

УДК 330.4:338.2:658

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
ФИНАНСОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ  
В УСЛОВИЯХ РИСКОВ МЕЖДУНАРОДНОГО РЫНКА**

*А.С. Мазманишвили, д-р физ.-мат. наук, профессор;*

*А.В. Бондарь, канд. техн. наук, доцент;*

*Ю.Н. Петрушенко, канд. экон. наук, доцент;*

*Сумский государственный университет, г. Сумы*

*У статті запропоновано математичну модель оцінки ймовірності банкрутства фірми в умовах невизначеності й заданих критичних рівнів його фінансового стану. Об'єктом дослідження є велике логістичне підприємство, що працює в умовах ризиків міжнародного ринку.*

*В статье предложена математическая модель оценки вероятности банкротства фирмы в условиях неопределенности и заданных критических уровней его финансового состояния. Объектом исследования является крупное логистическое предприятие, работающее в условиях рисков международного рынка.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Создание, изучение и адаптация гибких математических моделей, анализирующих и совершенствующих рыночные тенденции и динамику финансовых потоков, всегда являлось важным аспектом теории экономического прогнозирования. Особенно актуальным данное научное направление становится в посткризисный период. В условиях восстановления рыночного баланса чрезвычайно важным является своевременное распознавание и минимизация, а зачастую и полная ликвидация негативных финансовых тенденций как в рамках отдельного предприятия, так и целой отрасли.

Европейская и американская теоретико-методологические системы моделирования вероятности банкротства и финансовой устойчивости предприятия строятся на базе исследований Альтмана, Ольсона и Змиевски, которые и до сегодняшнего дня остаются одними из основополагающих в анализе финансовой устойчивости предприятий [11, 12, 13].

Среди российских авторов следует отметить работы А.А. Новоселова [1], В.В. Калашникова, Д. Константинодиса [2], В. Малиновского [3] и др. Особое внимание в исследованиях этих ученых уделяется таким методам анализа финансовых рисков, как: неравенство Лундберга, метод Крамера, модели риска Спарре Андерсена, теория Винера-Хопфа, эвристическая аппроксимация де Вильдера, процесс Пуассона.

Вклад в развитие математических методов анализа финансовых рисков внесли такие отечественные ученые, как В.В. Витвинский [5, 6],

А.Б. Каминский [7], О.И. Олексик [8], М.С. Клапкив [9], И.В. Буртняк [10] и др.

Демонстрация моделей по определению вероятности наступления банкротства предприятия, как правило, проводится на примере деятельности страховых компаний как хозяйственной единицы, где процесс возникновения коллективного риска как показателя финансовой устойчивости может быть наглядно показан и охарактеризован [2]. В то же время недостатком методов, задействованных при анализе финансовых и статистических показателей деятельности страховых компаний, является то, что они не охватывают макроэкономические риски, воздействующие на финансовую стабильность компаний, ведущих деятельность на международной арене.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Целью представленной работы** является рассмотрение проблемы финансовой устойчивости предприятия вследствие нарушения его стабильной работы в условиях неопределенности, а также нерационального использования финансовых ресурсов за определенный промежуток времени. Данные анализируются посредством использования схемы изъятия ресурса из ресурсного контейнера с линейным трендом и нормальными к нему возмущениями. Преимущество данной модели заключается в том, что она позволяет провести как аналитическое исследование, так и выполнить моделирующие эксперименты.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

**1. Объект исследования.** Исследуемое нами предприятие является крупным логистическим провайдером на международном рынке, одним из основных направлений деятельности которого является организация процесса доставки импортируемой продукции в страны Восточной Европы. Данный вид деятельности характерен тем, что зачастую для проведения одной сделки необходимо согласовать требования и возможности трех и более стран (страны отправителя, страны получателя, транзитных стран). Использование различных мировых валют, косвенная зависимость от стабильности и надежности экономик других стран мира, дополнительные риски, возникающие при использовании различных транспортных цепочек и сообщений (например, несогласованность законодательства, «фактор доверия» к агентам других стран, криминальные элементы), создают риски возникновения непредвиденных расходов. К сожалению, эти, равно как и другие случаи, не всегда могут быть покрыты страховыми выплатами, но существенно влияют на объем выручки компаний, работающих в логистической отрасли. В условиях кризиса эти и другие риски приобретают особую актуальность и оказывают прямое влияние на снижение финансовой стабильности предприятий.

Стандартные показатели и модели анализа стабильности предприятия, как правило, помимо внутренних отчетных показателей предприятия, учитывают локальные особенности рынка (сезонные колебания, политическая и экономическая стабильность в стране, имидж и политика компании на рынке). В данном случае анализу подлежат результаты деятельности предприятия на международной арене в докризисный и кризисный периоды.

Анализ данных за период 2007-2009 годов выявил колебания доходности предприятия по причине изменения структуры и величин финансовых потоков и, как следствие, возникновение опасности банкротства предприятия. Необходимым является создание модели определения вероятности достижения предприятием нулевого уровня

доходности, используя имеющийся массив данных хозяйственной деятельности и с учетом выявленных рисков.

**2. Математическая модель: линейный функционал.** Решение многих практических задач приводит к необходимости изучения вероятностных характеристик времени достижения некоторого заданного уровня процессом на выходе инерционного детектора накопительного типа [1, 2, 4, 10].

Рассмотрим аддитивную смесь  $\xi(t)$  детерминированного положительного сигнала  $s(t)$  и шума  $x(t)$ :

$$\xi(t) = s(t) + x(t). \quad (1)$$

Если на вход указанного линейного детектора поступает такая аддитивная смесь, то результат детектирования имеет случайный характер, на его выходе формируется величина

$$\eta(t) = \int_0^t [s(t') + x(t')] dt'. \quad (2)$$

Рассмотрим такие схемы, критерием срабатывания у которых служит достижение величиной  $\eta(t)$  некоторого заданного уровня  $L$ . Поскольку  $\eta(t)$  – случайный процесс, то время достижения уровня  $L$  также случайно. Для положительно-определенных функций  $s(t)$  и больших  $t$  этот момент времени будет определяться уровнем достижения  $\eta(\tau) = L$ , то есть тем моментом времени  $\tau$ , для которого будет выполняться случайное событие  $\{A : \eta(\tau) = L\}$ . Для моментов достижения выполняется

$$P(\tau) = \left\langle \delta(\tau - \eta^{-1}(L)) \right\rangle, \quad (3)$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака, а  $\eta^{-1}(L)$  – функция, обратная к  $\eta(\tau)$ . Угловыми скобками  $\langle \cdot \rangle$  здесь и далее будет обозначаться операция нахождения безусловного математического ожидания относительно множества реализаций случайного процесса  $x(t)$ , то есть функциональный интеграл в пространстве функций  $\{x(t)\}$ . Из свойств  $\delta$ -функций следует, что

$$P(\tau) = \left\langle \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \delta(\eta(\tau) - L) \right\rangle. \quad (4)$$

Используя Фурье-представление для  $\delta$ -функции, получим

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^{-1} \exp(i\lambda L) \frac{d}{d\tau} \langle \exp(-i\lambda\eta(\tau)) \rangle d\lambda. \quad (5)$$

Далее будем предполагать, что  $x(t)$  – нормальный марковский процесс (НМП). Рассмотрим характеристическую функцию  $Q_\tau(\lambda) = \langle \exp(-i\lambda\eta(\tau)) \rangle$ . Поскольку  $x(t)$  – нормальный процесс, то свойством нормальности обладает и процесс  $\eta(t)$ . Для него имеем

$$\langle \eta(\tau) \rangle = \int_0^\tau s(t) dt,$$

$$D_\tau = D(\tau) = \langle \eta^2(t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle^2 = \int_0^\tau \int_0^\tau \langle x(t_1)x(t_2) \rangle dt_1 dt_2 \quad (6)$$

В силу нормальности случайной величины  $\eta_\tau = \eta(\tau)$  приведенных моментов достаточно для нахождения характеристической функции  $Q_\tau(\lambda)$ , что дает  $Q_\tau(\lambda) = \exp(-i\lambda \langle \eta_\tau \rangle - \lambda^2 D_\tau / 2)$ . Поэтому

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda\tau) Q_\tau(\lambda) d\lambda, \quad (7)$$

откуда

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^{-1} \exp(i\lambda L) \frac{d}{d\tau} \exp\left(-i\lambda \langle \eta_\tau \rangle - \frac{1}{2} \lambda^2 D_\tau\right) d\lambda. \quad (8)$$

Дифференцирование по  $\tau$  и последующее интегрирование по  $\lambda$  приводит к выражению общего типа

$$P(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\tau}} \left[ \dot{D}_\tau \frac{L - \langle \eta_\tau \rangle}{D_\tau} + \langle \dot{\eta}_\tau \rangle \right] \exp\left\{-\frac{(L - \langle \eta_\tau \rangle)^2}{2D_\tau}\right\}. \quad (9)$$

Для получения выражений, пригодных для последующего численного моделирования, необходимо задаться конкретным видом случайного НМП-процесса  $x(\tau)$  вместе с соответствующими ему функциями  $\langle \eta_\tau \rangle$  и  $D_\tau$ . Ниже будем рассматривать хорошо известный винеровский процесс, для использования которого достаточно задать интенсивность  $\sigma$ .

В настоящей работе будем использовать регулярный процесс  $s(t)$  линейного вида с постоянной  $c$ , поэтому  $\langle \eta_\tau \rangle = c\tau$ ,  $\langle \dot{\eta}_\tau \rangle = c$ . Далее, для винеровского процесса имеем  $D_\tau = \sigma\tau / 2$ ,  $\dot{D}_\tau = \sigma / 2$ .

В приведенных предположениях, учитывая нормировку для искомой плотности распределения  $P(\tau)$  времени достижения  $\tau$ , имеем

$$P(\tau) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\tau\tau_c}} \exp\left\{-\gamma \frac{(\tau - \tau_c)^2}{\tau\tau_c}\right\}, \quad \gamma = \frac{c}{\sigma} L, \quad \tau_c = \frac{L}{c}. \quad (10)$$

### 3. Численное моделирование процесса финансовой устойчивости.

Для модельного примера были выбраны следующие параметры: временная длительность расчета  $\tau \leq 365$  и  $\tau \leq 400$  (дней), временной шаг  $\Delta\tau = 1$ , уровень разорения  $L_1 = 365$  и  $L_2 = 400$ , постоянная регулярной компоненты  $c = 1$ , интенсивность случайной компоненты  $\sigma = 0,1$ . В модели система «забывает» о своем состоянии к следующему временному шагу. Объем выборки статистического моделирования составил  $M = 10^4$ . Такая величина объема выборки  $M$  дает возможность на основании результатов статистического моделирования делать заключения о

значениях  $P$  искомым вероятностей вплоть до величин  $P = 0,001$  или  $P = 0,999$ . Основные результаты численных расчетов ниже представлены в виде амплитудных гистограмм или соответствующих им кумулянт.

На рис. 1 представлены 5 реализаций функционала (2), а также указаны два критических уровня финансового состояния предприятия  $L_1 = 365$  и  $L_2 = 400$ . Видно, что к моменту достижения выбранных уровней функционал  $\eta(t)$  (2) распределен по амплитуде, распределенными являются также и сами моменты достижения.

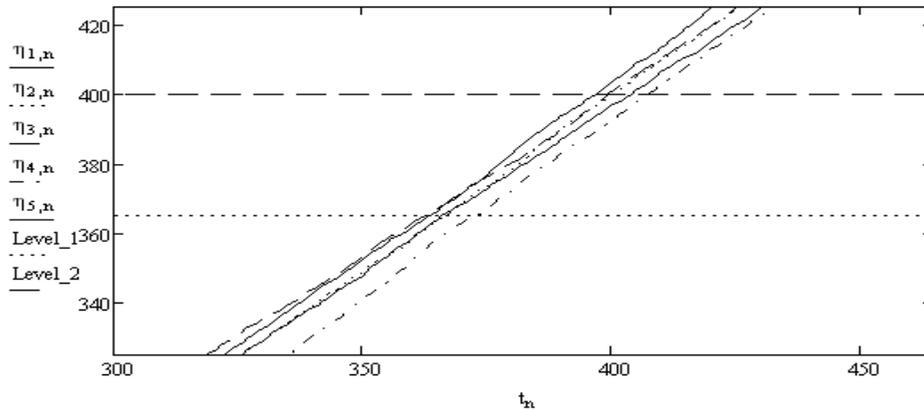


Рисунок 1 – Первые 5 реализаций линейного функционала  $\eta(t)$

На рис. 2 представлены эмпирические гистограммы распределения времен достижения случайным функционалом  $\eta(t)$  критических уровней финансового состояния  $L_1 = 365$  и  $L_2 = 400$  (дней). По форме они приближаются к нормальному закону, однако в нашем случае функция  $\tau$  описывается выражением (10), отличающимся от нормального. Существенным здесь оказывается тот факт, что благодаря наличию случайной компоненты в изучаемом явлении, эмпирические распределения, будучи сосредоточены около критических уровней  $L_1 = 365$  и  $L_2 = 400$ , содержат возможность разорения как ранее этих временных уровней, так и позже.

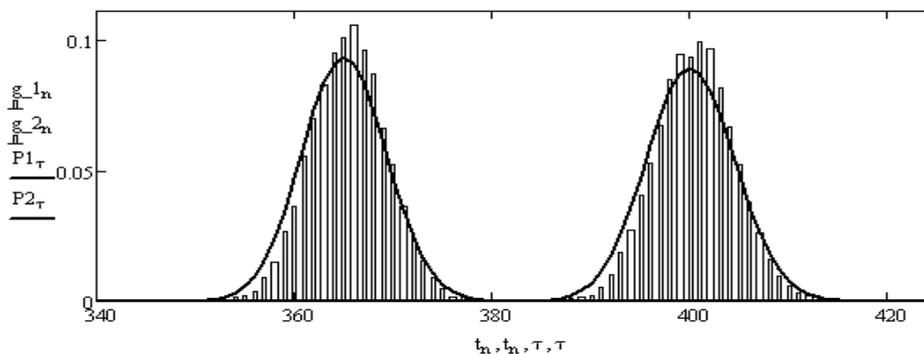


Рисунок 2 – Эмпирические гистограммы  $g_1$  и  $g_2$  распределения времен достижения случайным функционалом  $\eta(t)$  и их аналитические аналоги  $P1$  и  $P2$  согласно формуле (10); критические уровни финансового состояния  $L_1 = 365$  и  $L_2 = 400$

Кумуляты (накопленные эмпирические вероятности, отвечающие приведенным на рис. 2 временным гистограммам) приведены на рис. 3.

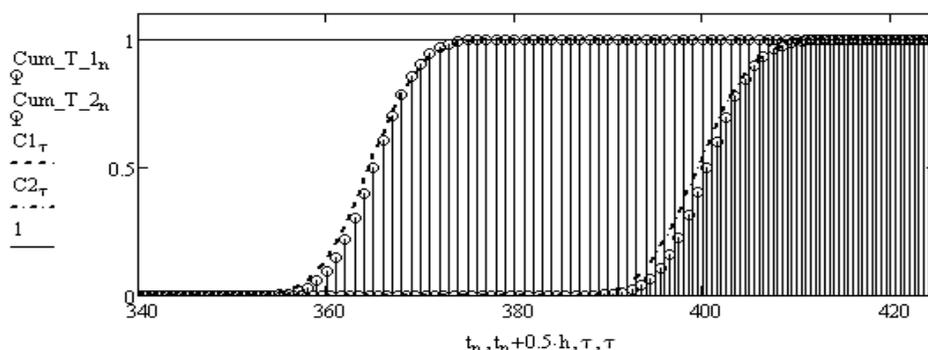


Рисунок 3 – Кумуляты  $Cum_{1\_t\_1}$  и  $Cum_{T\_2}$  эмпирического распределения времен достижения случайным функционалом  $\eta(t)$  и их аналитические аналоги  $C1$  и  $C2$  согласно (10); критические уровни  $L_1 = 365$  и  $L_2 = 400$

### ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Анализ приведенных кумулянт показывает, что для выбранных параметров моделирования и критических уровней финансового состояния предприятия имеют место заметные вероятности достичь заданный уровень раньше, чем в заданные моменты времени  $\tau = 365$  и  $\tau = 400$  (дней). Так, для обеспечения вероятности избежать финансового банкротства  $P = 0,997$  (банкротство допускается в 3 случаях из 1000) в выбранных условиях требуется  $\tau = 370$  и  $\tau = 407$  (дней) соответственно. На практике это может привести к потере экономической эффективности в работе предприятия. Например, при прочих равных условиях, предприятие будет склонно выбирать менее рискованную тактику своего поведения (меньшие объемы производства, большие сроки поставки, игнорирование многосторонних соглашений и пр.) по сравнению с условиями определенности. Соответственно актуальным становится вопрос сокращения неопределенности в работе предприятия и экономической эффективности затрат на это сокращение.

Математическая модель, предложенная в работе, может быть использована для решения различных прикладных задач повышения эффективности работы предприятий в условиях неопределенности и риска. Данные расчета и их сравнение с аналитической моделью свидетельствуют о достаточно хорошем их соответствии. Достаточно большой объем статистической выборки, используемый в настоящей работе, дает основания предполагать возможность использования предложенного подхода и в тех случаях, когда не оказывается возможным получить явное аналитическое выражение для распределения вероятностей  $P(\tau)$ .

### SUMMARY

The paper proposed a mathematical model estimates the probability of ruin of the firm in uncertain and specified critical levels of its financial condition. Study on the subject of a major logistics company operating in the international market risks.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения. - Российская Академия Наук, Сибирское отделение, Институт вычислительного моделирования. - Новосибирск, 2001.
2. Калашников В.В. Вероятность разорения / В.В.Калашников, Д.Константиносидис // Фундаментальная и прикладная математика. - 1996. - № 4. - С. 1050-1100.
3. Малиновский В. Некоторые вопросы исследования платежеспособности страховых компаний / В. Малиновский // Страховое дело. - 1995. - № 6. - С. 46-52.
4. Зорин В.А. Элементы теории процессов риска / В.А Зорин, В.И. Мухин. - Н. Новгород: ННГУ, 2003. - 25 с.
5. Вітлінський В.В. Ризикологія в економіці та підприємстві: [монографія] / В.В. Вітлінський, Г.І. Великоіваненко. - К.: КНЕУ, 2004. - 480 с.
6. Вітлінський В.В. Ризикологія в зовнішньоекономічній діяльності: навч. посіб. / В.В. Вітлінський, Л.Л. Маханець.. - К.: КНЕУ, 2008. - 432 с.
7. Камінський А.Б. Моделювання фінансових ризиків: [монографія] / А.Б. Камінський. - К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. - 304 с.
8. Клапків М.С. Методи ідентифікації фінансових ризиків / М.С. Клапків // Фінанси України. - 2000. - № 1. - С. 39 -46.
9. Олексик О.І. Ризик та невизначеність в управлінні підприємством / О.І. Олексик // Стратегія економічного розвитку України. - 2001. - Вип.5. - С.231-237.
10. Буртняк І.В. Моделирование динамики индекса ПФТС / И.В. Буртняк, А.П. Малицкая// Бизнес Информ. - 2010. - №1 (377). - С.61-65.
11. Altman E.I. Financial Ratios Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy / E.I. Altman // Journal of Finance. - 1968.
12. Ohlson J.A. Financial Ratios and the Probabilistic Prediction of Bankruptcy // Journal of Accounting Research. - 1980.
13. Mark E. Zmijewski Methodology Issues Related to the Estimation of Financial Distress Prediction models // Journal of Accounting Research, Supplement. - 1984.

*Поступила в редакцію 24 марта 2011 г.*