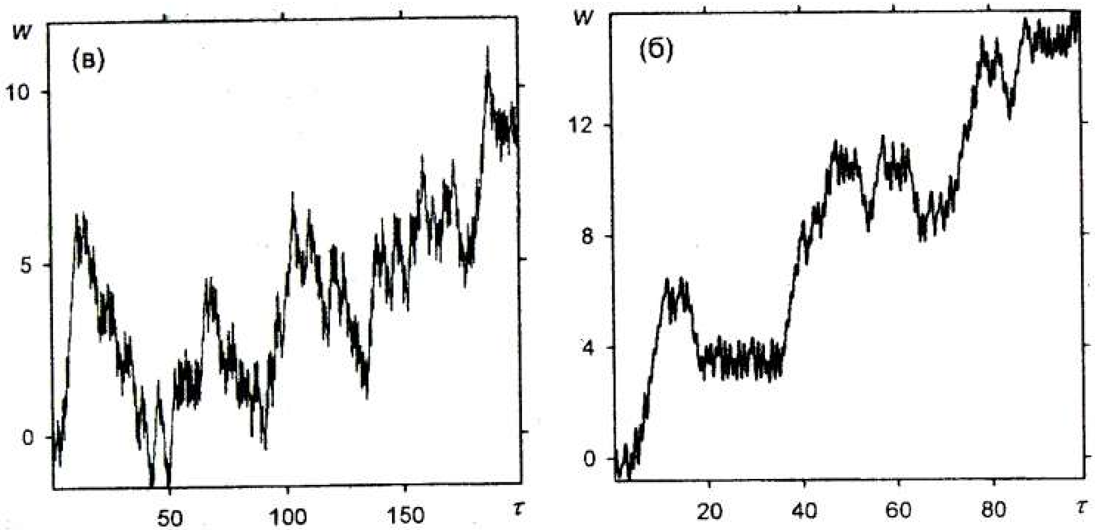

Е.С.Д. благодарит за поддержку INTAS, грант № 03-55-1180.

Литература

1. Denisov S.A., Denisova E.S. and Hänggi P. // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol.71, 016104.
2. Jung P., Kissner J.G. and Hänggi P. // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol.76, P. 3436-3439.
3. J.L. Mateos // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol.84, P. 258-261.

УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА ДЛЯ СИСТЕМ С ГАУССОВСКИМ ЦВЕТНЫМ ШУМОМ

Витренко А.Н.

Временная эволюция стохастической системы может описываться уравнением Ланжевена (УЛ). При таком подходе влияние флуктуирующей среды учитывается посредством источника внешнего шума. Возникает необходимость выразить статистические характеристики параметра состояния системы через известные статистические характеристики шума. Предположение гауссовского белого шума (ГБШ) значительно упрощает проблему, временная эволюция системы – марковский процесс и его одномерная плотность вероятности (ПВ) и ПВ перехода удовлетворяют уравнению Фоккера-Планка (УФП). В одномерном случае его стационарное решение может быть получено в общем случае, т.е. модели с ГБШ являются точно разрешимыми. Однако ГБШ имеет некоторые нефизические свойства, поэтому его применение не всегда оправдано. Гауссовский цветной шум (ГЦШ) – более реалистичная модель флуктуирующей среды. Как известно, в некоторых частных случаях УЛ с ГЦШ можно сопоставить УФП для одномерной ПВ. В данной работе предлагается альтернативный способ записи этого уравнения.

Рассматривается следующее УЛ

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\xi(t) \quad [x(0) = x_0], \tag{1}$$

где $x(t)$ – параметр состояния системы, $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые известные детерминированные функции, $\xi(t)$ – ГЦШ с нулевым средним и заданной корреляционной функцией $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = r(|t-t'|)$. Решение УЛ (1) будем искать в виде $x=x(t, w(t))$, где $w(t) = \int_0^t v(t')\xi(t')dt'$ – некоторый гауссовский процесс, $v(t)$ – неизвестная детерминированная функция. Подставив функцию $x=x(t, w(t))$ в (1), переходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = f[x(t, w(t))] \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} v(t) = g[x(t, w(t))] \end{cases}. \tag{2}$$

Интегрируя первое уравнение системы (2), получим неявное выражение для x

$$F(x) = F(x_0) + t + c(w(t)). \tag{3}$$

Здесь $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{dx'}{f(x')}$ и $c(w)$ – некоторая неизвестная функция.

Пусть F^{-1} – функция, обратная к F, тогда явное выражение для x можно записать в виде

$$x = F^{-1}[F(x_0) + t + c(w(t))]. \tag{4}$$

Определив из (3) частную производную $\frac{\partial x}{\partial w} = f(x)\frac{dc}{dw}$ и подставив ее во второе уравнение системы (2), получим уравнение

$$\frac{dc}{dw}v(t) = \frac{g\{F^{-1}[F(x_0)+t+c(w)]\}}{f\{F^{-1}[F(x_0)+t+c(w)]\}}, \qquad (5)$$

определяющее функции $v(t)$ и $c(t)$.

Одномерная ПВ $x(t)$ будет характеризоваться одномерной ПВ гауссовского процесса $w(t)$, которая полностью определяется дисперсией $\sigma_w^2(t)$:

$$\sigma_w^2(t) = \langle w^2(t)\rangle = \int_0^t\int_0^t dt_1 dt_2 v(t_1)v(t_2)r(|t_2 - t_1|). \qquad (6)$$

Рассмотрим гауссовский процесс $q(t) = \int_0^t v(t')\frac{\gamma(t)}{\lambda(t)}dt'$, где $\gamma(t)$ – ГБШ с нулевым средним и корреляционной функцией $\langle\gamma(t)\gamma(t')\rangle = 2\delta(t-t')$, $\lambda(t)$ – детерминированная функция. Определим $\lambda(t)$ таким образом, чтобы дисперсия $\sigma_q^2(t)$ процесса $q(t)$, равная

$$\sigma_q^2(t) = \langle q^2(t)\rangle = 2\int_0^t dt' \frac{v^2(t')}{\lambda^2(t')}, \qquad (7)$$

была тождественно равна дисперсии (6) процесса $w(t)$. Получим

$$\frac{1}{\lambda^2(t)} = \frac{1}{v(t)}\int_0^t dt' v(t') r(|t-t'|). \qquad (8)$$

Таким образом, от УЛ (1) можно перейти к УЛ

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) + g(y(t))\frac{\gamma(t)}{\lambda(t)} \quad [y(0) = x_0], \qquad (9)$$

при этом одномерные ПВ процессов $x(t)$ и $y(t)$ будут тождественно равны. УЛ (9), как известно, ставится в соответствие УФП, коэффициенты сноса и диффузии которого соответственно равны

$$A(x,t) = f(x) + g'(x)g(x)/\lambda^2(t), \quad B(x,t) = g^2(x)/\lambda^2(t). \qquad (10)$$

Следовательно, если уравнение (5) разрешимо, тогда УЛ (1) можно поставить в соответствие УФП с коэффициентами (10), функция $\lambda(t)$ в которых определяется из (8).