \sigma_m (1 - \mu_f) \text{ – для площинного армування (9)}$$

В таблиці 1 порівнюються розраховані й експериментально визначені [2] межі міцності на розтягання склогіпсу і склоцементу. Характеристики композицій:

а) склогіпс – $E_m = 1,7 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_m = 2,75 \text{ MN/m}^2$,
 $E_f = 7,6 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\tau_s = 5,52 \text{ MN/m}^2$, $2L = 43 \text{ mm}$

б) склоцемент – $E_m = 1,7 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_m = 2,75 \text{ MN/m}^2$,
 $E_f = 7,6 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\tau_s = 10,34 \text{ MN/m}^2$, $2L = 34 \text{ mm}$

Скляні нитки складаються з 204 моноволокон, міцністю на розтягання $\sigma_f = 1210 \text{ MN/m}^2$, ефективний діаметр нитки $d = 0,144 \text{ mm}$. Армування в обох випадках – статистично однорідне в площині. При розрахунках покладалося $\langle \tau \rangle / \tau_s = 3$, $\delta_k = 2,2 \div 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$.

Матеріал	Склогіпс	Склоцемент
Об'ємна частка волокон	0,047; 0,089	0,0325
Межа міцності на розтягання:		
розрахований	12,39 ; 21,0	13,38
експериментальний	13,8 ; 21,8	13,4

ЛІТЕРАТУРА

1. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. Думка, 1968. – 246 с.
2. Материалы, армированные волокном /пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1982. – 180 с.