ЗМІСТ

ВСТУП

Предмет теоретичної механіки.

Механіка – це наука про найпростіші форми руху матерії, що зводяться до простих переміщень або переходів фізичних тіл з одного положення чи стану у просторі й часі в інший внаслідок взаємодії між матеріальними тілами.

Механіка охоплює цілий комплекс дисциплін, що вивчають рух і взаємодію різних матеріальних тіл. Наприклад, прикладна механіка, гідромеханіка, аеромеханіка, небесна механіка, біомеханіка тощо. Вивчення найбільш спільних властивостей руху і взаємодії будь-яких тіл є предметом спеціальної дисципліни, яку називають теоретична механіка.

Отже, теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Із визначення теоретичної механіки випливає, що вона належить до фундаментальних природничих наук.

Історія розвитку теоретичної механіки переконує у тому, що вона є однією з наукових основ техніки і технології, оскільки існує взаємний зв'язок між проблемами теоретичної механіки і проблемами техніки та технології.

Значення теоретичної механіки сьогодні безупинно зростає. Найскладніші проблеми техніки і технології, що постійно виникають у зв’язку з розвитком нових видів виробництва і нових технічних засобів, які вже не можна розв’язати на основі одних тільки дослідних даних, потребують для свого розв’язання моделювання на основі попереднього точного розрахунку і наукового передбачення, що спирається на глибокі знання законів і методів теоретичної механіки.

Теоретична механіка широко застосовує методи абстракції, узагальнення, математичні методи, методи формальної логіки. Критерієм істинності наших знань є досвід і практика. Таким чином, теоретична механіка має справу не з самими матеріальними об'єктами, а з їх моделями.

Теоретична механіка має велике значення у підготовці інженерних кадрів. Вона є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія механізмів і машин тощо. Знання законів теоретичної механіки, що відображають об'єктивно існуючі взаємозв'язки і взаємообумовленості механічних рухів і перетворення енергії, дає змогу науково передбачити хід процесів у нових задачах, що виникають при розвитку науки, техніки і технології.

Основою теоретичної механіки є закони І. Ньютона, тому вона називається ньютонівською, класичною механікою, на відміну від інших напрямів у механіці, що ґрунтуються на інших принципах, таких, як релятивістська механіка.

З огляду на історичні традиції за характером задач, що вивчаються, теоретична механіка поділяється на статику, кінематику, динаміку та аналітичну механіку.

Основні поняття теоретичної механіки.

До основних понять теоретичної механіки насамперед належать поняття матеріальної точки й абсолютно твердого тіла, що є ідеальними моделями матеріальних тіл з тим чи іншим ступенем абстракції конкретних властивостей реальних фізичних тіл.

Матеріальною точкою називається геометрична точка, якій приписана певна маса. Наприклад, вивчаючи рух планет навколо Сонця, їх розглядають як матеріальні точки, в кожній з яких зосереджена уся маса відповідної планети, абстрагуючись при цьому від розмірів планет.

З поняттям матеріальної точки тісно пов'язане поняття про систему матеріальних точок.

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємозв'язані між собою.

Окремим випадком системи матеріальних точок є абсолютно тверде тіло.

Абсолютно твердим тілом називається тіло, яке складається з системи матеріальних точок, що неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною. Надалі абсолютно тверде тіло називатимемо просто твердим тілом, або тілом.

Зазначимо, що абстракція абсолютно твердого тіла дає змогу вивчати механічний рух тіл, не пов'язаних з існуючою зміною їхньої форми, зокрема з деформацією. Вивчення механічних рухів тіл, що залежать від їх деформованості, а також руху рідини і газів, приводять до нової абстракції у вигляді поняття суцільного середовища.

Основні закони класичної механіки.

Як зазначалося, в основі класичної механіки лежать закони І. Ньютона, а також система аксіом, що становлять певні знання, накопичені людством у галузі механіки.

Система аксіом наводиться в частині "Статика абсолютно твердого тіла", а докладний аналіз законів Ньютона – в частині "Динаміка". Тут обмежимося лише формулюванням цих законів, що є фундаментом класичної механіки.

Перший закон Ньютона. Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою, або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Перший закон називають законом інерції. Цей закон встановлює головну властивість реальних фізичних тіл зберігати свій стан: руху, якщо воно рухається, або спокою, якщо воно перебуває у стані спокою.

Другий закон Ньютона. Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює прикладеній силі і відбувається за напрямом тієї прямої, по якій ця сила діє.

Цей закон, що встановлює зв'язок між силою і прискоренням точки, є основним законом динаміки.

Третій закон Ньютона. Дія завжди дорівнює протидії і протилежно напрямлена; або взаємодії двох тіл дорівнюють одна одній і напрямлені в протилежні боки.

Як бачимо, закони Ньютона сформульовані для матеріальної точки, що рухається в інерціальній системі координат.

Поширення законів Ньютона на систему матеріальних точок і тіл, на які діє довільна система сил, і пристосування їх до неінерціальних (рухомих) систем координат, а також поширення методів теоретичної механіки на інші немеханічні системи і становить головний зміст курсу теоретичної механіки.

РОЗДІЛ 1. ВИЗНАЧЕННЯ, АКСІОМИ ТА НАЙПРОСТІШІ ТЕОРЕМИ СТАТИКИ

1.1 Предмет статики. Основні визначення і поняття

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил в інші, що еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на тверде тіло.

Одним з основних понять у статиці, як і в усій механіці, є поняття про силу. Величина, що є мірою механічної взаємодії матеріальних тіл, називається силою. Сила, що діє на тіло, є вектором. Вона характеризується точкою прикладення, напрямом і величиною. У теоретичній механіці силу прийнято позначати $\vec{F}$. На рис. 1.1 $\vec{F}$ – сила, A – точка прикладення сили, пряма AB – лінія дії сили.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) за одиницю сили беруть один ньютон (1Н). Ньютон – це така сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м·с$^{-2}$ (1Н = 1кг·м·с$^{-2}$)

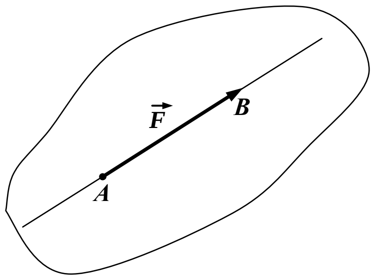


Рисунок 1.1

Наведемо деякі поняття і визначення, які знадобляться надалі.

Матеріальна точка перебуває в рівновазі, якщо вона перебуває у стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху.

Система матеріальних точок перебуває в рівновазі, якщо всі точки системи перебувають у спокої або рухаються рівномірно, прямолінійно з однаковою швидкістю за величиною і напрямом.

Зрівноваженою (або еквівалентною нулю) називається система сил, що залишає в рівновазі матеріальну точку, на яку вона діє.

Дві системи сил еквівалентні, якщо, не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, їх можна перетворити одна в одну.

Рівнодійною $\vec{R}$ називається сила, еквівалентна заданій системі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, позначається $\vec{R} \backsim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$.

В основі статики лежить обмежена кількість істин, що називаються аксіомами, в яких відображені властивості сил, що діють на тіло, або систему тіл. Ці властивості сил установлені дослідом і численними спостереженнями.

1.2 Аксіоми про дві сили

Аксіома I (про дві сили). Дві сили, прикладені до твердого тіла, взаємно зрівноважуються (еквівалентні нулю) тільки тоді, коли вони однакові за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежних напрямах (рис. 1.2).

$$\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}, \quad \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| . \qquad (1.1)$$

Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла. У разі деформівного твердого тіла вона не завжди справедлива.

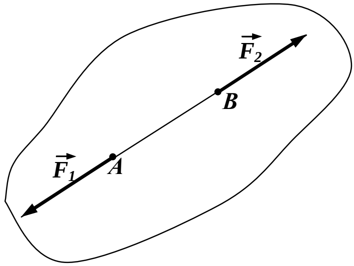


Рисунок 1.2

Аксіома II (про паралелограм сил). Рівнодійна двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил (рис. 1.3) і прикладена в тій самій точці.

Сформульоване можна записати так:

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F_i} \tag{1.2}$$

Модуль рівнодійної сили $\vec{R}$ визначається за теоремою косинусів:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\left(\widehat{F_1, F_2}\right)}\,. \tag{1.3}$$

Напрямок рівнодійної двох сил визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

На основі аксіоми II прийдемо до правила многокутника сил, за яким будь-яке число сил, прикладених в одній точці, можна складати геометрично. Рівнодійну системи сил визначаємо як векторну суму цих сил.

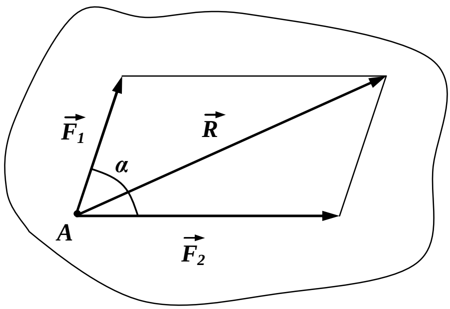


Рисунок 1.3

Для цього (рис. 1.4) з кінця вектора, що дорівнює першій силі $\vec{F}_1$, відкладаємо вектор, що дорівнює силі $\vec{F}_2$, і т.д. З'єднуючи початок першого вектора $\vec{F}_1$ з кінцем останнього $\vec{F}_n$, знаходимо рівнодійну силу

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ . \qquad (1.4)$$

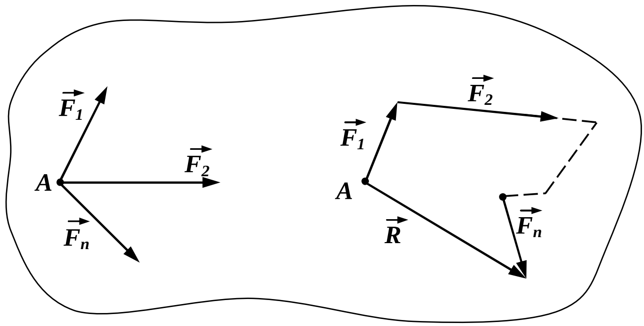


Рисунок 1.4

Одержаний таким чином многокутник називається многокутником сил, або силовим многокутником. На основі викладеного можна встановити умову рівноваги сил, прикладених у певній точці.

Дійсно, нехай у точці A (рис. 1.4) прикладена зрівноважена система сил (еквівалентна нулю).

Якщо побудувати многокутник цих сил, то початок першого вектора $\vec{F}_1$і кінець останнього $\vec{F}_n$ збігаються. Отже рівнодійна $\vec{R}$ зрівноваженої системи сил дорівнює нулю:

$$\vec{R} = 0, \quad \text{або} \ \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \qquad (1.5)$$

Многокутник цих сил виявляється замкненим. Останнє виражає умову рівноваги сил, прикладених у точці, у графічній формі.

1.3 Найпростіші теореми статики

Теорема 1 (про силу як ковзний вектор). Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести силу по лінії її дії в будь-яку точку.

Доведення. Нехай у точці A прикладено до тіла силу $\vec{F}$ (рис. 1.5). Виберемо на лінії дії цієї сили будь-яку точку B і прикладемо до неї дві зрівноважені сили $\vec{F}$ і $-\vec{F}$. На основі аксіоми I сила $\vec{F}$ у точці A і сила $-\vec{F}$ у точці B взаємно зрівноважуються (система сил $(\vec{F}, -\vec{F})$ еквівалентна нулю). Залишається сила $\vec{F}$, прикладена в точці B, що і треба було довести.

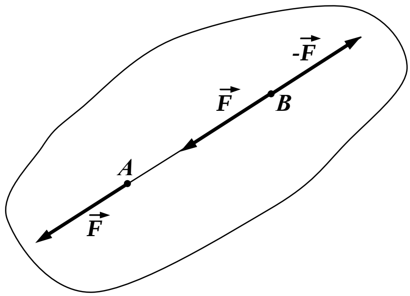


Рисунок 1.5

З теореми випливає, що сила, прикладена до твердого тіла, є ковзним вектором.

Теорема 2 (про три сили). Якщо тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їхні лінії дії перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай тверде тіло перебуває в рівновазі під дією непаралельних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (рис. 1.6), з яких $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$лежать в одній площині. Продовжимо лінії дії сил $\vec{F}_1$і $\vec{F}_2$ і знайдемо їхню точку перетину O, існування якої забезпечується умовою теореми.

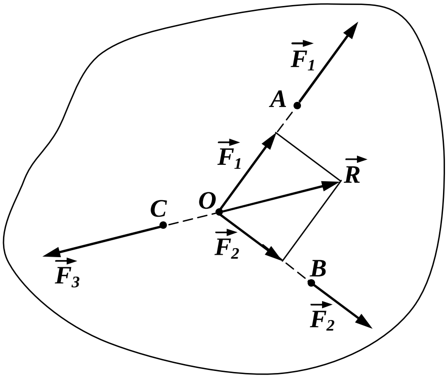


Рисунок 1.6

Перенесемо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ уздовж їхніх ліній дії у точку O і знайдемо рівнодійну $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Замінивши $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$їх рівнодійною $\vec{R}$, одержимо нову систему сил $(\vec{R}, \vec{F}_3)$, еквівалентну заданій $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$, тобто $(\vec{R}, \vec{F}_3) \backsim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$. Однак тепер можна припустити, що тіло перебуває в рівновазі під дією лише двох сил $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$. Це можливо з огляду на аксіому І, якщо $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$ мають загальну лінію дії. Отже, всі три сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ лежать в одній площині, і лінія дії сили $\vec{F}_3$ проходить через точку O. Теорему доведено.

Таким чином, для рівноваги системи трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, необхідно (але недостатньо), щоб лінії дії цих сил перетиналися в одній точці.

1.4 В’язі та їхні реакції. Аксіоми про в’язі

У теоретичній механіці розрізняють вільні і невільні системи матеріальних точок і, отже вільні і невільні тверді тіла.

Система матеріальних точок називається вільною, якщо на рух цих точок не накладено обмежень. В іншому разі система матеріальних точок називається невільною.

Тіла, або поля, що обмежують свободу руху системи матеріальних точок або твердого тіла, називаються в'язями. Якщо система матеріальних точок або тіло невільні, то вважають, що на них накладено в'язі.

Реакцією в'язі називається сила, з якою в'язь діє на систему матеріальних точок або тверде тіло. У разі невільної системи або твердого тіла сили поділяються на активні і реакції в'язей.

Активними називаються сили, що відомі і спричиняють своєю дією прискорення точок системи. Активні сили не залежать від в'язей. Реакції в'язей називають також пасивними силами, оскільки вони виникають лише тоді, коли на тіло діють активні сили. Розглянемо аксіоми про в'язі.

Аксіома III (про звільнення від в'язей). Не змінюючи механічного стану (руху або рівноваги) системи матеріальних точок або твердого тіла, в'язь, накладену на систему або тверде тіло, можна відкинути, замінивши дію в'язі її реакцією, прикладеною до цього тіла або системи в точці взаємодії тіла і в'язі.

З цієї аксіоми випливає, що невільні матеріальні точки, систему матеріальних точок або тверде тіло можна розглядати як вільні, якщо їх звільнити від в'язей, замінюючи дію останніх їхніми реакціями.

Аксіома IV (про накладення нових в'язів). Рівновага системи матеріальних точок або твердого тіла не порушиться при накладенні на них нових в'язей.

Аксіома V (про затвердіння). Якщо деформоване тіло перебуває в рівновазі, то рівновага його не порушиться, якщо, не змінюючи його форми, розмірів, положення у просторі, подати його у вигляді відповідного абсолютно твердого тіла.

Оскільки у цій аксіомі йдеться не про якесь фізичне затвердіння, а про накладення на частинку тіла нових в'язей, то її слід розглядати як окремий випадок аксіоми IV.

Аксіома про затвердіння дасть змогу надалі розв'язувати найпростіші задачі статики деформівних тіл (пасова передача, ланцюг, нитка тощо), застосовуючи до них методи статики твердого тіла.

1.5 Види в'язей і їхні реакції

Розглянемо види в'язей, що найчастіше трапляються при розв'язанні задач, і зазначимо, як визначити напрям реакцій цих в'язей. Щодо величин цих реакцій, то їх можна знайти з умов рівноваги, оскільки вони залежать від активних сил.

1. Якщо в'язь є ідеально гладенькою поверхнею, то точка A контакту тіла з цією поверхнею може вільно ковзати по ній. Тому реакція ідеально гладенької поверхні напрямлена по нормалі від поверхні. Ця реакція позначається через $\vec{N}$ – нормальна реакція (рис. 1.7).

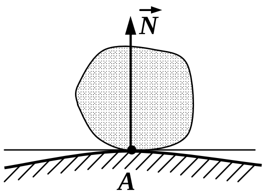


Рисунок 1.7

2. Якщо в'язь здійснюється ниткою, мотузкою або аналогічними тілами (шнуром, тросом, ланцюгом), то для спрощення постановки задач теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою, гнучкою і нерозтяжною. Реакція нитки напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення і позначається через $\vec{T}$ (рис. 1.8).

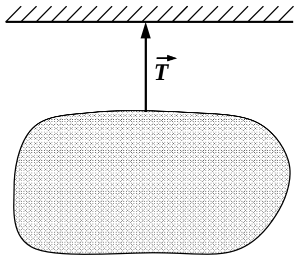


Рисунок 1.8

3. В'язі можуть бути виконані у вигляді шарнірів – циліндричних і сферичних (рис. 1.9). Напрям реакцій таких в’язей заздалегідь визначити не можна. Так у разі циліндричного шарніра (підшипника) (рис. 1.9*а*) реакція його розміщена в площині, перпендикулярній до його осі Oz. Невідомий вектор реакції в'язі в площині визначається двома складовими $\vec{R}_x$і $\vec{R}_y$ по осях Ox і Oy, величини яких знаходять з умов рівноваги.

Напрям реакції сферичного шарніра (підп’ятника) (рис. 1.9*б*) розкладають за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей Ox, Oy і Oz. Модулі та їх напрями визначають з умов рівноваги відповідних систем сил.

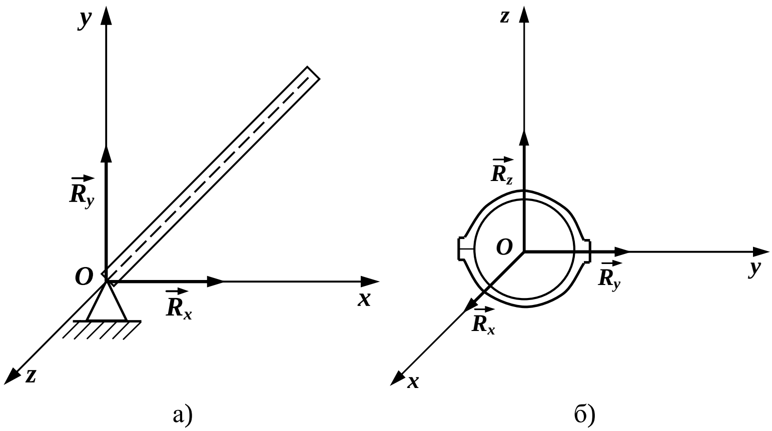


Рисунок 1.9

4. В’язь може здійснюватися у формі ідеальних стрижнів. Вагою таких стрижнів нехтують і вважають, що на їхніх кінцях є циліндричні шарніри. За аксіомою I стрижень перебуває в рівновазі під дією двох сил, прикладених до шарнірів. Ці сили рівні за величиною, діють по прямій, що з’єднує шарніри, і напрямлені в протилежні боки, тобто реакція ідеального стрижня також напрямлена по осі стрижня.

5. В’язь може здійснюватися у формі котків (рухомих шарнірів). Реакція котка напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка.

1.6 Система збіжних сил. Способи визначення рівнодійної системи збіжних сил

Системою збіжних сил називається система таких сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Нехай задано довільну систему збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, прикладених до твердого тіла (див. рис. 1.4). Перенесемо ці сили, як ковзні вектори, у точку перетину ліній їх дії. Потім, користуючись аксіомою про паралелограм сил, знайдемо рівнодійну цих сил. Рівнодійну $\vec{R}$ такої системи сил можна визначити графічно і аналітично.

Графічно рівнодійна сила визначається як замикальна сторона многокутника сил (див. рис. 1.4):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ . \tag{1.6}$$

Аналітично рівнодійну силу можна визначити за її проекціями на осі прямокутної системи координат. Тут і надалі застосовуємо праву систему координат. За теоремою про проекції векторної (геометричної) суми на осі координат дістанемо:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}, \qquad (1.7)$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} - проекції відповідних сил на осі координат.

Тоді модуль рівнодійної $\vec{R}$ запишемо у вигляді

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \qquad (1.8)$$

або

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}. \qquad (1.9)$$

Напрям рівнодійної сили визначається такими напрямними косинусами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{R},\vec{\imath}}\right) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{R},\vec{\jmath}}\right) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{R},\vec{k}}\right) = \frac{R_z}{R}. \qquad (1.10)$$

1.7 Умови рівноваги системи збіжних сил

Теорема. Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\vec{R} = 0. \qquad (1.11)$$

Умова (1.11) є геометричною умовою рівноваги системи збіжних сил. Необхідність умови рівноваги випливає з того, що задана система збіжних сил, прикладених до твердого тіла, еквівалентна одній силі – рівнодійній $\vec{R}$. Очевидно, що під дією однієї сили тіло перебуватиме в рівновазі лише тоді, коли ця сила дорівнюватиме нулю, що випливає з аксіоми про дві сили.

Доведемо достатність цієї умови. Для цього покажемо, що коли рівнодійна сила дорівнює нулю, то система збіжних сил перебуває у рівновазі. Задана система сил еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює нулю. З визначення зрівноваженої (еквівалентної нулю) системи сил, її можна відкинути, не порушуючи стану системи. Тоді на тіло не діють ніякі сили і воно за першим законом Ньютона перебуває у рівновазі. Оскільки

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0,$$

то многокутник сил має бути замкненим, тобто кінець останньої сили $\overrightarrow{F_n}$ збігається з початком першої сили $\vec{F_1}$, що виражає умова рівноваги системи збіжних сил у графічній формі.

Векторній рівності (1.11) відповідають три скалярні рівності: $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$, які, з урахуванням формул (1.7), перепишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \qquad (1.12)$$

Умови (1.12) є умовами рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі і формулюються так: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

У разі рівноваги системи збіжних сил, що лежать в одній площині, наприклад Oxy, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,. \qquad (1.13)$$

Умови рівноваги (1.12) і (1.13) називаються також рівняннями рівноваги. З них визначаються невідомі величини при розв’язанні конкретних задач. Якщо невідомими силами є реакції в’язей, то їх кількість не повинна перевищувати числа рівнянь рівноваги, оскільки інакше задача буде статично невизначеною і розв’язати її методами теоретичної механіки не вдається.

РОЗДІЛ 2. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. МОМЕНТ ПАРИ СИЛ

2.1 Момент сили відносно точки

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O (центра) (рис. 2.1) називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з центра O в точку A прикладення сили, на вектор $\vec{F}$:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.1}$$

Модуль цього векторного добутку

$$M_0(\vec{F}) = r \cdot F \sin\alpha. \tag{2.2}$$

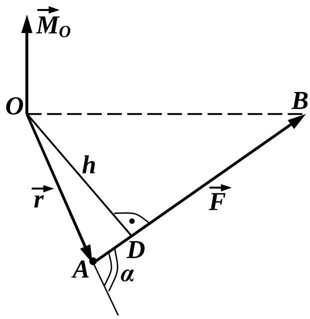


Рисунок 2.1

Опустимо перпендикуляр з точки O на лінію дії сили $\vec{F}$. Довжину цього перпендикуляра $OD = h$ назвемо плечем сили $\vec{F}$ відносно точки O. Тоді (2.2) запишемо у вигляді

$$M_0(\vec{F}) = h \cdot F. \tag{2.3}$$

Отже, момент сили відносно центра O чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече і напрямлений перпендикулярно до площини, що проходить через точку O і лінію дії сили, в той бік, звідки “обертання” тіла під дією сили навколо точки (або найкоротший поворот вектора $\vec{r}$ до напряму вектора $\vec{F}$) бачить спостерігач, який перебуває на кінці вектора-моменту, таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.2).

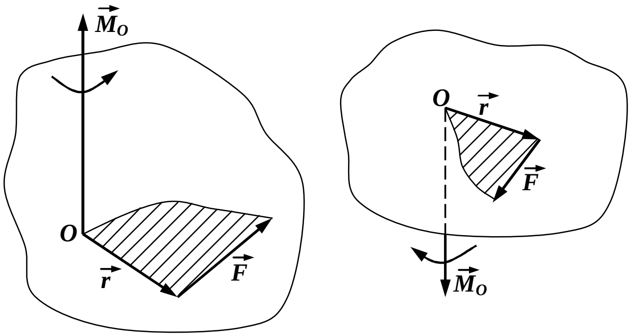


Рисунок 2.2

Очевидно, момент сили відносно точки має всі властивості векторного добутку. З формули (2.1) можна знайти проекції вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$ на координатні осі. Як відомо з векторної алгебри,

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

де x, y, z - координати точки A прикладення сили $\vec{F}$.

Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка і розкладаючи вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$на складові $M_{0x}(\vec{F})$, $M_{0y}(\vec{F})$, $M_{0z}(\vec{F})$ по осях координат, одержимо

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = M_{0x}(\vec{F})\vec{\imath} + M_{0y}(\vec{F})\vec{\jmath} + M_{0z}(\vec{F})\vec{k} = \\ = \vec{\imath}(yF_z - zF_y) + \vec{\jmath}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x). \qquad (2.5)$$

Порівнюючи ліву і праву частини рівності (2.5), маємо

$$\begin{aligned} M_{0x}(\vec{F}) &= (yF_z - zF_y), \\ M_{0y}(\vec{F}) &= (zF_x - xF_z), \\ M_{0z}(\vec{F}) &= (xF_y - yF_x). \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Модуль і напрям моменту сили відносно точки можна визначити ще так:

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{M_{0x}^2(\vec{F}) + M_{0y}^2(\vec{F}) + M_{0z}^2(\vec{F})},$$
$$\cos\left(\widehat{\vec{M_0}, \vec{\imath}}\right) = \frac{M_{0x}}{M_0}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{M_0}, \vec{\jmath}}\right) = \frac{M_{0y}}{M_0}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{M_0}, \vec{k}}\right) = \frac{M_{0z}}{M_0}. \quad (2.7)$$

Зауважимо, формули (2.6) легко одержати, користуючись правилом циклічної перестановки індексів.

Із визначення моменту сили відносно точки маємо:

1) якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно точки не зміниться;

2) момент сили відносно точки завжди дорівнює нулю, коли лінія дії сили проходить через цю точку (у цьому випадку плече h дорівнює нулю).

2.2 Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил

Теорема Варіньона. Момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів складових сил відносно того самого центра:

$$\vec{M}_0(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0\,(\vec{F_i}). \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай у точці A перетинаються лінії дії системи збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ (рис. 2.3). Позначимо через $\vec{r}$ радіус-вектор, проведений з точки O у точку A. Рівнодійну $\vec{R}$ заданої системи знайдемо, побудувавши многокутник сил. Тоді з визначення моменту сили відносно точки O маємо

$$\begin{aligned} &\vec{M}_0(\vec{R}) = \vec{r}\times\vec{R} = \vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n) = \\ &= \vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2+\cdots+\vec{r}\times\vec{F}_n = \\ &= \vec{M}_0(\vec{F}_1)+\vec{M}_0(\vec{F}_2)+\cdots+\vec{M}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_0\,(\vec{F}_i), \end{aligned} \tag{2.9}$$

що й треба було довести.

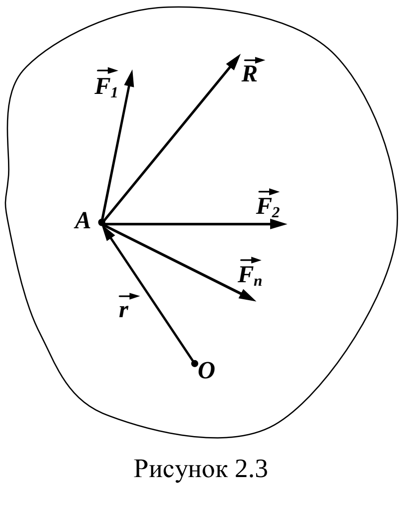


Рисунок 2.3

Якщо сили і точка O розміщені в одній площині, то їхні моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій. Тому момент рівнодійної такої системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї точки.

2.3 Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що лежить на цій осі (рис. 2.4). З цього визначення випливає, що моменти сил відносно координатних осей обчислюються за формулами (2.6). Ці формули, зокрема, показують, що момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі.

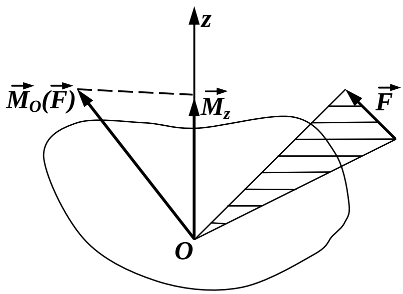


Рисунок 2.4

При розв’язанні конкретних задач моменти сил відносно осей зручно обчислювати більш наочнтм способом (рис. 2.5) за таким правилом:

1. Проводимо довільну площину N, перпендикулярну до осі Oz, і знаходимо точку O перетину цієї площини з віссю.

2. Проектуємо силу $\vec{F}$ на зазначену площину.

3. Обчислюємо момент проекції $\vec{F}_1$сили $\vec{F}$ на цю площину відносно точки O:

$$\vec{M}_z = \vec{M}_0(\vec{F}_1) = \vec{M}_z(\vec{F}) \ . \tag{2.10}$$

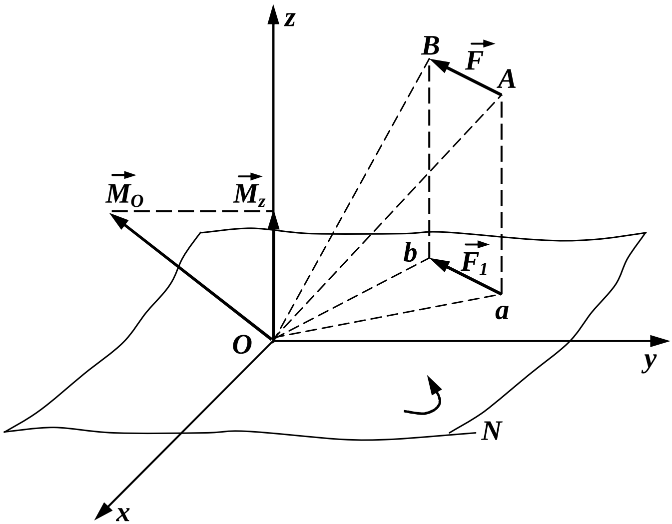


Рисунок 2.5

При цьому момент сили відносно осі вважається додатним, якщо спостерігач бачить з боку додатного напряму осі Oz, що сила $\vec{F}_1$ намагається повернути тіло навколо осі Oz проти ходу годинникової стрілки.

З визначення моменту сили відносно осі випливає, що він дорівнює нулю, якщо лінія дії сили і вісь лежать в одній площині.

2.4 Момент пари сил і його властивості

Парою сил називається система двох рівних за величиною сил $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, паралельних між собою, що напрямлені у протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії і прикладені до одного тіла (рис. 2.6).

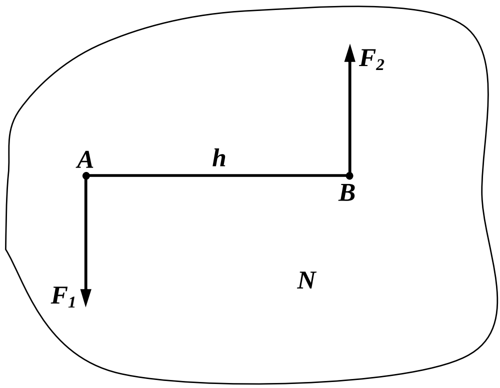


Рисунок 2.6

Площина N називається площиною дії пари сил, або площиною пари. Плечем пари h називається найкоротша відстань між лініями дії сил пари.

Момент пари цілком визначає статичну дію пари сил на тверде тіло, тобто є повною характеристикою механічної дії пари сил і дорівнює

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{M}_A(\vec{F}_2). \qquad (2.11)$$

Як бачимо, момент пари напрямлений перпендикулярно до площини дії пари у той бік, звідки "обертання" пари відбувається проти ходу годинникової стрілки. Модуль моменту пари дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на плече пари. Очевидно, що момент пари сил $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ - вектор вільний.

Пара сил, що діє на тверде тіло, утворює новий самостійний елемент статики, який разом з силою становить важливе поняття механіки. Основні властивості цього елемента і основні перетворення (це доведено теоремами) такі:

1. пару сил можна переносити в площині її дії, у тому числі й повертати на будь-який кут;

2. пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари;

3. можна змінювати сили, що утворюють пару та її плече, не змінюючи моменту пари;

4. декілька пар сил, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар:

$$\vec{M}(\vec{R}, -\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(\vec{F}_i, -\vec{F}_i). \qquad (2.12)$$

РОЗДІЛ 3. ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ І УМОВИ ЇЇ РІВНОВАГИ

3.1 Теорема про паралельне перенесення лінії дії сили

Теорема. Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, прикладену до цього тіла, можна перенести в будь-яку його точку паралельно самій собі, додаючи при цьому приєднану пару. Момент приєднаної пари дорівнює моменту цієї сили відносно центра зведення.

Доведення. Нехай до твердого тіла у точці A прикладено силу $\vec{F}$ рис. (3.1). У довільній точці O цього тіла прикладемо дві взаємно зрівноважені сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$, модулі яких $\left|\vec{F}'\right| = \left|\vec{F}''\right| = \left|\vec{F}\right|$, а лінії їх дії паралельні силі $\vec{F}$. Тоді сила $\vec{F}$ еквівалентна системі сил $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$. Проте сили $(\vec{F}, \vec{F}'')$ становлять пару. Тому сила $\vec{F}$ еквівалентна силі $\vec{F}'$, прикладеній у точці O, і парі сил $(\vec{F}, \vec{F}'')$ з моментом, що дорівнює моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O. Одержану таким чином пару сил $(\vec{F}, \vec{F}'')$ назвемо приєднаною парою. Теорему доведено.

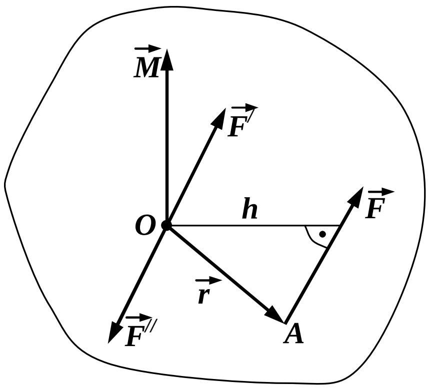


Рисунок 3.1

3.2 Головний вектор і головний момент системи сил. Основна теорема статики

Нехай задано довільну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що діють на тверде тіло. Головним вектором $\vec{F}$ цієї системи сил називається векторна сума всіх сил, які входять у систему:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, . \qquad (3.1)$$

Головним моментом такої системи сил відносно точки O (центра зведення) називається векторна сума моментів усіх сил, що входять у систему, відносно того самого центра:

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, . \qquad (3.2)$$

де $\vec{r}_i$ – радіус-вектор, проведений з центра O в точку прикладення сили $\vec{F}_i$.

Проектуючи ліві та праві частини виразів (3.1) і (3.2) на осі декартової системи координат $Oxyz$, легко встановити аналітичні вирази для головного вектора і головного моменту у вигляді:

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \, , F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \, , \qquad F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \, . \qquad (3.3)$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^{n} M_{0x}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) ,$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^{n} M_{0y}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \, , \qquad (3.4)$$

$$M_{0z} = \sum_{i=1}^{n} M_{0z}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) ,$$

де F_x, F_y, F_z, і M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} - проекції відповідно головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_0$ на осі координат.

Модулі і напрямні косинуси відповідно головного вектора та головного моменту визначаються відомими виразами.

Користуючись теоремою про паралельне перенесення сили, доведемо основну теорему статики.

Основна теорема статики. Довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, яка складається з однієї сили, що прикладена в довільно обраному центрі зведення і дорівнює головному вектору цієї системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно обраного центра зведення.

Доведення. Розглянемо довільну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рис. 3.2). Довільну точку O візьмемо за центр зведення. За доведеною в 3.1 теоремою перенесемо всі сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ у точку O. У результаті система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ виявиться еквівалентною системі сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$, прикладених у точці O (рис. 3.3а), і приєднаним парам сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2'')$,…,$(\vec{F}_n, \vec{F}_n'')$ (рис. 3.1), моменти яких $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ (рис. 3.3б) мають вигляд:

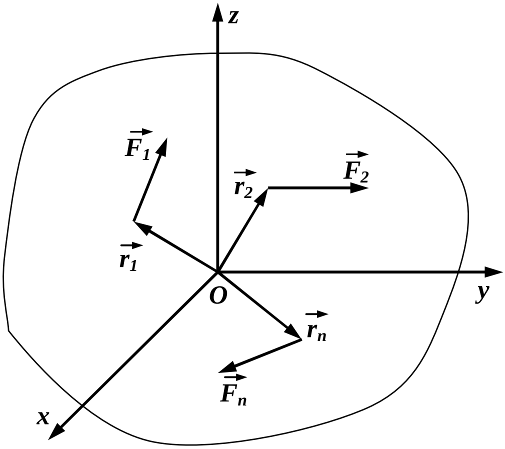
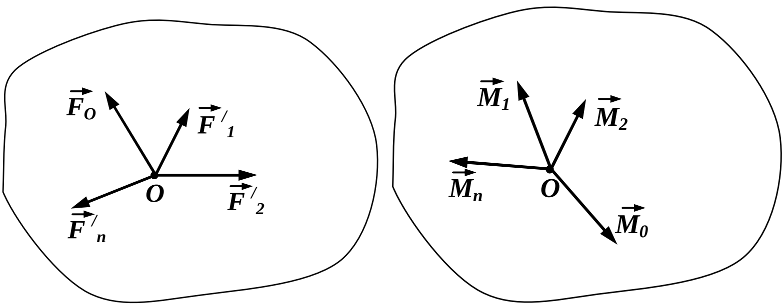


Рисунок 3.2

$$\begin{aligned}
&\vec{M}_1 = \vec{M}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1''\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{M}_0(\vec{F}_1),\\
&\vec{M}_2 = \vec{M}\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2''\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_0(\vec{F}_2),\\
&- -\\
&\vec{M}_n = \vec{M}\left(\vec{F}_n, \vec{F}_n''\right) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{M}_0(\vec{F}_n).
\end{aligned} \tag{3.5}$$



а) б)

Рисунок 3.3

Визначаючи тепер рівнодійну одержаної збіжної системи сил у точці O (рис. 3.3), а також результуючу пару для системи приєднаних пар, дістанемо вирази:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \cdots + \vec{F}_n' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,,$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \qquad (3.6)$$

$$+ \cdots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_i)\,,$$

що згідно з (3.1) і (3.2) є відповідно головним вектором і головним моментом, тому теорему доведено.

3.3 Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Нехай задано довільну просторову систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, .., \vec{F}_n)$, прикладених до твердого тіла. Для того щоб довільна просторова система сил була в рівновазі (еквівалентна нулю), необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю, тобто

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_i) = 0. \qquad (3.7)$$

Умови (3.7) називаються умовами рівноваги довільної системи сил у векторній (геометричній) формі.

Проектуючи векторні рівності (3.7) на осі координат, дістаємо умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{0x}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{0y}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{0z}(\vec{F}_i) = 0. \tag{3.8}$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно осей координат дорівнювали нулю. Таким чином, при розв'язуванні задач про рівновагу з рівнянь (3.8) можна визначити шість невідомих величин.

Якщо на тверде тіло діє система пар сил, то необхідна і достатня умова рівноваги такої системи, як випливає з умов (3.7) і властивостей пар сил, набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(\vec{F}_{i,} - \vec{F}_i) = 0. \tag{3.9}$$

тобто геометрична сума моментів пар дорівнює нулю.

3.4 Умови рівноваги системи сил в окремих випадках

1. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Розглянемо окремий випадок, коли всі сили, що діють на тверде тіло, паралельні між собою (рис. 3.4). У цьому разі можна напрямити одну з координатних осей (наприклад, вісь *Oz*) паралельно цим силам. Тоді з умов рівноваги (3.8) залишається лише три рівняння, а три перетворяться в тотожності. Дійсно, проекції сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, .., \vec{F}_n$ на осі *Ox* і *Oy* дорівнюють нулю. Оскільки сили паралельні осі *Oz*, то їхні моменти відносно осі *Oz* також дорівнюють нулю. Тоді з шести рівнянь (3.8) залишаються лише три:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} M_{0x}(\vec{F_i}) = 0, \ \sum_{i=1}^{n} M_{0y}(\vec{F_i}) = 0\,. \qquad (3.10)$$

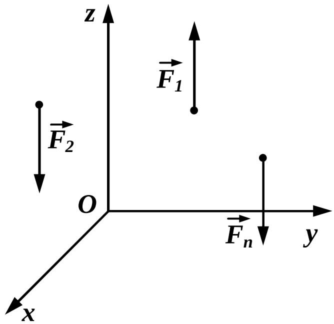


Рисунок 3.4

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, паралельна силам, і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

2. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Нехай система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, .., \vec{F}_n)$ задана у площині *Oxy* (рис. 3.5). За центр зведення візьмемо довільну точку *O*, що лежить у цій площині. Очевидно, що головний момент цієї системи сил перпендикулярний до площини, в якій лежать сили. Головний вектор заданої системи сил лежить у площині дії сил. Отже, з шести рівнянь рівноваги (3.8) залишається лише три:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} M_{0z}(\vec{F_i}) = 0. \qquad (3.11)$$

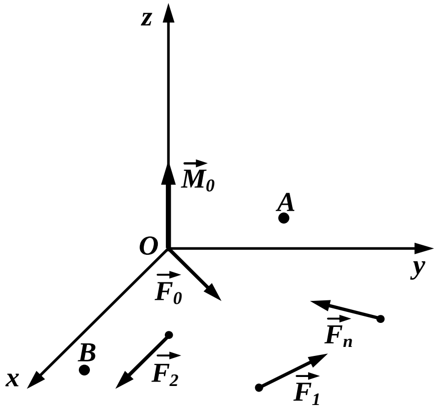


Рисунок 3.5

Таким чином, для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів сил відносно довільно вибраної точки дорівнювали нулю.

Оскільки умови рівноваги (3.11) у цьому разі записуються трьома рівняннями, то задача буде статично визначеною, якщо число невідомих у рівняннях рівноваги не перевищуватиме трьох.

Рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0, \qquad (3.12)$$

де вісь *Ox* не перпендикулярна до відрізка *AB*.

Нарешті, всі три рівняння рівноваги можна подати у вигляді рівнянь моментів сил відносно трьох точок *O*, *A* і *B*, що не лежать на одній прямій (рис. 3.5):

$$\sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F_i}) = 0 \,. \qquad (3.13)$$

3. Умови рівноваги паралельних сил, що лежать у площині

Нехай до твердого тіла прикладена система паралельних сил, що лежать в одній площині *Oxy* (рис. 3.6). Оскільки паралельні сили є окремим випадком довільної плоскої системи сил, то на основі (3.11) встановимо умови рівноваги паралельних сил, що лежать в одній площині та паралельні осі *Oy*. У цьому випадку проекції всіх сил на вісь *Ox* дорівнюють нулю, тому з трьох умов (3.11) залишаються дві умови рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{0z}(\vec{F_i}) = 0. \qquad (3.14)$$

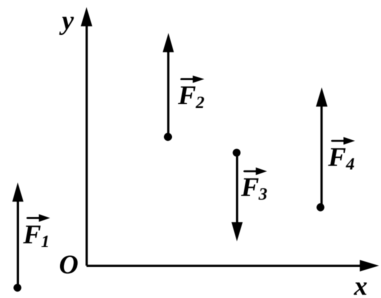


Рисунок 3.6

Отже, для рівноваги паралельних сил, що лежать у площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій сил на вісь, яка паралельна їм, а також алгебраїчна сума моментів сил відносно деякої точки на площині дорівнювали нулю.

Зазначимо, що рівнянням рівноваги паралельних сил, які лежать у площині, можна надати іншої форми, склавши рівняння моментів сил відносно двох точок *A* і *B*:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0 \quad , \tag{3.15}$$

причому точки *A* і *B* не повинні лежати на прямій, паралельній осі *Oy*.

На закінчення цього розділу зазначимо, що за центр моментів доцільно взяти точку, в якій перетинається найбільша кількість ліній дії невідомих сил. Якщо дві невідомі сили взаємно перпендикулярні, то осі координат доцільно напрямляти по лініях дії цих сил.

РОЗДІЛ 4. ТЕРТЯ КОВЗАННЯ І КОЧЕННЯ. ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1 Тертя ковзання

Припущення про ідеально гладку поверхню, застосоване нами в §1.5, суперечить досліду. Дійсно, дотик двох тіл відбувається не в одній лише точці. Обидва тіла зазнають при цьому малі деформації, внаслідок яких вони дотикаються по певній поверхні. Дослід переконує в тому, що, крім нормальної складової реакції $\overrightarrow{N}$, виникає ще дотична, яка називається силою тертя $\vec{F}_{\text{тр.}}$ ковзання (рис. 4.1). Наближені закони тертя ковзання встановили Г. Амонтон і Ш. Кулон. У теоретичній механіці тертям ковзання цікавляться у зв’язку з визначенням реакцій в’язей.

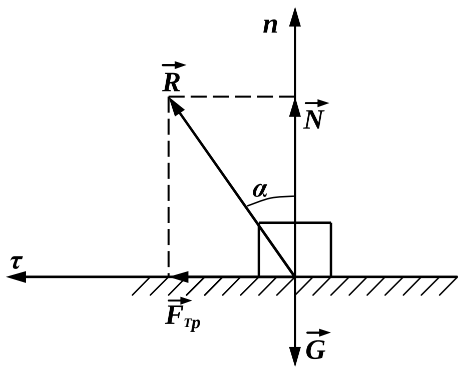


Рисунок 4.1

Дослідження показали, що максимальне значення сили тертя пропорційне нормальній реакції поверхні тіла:

$$F_{\text{тр}}^{max} = k \cdot N. \qquad (4.1)$$

Коефіцієнт K називається коефіцієнтом тертя ковзання і визначається дослідним шляхом, значення його наведено в довідниках. Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу стичних поверхонь, чистоти оброблення їх, фізичного стану, але не залежить від площі стичних поверхонь тіл.

Важливо зазначити, що сила тертя завжди напрямлена у бік, протилежний напряму відносного руху тіл. Коли сила тертя досягне значення $F_{\text{тр}}^{max}$, настане стан граничної рівноваги (рис. 4.2).

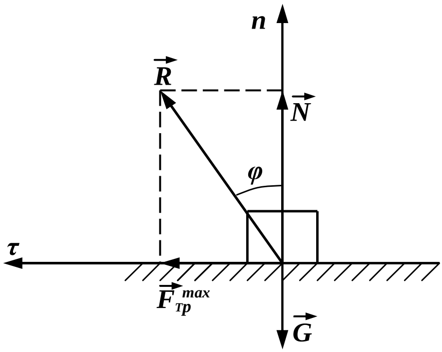


Рисунок 4.2

Під час граничної рівноваги маємо $\varphi = \alpha_{max}$ – кут тертя.

Тоді

$$tg\varphi = \frac{F_{\text{тр}}^{max}}{N} = \frac{k \cdot N}{N} = k\ . \qquad (4.2)$$

Зауважимо, що коли тіло перебуває на горизонтальній площині, то значення нормальної складової реакції $\vec{N}$ дорівнює вазі тіла ($G = N$). Якщо тіло перебуває на похилій площині, то $N = G \cdot cos\alpha$. У багатьох випадках сили тертя розглядають як джерела шкідливих опорів руху машин чи приладів. Проте в ряді інших випадків, навпаки, без сили тертя рух неможливий. Наприклад, саме така роль тертя при ходьбі людини, русі всіх видів колісних транспортних машин, прокатних станів.

У динаміці машин у багатьох випадках неможливо забезпечити їх стійкість руху, якщо в системі немає певних сил розсіювання енергії або сил опору, які мають властивості тертя.

4.2 Тертя кочення. Рівновага за наявності сил тертя

Крім тертя ковзання, розглянемо що один вид тертя, що виникає при коченні тіл (тертя кочення). У теоретичній механіці тертям кочення цікавляться лише з точки зору визначення реакцій опори. Нехай до котка радіусом r перпендикулярно до його осі Oz прикладена горизонтальна сила $\vec{F}$ (рис. 4.3). Крім того, на коток діє сила тяжіння $\vec{P}$. Внаслідок деформацій котка і горизонтальної опори поверхні, на якій міститься коток, вони торкаються один одного не в одній точці, а по деякій ділянці контакту. Нормальна реакція опори $\vec{N}$ зміститься на певну відстань b.

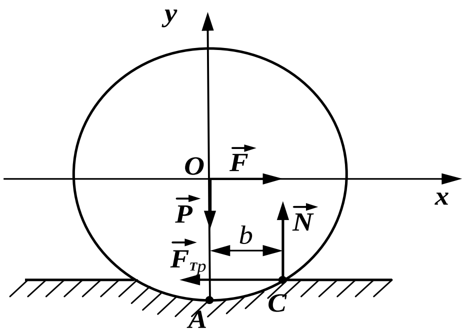


Рисунок 4.3

Сила тертя $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ виникає у тому місці, де коток торкається опорної поверхні, тобто в точці C.

У разі рівноваги котка сила $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ дорівнює за модулем силі $\vec{F}$, але напрямлена у протилежний бік. Отже, $\vec{F}$ і $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ утворюють пару сил, що врівноважується парою сил $\vec{N}$ і $\vec{P}$. Момент пари $(\vec{N},\ \vec{P})$ називається моментом тертя кочення. Плечем цієї пари є величина b, яка називається коефіцієнтом тертя кочення. На відміну від коефіцієнта тертя ковзання, який є безрозмірною величиною, коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини.

Прирівнявши моменти зазначених пар

$$F \cdot r = P \cdot b\ , \tag{4.3}$$

знайдемо вираз для визначення коефіцієнта тертя кочення b:

$$b = \frac{F \cdot r}{P}\ . \tag{4.4}$$

Досвід показує, що величина b пропорційна радіусу циліндра (котка) і різна для різних матеріалів. Очевидно, тіло буде в рівновазі, якщо момент активної сили відносно точки *C* не більший від моменту тертя, тобто

$$F \cdot r \leq P \cdot b.$$

Наявність тертя не змінює методики розв'язання задач статики. Реакції в'язей за наявності тертя ковзання визначають за формулами пункту 4.1, а у разі тертя кочення – за формулами (4.3), (4.4).

4.3. Центр паралельних сил. Координати центра паралельних сил

Центром паралельних сил називається точка *C* на лінії дії рівнодійної цих сил, яка не змінює свого положення при повороті всіх сил навколо точок їх прикладення на один і той самий кут в одному напрямі.

Точка *C*, через яку проходить рівнодіюча системи *n* паралельних сил, визначається за формулою

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i}{F} \tag{4.5}$$

де

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

Проектуючи обидві частини рівності (4.5) на координатні осі, дістанемо координати центра *C* у вигляді

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{F}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{F}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{F}. \tag{4.6}$$

Із виразів (4.5) та (4.6) випливає, що положення центра паралельних сил не залежить від напряму сил, а залежить тільки від їхніх модулів і їхніх точок прикладення. Формули (4.6) для координат центра *C* паралельних сил можна отримати, наприклад, за допомогою теореми Варіньона про момент рівнодійної відносно довільного центра (див. пункт 2.2).

4.4 Центр ваги твердого тіла

Якщо тверде тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, знаходиться в полі сил тяжіння, наприклад, поблизу земної поверхні, то з великим ступенем точності можна вважати, що сили ваги окремих частинок тіла складають систему паралельних сил.

У разі однорідного твердого тіла його густина буде постійною ($\gamma = const$), тому

$$P = g \cdot \gamma \cdot V; \quad dP = g \cdot \gamma \cdot dV. \tag{4.7}$$

Координати центра ваги однорідного тіла визначаються у вигляді

$$x_c = \frac{\int\limits_{(v)} xdV}{V}, \; y_c = \frac{\int\limits_{(v)} ydV}{V}, \;\; z_c = \frac{\int\limits_{(v)} zdV}{V}. \tag{4.8}$$

Інтеграли, що стоять у чисельниках формул (4.8), називаються статичними моментами об'єму тіла відносно координатних площин.

Із формул (4.8) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів твердого тіла. Тому центр ваги однорідного твердого тіла можна назвати центром об'єму тіла.

У разі, якщо паралельні сили неперервно розподілені по деякій однорідній ($\gamma = const$) поверхні S, то $P = \gamma \cdot S$, а сила ваги dP елемента поверхні dS буде $dP = \gamma \cdot g \cdot dS$. У цьому разі дістанемо

$$x_c = \frac{\int\limits_{(s)} xdS}{S}, \; y_c = \frac{\int\limits_{(s)} ydS}{S}, \;\; z_c = \frac{\int\limits_{(s)} zdS}{S}. \tag{4.9}$$

Формули (4.9) виражають координати центра ваги однорідної поверхні. Очевидно, вони застосовуються також, коли фігура плоска. Стосовно плоскої фігури інтеграли, що стоять у чисельниках формул

(4.9), називаються статичними моментами площі плоскої фігури відносно координатних осей. Для плоскої фігури дістанемо

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i S_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i S_i}{S}. \tag{4.10}$$

де

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

x_i, y_i – відповідні координати центра ваги площ елементарних фігур; S_i – площі елементарних фігур.

Якщо плоска фігура, центр ваги якої потрібно визначити, має вирізи, то площі вирізаних фігур у формулах (4.10) слід брати зі знаком мінус, а якщо вона обмежена криволінійним контуром, то застосовують формули (4.9).

4.5 Центр ваги деяких фігур

1. Центр ваги трикутника

Центр ваги трикутника C знаходиться в точці перетину його медіан (рис. 4.4). Як відомо, ця точка ділить кожну із медіан на відрізки у відношенні 1:2, тобто:

$$\begin{aligned} &KC:CB = 1:2; \quad LC:AC = 1:2; \\ \text{або: } &KC:KB = 1:3; \quad LC:AL = 1:3. \end{aligned} \tag{4.11}$$

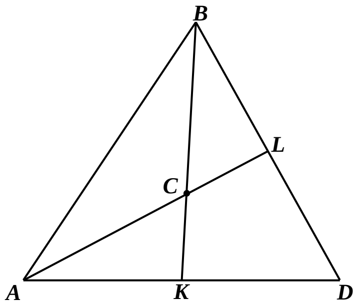


Рисунок 4.4

2. Центр ваги дуги кола

Розглянемо дугу AB кола радіусом R з центральним кутом 2α. Виберемо початок координат у центрі кола і направимо вісь Ox перпендикулярно хорді AB (рис. 4.5). Внаслідок симетрії фігури відносно осі Ox центр ваги її лежить на осі Ox, тобто $y_C = 0$. Для координати x_C маємо

$$x_C = \frac{R \cdot sin\alpha}{\alpha}, \tag{4.12}$$

де α – половина центрального кута в радіанах.

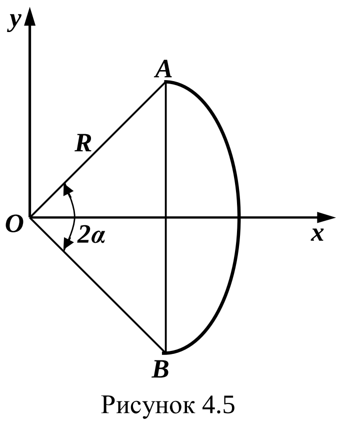


Рисунок 4.5

Зокрема, для центра ваги дуги півкола ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) матимемо:

$$x_C = \frac{2R}{\pi}. \tag{4.13}$$

3. Центр ваги колового сектора

Нехай задано коловий сектор з центральним кутом 2α і радіусом R (рис. 4.6). Виділимо в ньому елементарний сектор, який можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані $\frac{2}{3}R$ від початку координат. У цьому випадку можна застосувати формулу (4.12), тоді

$$x_C = \frac{2}{3}R\,\frac{sin\alpha}{\alpha}, \tag{4.14}$$

де α – половина центрального кута в радіанах.

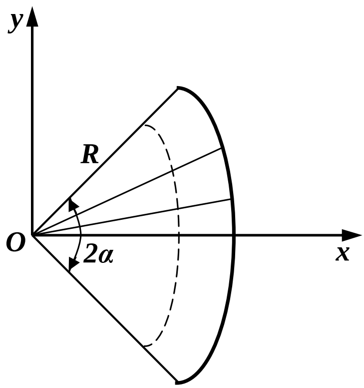


Рисунок 4.6

Зокрема, для сектора у формі півкола ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) отримаємо:

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}. \tag{4.15}$$

РОЗДІЛ 5. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

5.1 Вступ до кінематики

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух системи матеріальних точок з геометричної точки зору, зокрема рух твердого тіла і матеріальної точки незалежно від діючих на них сил.

Кінематику називають також геометрією руху, оскільки в ній розглядаються геометричні властивості руху. Механічні рухи, що вивчаються в кінематиці, відбуваються у просторі та часі. Зазначимо, що в теоретичній механіці простір, в якому відбувається рух тіл, розглядається як тривимірний, і всі вимірювання виконуються на підставі методів евклідової геометрії. У механіці час вважається однаковим у будь-яких системах відліку (системах координат) і не залежним від руху цих систем відносно одна одної. Час позначається буквою t і розглядається як неперервна змінна величина, що застосовується як аргумент.

Вивчаючи рух тіла, завжди слід знати, відносно якого іншого тіла, що називається тілом відліку, розглядається цей рух. Сукупність тіла відліку, з яким пов’язана система координат, і годинника називають системою відліку. Ця система може бути як рухомою, так і умовно нерухомою. Точки тіла, що рухаються, здійснюють у загальному випадку різні рухи. Тому в першу чергу виникає потреба вивчити рух окремих точок тіла.

Рух геометричного образу тіла по відношенню до вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення відносно цієї системи в будь-який довільний момент часу. Залежність параметрів, що характеризують положення геометричного образу відносно системи відліку, від часу визначається відповідними рівняннями, які називають законом руху тіла.

Оскільки рух геометричного образу тіла буде відомим, коли буде відомим закон руху всіх його точок, вивчення руху будь-якого геометричного образу передує вивченню руху однієї його точки.

Ця логіка є основою поділу кінематики на такі розділи, як кінематика точки та кінематика твердого тіла.

5.2 Три способи задання руху точки

Основним завданням кінематики точки є вивчення залежності між довільними положеннями рухомої точки в просторі та часі. Ця залежність визначає закон руху точки. Закон руху точки вважається відомим, якщо можна визначити положення точки в просторі у довільний момент часу. Для визначення положення точки у просторі вибирають деяку систему відліку (систему координат). Лінія, яку описує точка при своєму русі, називається траєкторією. Якщо траєкторія точки є пряма лінія, то рух точки називається прямолінійним, якщо траєкторія точки крива, то – криволінійним. Рух точки відносно вибраної системи відліку вважається заданим, якщо відомо, за допомогою якого способу можна визначити положення точки в будь-який момент часу. Основними просторово-часовими (кінематичними) характеристиками руху точки є її положення, швидкість і прискорення. Виходячи із цього, основна задача кінематики точки полягає в знаходженні способів задання її положення та методів визначення швидкості й прискорення. Рух точки можна визначити трьома способами: векторним, координатним і натуральним.

Векторний спосіб. Положення точки можна визначити за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}$ (рис 5.1), проведеного з деякої заданої нерухомої точки O в дану точку M. При русі точки радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється за величиною і напрямком. Кожному моменту часу t відповідає певне значення $\vec{r}$. Отже, $\vec{r}$ є функцією часу t, тобто $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Функцію $\vec{r}(t)$ вважають однозначною і неперервною функцією.

Рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називається кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі. Це рівняння виражає закон руху точки, а також рівняння траєкторії точки у векторній формі. Криву, яку описує кінець будь-якого вектора за умови, що початок його знаходиться весь час в одній і тій самій точці, називають годографом вектора. Отже, траєкторія точки є годографом радіуса-вектора $\vec{r}$.

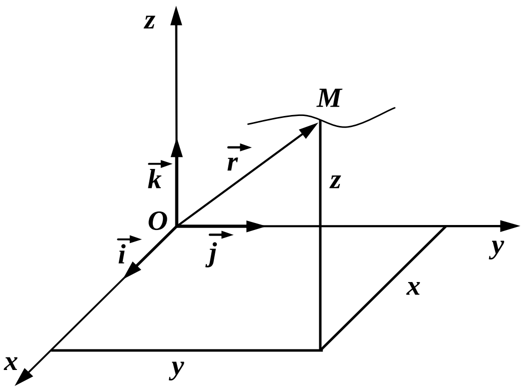


Рисунок 5.1

Координатний спосіб. Цей спосіб визначення руху точки полягає в тому, що задаються координати точки як функції часу (рис 5.1):

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)\ . \tag{5.1}$$

Між векторним і координатним способами задання руху точки існує такий зв'язок:

$$\vec{r} = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z, \tag{5.2}$$

де $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ – орти (одиничні вектори), відповідно напрямлені по осях.

На тій же підставі, що й $\vec{r}(t)$, функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ однозначні і неперервні. Рівняння (5.1) є також рівнянням траєкторії точки у параметричній формі. Виключивши з рівняння (5.1) параметр t, одержимо рівняння траєкторії в явній формі.

Зазначимо, що, крім декартової системи координат, можуть застосовуватися й інші – криволінійні системи координат, зокрема полярні, циліндричні, сферичні тощо.

Якщо, наприклад, рух точки задано в полярних координатах (рис. 5.2), то у цьому разі слід задати як функції часу координати r і φ:

$$r = r(t), \;\; \varphi = \varphi(t), \tag{5.3}$$

де r – полярний радіус; φ – кут між полярною віссю та полярним радіусом.

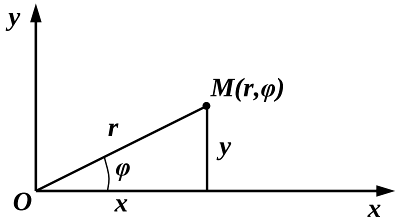


Рисунок 5.2

Виключивши параметр t з рівнянь (5.3), дістанемо

$$r = r(\varphi). \tag{5.4}$$

Перехід від декартових координат до полярних і навпаки є вигляд (рис. 5.2):

$$\begin{gathered} x = r \cdot cos\varphi, \quad y = r \cdot sin\varphi, \quad z = 0; \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; tg\varphi = \frac{y}{x}, \;\; z = 0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Натуральний спосіб. Якщо траєкторія точки відома наперед, то для визначення закону її руху в просторі достатньо задати положення точки на траєкторії. Тому одну з точок M_0 на траєкторії беруть за початок відліку дугових координат, оскільки положення рухомої точки M визначається її орієнтованою відстанню S, яка відлічується по дузі траєкторії від вибраної точки відліку (рис. 5.3). Отже, S є функцією часу:

$$S = S(t). \tag{5.6}$$

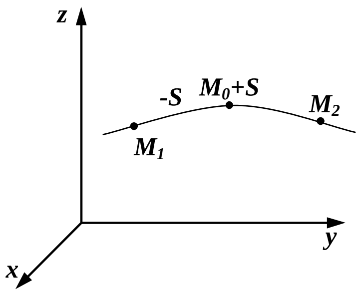


Рисунок 5.3

Рівняння (5.6) визначає закон руху точки по траєкторії. Функція $S = S(t)$ має бути однозначною та неперервною. Зауважимо, що дугова координата точки S у загальному випадку відрізняється від шляху, що пройшла точка по траєкторії.

5.3 Швидкість руху точки

Важливою характеристикою руху точки є її швидкість. Нехай точка M довільно рухається по деякій кривій і в момент часу t займає положення M, а через досить малий проміжок часу Δt вона займає положення M_1 (рис. 5.4). Положення M визначається радіус-вектором $\vec{r}$, а положення M_1 – радіус-вектором $\vec{r} + \Delta\vec{r}$.

Тоді

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\,. \tag{5.7}$$

Напрямок вектора $\vec{V}_{cp}$ збігається з напрямком вектора $\Delta\vec{r}$. Очевидно, що середня швидкість лише наближено відображає характер дійсного руху точки.

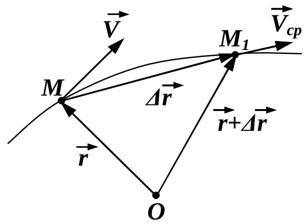


Рисунок 5.4

Щоб одержати швидкість $\vec{V}$ у даний момент часу або у даній точці, слід перейти до границі

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{5.8}$$

Отже, швидкість точки дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом.

За одиницю швидкості беруть 1 м/с.

5.4 Швидкість точки у прямокутній декартовій системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то швидкість точки визначається за її проекціями на осі координат. Дійсно, розклавши вектор швидкості $\vec{V}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ по ортах координатних осей (рис. 5.1), одержимо

$$\vec{r} = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z\,, \quad \vec{V} = \vec{\imath}V_x + \vec{\jmath}V_y + \vec{k}V_z\,. \tag{5.9}$$

де x, y, z – координати рухомої точки; V_x, V_y, V_z – проекції швидкості на осі координат.

За визначенням швидкості відповідно до формули (5.8) маємо:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{\imath}\frac{dx}{dt} + \vec{\jmath}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}\,. \tag{5.10}$$

Із (5.9) та (5.10) одержимо

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,. \tag{5.11}$$

Отже, проекції швидкості на осі координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат точки.

Модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,. \tag{5.12}$$

Напрямок швидкості знаходиться за напрямними косинусами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{\imath}}\right) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{\jmath}}\right) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{k}}\right) = \frac{V_z}{V}\,. \tag{5.13}$$

При русі точки її швидкість у загальному випадку змінюється в часі. Кожному моменту часу відповідає певний вектор швидкості, напрямлений по дотичній до траєкторії.

5.5 Швидкість точки при натуральному способі задання руху

Як уже зазначалося, рух точки є заданим у натуральній формі, якщо відомі її траєкторія та закон (рівняння) руху по траєкторії $S = S(t)$ (див. рис. 5.3). Кожній точці траєкторії відповідає певний радіус-вектор $\vec{r}$ (рис. 5.4), який можна розглядати як складну функцію часу $\vec{r} = \vec{r}(S) = \vec{r}[S(t)]$. Формулу (5.8) для швидкості подамо у вигляді

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}[S(t)]}{dt} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}\,. \qquad (5.14)$$

Розглянемо вектор $\frac{d\vec{r}}{dS}$. Оскільки

$$\lim_{\Delta S \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \right| = 1\,,$$

то модуль $\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = 1$.

Вектор $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S}$ (рис. 5.5) напрямлений по січній MM_1, граничне положення якої є дотичною до траєкторії досліджуваної точки. Отже,

$$\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}\,. \qquad (5.15)$$

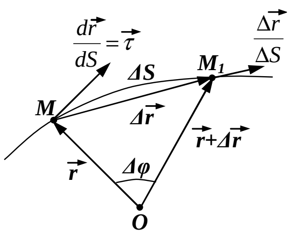


Рисунок 5.5

З урахуванням (5.15) одержимо наступний вираз для швидкості при натуральному способі задання руху точки:

$$\vec{V} = \vec{\tau}\,\frac{dS}{dt} = \vec{\tau} \cdot \dot{S}. \tag{5.16}$$

Помноживши скалярно обидві частини виразу (5.16) на орт $\vec{\tau}$, одержимо $\vec{\tau} \cdot \vec{V} = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}\frac{dS}{dt}$. Оскільки $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, то

$$\frac{dS}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{V}. \tag{5.17}$$

Скалярний добуток у правій частині виразу (5.17) дорівнює проекції швидкості на дотичну до траєкторії точки, тобто

$$V_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{V} = \frac{dS}{dt}. \tag{5.18}$$

Отже, вектор швидкості точки при натуральному способі задання руху точки матиме вигляд

$$\vec{V} = \vec{\tau} \cdot V_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{dS}{dt}. \tag{5.19}$$

Якщо $V_\tau > 0$, то точка рухається у додатному напрямку, якщо $V_\tau < 0$, то у від’ємному.

5.6 Прискорення точки

Розглянемо два будь-які близькі положення точки M і M_1 на траєкторії (рис. 5.6). Швидкість у точці M позначимо через $\vec{V}$, а в точці M_1 – через $\vec{V} + \Delta\vec{V}$. Геометричний приріст вектора швидкості $\Delta\vec{V}$ за проміжок часу Δt знайдемо, побудувавши в точці M вектор, що дорівнює $\vec{V} + \Delta\vec{V}$. Відношення $\Delta\vec{V}$ до Δt є середнім прискоренням $\vec{a}_{cp}$ точки за проміжок часу Δt:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \tag{5.20}$$

Напрямок вектора $\vec{a}_{cp}$ збігається з напрямком $\Delta\vec{V}$ (рис. 5.6).

Переходячи в (5.20) до границі $\Delta t \to 0$, знайдемо прискорення $\vec{a}$ точки в даний момент часу:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}\,. \tag{5.21}$$

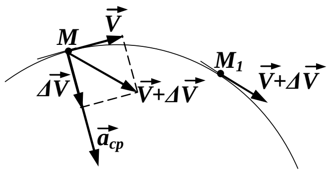


Рисунок 5.6

Отже, прискорення точки дорівнює першій похідній вектора швидкості точки за часом.

З урахуванням виразу (5.8) формулу для прискорення точки запишемо у вигляді

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \tag{5.22}$$

Одиницею прискорення є 1 $м/с^2$.

5.7 Прискорення точки у прямокутній декартовій системі координат

Якщо рух точки задано координатним способом, тобто рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то, розклавши вектори $\vec{r}$, $\vec{V}$ та $\vec{a}$ по ортах координатних осей, матимемо

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,, \quad \vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z\,, \quad \vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \tag{5.23}$$

де a_x, a_y, a_z – проекції прискорення на осі координат.

На підставі (5.22):

$$\begin{gathered}\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{i}\frac{dV_x}{dt} + \vec{j}\frac{dV_y}{dt} + \vec{k}\frac{dV_z}{dt} = \\ = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}\,,\end{gathered} \tag{5.24}$$

звідки

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \\ = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}\,. \tag{5.25}$$

Отже, проекції прискорення на осі координат дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості за часом на ті самі осі або другим похідним відповідних координат точки за часом.

Модуль прискорення та його напрямні косинуси запишемо у вигляді

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \tag{5.26}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{j}}\right) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right) = \frac{a_z}{a}\,. \tag{5.27}$$

5.8 Прискорення точки при натуральному способі задання руху

Попередньо наведено деякі відомості з диференціальної геометрії.

Натуральні осі та натуральний тригранник. Кінематичні характеристики руху точки тісно пов’язані з геометричними властивостями траєкторії. Як відомо з диференціальної геометрії, у кожній точці кривої є три взаємно перпендикулярні напрямки: дотична, головна нормаль і бінормаль, одиничні вектори (або орти) яких позначимо відповідно $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ (рис. 5.7). Орт $\vec{\tau}$ напрямлений у бік додатного відліку дугової координати S, орт $\vec{n}$ – у бік увігнутості траєкторії, орт $\vec{b}$ напрямлений так, щоб $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ утворювали праву систему координат. Зазначені осі (дотична, головна нормаль, бінормаль) називаються натуральними. Отже, натуральні осі – це рухомі осі, пов'язані з рухомою точкою M, що утворюють праву прямокутну систему координат (натуральний тригранник).

Площина, що проходить через головну нормаль $\vec{n}$ та бінормаль $\vec{b}$, називається нормальною. Координатна площина, що проходить через дотичну $\vec{\tau}$ та головну нормаль $\vec{n}$, називається стичною, а площина, що проходить через дотичну $\vec{\tau}$ та бінормаль $\vec{b}$ – напрямною (рис. 5.7).

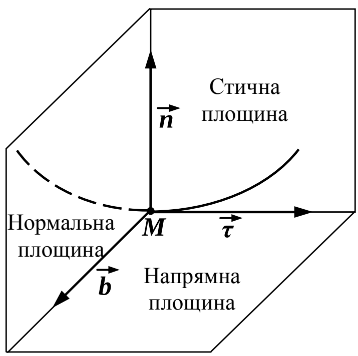


Рисунок 5.7

Кривина кривої. Кут, що стягує дугу ΔS між двома дотичними у двох будь-яких точках M і M_1 на кривій, називається кутом суміжності (див. рис. 5.4). Позначимо його через $\Delta\varphi$. Відношення $\Delta\varphi$ до елемента дуги ΔS називається середньою кривиною кривої $K_{ср.}$ на відрізку MM_1

$$K_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \tag{5.28}$$

Границя цього відношення при $\Delta S \to 0$ називається кривиною K у даній точці:

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}\,. \tag{5.29}$$

У загальному випадку кривина кривої не є сталою величиною і змінюється від точки до точки. Величина ρ, обернена до кривини у даній точці M, називається радіусом кривини кривої у цій точці:

$$\rho = K^{-1}, \quad K = \frac{1}{\rho}\,. \tag{5.30}$$

Прискорення точки при натуральному способі задання руху визначається за такою теоремою.

Теорема. Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) та нормального прискорень.

Доведення. Нехай рух точки задано натуральним способом. Тоді вектор швидкості подаємо у вигляді (5.19). Враховуючи це та дотримуючись визначення прискорення при векторному способі задання руху точки, одержимо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \vec{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V_\tau. \tag{5.31}$$

Перший доданок є вектором, напрямленим по дотичній $\vec{\tau}$; він називається дотичною, або тангенціальною складовою прискорення і позначається $\vec{a}_\tau$. Отже,

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{\tau} = \vec{\tau} \cdot \ddot{S} \tag{5.32}$$

Як випливає з (5.32), дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною і дорівнює першій похідній від проекції швидкості на дотичну або другій похідній від дугової координати за часом.

Щоб визначити другий доданок, подамо його у вигляді

$$V_\tau \frac{d\vec{\tau}[S(t)]}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}\frac{dS}{dt}V_\tau. \tag{5.33}$$

Розглянемо попередньо тотожність $\vec{\tau}^2 = 1$ та здиференціюємо її по S; одержимо $2\frac{d\vec{\tau}}{dS}\vec{\tau} = 0$. Із цього випливає, що вектори $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$ і $\vec{\tau}$ є перпендикулярними. Оскільки вектор $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta S}$ завжди напрямлений у бік увігнутості траєкторії (рис. 5.8*а*) і лежить у стичній площині, то вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$ також лежить у стичній площині, напрямлений у бік увігнутості траєкторії та перпендикулярний до $\vec{\tau}$, тобто напрямлений по головній нормалі $\vec{n}$ до центра кривини траєкторії.

Визначимо тепер модуль вектора $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$. Із рівнобедреного трикутника MAB (рис. 5.8*а*) випливає, що $AB = |\Delta\vec{\tau}| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$, де $\Delta\varphi$ – кут суміжності. Тоді

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dS}\right| = \lim_{\Delta S\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta S}\right| = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\Delta\varphi}{\frac{\Delta\varphi}{2}|\Delta S|} = K = \frac{1}{\rho}$$

.

Отже,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{\vec{n}}{\rho}. \tag{5.34}$$

Таким чином, з урахуванням (5.33) і (5.34) другий доданок виразу (5.31) набуває вигляду

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}V_\tau = \frac{d\vec{\tau}}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}\cdot V_\tau = \frac{\vec{n}}{\rho}V_\tau^2 = \frac{\vec{n}}{\rho}V^2$$

і називається нормальним прискоренням та позначається $\vec{a}_n$, тобто:

$$\vec{a}_n = \vec{n}\frac{V^2}{\rho} \ . \qquad (5.35)$$

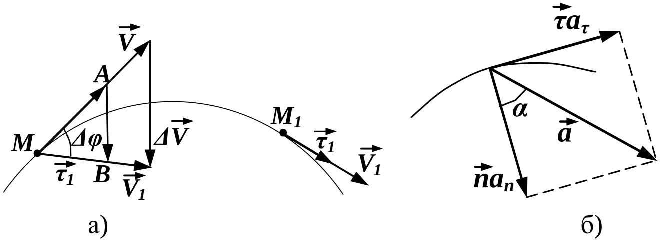


Рисунок 5.8

Звідси випливає, що нормальне прискорення $\vec{a}_n$ напрямлене в бік увігнутості траєкторії до центра кривини і характеризує зміну швидкості за напрямком.

Оскільки складові вектора $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ лежать у стичній площині, то й вектор $\vec{a}$ також розташований у стичній площині. Тому проекція повного прискорення $\vec{a}$ на бінормаль $\vec{a}_в = 0$.

Отже, на підставі (5.31), (5.32) і (5.35) остаточно одержимо (рис. 5.8*б*):

$$\vec{a} = \vec{\tau}a_\tau + \vec{n}a_n = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \ . \qquad (5.36)$$

що й треба було довести.

Модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV_\tau}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\rho^2}}\,. \qquad (5.37)$$

Напрямок вектора $\vec{a}$ визначимо за кутом α, що утворюється між вектором $\vec{a}_n$ і вектором $\vec{a}$:

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}\,. \qquad (5.38)$$

5.9 Окремі випадки руху точки

Прямолінійний рух. Якщо під час руху точки нормальне прискорення $\vec{a}_n$ дорівнює нулю, то рух точки є прямолінійним. Справді, якщо $\vec{a}_n = 0$, то $\frac{V^2}{\rho} = 0$ і $\rho \to \infty$, тобто траєкторією є пряма. У цьому разі повне прискорення дорівнює дотичному: $\vec{a} = \vec{a}_\tau$. Якщо при криволінійному русі точки, в даний момент часу, нормальне прискорення дорівнює нулю ($\vec{a}_n = 0$), то точка в цей момент часу знаходиться в точці перетину траєкторії.

Рівномірний прямолінійний рух. Якщо під час руху точки її прискорення дорівнює нулю ($\vec{a} = 0$), то рух є рівномірним і прямолінійним, оскільки швидкість у цьому разі не змінюється ні за величиною, ні за напрямком.

Рівномірний криволінійний рух. Якщо під час точки дотичне прискорення $\vec{a}_\tau$ дорівнює нулю ($\vec{a}_\tau = 0$), то проекція швидкості V_τ не змінюється. Справді, $\vec{a}_\tau = 0$, $\frac{dV_\tau}{dt} = 0$, $V_\tau = const$. У цьому разі точка рухається рівномірно по кривій, а повне прискорення точки дорівнює нормальному: $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Рівнозмінний криволінійний рух. Якщо під час руху точки по деякій кривій дотичне прискорення буде постійним за величиною ($\vec{a}_\tau = const$), то рух точки називається рівнозмінним криволінійним рухом. Причому, якщо прискорення $\vec{\tau} \cdot a_\tau$ збігається з напрямком швидкості, то рух точки називається рівноприскореним, якщо $\vec{\tau}\cdot a_\tau$ напрямлено в бік, протилежний швидкості, – рівносповільненим.

Знайдемо швидкість і закон руху точки $S = S(t)$ у разі рівнозмінного руху. Оскільки $a_\tau = const$, то $V_\tau = a_\tau t + c_1$. Сталу інтегрування визначимо з початкових умов руху: при $t = 0$, $V_\tau = V_0$. Отже, $c_1 = V_0$.

Одержимо:

$$V_\tau = V_0 + a_\tau t\ . \tag{5.39}$$

Оскільки $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, то $\frac{dS}{dt} = V_0 + a_\tau t \ \Rightarrow\ dS = V_0 dt + a_\tau t dt$. Шляхом інтегрування знайдемо закон руху точки:

$$S = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} + c_2$$

Сталу інтегрування c_2 визначимо з початкових умов руху: при $t = 0$, $S = S_0$. Отже, $c_2 = S_0$. Тому

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \tag{5.40}$$

Прямолінійні гармонічні коливання точки. Нехай точка рухається по прямій, наприклад по осі *Ox*, і її відстань від початку координат змінюється за законом:

$$x = a \cdot sin(\omega t + \alpha), \tag{5.41}$$

де a, ω – сталі.

Рух точки є коливальним між положеннями точки $M_1(a)$ і $M_2(-a)$. Коливання, що визначаються за законом (5.41), називаються гармонічними коливаннями. Величина a називається амплітудою коливань і є найбільшим відхиленням точки від центра коливань O. Проміжок часу $T = \frac{2\pi}{\omega}$, протягом якого точка здійснює повне коливання, називається періодом коливань; величина ω – коловою частотою коливань; $\omega t + \alpha = \varphi$ – фазою коливань; α – початковою фазою коливань.

РОЗДІЛ 6. КІНЕМАТИКА НАЙПРОСТІШИХ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА

6.1 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі.

Наприклад, рух ліфта є поступальним. Але не слід змішувати поступальний рух твердого тіла лише з прямолінійним рухом.

При поступальному русі тіла його точки можуть описувати також криволінійні траєкторії. Прикладом такого руху може бути механізм, що складається з кривошипів O_1A і O_2B однакової довжини, насаджених на вали O_1 та O_2 (рис. 6.1) і з'єднаних спарювачем AB, довжина якого дорівнює відстані O_1O_2. Очевидно, що при всіх положеннях механізму O_1ABO_2 залишається паралелограмом. Отже, спарник AB залишається паралельним прямій O_1O_2 і його рух є поступальним.

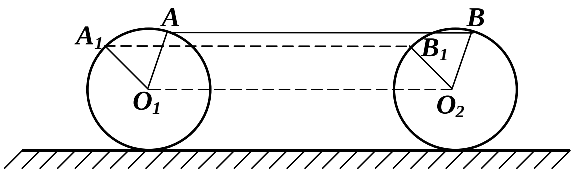


Рисунок 6.1

При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії.

Дійсно, розглянемо в твердому тілі пряму A_0B_0 (рис. 6.2).

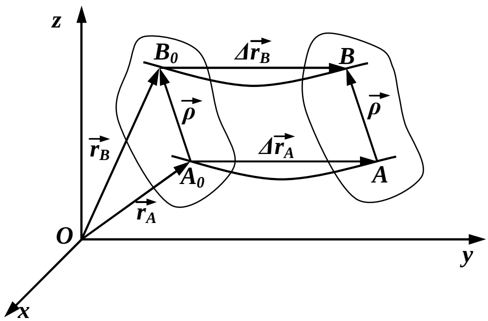


Рисунок 6.2

Положення точки A_0 визначається радіусом-вектором $\vec{r}_A$, а положення точки B_0 - радіусом-вектором $\vec{r}_B$, $\overrightarrow{A_0B_0} = \vec{\rho} = \overrightarrow{const}$. Між $\vec{r}_B$, $\vec{r}_A$ та $\vec{\rho}$ існує залежність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}\ . \tag{6.1}$$

При русі тіла $\vec{r}_A$ та $\vec{r}_B$змінюються у часі, тобто $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$, $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$. Вектор $\vec{\rho}$ залишається сталим. Тоді $\Delta\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_A$, отже, траєкторію точки A можна одержати паралельним переносом траєкторії точки B, тобто траєкторії точок A і B однакові.

Теорема. При поступальному русі тіла всі його точки рухаються з однаковими швидкостями та прискореннями.

Доведення. Здиференціювавши за часом рівняння (6.1), одержимо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{6.2}$$

Оскільки $\vec{\rho} = \overrightarrow{const}$, то із (6.2) маємо

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A\ . \tag{6.3}$$

Здиференціювавши потім ще раз (6.3) за часом, матимемо

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A \qquad (6.4)$$

Теорему доведено.

Із викладеного випливає, що вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху будь-якої однієї його точки, тобто до задачі кінематики точки.

6.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому пряма, що проходить через які-небудь дві точки (O, O_1) (рис. 6.3), під час руху тіла залишається нерухомою. Ця пряма OO_1 називається віссю обертання тіла. Положення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі визначається кутом повороту φ. Якщо провести в деякий момент часу через вісь обертання OO_1 площину I і зафіксувати її положення в нерухомому просторі, а через деякий проміжок часу провести іншу площину II, незмінно зв'язану з тілом, то отримаємо двогранний кут з ребром OO_1 на осі обертання. Лінійний кут φ цього двогранного кута називається кутом повороту тіла. Домовимося, про вибір знака кута повороту φ. Якщо з боку додатного напрямку осі Oz перехід від однієї площини I до іншої II відбувається проти ходу годинникової стрілки, то кут повороту φ вважатимемо додатним, а якщо за ходом годинникової стрілки – від'ємним. Кут φ вимірясться в радіанах і характеризує поворот осей $Ox_1y_1z_1$ незмінно зв'язаних із тілом, відносно початкової системи відліку $Oxyz$ (рис. 6.3). При обертанні тіла кут повороту φ неперервно змінюється у часі.

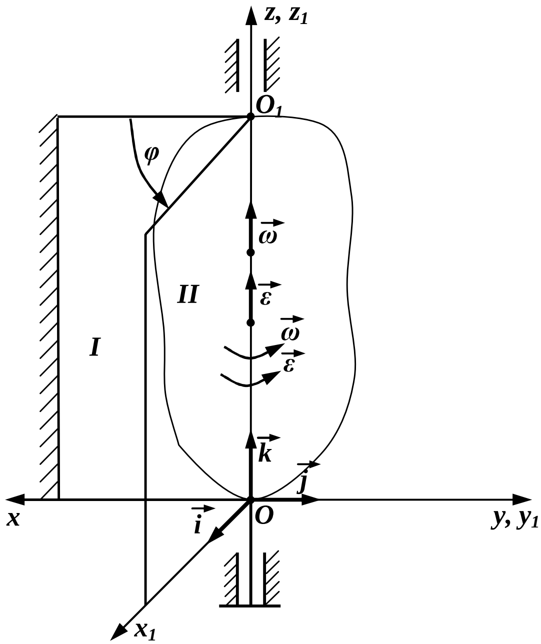


Рисунок 6.3

Отже,

$$\varphi = \varphi(t)\ . \tag{6.5}$$

Це рівняння називається кінематичним рівнянням обертання тіла навколо нерухомої осі.

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла. За досить малий проміжок часу Δt кут змінюється на величину $\Delta\varphi$. Відношення $\Delta\varphi$ до Δt називається середньою кутовою швидкістю і позначається

$$\omega_{\text{ср.}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\ . \tag{6.6}$$

Через граничний перехід у цьому виразі одержимо кутову швидкість тіла в даний момент часу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\text{ср.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\ . \tag{6.7}$$

Отже, кутова швидкість дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ. Кутова швидкість вимірюється в радіанах за секунду (рад/с, або $с^{-1}$). У техніці кутову швидкість часто задають числом n обертів за хвилину. Зв'язок між ω та n визначається за формулою

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \tag{6.8}$$

Якщо при обертанні тіла кутова швидкість є сталою, то обертання тіла називається рівномірним. При цьому кут повороту змінюється пропорційно часу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{6.9}$$

де φ_0 - початковий кут повороту.

Рівняння (6.9) називається рівнянням рівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі.

Кутова швидкість визначає також і напрям обертання. Так, якщо $\omega > 0$, то тіло обертається в напрямі зростання кута повороту – проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з боку вибраного додатного напряму осі Oz, і в протилежному напрямі, якщо $\omega < 0$. Тому кутову швидкість зображують ковзним вектором $\vec{\omega}$, напрямленим по осі обертання так, щоб спостерігач, який знаходиться на кінці цього вектора, бачив би обертання тіла проти ходу годинникової стрілки. Цей напрям $\vec{\omega}$ вважається додатним у правій системі координат і від’ємним - у лівій.

Модуль вектора

$$\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = |\dot{\varphi}|\ . \tag{6.10}$$

Кутове прискорення у даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}\ . \qquad (6.11)$$

Одиницею кутового прискорення є радіан за секунду в квадраті (рад/с^2, або с$^{-2}$).

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, як і кутову швидкість $\vec{\omega}$, зображують ковзним вектором, напрямленим вздовж осі обертання. Модуль вектора $|\vec{\varepsilon}| = |\dot{\vec{\omega}}| = \ddot{\varphi}$. На підставі викладеного вектори кутової швидкості та кутового прискорення можна подати у вигляді:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}, \qquad (6.12)$$

де $\vec{k}$ - одиничний вектор осі Oz.

Якщо напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$ (рис. 6.3), то обертання називається прискореним. Якщо напрями $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{\omega}$ протилежні, то обертання тіла називається сповільненим. При $\varepsilon = 0$, $\omega = const$ обертання тіла буде рівномірним. Якщо в процесі руху ε залишається величиною сталою, то таке обертання називається рівнозмінним. У цьому разі

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = const. \qquad (6.13)$$

Зінтегрувавши, одержимо $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t + C_1$, звідки $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Сталі інтегрування C_1 і C_2 знайдемо з початкових умов. Якщо $t =$

0, то $\omega = \omega_0$, $\varphi = \varphi_0$. Тоді $C_1 = \omega_0$, $C_2 = \varphi_0$. Отже, для рівнозмінного обертання маємо

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{6.14}$$

Кут повороту, кутова швидкість і кутове прискорення є кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Перейдемо до розгляду кінематичних характеристик окремих точок цього тіла.

Траєкторії, швидкості та прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Траєкторіями точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, наприклад Oz, є кола, розташовані в площинах, перпендикулярних до осі обертання (рис. 6.4). Центри цих кіл знаходяться в точках перетину осі обертання із зазначеними площинами. Радіуси даних кіл називають також радіусами обертання точок тіла. При повороті тіла на кут φ для точки з радіусом обертання R закон руху за траєкторією має вигляд

$$S = R \cdot \varphi, \tag{6.15}$$

де S - дугова координата, що відповідає куту повороту φ.

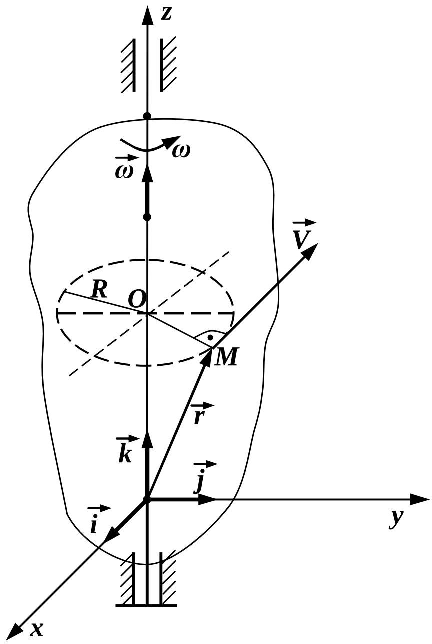


Рисунок 6.4

Швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, називається лінійною. Швидкості точок на ободі маховика або диска, що обертається, називають також коловими.

Оскільки рух точки тіла в цьому русі заданий натуральним способом, то

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = R\dot{\varphi} = R\omega. \qquad (6.16)$$

Отже, лінійна швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, за величиною дорівнює добутку радіуса обертання на кутову швидкість. Лінійна швидкість напрямлена по дотичній до кола в бік обертання і, таким чином, перпендикулярна до радіуса обертання R (рис. 6.4).

Покажемо, що лінійна швидкість точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості $\vec{\omega}$ тіла на радіус-вектор $\vec{r}$ точки M. Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі проти ходу годинникової стрілки. Тоді вектор $\vec{\omega}$ буде напрямлений у додатному напрямі осі обертання Oz (рис. 6.4). Положення розглядуваної точки тіла визначимо радіусом-вектором $\vec{r}$. При цьому $R = rsin(\widehat{\vec{\omega},\vec{r}})$. Підставивши у вираз (6.16) це значення R, одержимо

$$V = \omega rsin\left(\widehat{\vec{\omega},\vec{r}}\right). \tag{6.17}$$

Отже, модуль лінійної швидкості дорівнюватиме модулю векторного добутку векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$. Очевидно, що напрям лінійної швидкості точки M збігається з напрямом векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Це безпосередньо випливає з визначення векторного добутку двох векторів $\vec{\omega}$ та $\vec{r}$. Таким чином,

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{6.18}$$

Ця формула називається формулою Ейлера.

Для визначення прискорення точки M тіла скористаємося натуральним способом задання руху. При цьому повне прискорення точки можна вирахувати як векторну суму дотичного $\vec{\tau}a_\tau$ і нормального $\vec{n}a_n$ прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}. \tag{6.19}$$

Виразимо ці прискорення через кінематичні характеристики обертального руху тіла, тобто через ω та ε. При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі відповідно до формул (6.15) і (6.16)

$S = R \cdot \varphi$ та $V = R\omega$. Підставивши вирази для V та S із цих формул у (6.19), одержимо

$$a_\tau = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon, \quad a_n = R\omega^2. \tag{6.20}$$

Отже, дотичне прискорення дорівнює добутку радіуса обертання на кутове прискорення. Нормальне прискорення точки тіла при обертанні його навколо нерухомої осі дорівнює добутку радіуса обертання R на квадрат кутової швидкості. Дотичне прискорення спрямоване вздовж дотичної до траєкторії в бік обертання, якщо рух прискорений, і в бік, протилежний обертанню, якщо рух сповільнений (6.5). Нормальне прискорення спрямовано за нормаллю, яка в даному випадку спрямована вздовж радіуса обертання до центра обертання (рис. 6.5). Повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{6.21}$$

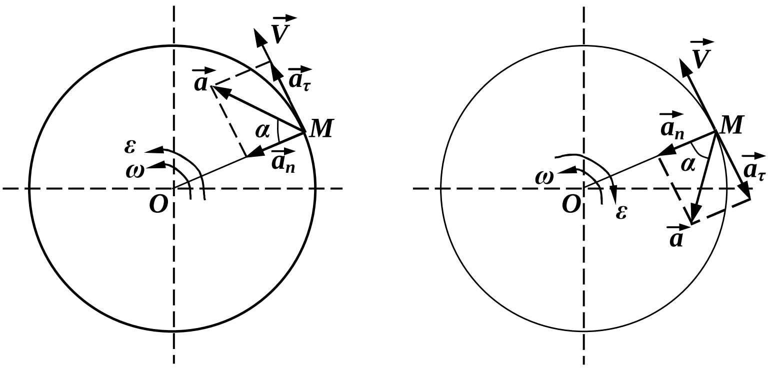


Рисунок 6.5

При цьому модуль повного прискорення точки визначається за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (R\omega^2)^2} = R \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (6.22)$$

Напрям одержаного прискорення знайдемо за тангенсом кута α, утвореного між повним прискоренням з нормальним прискоренням (рис. 6.5):

$$tg\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (6.23)$$

Формулу для прискорення точки тіла при обертанні його навколо нерухомої осі можна, наприклад, отримати безпосереднім диференціюванням вектора швидкості точки :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}\,, \quad (6.24)$$

де $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}$.

РОЗДІЛ 7. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

7.1 Рівняння плоскопаралельного руху

Плоскопаралельним (плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому усі його точки переміщуються паралельно деякій фіксованій площині Π (рис. 7.1). Плоский рух роблять багато частин механізмів і машин, наприклад колесо, що котиться на прямолінійній ділянці шляху; шатун у кривошипно-шатунному механізмі й ін.

Розглянемо перетин S тіла площиною Oxy, паралельною площині Π. При русі всі точки тіла, що лежать на прямій MM', перпендикулярній до перетину S, тобто до площини Π (рис. 7.1), рухаються тотожно.

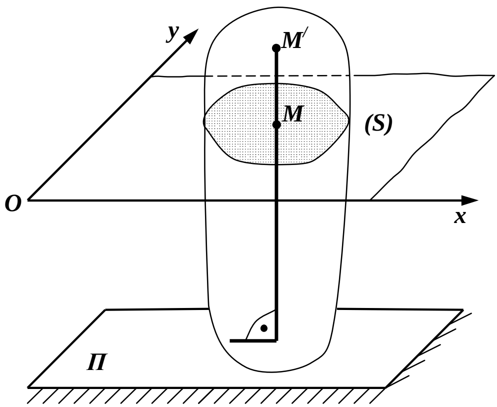


Рисунок 7.1

Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла достатньо вивчити, як рухається в площині Oxy перетин S цього тіла або деяка плоска фігура S. Тому надалі замість плоского руху тіла будемо розглядати рух плоскої фігури S в її площині, тобто в площині Oxy.

Положення фігури S в площині Oxy визначається положенням якого-небудь проведеного на цій фігурі відрізка AB. У свою чергу, положення відрізка AB (рис. 7.2) можна визначити, знаючи координати x_A, y_A точки A і кут φ, який відрізок AB утворює з віссю x. Точку A, обрану для визначення положення фігури S, будемо називати полюсом.

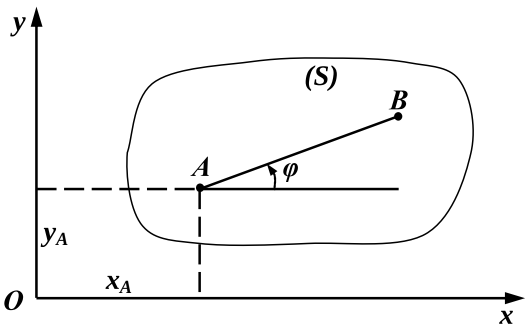


Рисунок 7.2

При русі фігури (перетину S) величини x_A, y_A і φ будуть змінюватися. Щоб знати закон руху, тобто положення фігури в площині Oxy у будь-який момент часу, треба знати залежності:

$$x_A = f_1(t),\ \ y_A = f_2(t),\ \ \varphi = f_3(t). \tag{7.1}$$

Рівняння (7.2) називаються рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла.

Перші два з рівнянь (7.1) визначають той рух, який фігура робила б при $\varphi = const$; це, мабуть, буде поступальний рух, при якому всі точки фігури (тіла) рухаються так саме, як полюс A. Третє рівняння визначає рух, який фігура робила б при $x_A = const$ і $y_A = const$, тобто коли полюс A нерухомий; це буде обертання фігури навколо полюса A.

Можна зробити висновок, що в загальному випадку рух плоскої фігури в її площині може розглядатися як той, що складається з поступального руху, при якому всі точки фігури (тіла) рухаються так само, як полюс A, і з обертового руху навколо цього полюса.

При вивченні руху фігури (тіла) як полюс можна вибирати будь-яку точку.

Основними кінематичними характеристиками розглянутого руху є швидкість і прискорення поступального руху, що дорівнюють швидкості і прискоренню полюса ($\vec{V}_{\text{пост.}} = \vec{V}_A$, $\vec{a}_{\text{пост.}} = \vec{a}_A$), а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ε обертального руху навкого полюса, тобто навколо осі, перпендикулярної до площини Π (рис. 7.1) і такої, що проходить через полюс A. Значення цих характеристик у будь-який момент часу t можна знайти з рівнянь (7.1):

$$V_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2},\ \ a_A = \sqrt{\ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2},\ \ \omega = \frac{d\varphi}{dt},\ \ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (7.2)$$

7.2 Визначення траєкторій точок плоскої фігури (твердого тіла)

Тепер перейдемо до вивчення руху окремих точок плоскої фігури (твердого тіла), тобто до відшукання траєкторій, швидкостей і прискорень цих точок. Почнемо з визначення траєкторій.

Розглянемо точку M плоскої фігури (рис. 7.3). Якщо рух заданий рівняннями (7.1), то координати точки M дорівнюють:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + l \cdot cos(\alpha + \varphi), \\ y_M &= y_A + l \cdot sin(\alpha + \varphi), \end{aligned} \qquad (7.3)$$

де x_A, y_A і φ – відомі функції часу t.

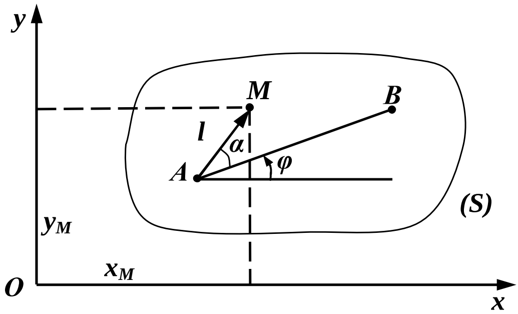


Рисунок 7.3

Рівності (7.3), що визначають закон руху точки M у площині Oxy, дають одночасно рівняння траєкторій цієї точки в параметричному вигляді. Звичайне рівняння траєкторії одержимо, виключивши з рівнянь (7.3) час t.

7.3 Визначення швидкостей точок плоскої фігури

У 7.1 було відзначено, що рух плоскої фігури (твердого тіла) можна розглядати як той, що складається з поступального руху, при якому всі точки фігури рухаються зі швидкістю $\vec{V}_A$ полюса A, і з обертального руху навколо цього полюса. Покажемо, що швидкість будь-якої точки M фігури складається геометрично зі швидкостей, які точка одержує в кожному із цих рухів.

Насправді, положення будь-якої точки M фігури визначається по відношенню до осей Oxy радіусом-вектором $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_1$ (рис. 7.4).

На рисунку (7.4) введені позначення:

$\vec{r}_A$ – радіус-вектор полюсу A;

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{AM}$ – вектор, що визначає положення точки M відносно осей Ax_1y_1, що переміщаються разом із полюсом A поступально.

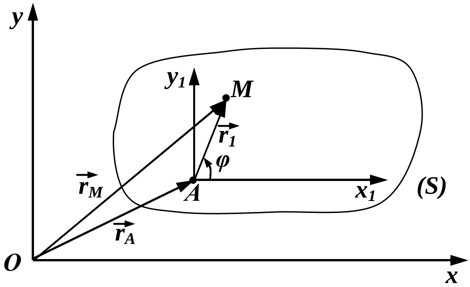


Рисунок 7.4

Рух фігури S по відношенню до осей Ax_1y_1 являє собою обертання навколо полюса A.

Тоді

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt}. \qquad (7.4)$$

У рівності (7.4) величина $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A$ є швидкістю полюса A; величина $\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{V}_{MA}$, тобто швидкість, яку точка M отримує при $\vec{r}_A = const$ відносно осей Ax_1y_1, або, інакже кажучи, при обертанні фігури навколо полюсу A.

Тоді з рівності (7.4) випливає, що

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \qquad (7.5)$$

При цьому швидкість $\vec{V}_{MA}$, яку точка M отримує при обертанні фігури навколо полюса A, буде

$$V_{MA} = \omega \cdot MA \quad \left(\vec{V}_{MA} \perp \overline{MA}\right), \qquad (7.6)$$

де ω – кутова швидкість фігури (тіла).

Таким чином, швидкість будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається зі швидкості якої-небудь іншої точки A, взятої за полюс, і швидкості, яку точка M одержує при обертанні фігури навкого цього полюса (7.5).

Модуль і напрямок швидкості $\vec{V}_M$ знаходяться побудовою відповідного паралелограма (рис. 7.5).

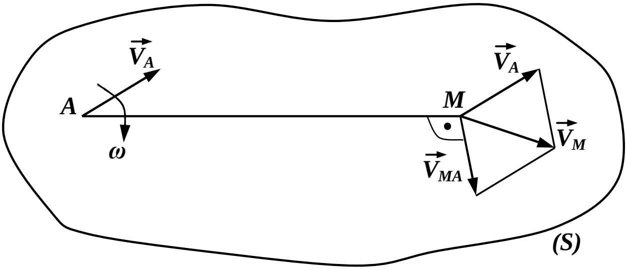


Рисунок 7.5

Визначення швидкостей точок плоскої фігури (або тіла) за допомогою формули (7.5) звичайно пов’язане з досить складними розрахунками. Однак, виходячи з цього основного результату, можна одержати ряд інших, більш зручних і простих методів визначення швидкостей точок фігури (або тіла).

7.4 Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла

Теорема. Проекції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні одна одній.

Доведення. Розглянемо які-небудь дві точки A і B плоскої фігури (або тіла). Беручи точку A за полюс (рис. 7.6), за формулою (7.5) одержуємо, що

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \,. \tag{7.7}$$

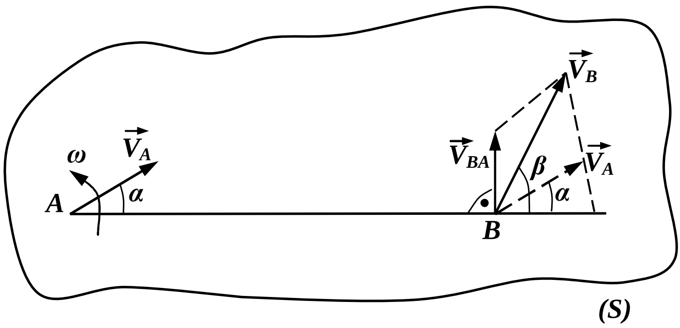


Рисунок 7.6

Проектуючи обидві частини рівності на вісь, спрямовану на AB, і враховуючи, що вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярний AB, знаходимо

$$V_B \cdot cos\beta = V_A \cdot cos\alpha. \qquad (7.8)$$

Теорема доведена.

Помітимо, що цей результат зрозумілий з чисто фізичних міркувань: якщо рівність (7.8) не буде виконуватися, то при русі відстань між A і B повинна змінюватися, що неможливо, тому що тіло вважається абсолютно твердим. Рівність (7.8) виконується не тільки при плоскопаралельному, але і при будь-якому русі твердого тіла.

Доведена теорема дозволяє легко знаходити швидкість даної точки тіла, якщо відомі напрямок швидкості цієї точки і швидкість якої-небудь іншої точки того ж тіла.

7.5 Визначення швидкостей точок плоскої фігури (тіла) за допомогою миттєвого центра швидкостей

Інший простий і наочний метод визначення швидкостей точок плоскої фігури (або тіла) будується на понятті про миттєвий центр швидкостей.

Миттєвим центром швидкостей називається точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Легко переконатися, що якщо фігура рухається непоступально, то така точка в кожний момент часу t існує і до того ж єдина. Нехай у момент часу t точки A і B плоскої фігури мають швидкості $\vec{V}_A$ і $\vec{V}_B$, не паралельні одна одній (рис. 7.7). Тоді точка P, що лежить на перетинів перпендикулярів Aa до вектора $\vec{V}_A$ і Bb до вектора $\vec{V}_B$, і буде миттєвим центром швидкостей, тому що $\vec{V}_P = 0$. Насправді, якщо припустити, що $V_P \neq 0$, то за теоремою про проекції швидкостей вектор $\vec{V}_P$ повинен бути одночасно перпендикулярним і до AP (тому що $\vec{V}_A \perp AP$) і BP (тому що $\vec{V}_B \perp BP$), що неможливо. З тієї ж теореми видно, що ніяка інша точка фігури в цей момент часу не може мати швидкість, що дорівнює нулю (наприклад, для точки a проекція $\vec{V}_B$ на лінію Ba не дорівнює нулю й, отже, $V_a \neq 0$ і т.д.).

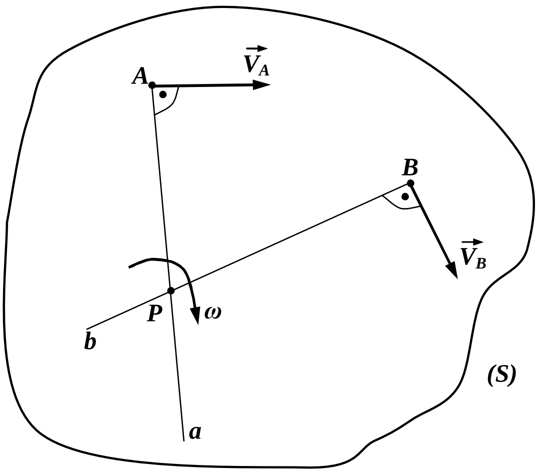


Рисунок 7.7

Якщо тепер у момент часу t взяти точку P за полюс, то за формулою (7.5) швидкість точки A буде дорівнювати

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP}, \tag{7.9}$$

тому що $\vec{V}_P = 0$.

Аналогічний результат виходить для будь-якої іншої точки фігури. Отже, швидкості точок плоскої фігури визначаються в даний момент часу так, якщо б рух фігури був обертанням навколо миттєвого центра швидкості.

При цьому:

$$\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP \quad \left(\vec{V}_A \perp \overrightarrow{AP}\right); \\ V_B &= \omega \cdot BP \quad \left(\vec{V}_B \perp \overrightarrow{BP}\right) \text{ і т. д.} \end{aligned} \tag{7.10}$$

Із рівностей (7.10) випливає, що швидкості точок плоскої фігури пропорційні їхнім відстаням від миттєвого центра швидкостей. Кутова швидкість ω плоскої фігури дорівнює в кожний даний момент часу відношенню швидкості якої-небудь точки фігури до її відстані від миттєвого центра швидкостей P:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \cdots = \frac{V_M}{MP}\,. \tag{7.11}$$

Розглянемо деякі окремі випадки визначення миттєвого центра швидкостей.

1. Якщо плоскопаралельний рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного циліндричного тіла по поверхні іншого нерухливого, то точка P – миттєвий центр швидкостей (рис. 7.8).

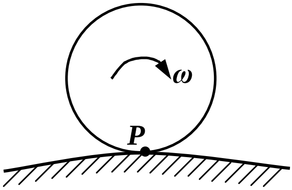


Рисунок 7.8

2. Якщо швидкості точок A і В плоскої фігури паралельні одна одній, причому лінія AB не перпендикулярна $\vec{V}_A$ (рис. 7.9), то миттєвий центр лежить у нескінченності, й швидкості всіх точок паралельні $\vec{V}_A$. При цьому з теореми про проекції швидкостей випливає, що $V_A \cdot cos\alpha = V_B \cdot cos\beta$, тобто $V_A = V_B$; аналогічний результат виходить для всіх інших точок. Отже, у розглянутому випадку швидкості всіх точок фігури в даний момент часу рівні одна одній і за модулем, і за напрямком, тобто фігура має миттєвий поступальний розподіл швидкостей. Такий стан руху тіла називають ще миттєво поступальним, кутова швидкість тіла ω у цей момент часу дорівнює нулю.

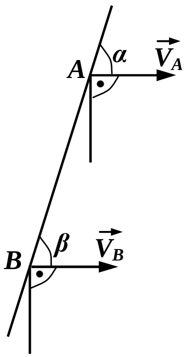


Рисунок 7.9

3. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній і при цьому лінія AB перпендикулярна $\vec{V}_A$, то миттєвий центр швидкостей P визначається побудовою, показанною на рис. 7.10. У

цьому випадку на відміну від попередніх для знаходження центра P необхідно, окрім напрямків, знати ще й модулі швидкостей V_A і V_B.

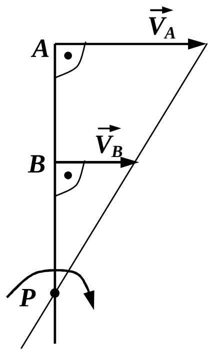


Рисунок 7.10

7.6 Визначення прискорень точок плоскої фігури

Покажемо, що прискорення будь-якої точки M плоскої фігури (так само, як і швидкість) складається з прискорень, які точка отримує при поступальному й обертальному рухах цієї фігури. Положення точки M по відношенню до осей (див. рис. 7.4) визначається радіусом-вектором $\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_1$, де $\vec{r}_1 = \overrightarrow{AM}$. Тоді

$$\vec{a}_M = \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}. \qquad (7.12)$$

У правій частині рівності (7.12) перший доданок є прискоренням $\vec{a}_A$ полюса A, а другий доданок визначає прискорення $\vec{a}_{MA}$, яке точка M отримує при обертанні фігури навколо полюса A (див. 7.3).

Отже

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \qquad (7.13)$$

Значення $\vec{a}_{MA}$, як прискорення точки обертального твердого тіла, визначається за формулою (6.22) і (6.23):

$$a_{MA} = MA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{7.14}$$

де ω і ε – кутова швидкість і кутове прискорення фігури; кут α – кут між вектором $\vec{a}_{MA}$ і відрізком *MA* (рис. 7.11).

Таким чином, прискорення будь-якої точки *M* плоскої фігури (тіла) геометрично складається з прискорення якої-небудь іншої точки *A*, взятої за полюс, і прискорення, яке точка *M* отримує при обертанні фігури навколо цього полюса.

Модуль і напрямок прискорення $\vec{a}_M$ знаходяться побудовою відповідного паралелограма (рис. 7.11).

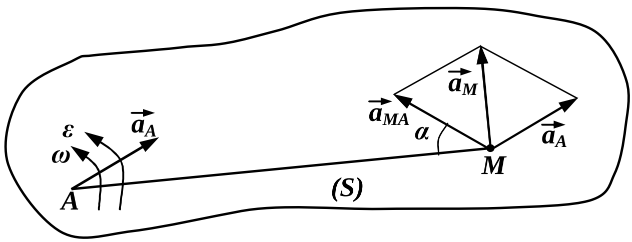


Рисунок 7.11

Однак обчислення $\vec{a}_M$ за допомогою паралелограма, зображеного на рис. 7.11, ускладнює розрахунок, оскільки спочатку необхідно буде знаходити значення кута α, а потім – кута між $\vec{a}_{MA}$ і $\vec{a}_A$. Тому при розв'язанні задач зручніше вектор $\vec{a}_{MA}$ замінити його дотичною ($\vec{a}_{MA}^{\tau}$) і нормальною ($\vec{a}_{MA}^{n}$) складовими й подати рівність (7.13) у вигляді:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^{n}. \tag{7.15}$$

При цьому вектор $\vec{a}_{MA}^{\tau}$ спрямований перпендикулярно до MA у бік обертання, якщо він прискорений, і проти обертання, якщо він уповільнений (див. рис. 6.5); вектор $\vec{a}_{MA}^{n}$ завжди спрямований від точки M до полюса A. Чисельно ці вектори рівні:

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot MA, \quad a_{MA}^{n} = \omega^2 \cdot MA. \tag{7.16}$$

Якщо полюс A рухається не прямолінійно, то його прискорення можна також представити як суму $\vec{a}_{A}^{\tau}$ і $\vec{a}_{A}^{n}$, тоді одержуємо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^{n}. \tag{7.17}$$

Нарешті, коли точка M рухається криволінійно і її траєкторія відома, то $\vec{a}_M$ у лівих частинах рівностей (7.15) і (7.17) можна замінити сумою $\vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$. Формулами (7.15), (7.16) і (7.17) користуємося звичайно при розв'язанні задач. Розв'язок задачі може бути або геометричним, або аналітичним.

7.7 Миттєвий центр прискорень

При непоступальному русі плоскої фігури в неї у кожний момент часу є точка Q, прискорення якої дорівнює нулю. Ця точка називається миттєвим центром прискорень. Визначається положення центра Q, якщо відомі прискорення $\vec{a}_A$ якої-небудь точки A фігури і величини ω і ε, таким чином

1) знаходимо значення кута α з формули $tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$;

2) від точки A під кутом α до вектора $\vec{a}_A$ проводимо пряму AE (рис. 7.12); при цьому пряма AE повинна бути відхилена від $\vec{a}_A$ у бік напрямку кутового прискорення ε;

3) відкладаємо уздовж лінії AE відрізок AQ, що дорівнює:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}\,. \tag{7.18}$$

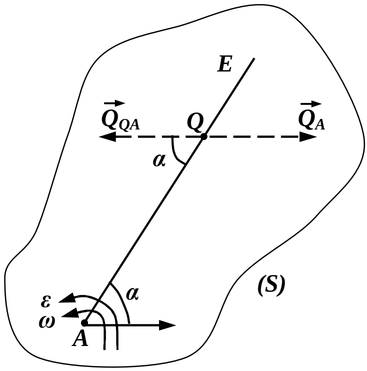


Рисунок 7.12

Побудована таким чином точка Q і буде миттєвим центром прискорень. Насправді, за формулою (7.13) і (7.14)

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}, \tag{7.19}$$

де $a_{QA} = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Підставляючи у (7.19) значення AQ (7.18), знаходимо, що $a_{QA} = a_A$. Крім того, вектор $\vec{a}_{QA}$ повинен утворювати з лінією AQ кут α, отже, вектор $\vec{a}_{QA}$ паралельний $\vec{a}_A$, але спрямований у протилежний бік. Тому

$$\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A, \quad \vec{a}_Q = 0. \tag{7.20}$$

Якщо точку Q вибирати за полюс, оскільки $\vec{a}_Q = 0$, прискорення будь-якої точки M тіла згідно з формулою (7.13) буде

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ}, \tag{7.21}$$

де $a_{MQ} = a_M = MQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Отже, прискорення точок плоскої фігури визначається в даний момент часу так, якщо б рух фігури був обертанням навколо миттєвого центра прискорень Q.

Як випливає з (7.21)

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \cdots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{7.22}$$

тобто прискорення точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням від миттєвого центра прискорень.

Слід мати на увазі, що положення миттєвого центра швидкостей P і миттєвого центра прискорень Q у даний момент часу не збігаються. Поняттям про миттєвий центр прискорень зручно користуватися при розв’язанні деяких задач.

РОЗДІЛ 8. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

8.1 Відносний, переносний і абсолютний рух

До цього часу ми вивчали рух точки або тіла відносно однієї заданої системи відліку. Однак у ряді випадків при розв'язанні задач механіки виявляється доцільним (а іноді й необхідним) розглядати рух точки (тіла) одночасно по відношенню до двох систем координат, з яких одна вважається основною, або умовно нерухомою, а друга певним чином рухається по відношенню до першої.

Рух, який здійснюється при цьому точкою (або тілом) називають складеним, або складним. Введення рухомої системи відліку дозволяє складний рух точки (тіла) розкласти на два більш прості й легко досліджувані рухи.

Розглянемо точку M, що рухається по відношенню до рухомої системи відліку $Oxyz$, яка, у свою чергу, якось рухається відносно другої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$, яку називають основною, або умовно нерухомою (рис. 8.1). Кожна з цих систем відліку, звичайно, зв'язана з певним тілом.

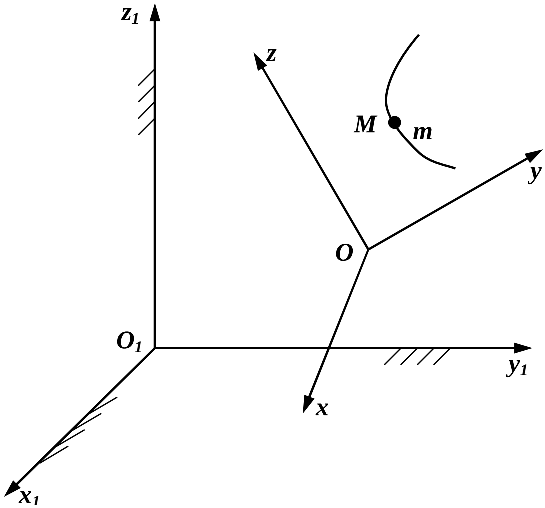


Рисунок 8.1

Введемо такії визначення.

1. Рух, який здійснюється точкою M по відношенню до рухомої системи відліку (до осей $Oxyz$), називається відносним рухом.

Траєкторія такого руху називається відносною траєкторією. Швидкість і прискорення точки M у відносному русі називаються відповідно відносною швидкістю ($\vec{V}_{\text{відн}}$) і відносним прискоренням ($\vec{a}_{\text{відн}}$). З визначення випливає, що при обчисленні $\vec{V}_{\text{відн}}$ і $\vec{a}_{\text{відн}}$ можна рух осей $Oxyz$ до уваги не брати (розглядати їх як нерухомі).

2. Рух, який здійснюється рухомою системою відліку $Oxyz$ (і всіма незмінно пов'язаними з нею точками простору) по відношенню до рухомої системи $O_1x_1y_1z_1$, є для точки M переносним рухом.

Швидкість тієї незмінно пов'язаної з рухомими осями $Oxyz$ точки m, з якою в даний момент часу збігається рухома точка M, називається переносною швидкістю точки M у цей момент ($\vec{V}_{\text{пер}}$), а прискорення цієї точки m – переносним прискоренням точки M ($\vec{a}_{\text{пер}}$). Таким чином,

$$\vec{V}_{\text{пер}} = \vec{V}_m\,, \quad \vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_m. \tag{8.1}$$

Якщо, наприклад, відносний рух точки відбувається по поверхні (або усередині) твердого тіла, з яким жорстко зв'язані рухомі осі $Oxyz$, то переносною швидкістю (або прискоренням) точки M у даний момент часу буде швидкість (або прискорення) тієї точки m тіла, з якою в цей момент збігається точка *M*.

3. Рух, який здійснюється точкою по відношенню до нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$, називається абсолютним, або складним. Траєкторія цього руху називається абсолютною траєкторією, швидкість – абсолютною швидкістю ($\vec{V}_{\text{абс}}$), прискорення – абсолютним прискоренням ($\vec{a}_{\text{абс}}$).

Для розв'язку задач кінематики на складний рух точки необхідно встановити залежності між відносними, переносними й абсолютними швидкостями і прискореннями точки.

8.2 Теорема про додавання швидкостей

Розглянемо складний рух точки *M*. Нехай ця точка робить за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ уздовж траєкторії *AB* відносне переміщення, обумовлене вектором $\overrightarrow{MM_1}$ (рис. 8.2). Сама крива *AB*, рухаючись разом з рухливими осями *Oxyz* (на рисунку не показані), перейде за той же проміжок часу в якесь нове положення A_1B_1. Одночасно та точка m кривої *AB*, з якою в момент часу *t* збігається точка *M*, зробить переносне переміщення $\overrightarrow{mm_1} = \overrightarrow{Mm_1}$. У результаті точка M набуде положення M_1 і здійснить за час Δt абсолютне переміщення $\overrightarrow{MM_1}$.

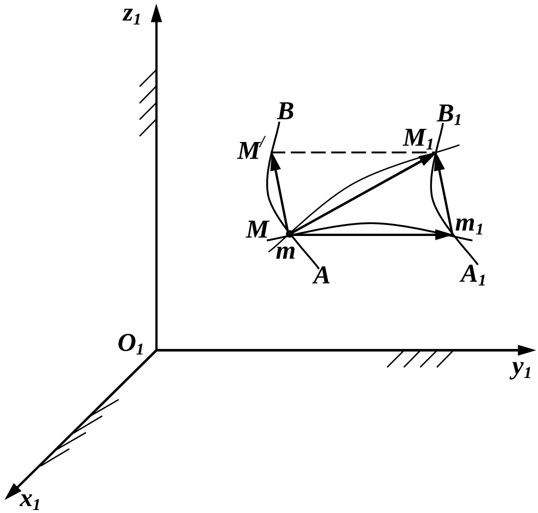


Рисунок 8.2

З векторного трикутника Mm_1M_1 маємо

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{Mm_1} + \overrightarrow{m_1M_1}. \tag{8.2}$$

Ділячи обидві частини рівності (8.2) на Δt і переходячи до межі, отримаємо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{Mm_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{m_1M_1}}{\Delta t}\,. \tag{8.3}$$

Але за визначенням,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \vec{V}_{\text{аб}}\ ,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{Mm_1}}{\Delta t} = \vec{V}_{\text{пер}}\,. \tag{8.4}$$

Що стосується останнього доданка, то оскільки при $\Delta t \to 0$ крива A_1B_1 прагне до збігу з кривою AB, у межах

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{m_1 M_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M M_1}}{\Delta t} = \vec{V}_{\text{отн}}\,. \tag{8.5}$$

У результаті знаходимо, що

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{відн}} + \vec{V}_{\text{пер}}. \tag{8.6}$$

Таким чином, ми довели таку **теорему про додавання швидкостей**: *при складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей*.

Побудована на рис. 8.3 фігура називається паралелограмом швидкостей.

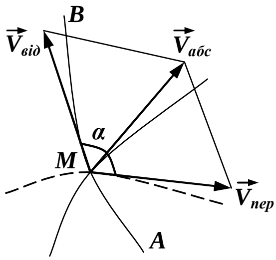


Рисунок 8.3

Якщо кут між векторами $\vec{V}_{\text{отн}}$ і $\vec{V}_{\text{пер}}$ дорівнює α, то за модулем

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{відн}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2 \cdot V_{\text{відн}} V_{\text{пер}} \cdot cos\alpha.} \tag{8.7}$$

Слід зазначити, що при розв'язанні задач відносна швидкість точки визначається за формулами кінематики точки, а переносна – за формулами кінематики твердого тіла.

8.3 Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Знайдемо залежність між відносним, переносним й абсолютним прискоренням точки. З рівності (8.6) отримаємо

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{d\vec{V}_{\text{абс}}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{\text{відн}}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{\text{пер}}}{dt}\,. \tag{8.8}$$

Похідні визначають зміну кожного з векторів при абсолютному русі. Ці зміни складаються зі змін при відносному і при переносному рухах. Отже, умовно зміни, які вектори $\vec{V}_{\text{відн}}$ и $\vec{V}_{\text{пер}}$ отримують при відносному русі, можна відрізняти індексом «1», а при переносному русі – індексом «2». Тоді рівність (8.8) набере вигляду

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \frac{\left(d\vec{V}_{\text{відн}}\right)_1}{dt} + \frac{\left(d\vec{V}_{\text{відн}}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\vec{V}_{\text{пер}}\right)_1}{dt} + \frac{\left(d\vec{V}_{\text{пер}}\right)_2}{dt}. \tag{8.9}$$

За визначенням (див. 8.1, п. 1) відносне прискорення характеризує зміну відносної швидкості тільки при відносному русі; рух осей *Oxyz*, тобто переносний рух, при цьому до уваги не береться. Тому

$$\vec{a}_{\text{відн}} = \frac{\left(d\vec{V}_{\text{відн}}\right)_1}{dt}\,. \tag{8.10}$$

У свою чергу, переносне прикорення характеризує зміну переносної швидкості тільки при переносному русі, оскільки $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_m$ (див. 8.1, п. 2), де m – точка, незмінно пов'язана з осями *Oxyz* і, отже, та, що отримує прискорення тільки при русі разом із цими осями, тобто при переносному русі. Тому

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \frac{\left(d\vec{V}_{\text{пер}}\right)_2}{dt}. \tag{8.11}$$

У результаті з рівності (8.8) отримаємо

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{відн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \frac{\left(d\vec{V}_{\text{відн}}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\vec{V}_{\text{пер}}\right)_1}{dt}. \tag{8.12}$$

Введемо позначення

$$\vec{a}_{\text{кор}} = \frac{\left(d\vec{V}_{\text{відн}}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\vec{V}_{\text{пер}}\right)_1}{dt}. \quad (8.13)$$

Величина $\vec{a}_{\text{кор}}$, що характеризує зміну відносної швидкості точки при переносному русі й переносній швидкості точки при її відносному русі, називається поворотним або коріолісовим прискоренням точки. У результаті рівність (8.12) набере вигляду

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{відн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}. \quad (8.14)$$

Формула (8.14) виражає **теорему Коріоліса про додавання прискорень**: *при складному русі абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, переносного й коріолісова.*

З рівності (8.13) можна знайти формулу для обчислення $\vec{a}_{\text{кор}}$. Після деяких перетворень і міркувань складові, що входять до правої частини (8.13), можна представити у такому вигляді

$$\frac{\left(d\vec{V}_{\text{відн}}\right)_2}{dt} = \frac{\left(d\vec{V}_{\text{пер}}\right)_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}} \, . \quad (8.15)$$

Підставляючи (8.15) у рівність (8.13), одержимо

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{відн}}\right) . \quad (8.16)$$

Таким чином, коріолісове прискорення дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості (кутової швидкості рухомої системи відліку) на відносну швидкість точки.

Випадок поступального переносного руху. У цьому випадку $\omega = 0$ і, отже, $\vec{a}_{кор} = 0$. У результаті рівність (8.14) має вигляд:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{відн} + \vec{a}_{пер}\,, \tag{8.17}$$

тобто при поступальному переносному русі абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного й переносного прискорень. Результат тут аналогічний тому, який дає теорема про додавання швидкостей.

8.4 Обчислення відносного, переносного й коріолісова прискорень

Відносне прискорення, оскільки при його знаходженні рух рухомих осей до уваги не береться, обчислюється звичайними методами кінематики точки (розд. 5).

Переносне прискорення обчислюється як прискорення точки, незмінно зв'язаної з рухомими осями, тобто як прискорення точки деякого твердого тіла, за формулами, отриманими для прискорень точок твердого тіла (розд. 6,7).

Коріолісове прискорення обчислюється за формулами (8.16). Модуль коріолісового прискорення, якщо кут між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{відн}$ позначити через α, буде рівний

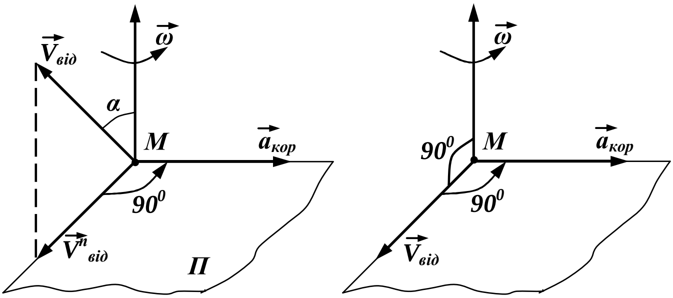
$$a_{кор} = 2 \cdot \omega \cdot V_{відн} \cdot sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{V}_{відн}}\right) = 2 \cdot \omega \cdot V_{відн} \cdot sin\alpha. \tag{8.18}$$

Вектор $\vec{a}_{кор}$ спрямований так, як і вектор $\vec{\omega} \times \vec{V}_{відн}$, тобто перпендикулярно до площини, що проходить через вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_{відн}$, в той бік, звідки найкоротше сполучення $\vec{\omega}$ з $\vec{V}_{відн}$ видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 8.4, *а*).

З рис. 8.4*а* видно також, що напрямок $\vec{a}_{\text{кор}}$ можна визначити, спроектувавши вектор $\vec{V}_{\text{відн}}$ на площину *П*, перпендикулярну до $\vec{\omega}$, і повернувши цю проекцію $\vec{V}_{\text{відн}}^{\text{П}}$ на $90°$ у бік переносного обертання (правило Жуковського).

Якщо відносна траєкторія – плоска крива і переміщається увесь час у своїй площині, то кут $\alpha = 90°$ (рис. 8.4*б*) і в цьому випадку за модулем

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot \omega \cdot V_{\text{відн}}. \tag{8.19}$$



а) б)

Рисунок 8.4

Крім того, як видно з рис. 8.4*б*, напрямок $\vec{a}_{\text{кор}}$ в цьому випадку можна знайти, повернувши вектор відносної швидкості $\vec{V}_{\text{відн}}$ на $90°$ у бік переносного обертання.

З формули (8.18) видно, що коріолісове прискорення може обертатися на нуль у таких випадках:

1) коли $\omega = 0$, тобто коли переносний рух є поступальним (8.17) або якщо переносна кутова швидкість у даний момент часу обертається на нуль;

2) коли $V_{\text{відн}} = 0$, тобто коли відносна швидкість у даний момент часу обертається на нуль;

3) коли $\alpha = 0$, або $\alpha = \pi$, тобто коли відносний рух відбувається за напрямком, паралельним осі переносного обертання, або якщо в даний момент часу вектор $\vec{V}_{\text{відн}}$ паралельний цій осі.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1998. – 415 с.
3. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. – К.: Высшая школа. Главное изд-во, 1985. – 327 с.
4. Голубева О.В. Теоретическая механика. – М.: Высшая школа, 1976. – 283 с.
5. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: и 2 т. – М.: Наука,1972; 1977. – Т.1. – 456 с.; Т.2. – 462 с.