ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА – ОСТРОГРАДСКОГО КАК КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

проф. каф. ТММ СевНТУ Бохонский А.И.,
доц. каф. физики СВМИ Мозолевская Т.В.

Принцип действия Гамильтона-Остроградского используется как критерий оптимальности при решении задач синтеза оптимального управления движением деформируемых объектов. Движение в Природе оптимально в смысле существования некоторого критерия оптимальности и принцип действия может рассматриваться как такой критерий.

Для обоснования существования оптимального управления переносным движением упругого объекта привлекается принцип Гамильтона-Остроградского, т.е. для управляемой системы действие

$$J = \int_0^{t_1} \left(T - \Pi + A^e\right) dt \qquad (1)$$

в истинном движении принимает стационарное значение.

Пример. Для упругой системы с одной степенью свободы кинетическая энергия в переносном движении $T = mV_e^2/2$, где m – масса объекта; V_e – скорость. Потенциальная энергия, накапливаемая в результате оптимального (быстрого) движения $\Pi = cS_e^2/2n^2$, где c – коэффициент жесткости; S_e – общее перемещение объекта в произвольный момент времени; $n = t_1 / t_c$, где t_1 – общее время движения; t_c – период свободных колебаний объекта. Параметр n учитывает долю деформирования объекта за счет энергии переносного движения.

Работа управляющего воздействия $A^e = U_e^* S_e$, где $U_e^* = mS_e^* p^2$, а $S_e^* = V_{cp} t = Lt/t_1$; L – общее перемещение объекта за время движения t_1; $V_{cp} = L / t_1$ – средняя скорость движения.

Функционал (1) принимает вид:

$$J = \int_0^{t_1} \left(\frac{mV_e^2}{2} - \frac{cS_e^2}{2n^2} + \frac{mLp^3}{2\pi} tS_e \right) dt . \qquad (2)$$

Уравнение Эйлера $F_{S_e} - \frac{d}{dt} F_{\dot{S}_e} = 0$, т.е.:

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} + p^2 S_e = \frac{Lp^3}{2\pi} t. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) с учетом $S_e(0) = 0$ и $\dot{S}_e(0) = V_e(0) = 0$ (движение из состояния абсолютного покоя):

$$S_e(t) = L(pt - \sin pt)/2\pi ,$$

и

$$V_e(t) = \dot{S}_e(t) = Lp(1 - \cos pt)/2\pi ;$$
$$U_e(t) = \dot{V}_e(t) = Lp^2 \sin pt / 2\pi . \qquad (4)$$

Функции $S_e(t)$, $V_e(t)$ и $U_e(t)$ удовлетворяют краевым условиям переносного движения: $U_e(0) = 0$, $U_e(t_1) = 0$, $V_e(0) = 0$, $S_e(0) = 0$ и дополнительным краевым условиям в виде моментных соотношений:

$$\int_0^{t_1} U_e(t) dt = 0; \qquad \int_0^{t_1} V_e(t) dt = L.$$

В относительном движении уравнение $\ddot{x}_r(t)+\omega^2 x_r(t)= - Lp^2 \sin pt/2\pi$ и его решение $\left(x_r(0)=0,\quad \dot{x}_r(0)=0\right)$:

$$x_r(t)=\frac{Lp^2}{2\pi\left(\omega^2-p^2\right)}\left(\frac{p}{\omega}\sin\omega t-\sin pt\right).$$

Моментные соотношения в относительном движении при $t = t_1$:

$$\int_0^{t_1} U_e(t)\cos\omega t dt = 0; \qquad \int_0^{t_1} U_e(t)\sin\omega t dt = 0. \tag{5}$$

Соотношения (5) с учетом (4) и $p = \omega / n$, $t_1 = 2\pi / p$ преобразуются в систему трансцендентных уравнений:

$$\cos 2n\pi - 1 = 0, \qquad \sin 2n\pi = 0. \tag{6}$$

Система (6) имеет соответствующие смыслу задачи решения: n = 2, 3, 4. Следует отметить, что для управлений, при которых $\int_0^{t_1} U_e(t)dt=0$, $U_e(0)=0$ и $U_e(t_1)=0$, существуют такие n, что за минимальное время T происходит перемещение упругого объекта из исходного в конечное состояние абсолютного покоя.

Всякому кососимметричному оптимальному управлению переносным движением упругого объекта с одной степенью свободы соответствует такое минимальное время движения, за которое осуществимо перемещение объекта из начального в конечное состояние абсолютного покоя (с допущением колебаний только во время движения).

Принцип действия как критерий оптимальности распространяется на управления переносным движением упругодеформируемых объектов с конечным числом степеней свободы.