

МОДЕЛЬ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» КАК ПРИМЕР ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БИОЛОГИИ, ЭКОНОМИКЕ, СОЦИОЛОГИИ, ХИМИИ

Модель «хищник-жертва» (или Лотка-Вольтерра) возникает во многих прикладных задачах, связанных с конкурентным взаимодействием двух популяций. Примеры использования этой модели в различных областях науки можно найти в [1-5]. Она представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\frac{dX}{dt} = aX - bXY, \quad \frac{dY}{dt} = cXY - dY \quad (1)$$

где $X(t) > 0$ и $Y(t) > 0$ - размеры популяций жертвы и хищника в момент времени t ; a, b, c и d - положительные постоянные параметры. Начальные условия $X(0) = X_0, Y(0) = Y_0$ также выбираются положительными: $X_0 > 0, Y_0 > 0$.

Решения системы (1) представляют собой нелинейные колебания. Они обладают рядом интересных свойств, которые позволяют сделать выводы о качественном поведении решений $X(t)$ и $Y(t)$ при изменении параметров системы или начальных условий. Можно отметить следующие свойства системы «хищник-жертва»:

1). Закон сохранения Вольтерра:

$$V(X, Y) = cX - d \ln X + bY - a \ln Y = V(X_0, Y_0).$$

2). Если начальные условия положительны, $X_0 > 0, Y_0 > 0$, то решения (1) положительны $X(t) > 0, Y(t) > 0$ и ограничены.

3). Решения(1) – периодические функции,

$$X(t+T) = X(t), Y(t+T) = Y(t).$$

4). При движении по орбите угловая скорость не меняет знак.

5). Период T зависит от начальных условий и возрастает с ростом $V(X_0, Y_0)$.

6). Закон сохранения средних Вольтерра [2, с. 28] :

$$\langle X \rangle = X_s, \quad \langle Y \rangle = Y_s,$$

где $X_s = \frac{d}{c}$, $Y_s = \frac{a}{b}$ - стационарные точки системы (1),

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

7). Закон изменения средних Вольтерра [2, с. 35] : если два вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то среднее число жертв возрастает, а хищников убывает.

К сожалению не все эти свойства обсуждаются в учебниках. Обычно ограничиваются первыми тремя. По нашему мнению, студентов нематематических специальностей следует знакомить и с остальными свойствами решений.

В докладе будут рассмотрены способы доказательств свойств 1) – 7), а также предложена их простая качественная интерпретация.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. –240 с.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. –288 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 399 с.
4. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов: – М.: Логос, 2001. – 296 с.
5. Смит Дж. М. Модели в экологии. – М.: Мир, 1976. –186 с.

О.А. Білоус, к.ф.-м.н., доцент
Сумський державний університет

ПРОБЛЕМИ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ В ПРАКТИЦІ ПІДГОТОВКИ ІНЖЕНЕРІВ

В останньому десятиріччі зміни в характері навчання відбуваються в контексті глобальних освітніх тенденцій, таких як масовий характер освіти та її безперервність, орієнтація на активне засвоєння людиною способів пізнавальної діяльності, підвищення