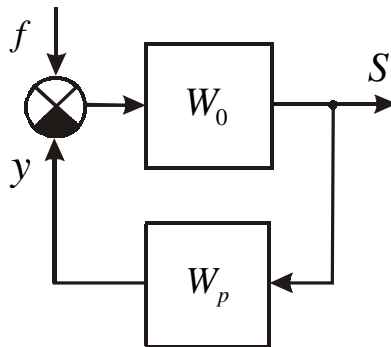


В.И. Симоновский

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

*Учебное пособие
для студентов специальности 7.080303
«Динамика и прочность»*



Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов специальности «Динамика и прочность».

В первой части в предельно краткой форме изложены основные положения и понятия теории автоматического регулирования – «скелет» дисциплины. Целью этой части является помощь в освоении студентом курса «в первом приближении», а также она послужит удобным руководством при выполнении курсовой работы.

Во второй части изложены: содержание, варианты исходных данных и методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Теория автоматического регулирования». Разработаны сюжеты исследования трех типов объектов: уравнивающее устройство центробежного насоса (гидропята), гидродинамическое торцовое уплотнение и система автоматического регулирования частоты вращения турбогенератора.

Предполагается, что в процессе выполнения работы студент, наряду с практическим освоением метода анализа динамических систем с обратной связью, приобретет некоторые навыки научно-инженерной работы в области создания и исследования математических моделей различного рода технических динамических систем.

1 КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1.1 Введение. Основные понятия

Содержание теории автоматического регулирования (ТАР) составляют методы исследования, расчета и проектирования устройств, обеспечивающих требуемое качество процессов регулирования.

Рассмотрим некоторые основные понятия и определения ТАР.

Управление – любое действие, вносящее желаемое изменение процесса.

Регулирование – частный случай управления, при котором желаемое течение процесса обеспечивается путем стабилизации или изменения по заданному закону одной или нескольких физических величин.

Объект регулирования – машина, аппарат, устройство, в котором осуществляется регулирование.

Регулируемая величина – физическая величина, характеризующая состояние объекта, подлежащая стабилизации или изменению по требуемому закону.

Регулятор – устройство, осуществляющее регулирование.

Система автоматического регулирования (САР) – совокупность объекта и регулятора как единого динамического целого.

Основные функциональные элементы и типичные воздействия в САР. На рис. 1 приведена типичная функциональная схема САР.

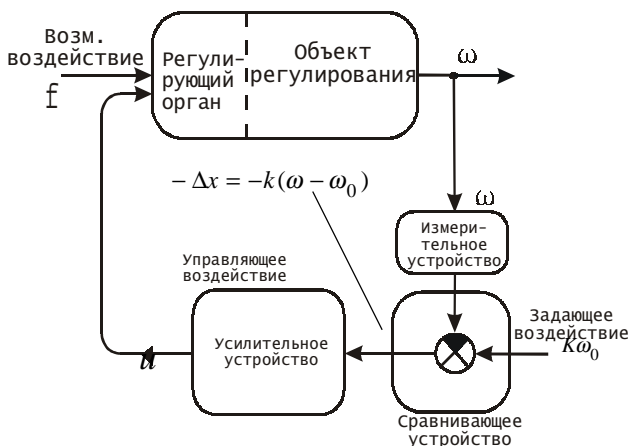


Рисунок 1

Основными функциональными элементами САР являются: *объект регулирования, измерительное устройство, сравнивающее устройство, усилительное устройство*, а также *регулирующий орган* (как правило, представляющий собой единое конструктивное целое с объектом, т. е. часть объекта регулирования).

Измерительное устройство осуществляет измерение (обычно в других физических единицах) регулируемой величины (ω).

Сравнивающее устройство – обрабатывает *разницу* (Δx) между текущим значением регулируемой величины и требуемым ее значением (*отклонение регулируемой величины*).

Усилительное устройство усиливает сигнал, пропорциональный отклонению регулируемой величины, обрабатывает силовое *управляющее воздействие* на регулирующий орган.

Регулирующий орган – устройство в объекте регулирования, перемещение подвижных элементов которого изменяет регулируемую величину.

Управляющее воздействие (u) – усилие, вызывающее перемещение подвижных элементов регулирующего органа.

Возмущающее воздействие (f) – любое воздействие на объект, изменяющее регулируемую величину.

В ТАР обычно рассматривают основной вид возмущения – *нагрузку*.

Задающее воздействие – физическая величина, обрабатываемая в сравнивающем устройстве, соответствующая требуемому значению регулируемой величины (ω_0).

Для пояснения введенных терминов рассмотрим пример простейшей системы регулирования частоты вращения турбогенератора (рис. 2).

Система работает следующим образом. При сбросе нагрузки на генератор (т. е. при отключении ряда потребителей энергии) частота вращения ротора турбогенератора начнет увеличиваться и шарики центробежного датчика оборотов (ЦДО) будут расходиться, перемещая муфту вверх.

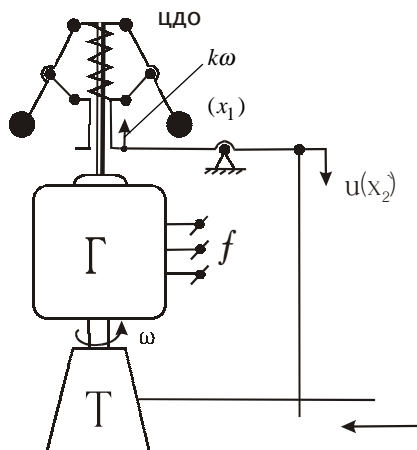


Рисунок 2

При этом заслонка направляющего аппарата турбины будет смещаться вниз, уменьшая подачу рабочего тела на турбину. Процесс регулирования будет продолжаться до тех пор, пока не установится равновесие между движущим моментом и моментом сопротивления (пропорциональным потребляемой мощности). Регулятор конструируется таким образом, чтобы это равновесие при любой допустимой нагрузке обеспечивалось при одной и той же (или почти одной и той же) частоте вращения турбогенератора. При подключении новых потребителей (набросе нагрузки) ротор будет замедляться, а заслонка в результате опускания шариков ЦДО – подниматься, обеспечивая соответствующий больший движущий момент.

Для рассматриваемого примера *объектом регулирования* является турбогенератор, *регулируемой величиной* – частота вращения ω (1/с).

Измерительным устройством служит ЦДО, в котором перемещение муфты, мм, от некоторого нулевого положения соответствует *отклонению* частоты вращения ω от некоторого номинального ω_0 . В данной схеме *сравнивающее устройство* явно не просматривается. *Задающее воздействие*

определяется параметрами конструкции ЦДО (массой шаров, жесткостью и предварительным натягом пружины, длинами плечей рычага), которые однозначно определяют положение заслонки при отсутствии нагрузки такое, которое обеспечивает, например, частоту вращения ротора на холостом ходу, равную номинальной. *Усилителем* в данной системе является рычаг. В мощных энергетических установках *усилительным устройством* служит каскад усилителей, выходным элементом которого является серводвигатель, осуществляющий перемещение лопастей направляющего аппарата *регулирующего органа*, требующее значительных усилий для реализации *надлежащего управляющего воздействия*.

В данном примере осуществляется *принцип регулирования по отклонению регулируемой величины* (от требуемого значения). Управляющее воздействие u в этом случае пропорционально отклонению регулируемой величины Δx .

При этом *обратная связь*, осуществляемая регулятором, должна быть *отрицательной*, так как управляющее воздействие всегда направлено на уменьшение отклонения. Если регулируемая величина, например, увеличивается, то управляющее воздействие должно обуславливать ее последующее уменьшение.

Зависимость, определяющая управляющее воздействие, называется *законом регулирования*.

Для улучшения качества процессов регулирования возможна зависимость управляющего воздействия u не только от отклонения регулируемой величины Δx , но и от его производных и интеграла, а также от нагрузки f и ее производных:

$$u = u\left(\Delta x, \frac{d\Delta x}{dt}, \frac{d^2\Delta x}{dt^2}, \int \Delta x dt, f, \frac{df}{dt}\right). \quad (1)$$

Использование в законе регулирования сигнала, пропорционального нагрузке f (и соответственно устройства

измерения нагрузки) реализует *принцип регулирования по возмущению*.

Принцип регулирования по отклонению является основным. Введение сигналов по нагрузке, а также производным и интегралом от отклонения и нагрузки используют лишь в дополнение к принципу регулирования по отклонению. В этом случае говорят о *комбинированном алгоритме регулирования* [1]. Использование информации об отклонении в законе регулирования является обязательным; регулятор приводит систему в стационарное состояние после исчезновения переменных во времени внешних возмущений при отклонении, равном нулю (или достаточно малом – в т. н. статических системах, см. ниже в разд. 1.6).

1.2 Линеаризация элементов САР и приведение их к стандартному безразмерному виду. Понятие передаточной функции

Каждый элемент САР представляет собой устройство, преобразующее некоторую входную величину x (входной сигнал) в выходную величину y (выходной сигнал), см. рис. 3. Зависимость выходного сигнала от входного во времени обычно описывается алгебраическим или дифференциальным уравнением. Совокупность уравнений, описывающих элементы САР, является математической ее моделью. Обычно математическая модель САР представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Если все эти уравнения линейны, говорят о линейной модели САР. В случае, когда хотя бы один элемент описывается нелинейным алгебраическим или дифференциальным уравнением, рассматривается нелинейная модель.

Предметом теории автоматического регулирования являются математические модели САР. По существу, ТАР представляет собой прикладной раздел математики, изучающий методы решений и анализа решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, характерных

для систем автоматического регулирования. Вопросы расчета и проектирования конструкций конкретных устройств регуляторов в самых различных областях техники рассматриваются в инженерных дисциплинах, посвященных средствам автоматики.

Поскольку уравнения реальных устройств, как правило, нелинейны, то (если это возможно) составляются приближенные линейные дифференциальные уравнения для отклонений переменных величин от некоторых стационарных их значений, т. е. осуществляется *линеаризация исходных уравнений*. Далее линеаризованные уравнения приводятся к принятому в ТАУ безразмерному *стандартному виду*, при котором выделяются такие параметры, как *постоянные времени, коэффициенты затухания и коэффициенты усиления*.

Линеаризация уравнений САУ и приведение их к безразмерному стандартному виду может быть проведена в такой последовательности.

1 На основании физических законов составляются исходные (обычно нелинейные) дифференциальные уравнения элементов. Выходная величина элемента и ее производные записываются в левой части уравнения, а в правой части фигурируют входной сигнал и его производные.

Пусть, например, элемент (рис. 3) описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка общего вида

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \alpha x. \quad (2)$$

2 *Определяется стационарный режим*, в отклонениях от которого будут рассматриваться изменения переменных величин системы. Уравнения стационарного режима (т.е. *уравнения статики, статические зависимости*) получаются, если положить в исходных дифференциальных уравнениях производные по времени равными нулю. Тогда вместо исходных уравнений вида (2) приходим к уравнениям статики

$$f(y, 0, 0) = \alpha x_0. \quad (2')$$

Разрешая (2') относительно y , можем получить так называемую статическую характеристику элемента

$$y_0 = \varphi(x_0). \quad (3)$$

Решая уравнение (2), находим стационарное значение $y=y_0$, соответствующее заданному стационарному значению входного сигнала $x=x_0$.

3 *Производится линеаризация уравнений*, которая заключается в разложении каждого нелинейного слагаемого в ряд Тейлора и удержании членов не выше первого порядка малости. Например, для уравнения вида (2) запишем

$$f(y, \dot{y}, \ddot{y}) \approx f(0,0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} = \alpha x_0 + \alpha \Delta x.$$

Учитывая условие статики (2') и обозначив

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}}\right)_0, \quad \epsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)_0, \quad c = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0,$$

перепишем последнее уравнение в виде

$$a\Delta\ddot{y} + \epsilon\Delta\dot{y} + c\Delta y = \alpha\Delta x. \quad (4)$$

Значок «нуль» при частных производных означает, что они вычисляются при найденных по п. 2 значениях переменных в статике, т. е. при $y=y_0$, $x=x_0$. Таким образом, вместо исходного нелинейного уравнения (2) мы записываем приближенное линеаризованное уравнение (4) относительно отклонений, которое будет тем точнее описывать поведение исходной системы, чем меньше будут отклонения переменных Δx , Δy от их стационарных значений x_0 , y_0 .

Практически при правильно сконструированном регуляторе отклонения переменных при различного рода возмущениях достаточно малы. Поэтому обычно линеаризованная система с достаточной для практики точностью описывает динамику САУ. В то же время, как известно, для решения и анализа линейных систем существуют общие и сравнительно простые методы. Кроме того, рассмотрение

линейной системы, как будет показано ниже, позволяет на основании теорем Ляпунова на основе сравнительно простых критериев ее устойчивости сделать вывод об устойчивости соответствующего стационарного режима исходной нелинейной САР.

4 Делается переход к безразмерным переменным путем линейной замены:

$$\Delta x = x_{\sigma} \bar{x}, \quad \Delta y = y_{\sigma} \bar{y}, \quad (5)$$

где x_{σ} , y_{σ} – некоторые так называемые *базисные значения* переменных, которые, вообще говоря, могут быть приняты произвольно.

В качестве базисных, как правило, удобно принимать стационарные значения $x_{\sigma} = x_0$, $y_{\sigma} = y_0$.

Подставляя (5) в (4), получим линеаризованное безразмерное уравнение

$$a y_{\sigma} \ddot{\bar{y}} + v y_{\sigma} \dot{\bar{y}} + c y_{\sigma} \bar{y} = \alpha x_{\sigma} \bar{x}. \quad (6)$$

5 Уравнения (6) преобразуется к *стандартной форме* так, чтобы коэффициент при безразмерном отклонении выходного сигнала \bar{y} был равен единице. Разделив (6) на $c y_{\sigma}$, получим стандартную форму записи

$$T^2 \ddot{\bar{y}} + 2\zeta T \dot{\bar{y}} + \bar{y} = K \bar{x}, \quad (7)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{a}{c}}, \quad \zeta = \frac{v}{2Tc} = \frac{v}{2\sqrt{ac}}, \quad K = \frac{\alpha x_{\sigma}}{c y_{\sigma}}. \quad (8)$$

Коэффициент T [с] называется постоянной времени; ζ – коэффициентом затухания; K – коэффициентом усиления. Заметим, что постоянная времени T и коэффициент затухания ζ не зависят от выбора базисных величин; эти коэффициенты определяют динамические свойства элемента. Коэффициент усиления K характеризует зависимость между отклонениями входного и выходного сигналов в статике.

Для удобства линейные дифференциальные уравнения записывают в символической форме, обозначая оператор дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$, т. е.

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = py, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = p^2y \text{ и т. д.}$$

Уравнение (7) в символической форме примет вид

$$(T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1)\bar{y} = k\bar{x}. \quad (9)$$

Символический множитель вида $T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1$ при выходном сигнале называется *собственным оператором*. Символический множитель при входном сигнале именуется *оператором воздействия*.

Передаточной функцией элемента САР называется отношение оператора воздействия к собственному оператору.

Например, для элемента, описываемого уравнением (9), передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1}.$$

Структурно элемент изображают в виде прямоугольника, в котором записана передаточная функция $W(p)$ (рис. 3).

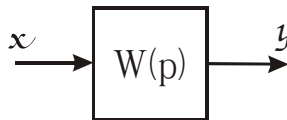


Рисунок 3

1.3 Передаточные функции и передаточные характеристики динамических звеньев САР

1.3.1 Передаточные функции

Математический аналог элемента, описываемого определенным уравнением, называется *динамическим звеном*. Несмотря на все многообразие конструкций устройств САР, все они; как элементы математической модели сводятся к весьма немногочисленной группе математических аналогов – динамических звеньев. Как правило, элементы САР описываются алгебраическими соотношениями и дифференциальными уравнениями первого либо второго порядков. Этим уравнениям соответствуют усилительное звено, аperiodическое звено, колебательное звено и аperiodическое звено второго порядка (табл. 1). Если в устройстве выходной сигнал пропорционален производной по времени от входного

Таблица 1

Название звена	Уравнение в стандартной форме	Передаточная функция $W(p)$
Усилительное или безынерционное звено	$y = kx$	k
Инерционное или аperiodическое первого порядка	$T \frac{dy}{dt} + y = kx$	$\frac{k}{Tp + 1}$
Колебательное звено	$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy}{dt} + y = kx$	$\zeta < 1, \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1}$
Аperiodическое звено второго порядка		$\zeta > 1, \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$
Дифференцирующее звено	$y = T \frac{dx}{dt}$	Tp
Интегрирующее звено	$y = \int x dt$	$\frac{1}{Tp}$

сигнала, то математическим аналогом этого устройства будет дифференцирующее звено. Интегрирующее звено является математическим аналогом устройства, в котором выходной сигнал пропорционален интегралу от входного сигнала.

Звенья, приведенные в табл.1, называют элементарными, хотя аperiodическое звено второго порядка уже может быть представлено в виде последовательного соединения двух аperiodических звеньев первого порядка (рис. 4).

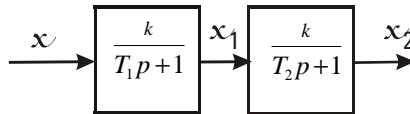


Рисунок 4

1.3.2 Переходные характеристики

Все звенья, кроме усилительного, описывают связь между входным и выходным сигналами и с помощью дифференциальных уравнений. При различных законах изменения входного сигнала $x(t)$ будет по-разному изменяться во времени выходной сигнал $y(t)$.

В ТАР для изучения динамических свойств звеньев (и САР в целом) рассматривают решения $y(t)$ при некоторых стандартных видах входного сигнала $x(t)$. Наиболее употребительным является входной сигнал в виде единичного скачка (рис. 5):

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

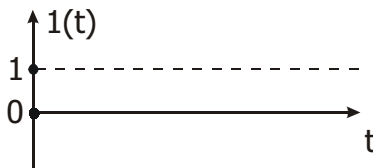


Рисунок 5

Зависимость выходного сигнала элемента от времени при входном сигнале в виде единичного скачка называется переходной характеристикой этого элемента.

Переходная характеристика является важнейшей динамической характеристикой. Ступенчатое воздействие при заданном ограничении его максимального значения является наиболее неблагоприятным возмущением. Единичное значение принимается для удобства сопоставления. В силу линейности системы при другом пороговом значении входного сигнала изменяются пропорционально все ординаты переходной характеристики, не влияя на сам характер процесса.

Переходная характеристика $y=h(t)$ есть решение дифференциального уравнения элемента при $x(t)=1$ и нулевых начальных условиях.

Рассмотрим нахождение *переходной характеристики апериодического звена первого порядка.* Для это решим дифференциальное уравнение

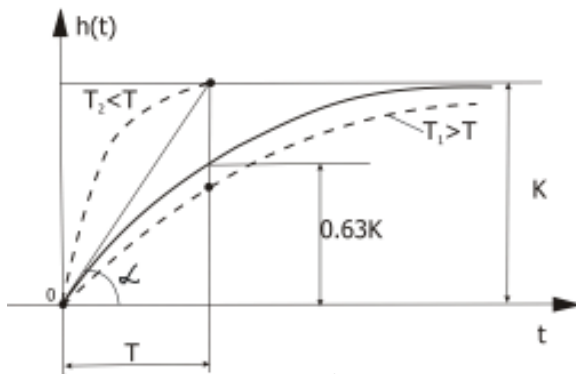
$$T \frac{dy}{dt} + y = k \text{ при } y(0)=0.$$

Решение находим классическим методом, представляя его в виде двух слагаемых: $y=y_{св} + y_с$,

где $y_{св}$ - *свободная составляющая*, являющаяся общим решением уравнения без правой части;

$y_с$ - *вынужденная составляющая*, являющаяся частным решением. Очевидно, что $y_с=k$, а $y_{св} = ce^{-\frac{t}{T}}$. Используя начальные условия, находим $c = -k$ и $y = h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$.

График данной характеристики показан на рис. 6.



Заметим, что наклон характеристики в начальной точке

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = \frac{k}{T} e^0 = \frac{k}{T}. \text{ При } t = T \text{ будет } T = K \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0.63K,$$

т. е. выходной сигнал достигнет 63% от своего будущего стационарного значения. Как видим, постоянная времени T характеризует скорость установления нового стационарного положения. Чем больше T , тем более инерционен элемент. При малых T элемент становится практически безынерционным; аperiodическое звено эволюционирует к усилительному.

Переходная характеристика колебательного звена находится из решения дифференциального уравнения

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta T \dot{y} + y = k \text{ при } y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

Для нахождения свободной составляющей определяем корни характеристического уравнения:

$$T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1 = 0 (*),$$

$$p_{1,2} = -\eta \pm j\omega, \text{ где } \eta = \frac{\zeta}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}.$$

После определения произвольных постоянных известным образом получим окончательно

$$y = h(t) = k \left(1 - e^{-\eta t} (\cos \omega t + \frac{\eta}{\omega} \sin \omega t) \right).$$

Графики переходных характеристик при различных значениях коэффициента затухания ζ показаны на рис. 7.

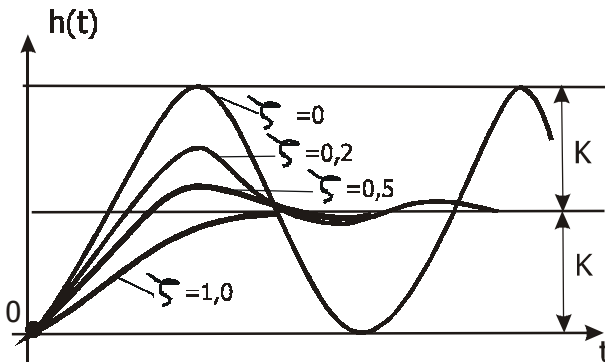


Рисунок 7

Переходная характеристика аperiodического звена второго порядка определяется корнями характеристического уравнения (*), которые при $\zeta > 1$ будут вещественными:

$$p_{1,2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}.$$

Для удобства обозначим $p_1 = -\frac{1}{T_1}$, $p_2 = -\frac{1}{T_2}$,

$$\text{где } T_1 = \frac{T}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}, \quad T_2 = \frac{T}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}.$$

Решение в конечном счете может быть представлено в виде

$$y = h(t) = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right).$$

График переходной характеристики аperiodического звена второго порядка приведен на рис. 8.

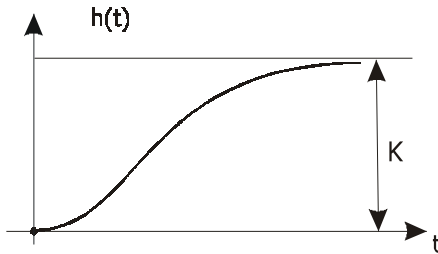


Рисунок 8

1.4 Частотные характеристики

Вторым типовым входным сигналом, применяемым в ТАР для исследования динамических свойств элементов и САР, является гармонический

$$x = X_m \sin \omega t. \quad (10)$$

Если элемент или система линейны, то, как известно, вынужденная составляющая выходной величины также будет изменяться по гармоническому закону той же частоты

$$y = Y_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (11)$$

Амплитуда Y_m и фаза φ определяются в процессе нахождения частного решения дифференциального уравнения элемента или системы. Пусть это уравнение имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y = kx. \quad (12)$$

Характеристики, с помощью которых определяются амплитуда и фаза выходного сигнала в зависимости от амплитуды и частоты входного, называются *частотными характеристиками*.

Эти характеристики, кроме указанного прямого назначения, позволяют судить о динамических свойствах элементов и систем; с их помощью исследуют устойчивость. Посредством частотных характеристик оценивают качество переходных процессов.

Будем искать частное решение уравнения (12) в комплексной форме, положив

$$\bar{x}(t) = X_m e^{j\omega t} = X_m \cos \omega t + jX_m \sin \omega t. \quad (13)$$

Очевидно, что $x(t) = \text{Im} \bar{x} = X_m \sin \omega t$.

И если найти для $\bar{x}(t)$ частное решение $\bar{y}(t)$, то искомое решение

$$y(t) = \text{Im} \bar{y}(t).$$

Комплексное решение, соответствующее (13), ищем в виде

$$\bar{y}(t) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)} = Y_m \cos(\omega t + \varphi) + jY_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (14)$$

Подставляя (14) и (13) в (12), запишем

$$(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n)Y_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \kappa X_m e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ можем записать

$$Y_m e^{j\varphi} = X_m \frac{k}{a_0(j\omega)^n + \dots + a_n} = X_m W(j\omega), \quad (14a)$$

где $W(j\omega)$ – комплексное выражение, которое получено путем подстановки $p=j\omega$ в передаточную функцию элемента

$$W(p) = \frac{k}{a_0(p)^n + \dots + a_n}.$$

Итак, если в выражение передаточной функции $W(p)$ подставить $p=j\omega$, то получим комплексное выражение $W(j\omega)$, которое называется частотной передаточной функцией.

Из равенства двух комплексных выражений (14a) следует равенство их модулей и фаз. Поэтому

$$Y_m = X_m |W(j\omega)|, \quad \varphi = \arg W(j\omega). \quad (15)$$

Модуль частотной передаточной функции $A(\omega) = |W(j\omega)|$ называется амплитудной частотной характеристикой.

Значение этой характеристики при заданной частоте ω входного сигнала равно отношению амплитуд выходного и входного сигналов.

Аргумент частотной передаточной функции называется фазовой частотной характеристикой. Ее значение для заданного ω равно фазе, на которую выходной сигнал опережает входной.

Частотная передаточная функция может быть представлена в виде

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega). \quad (16)$$

Функции $U(\omega) = A(\omega) \cos(\varphi(\omega))$, $V(\omega) = A(\omega) \sin(\varphi(\omega))$ называют соответственно *вещественной и мнимой W частотными характеристиками*.

Фаза $\varphi(\omega)$ при известных вещественной и мнимой характеристиках вычисляется по формуле [5]

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{V}{U}, \text{ при } U > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{V}{U} + \pi, \text{ при } U < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Годограф частотной передаточной функции $W(j\omega)$, построенный в комплексной плоскости (рис. 9), называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой*.

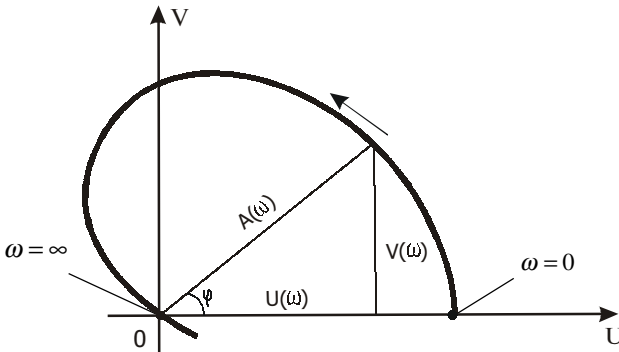


Рисунок 9

Таким образом, значение функции $W(j\omega)$, а затем определение ее модуля $A(\omega)$ и аргумента $\varphi(\omega)$ дают возможность для любого ω найти вынужденную составляющую (11) решения дифференциального уравнения (12), соответствующую правой части (10).

Частотная передаточная функция аperiodического звена имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = k \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Соответственно вещественная, мнимая, амплитудная и фазовая характеристики выражаются зависимостями:

$$U(\omega) = \frac{k}{(1+T^2\omega^2)}, \quad V(\omega) = \frac{-kT\omega}{(1+T^2\omega^2)},$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = \text{arctg}T\omega.$$

Нетрудно показать, что уравнение амплитудно-фазовой характеристики приводится к виду

$$V^2 + (U - \frac{k}{2})^2 = (\frac{k}{2})^2,$$

т. е. на комплексной плоскости V, U годограф $W(j\omega)$ представляет собой окружность радиуса $0,5k$ (рис. 10). На рис. 11, 12 показаны соответственно амплитудная и фазовая характеристики апериодического звена. Амплитуда выходного сигнала с ростом частоты ω входного сигнала стремится к нулю, причем выходной сигнал отстает по фазе, и это отставание по мере возрастания частоты стремится к $\pi/2$.

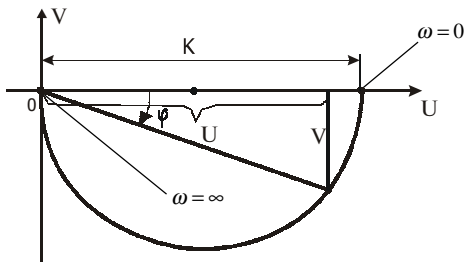


Рисунок 10

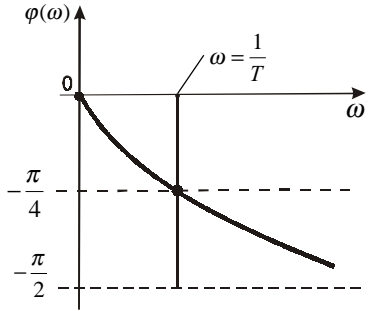


Рисунок 12

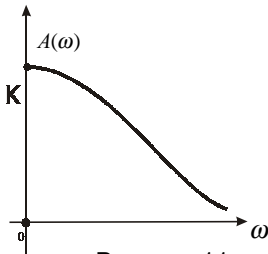


Рисунок 11

Частотная передаточная функция колебательного звена записывается в виде

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\zeta T\omega} = k \frac{1 - T^2\omega^2 - j2\zeta T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}$$

Из этого выражения нетрудно получить амплитудную и частотную характеристики:

$$A(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\zeta^2 \bar{\omega}^2}},$$

$$\varphi = \begin{cases} -\arctg \frac{2\zeta\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} \text{ если } \bar{\omega} < 1, \\ -\arctg \frac{2\zeta\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}^2} - \pi \text{ если } \bar{\omega} \geq 1, \end{cases}$$

где обозначено $\bar{\omega} = \omega T$.

На рис. 13, 14, 15 показаны соответственно амплитудно-фазовая, амплитудная и фазовая характеристики колебательного звена при различных значениях ζ .

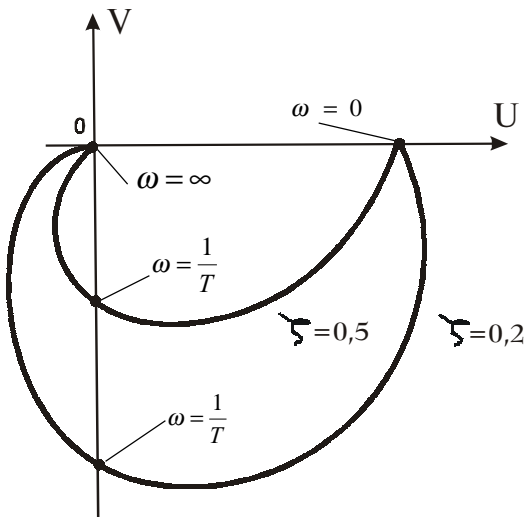


Рисунок 13

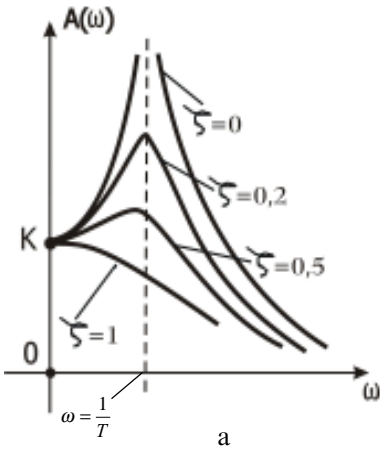


Рисунок 14

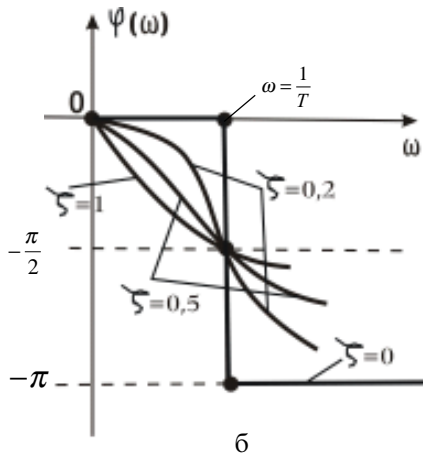


Рисунок 15

1.5 Структурные схемы и дифференциальные уравнения замкнутых САР

1.5.1 Соединения передаточной функции

Любую САР можно представить как совокупность динамических звеньев, определенным образом связанных между собой. Рассмотрим три основных типа соединений звеньев.

Последовательное соединение – такое, при котором выход предыдущего звена служит входом последующего (рис. 16).

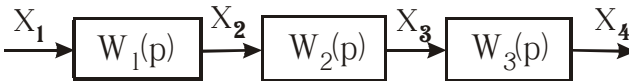


Рисунок 16

Символически можно представить так:

$$y = W_3(p)x_2 = W_3(p)W_2(p)x_1 = W_3W_2W_1x_1.$$

Очевидно, что *передаточная функция группы n последовательно соединенных элементов равна произведению их передаточных функций:*

$$\frac{y}{x} = W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Параллельное соединение – такое, при котором на вход элементов подается один и тот же сигнал, а выходы элементов суммируются (рис. 17). Можем записать

$$y = W_1x + W_2x + W_3x = (W_1 + W_2 + W_3)x .$$

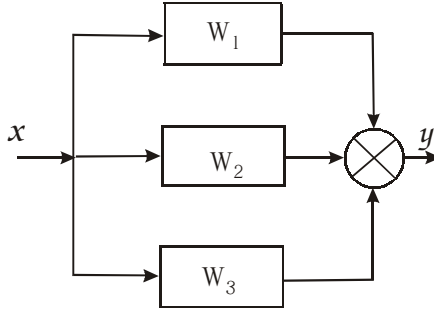


Рисунок 17

Следовательно, *передаточная функция группы параллельно соединенных элементов равна сумме их передаточных функций:*

$$\frac{y}{x} = W_{\text{г}} = \sum_{i=1}^n W_i(p).$$

Соединение с отрицательной обратной связью (рис. 18а) – такое, при котором выходной сигнал первого элемента подается на вход второго, выход которого с обратным знаком суммируется входом первого.

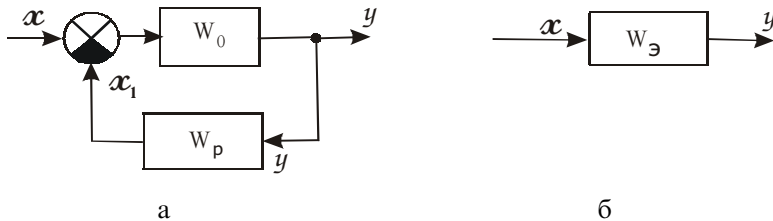


Рисунок 18

Из рис. 18а видно, что символически можно записать

$$y = W_0(x - x_1), x_1 = W_p y.$$

Исключив из этих соотношений x_1 , получаем:

$$y = \frac{W_0}{1 + W_0 W_p} x, \quad \frac{y}{x} = W_y = \frac{W_0}{1 + W_0 W_p}.$$

Последняя формула определяет эквивалентную передаточную функцию всего блока (рис. 18б).

Структура рис. 18 характерна для общей схемы САР, где обычно $W_o(p)$ – передаточная функция объекта, а $W_p(p)$ – передаточная функция цепи отрицательной обратной связи регулятора; y – регулируемая величина; x – возмущающее воздействие (например, нагрузка).

1.5.2 Построение структурных схем САР

Структурной схемой САР называется изображение системы в виде передаточных функций отдельных элементов, соединенных между собой соответствующим функциональной схеме образом.

Рассмотрим построение структурной схемы САР на примере системы регулирования вращения турбогенератора (рис. 2). Пусть уравнения элементов этой системы имеют вид:

- 1) $(T_0 p + 1)S = -x_2 - m_n$ (уравнение объекта);
- 2) $(T_1 p^2 + 2\zeta T_1 p + 1)x_1 = \kappa_1 S$ (уравнение ЦДО);
- 3) $x_2 = \kappa_2 x_1$ (уравнение усилителя).

Структурная схема, соответствующая этим уравнениям, приведена на рис. 19а. Структурная схема САР является удобным и наглядным способом описания ее математической модели. Она отражает структуру взаимодействия элементов; смотря на эту схему, нетрудно выписать систему дифференциальных уравнений, являющуюся математической моделью САР.

1.5.3 Передаточная функция и дифференциальное уравнение САР

Передаточной функцией разомкнутой САР (W_{pc}) называется символическое отношение управляющего воздействия к нагрузке при разомкнутом контуре цепи обратной связи.

Для примера рис. 19а

$$W_{pc} = \frac{x_2}{f} = W_0 W_1 W_2 = \frac{k_1 k_2}{(T_0 p + 1)(T_1^2 p^2 + 2\zeta T_1 p + 1)}$$

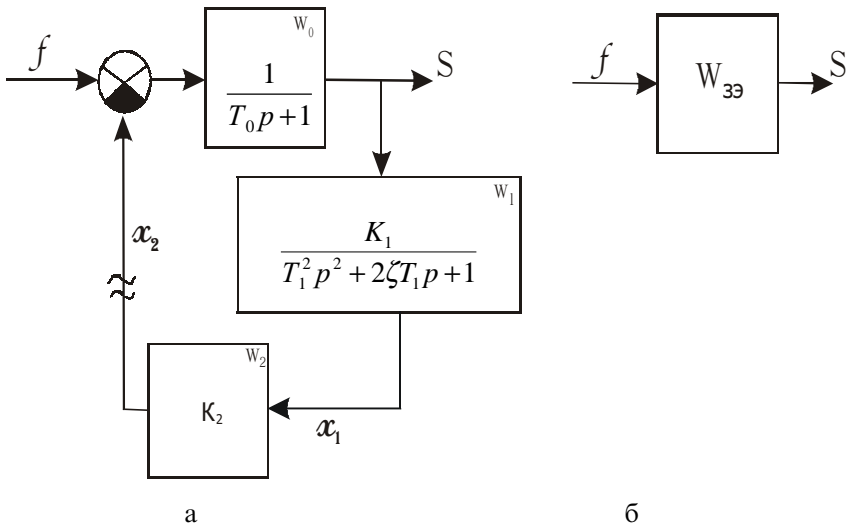


Рисунок 19

В случае, когда разомкнутая САР представляет собой совокупность последовательно соединенных звеньев (одноконтурная САР), передаточная функция разомкнутой системы равна произведению передаточных функций всех элементов системы. Вышеприведенный пример относится к этому случаю. При разветвленных структурах, когда в цепи обратной связи имеет место параллельное соединение элементов или соединение с обратной связью, схему предварительно следует свести к одноконтурной.

Передаточной функцией замкнутой САР называется символическое отношение регулируемой величины к нагрузке при замкнутом контуре цепи обратной связи.

Для схемы рис. 19а можем записать символически

$$S = W_0(-x_2 + f),$$

$$x_2 = W_1W_2S.$$

Откуда, исключив x_2 , получим $\frac{S}{f} = W_{з.с} = \frac{W_0}{1 + W_0W_1W_2}$.

Учитывая введенное выше понятие передаточной функции разомкнутой системы, запишем

$$W_{з.с} = \frac{W_0}{1 + W_{р.с}}.$$

Последнее соотношение отражает общее правило:

передачная функция замкнутой системы равна передачной функции объекта, деленной на единицу плюс передачная функция разомкнутой системы.

Передачная функция замкнутой САР является передачной функцией ее как блока (элемента), входным сигналом которого служит нагрузка f , а выходным – отклонение разомкнутой величины S (рис.19б).

С помощью передачной функции нетрудно получить *дифференциальное уравнение замкнутой САР, связывающее отклонение регулируемой величины и нагрузку.*

Для примера рис. 19 запишем

$$\frac{S}{f} = W_{з.с} = \frac{W_0}{1 + W_0W_1W_2} =$$

$$= \frac{T_1^2 p^2 + 2\zeta T_1 p + 1}{T_1^2 T_0 p^3 + (2\zeta T_0 + T_1) T_1 p^2 + (2\zeta T_1 + T_0) p + 1 + k_1 k_2}.$$

Откуда, произведя формально очевидные алгебраические операции, получим *дифференциальное уравнение замкнутой САР* в символической записи:

$$(T_1^2 T_0 p^3 + (2\zeta T_0 + T_1) T_1 p^2 + (2\zeta T_1 + T_0) p + 1 + k_1 k_2) S = (T_1^2 p^2 + 2\zeta T_1 p + 1) f. \quad (18)'$$

Если символический множитель при S приравнять к нулю, понимая теперь уже под буквой p характеристическое число, то получим *характеристическое уравнение САР*.

Для данного примера оно имеет вид

$$T_1^2 T_0 p^3 + (2\zeta T_0 + T_1) T_1 p^2 + (2\zeta T_1 + T_0) p + 1 + k_1 k_2 = 0.$$

Это же уравнение можно получить, рассмотрев символическое соотношение

$$\frac{S}{f} = W_{з.с.} = \frac{W_0}{1 + W_{pc}} \Rightarrow (1 + W_{pc}) S = W_0 f.$$

При решении однородного уравнения следует положить $f=0$. Откуда следует, что *характеристическое уравнение может быть получено путем приравнивания к нулю числителя выражения*

$$1 + W_{pc}(p) = 0.$$

1.6 Статические и астатические САР

1.6.1 Статические САР

Вернемся к рассмотрению системы регулирования турбогенератора (рис. 2, 19). Изменению нагрузки ($0 < m_n < 1$) должно соответствовать изменение положения направляющего аппарата x_2 (рис. 19) и, следовательно, изменение положения муфты ЦДО, пропорционального координате x_1 . Но каждому равновесному значению x_1 соответствует свое отклонение регулируемой величины. Отсюда следует, что разным нагрузкам в статике будут соответствовать разные частоты вращения. Таким образом, данная система принципиально не может поддерживать при изменении нагрузки одну и ту же частоту вращения. Такие системы называются *статическими*.

Зависимость регулируемой величины от нагрузки в статике вытекает из рассмотрения математической модели, т.е. уравнения (18). Положив в этом уравнении $f=-m_n=const$ и учитывая, что после затухания переходного процесса должно быть $S=S_{ст}=const$, можно получить статическую зависимость между $S_{ст}$ и m_n , формально приравняв $p=0$:

$$S_{ст} = -\frac{m_n}{1+k_1k_2}.$$

Величина $S_{ст}$ называется *статической ошибкой*. Она колеблется от нуля (при $m_n=0$, т. е. на холостом ходу агрегата) до максимальной (при $m_n=1$, т. е. при номинальной нагрузке). Максимальная статическая ошибка Δ

$$S_{max} = \Delta = -\frac{1}{1+k_1k_2}$$

называется *статизмом системы*. При помощи достаточно большого коэффициента усиления обратной связи $K=k_1k_2$ можно подобрать достаточно малый статизм. Например, при $K=99$ будет $\Delta=-0,01$. Это значит, что частота вращения при номинальной нагрузке упадет на величину

$$\Delta\omega_{max} = \omega_n S_{max} = -0,01\omega_n,$$

т. е. на 1% от номинальной частоты вращения ω_n .

Статической характеристикой замкнутой САР называется зависимость в статике регулируемой величины от нагрузки. Для нашего примера эта зависимость в относительных параметрах имеет вид $S=-0,01m_n$ (график на рис. 20а). Эту характеристику можно перестроить в именованных величинах. Учитывая, что уравнение (18) записано для относительного отклонения регулируемой величины

$$S = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n},$$

можем записать из этого последнего выражения

$$\omega = \omega_n(1+S) = \omega_n(1-0,01m_n),$$

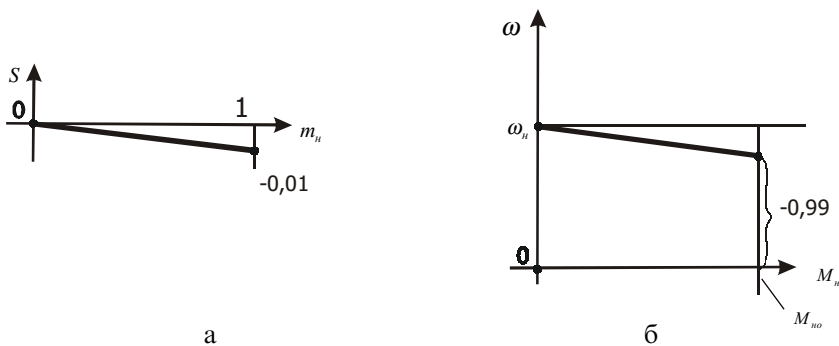


Рисунок 20

где относительная нагрузка $m_n = M_n / M_{но}$;

$M_{но}$ – номинальный момент турбоагрегата; M_n – текущее значение этого момента. График изменения частоты ω , в $1/c$, от момента нагрузки M_n , в Hm , приведен на рис. 20б.

Как видно из рисунка, в статической системе регулируемая величина с ростом нагрузки уменьшается. Подбором коэффициента усиления обратной связи степень ее понижения на всем допустимом диапазоне изменения нагрузок можно сделать весьма малой.

Статичность системы обуславливается статическим или пропорциональным законом регулирования.

Пропорциональным законом регулирования называется такой, при котором зависимость между отклонением регулируемой величины и управляющим воздействием в статике имеет вид линейной (или нелинейной) характеристики. Для данного примера эта зависимость записывается в форме $x_2 = k_1 k_2 S$.

1.6.2 Астатические САР

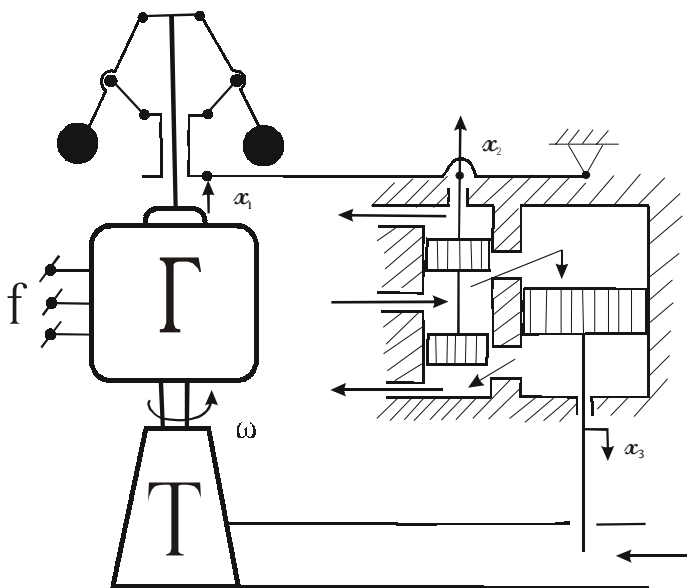


Рисунок 21

Рассмотрим САР турбогенератора прямого действия, в которой используется в качестве исполнительного устройства гидравлический сервомотор (рис. 21). Система работает следующим образом. При, например, сбросе нагрузки и, следовательно, возрастании частоты вращения турбогенератора муфта ЦДО, смещаясь вверх, вызовет перемещение поршней золотникового устройства также вверх, при этом произойдет подача масла под давлением в верхнюю полость цилиндра гидравлического сервомотора. При этом поршень сервомотора начнет смещаться вниз, прикрывая заслонкой подачу рабочего тела на турбину.

Уравнения элементов этой системы записываются в виде:

- 1) $(T_0 p + 1)S = -x_3 - m_n$ – уравнение объекта;
- 2) $x_1 = \kappa_1 S$ – упрощенное уравнение ЦДО;
- 3) $x_2 = \kappa_2 x_1$ – уравнение золотникового устройства;
- 4) $x_3 = \frac{1}{Tp} x_2$ – уравнение сервомотора; интегрирующее звено.

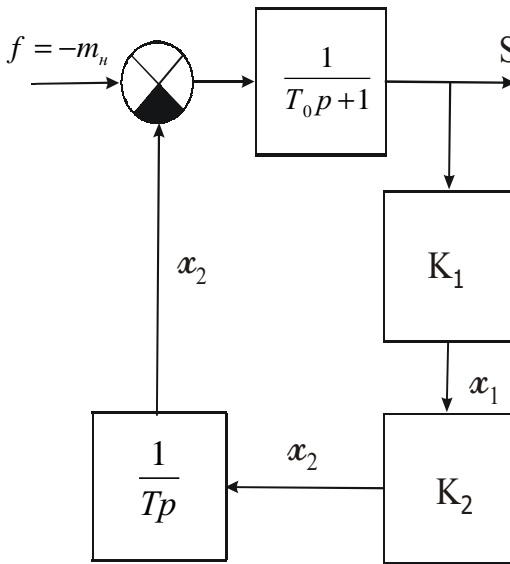


Рисунок 22

Структурная схема системы приведена на рис.22.

Дифференциальное уравнение замкнутой САУ, полученное описанным выше образом, такое:

$$(TT_0 p^2 + Tp + k_1 k_2)S = -T p m_n.$$

Для статического соотношения при $m_n = const$ положим в этом уравнении $p=0$ и получим $S_{ст} = 0$.

Таким образом, в данной системе регулируемая величина в любом установившемся режиме не зависит от нагрузки и поддерживается постоянной, статическая ошибка равна нулю. Такие системы называются *астатическими*.

Астатичность системы обуславливается интегральным законом регулирования, когда в последовательной цепи обратной связи регулятора имеется интегральное звено. При этом управляющее воздействие оказывается пропорциональным интегралу от отклонения регулирующей величины. Очевидно, что в стационарном режиме при любой постоянной нагрузке отклонение регулируемой величины должно быть не просто константой, а строго равным нулю. Например, в данном примере

$$x_3 = \frac{k_1 k_2}{T} \int S dt$$

и при любом $S \neq 0$ x_3 будет изменяться.

Астатизм системы, приведенной на рис. 20, можно пояснить также следующим образом. В любом стационарном режиме шток золотника должен находиться в одном и том же положении, соответствующем закрытым окошкам (т. е. при $x_2=0$). Но тогда и положение муфты ЦДО в любой статике должно быть одним и тем же, что обеспечивается при одной и той же частоте вращения. В то же время поршень сервомотора может остановиться в любом положении, каждый раз соответствующем данной нагрузке.

1.7 Устойчивость САР

1.7.1 Понятие устойчивости

Линейная САР описывается дифференциальным уравнением вида

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) u = (b_0 p^m + \dots + b_m) x. \quad (18)$$

Решение этого уравнения, как известно, ищется в виде суммы свободной и вынужденной составляющих:

$$y = y_{св} + y_{вын}.$$

Вынужденная составляющая определяется правой частью. В частности, для скачка $x = x_{ст} I(t)$ она равна

$$y_{вын} = \frac{b_m}{a_n} x_{ст}.$$

Свободная составляющая имеет вид

$$y_{св} = \sum_i c_i e^{\eta_i t} + \sum_k e^{\eta_k t} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t).$$

Первая группа i -х слагаемых записывается для вещественных корней характеристического уравнения $p_i = \eta_i$, вторая – для комплексных $p_{k,k+1} = \eta_k \pm j\omega_k$. Очевидно, что если хотя бы один корень характеристического уравнения замкнутой САР

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (19)$$

имеет положительную вещественную часть ($\eta_i > 0$ или $\eta_k > 0$), то $y_{св}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. Такая САР будет неустойчивой.

Таким образом, чтобы при исчезновении любых переменных во времени возмущений регулируемая величина

стремилась к стационарному значению $y_{вын} = \frac{b_m}{a_n} x_{ст}$,

соответствующему стационарному значению правой части, необходимо исчезновение свободной составляющей, т. е.

$$y_{св}(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Тогда говорят, что система устойчива.

Итак, *определим устойчивость САР как способность принимать соответствующее данной постоянной нагрузке стационарное значение регулируемой величины при исчезновении переменных во времени возмущений.*

Устойчивость линейной системы будет соблюдаться только тогда, когда все корни характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части, т. е. $\eta_p \eta_k < 0$.

Если изобразить корни на плоскости комплексных чисел (рис.23), то условие устойчивости приобретает наглядную геометрическую интерпретацию:

для устойчивости линейной САР необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения лежали слева от мнимой части комплексной плоскости корней.

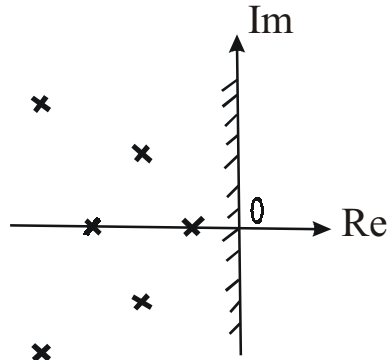


Рисунок 23

1.7.2 Алгебраические критерии устойчивости

Существуют критерии, позволяющие определить устойчивость линейной системы по коэффициентам характеристического уравнения, минуя непосредственное нахождение корней. Эти критерии можно разделить на две группы: алгебраические и частотные (основанные на рассмотрении частотных характеристик разомкнутых и замкнутых САР).

Как правило, для практических целей вполне можно ограничиться алгебраическими критериями, из которых наиболее употребительными являются критерии Гурвица и Стодолы.

Критерий Стодолы: *необходимым условием устойчивости является положительность всех корней характеристического уравнения.* Таким образом, если хотя бы (при $a_0 > 0$) один коэффициент характеристического полинома (19) отрицателен, то уже можно заключить о неустойчивости САР без дальнейшего анализа.

Критерий Гурвица. Для характеристического полинома (19) составляется определитель $n \times n$ вида

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} . \quad (20)$$

Правило составления: выписывается диагональ a_1, a_2, \dots, a_n , которая «одевается» слева и справа соответственно четным и нечетным коэффициентами в порядке возрастания слева направо.

Критерий устойчивости: для расположения всех корней полинома (19) в левой полуплоскости (или для устойчивости полинома) необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ были положительны все n диагональных минора определителя Гурвица (20):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} , \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n &= a_n \Delta_{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые практически важные частные случаи.

Полином первого порядка $a_0 p + a_1 = 0$.

Условие Гурвица здесь сводится к условию Стодолы:

$$a_0 > 0, a_1 > 0.$$

Полином второго порядка $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$.

Определитель Гурвица имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

и условие Гурвица $a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 a_2 > 0 \Rightarrow a_2 > 0$.

Таким образом, и в этом случае условие Стодолы является не только необходимым, но и достаточным. В этом можно также убедиться непосредственно, анализируя выражение для корней

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Полином третьего порядка $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

Определитель Гурвица здесь записывается так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости будут:

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = \Delta_2 a_3 > 0.$$

Таким образом, в данном случае, кроме положительности корней, необходимо и достаточно выполнения соотношения между коэффициентами $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Полином четвертого порядка

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Составляем определитель Гурвица

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости:

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0, \Delta_4 = \Delta_3 a_4 > 0 \Rightarrow a_4 > 0.$$

Заметим, что если условие $\Delta_3 > 0$ выполняется, то тем более выполняется условие $\Delta_2 > 0$. Поэтому для систем четвертого порядка, кроме положительности всех коэффициентов, достаточно выполнения условия

$$\Delta_3 = (a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0.$$

1.7.3 Построение областей устойчивости

В процессе проектирования САР представляет интерес построение областей устойчивости. Пусть, например, можно варьировать двумя параметрами системы при фиксированных остальных. Тогда все коэффициенты характеристического полинома могут быть выражены в виде функций этих параметров, т. е.

$$a_i = a_i(\alpha, \beta) \quad (i = \overline{0, n}).$$

Строя в плоскости этих параметров α, β граничные кривые, при которых миноры Гурвица равны нулю

$$\Delta_i(\alpha, \beta) = 0,$$

можно выделить области устойчивости, которые очерчиваются этими кривыми.

Рассмотрим в качестве примера характеристическое уравнение

$$\alpha p^3 + (\alpha + \beta) p^2 + \beta p + 1 = 0.$$

Здесь $a_0 = \alpha$, $a_1 = \alpha + \beta$, $a_2 = \beta$, $a_3 = 1$.

Условия Стодолы дают $\alpha > 0$, $\beta > 0$, т.е. область устойчивости лежит в первом квадранте (рис. 24). Условие Гурвица запишется так:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = (\alpha + \beta)\beta - \alpha > 0 \text{ или } \alpha > \frac{\beta^2}{1-\beta} \text{ при } \beta < 1,$$

$$\alpha = \frac{\beta^2}{1-\beta} \text{ при } \beta > 1.$$

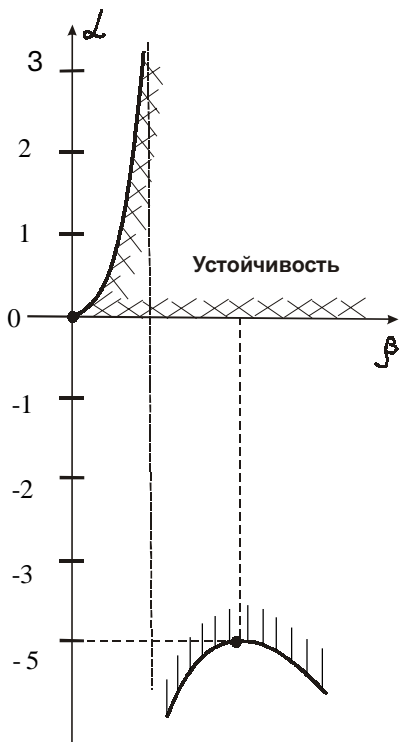


Рисунок 24

В интервале $0 < \beta < 1$ область устойчивости лежит под кривой $\alpha > \beta^2 / 1 - \beta$; в интервале $1 < \beta < \infty$ область устойчивости располагается выше этой кривой (рис. 24).

Кривая $\alpha = \beta^2 / 1 - \beta$ имеет экстремум в точке $\beta = \beta^*$, являющейся корнем уравнения:

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = 2\beta(1-\beta) + \frac{\beta^2}{(1-\beta)^2} = 0,$$

т. е. при $\beta_1^* = 0$, $\beta_2^* = 2$.

При этом максимум $\alpha_{\max} = \alpha(2) = -4$. Учитывая, что для устойчивости должно быть $\alpha > 0$, окончательно получаем область устой-

чивости, которая располагается в первом квадранте над осью β и под кривой $\alpha = \beta^2 / 1 - \beta$ в интервале $0 < \beta < 1$.

1.8 Построение переходных характеристик линейных САР

1.8.1 Вводные замечания

Как указывалось выше, найти переходную характеристику элемента (в качестве которого может рассматриваться и замкнутая САР в целом как блок с передаточной функцией $W_{зс}(p)$) означает решить дифференциальные уравнения элемента (или блока) при единичном входном сигнале $x(t)=1(t)$ и нулевых начальных условиях. Это решение можно реализовать:

- 1) классическим методом (см. выше разд. 1.3.2);
- 2) операторным методом;
- 3) с помощью ПЭВМ.

Из первых двух предпочтительным кажется операторный, который будет рассмотрен ниже. Машинное решение является наименее трудоемким. Но в ряде случаев оно не дает возможности «аналитического обзора». С помощью просмотра пусть как угодно большого количества численных вариантов решений зачастую затруднительно сделать заключение о каких-либо общих закономерностях влияния тех или иных параметров.

1.8.2 Операторный метод основан на применении операционного исчисления. Кратко, в пределах самого необходимого, рассмотрим сведения из этого раздела математики.

Говорят, что $F(p)$ изображает функцию времени $f(t)$ по Лапласу, и обозначают $f(t) \leftrightarrow F(p)$, если $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$. В частности, если $f(t) = 1(t)$, то $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$. Если $\frac{df}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0)$, в чем нетрудно убедиться, интегрируя по частям.

Соответственно для n -й производной аналогичным образом можно получить

$$f^{(n)}(t) - p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Для дальнейшего рассмотрения (решения) важно заметить, что n -я производная функции времени при нулевых начальных условиях изображается произведением p^n на изображение самой функции. Поэтому, если искомая регулируемая величина $y(\frac{1}{p})$ изображается функцией $Y(p)$, а входная величина $x(t)$ при нахождении переходной характеристики изображается функцией $1/p$, то изображение дифференциального уравнения (18) примет вид

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n Y(p) = (\epsilon_0 p^m + \dots + \epsilon_m) \frac{1}{p}. \quad (21)$$

Таким образом, изображение дифференциального уравнения (21) по форме совпадает с самим дифференциальным уравнением (18), записанным в символической форме.

Поэтому *передаточную функцию замкнутой системы $W_{sc}(p)$ (или вообще любого элемента, блока) можно определить как отношение выходного и входного сигналов по Лапласу при нулевых начальных условиях:*

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = W(p) = \frac{\epsilon_0 p^m + \dots + \epsilon_m}{a_0 p^n + \dots + a_n} = \frac{X_1(p)}{X_2(p)}.$$

Для нахождения переходной характеристики полагаем

$$X(p) = \frac{1}{p}, \quad Y(p) = H(p) = \frac{X_1(p)}{pX_2(p)}. \quad (22)$$

Переходная характеристика $h(t)$, соответствующая изображению $H(p)$, находится по формуле разложения

$$h(t) = \frac{X_1(0)}{X_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{X_1(p_k)}{p_k X_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (23)$$

где $X_2'(p) = \frac{d}{dp} X_2(p)$, а p_κ – суть корни характеристического уравнения системы $X_2(p) = a_0 p^n + \dots + a_n = 0$.

1.8.3 Примеры использования операторного метода

1.8.3.1 *Переходные характеристики пассивно интегрирующего и пассивно дифференцирующего звена*

Эти звенья имеют передаточную функцию вида

$$W(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}.$$

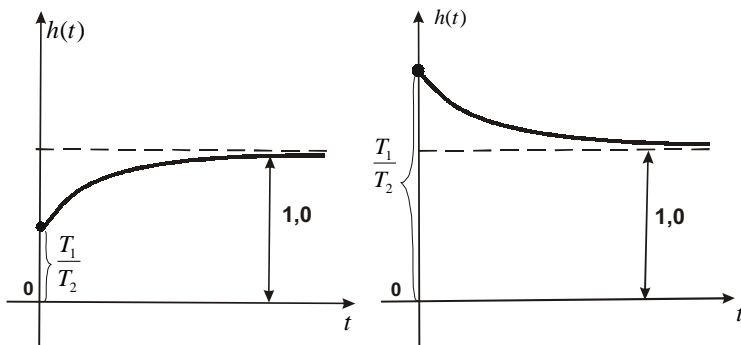
При $T_1 < T_2$ звено называется пассивно интегрирующим, при $T_1 > T_2$ – пассивно дифференцирующим. Изображение переходной характеристики для этих звеньев имеет вид

$$H(p) = \frac{T_1 p + 1}{p(T_2 p + 1)}.$$

Используя формулу разложения (23), получим

$$h(t) = 1 + \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Графики переходных характеристик показаны на рис. 25,



а $T_1 < T_2$

Рисунок 25

б $T_1 > T_2$

a – для пассивно интегрирующего звена, b – для пассивно дифференцирующего.

Заметим, что для звеньев, у которых степень числителя $X_1(p)$ равна степени знаменателя $X_2(p)$, характерен скачок в начальный момент времени. Для дифференцирующего звена этот скачек превосходит будущее стационарное состояние.

1.8.3.2 *Случай комплексно-сопряженных корней*

При наличии комплексно-сопряженных корней рекомендуется использовать следующее преобразование

$$(a + jv)e^{j\lambda t} + (a - jv)e^{-j\lambda t} = 2a \cos \lambda t - 2v \sin \lambda t. \quad (24)$$

Рассмотрим пример

$$H(p) = \frac{1}{p(p^2 + 2p + 2)}.$$

Корни характеристического уравнения $(p^2 + 2p + 2) = 0$

будут $p_1 = -1 - j$, $p_2 = -1 + j$.

Используя формулу разложения (23), получим после очевидных преобразований

$$h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} e^{-t} ((-2 + 2j)e^{jt} + (-2 - 2j)e^{-jt}).$$

Полагая $a = -2$, $v = 2$, $\lambda = 1$, запишем, используя соотношение (24), $h(t) = 0,5(1 - e^{-t}(\cos t + \sin t))$.

Данный пример представляет собой, по сути, конкретный пример переходной характеристики колебательного звена (рис.7).

1.9 Качество процессов регулирования

1.9.1 Показатели качества

Показателей качества переходных процессов САР существует множество – в зависимости от назначения и области применения той или иной системы. Рассмотрим четыре наиболее употребительных: *характер процесса, перерегулирование, быстрдействие и затухание за период*.

Характер процесса определяется видом переходной характеристики и может быть колебательным (рис. 26,27), монотонным (рис.28) и аperiodическим (рис.29).

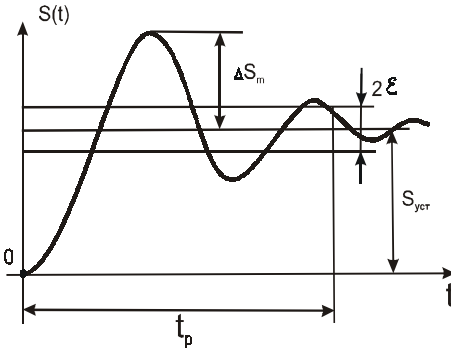


Рисунок 26

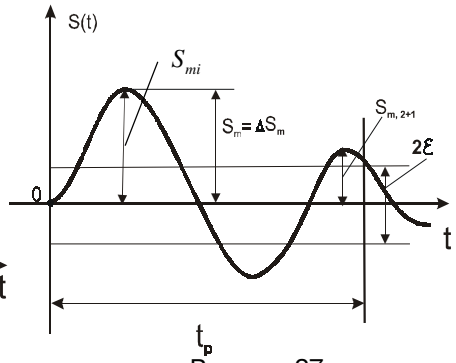


Рисунок 27

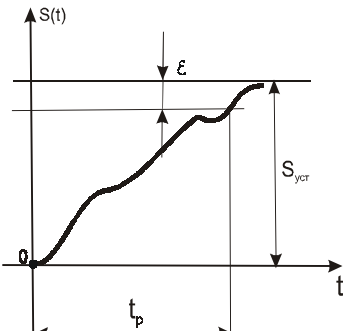


Рисунок 28

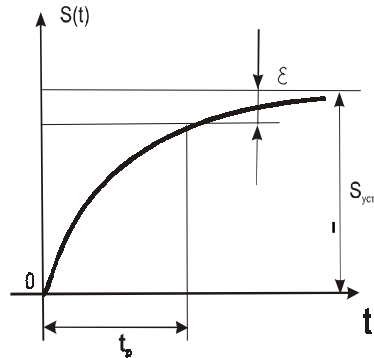


Рисунок 29

Перерегулирование – максимальное отклонение регулируемой величины от установившегося значения. Для колебательной статической системы (рис.26) $\Delta S_m = S_m - S_{уст}$, для астатической системы $\Delta S_m = S_m$ (рис. 27).

Быстродействие определяется временем регулирования t_p , в течение которого отклонение регулируемой величины от установившегося значения входит в заданные пределы $\pm \epsilon$, т. е. при $t > t_p$ будет выполняться условие $|S(t) - S_{уст}| \leq \epsilon$.

Обычно принимают $\mathcal{E} = 0,05$ (или в процентах $\pm 5\%$).

Быстродействие характеризуют также *затуханием за период* ζ , равным отклонению разности предыдущего и последующего максимальных отклонений к предыдущему (рис. 27):

$$\zeta = \frac{S_{mi} - S_{m,i+1}}{S_{mi}}.$$

Пусть переходный процесс приближенно характеризуется затухающей синусоидой $S(t) = ce^{-\eta t} \sin \omega t$ и некоторый максимум S_{mi} достигается в момент времени t_1 .

Тогда через период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ при $t = t_1 + T$ будет иметь место следующий максимум $S_{m,i+1}$, при этом

$$\zeta = \frac{ce^{-\eta(t_1+T)} \sin \omega(t_1+T) - ce^{-\eta t_1} e^{-\eta T} \sin(\omega t_1 + 2\pi)}{ce^{-\eta t_1} \sin \omega t_1} = 1 - e^{-\eta T}, \quad (25)$$

где η и ω - вещественная и мнимая части ближайшей к мнимой оси пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения САР

$$p_{1,2} = -\eta \pm j\omega.$$

1.9.2 Диаграмма качества

Требования к качеству переходного процесса, удовлетворяющего указанным выше показателям, могут быть отражены диаграммой, показывающей область допустимых значений регулируемой величины во времени (рис. 30: 1-колебательный процесс; 2 – монотонный; 3 – аperiodический).

При заданных $\Delta S_{\max \text{ доп}}$, t_p и ξ кривая переходного процесса (переходная характеристика) не должна попадать в заштрихованную область.

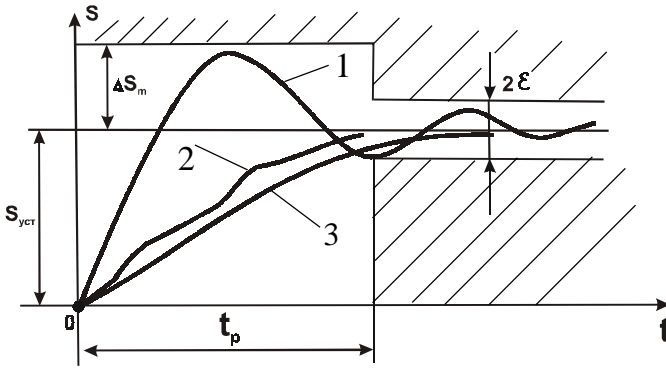


Рисунок 30

1.9.3 Корневые методы оценки качества

Корни характеристического уравнения САР определяют характер переходного процесса. Если все корни вещественные, то слагаемые свободной составляющей имеют вид $c_k e^{-\eta_k t}$, что обуславливает аperiodичность процесса. Комплексные корни $p_{1,2} = -\eta_i \pm j\omega_i$ дают слагаемые вида $A_i e^{-\eta_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, определяющие колебательный характер процесса.

Известно, что корни, расположенные ближе других к мнимой оси, т. е. имеющие меньшую по абсолютной величине вещественную часть, дают слагаемые переходного процесса, затухающие наиболее медленно и имеющие больший удельный вес в суммарной кривой переходного процесса. Эти корни приблизительно характеризуют процесс в целом. Например, время регулирования может быть с практически удовлетворяющей точностью оценено степенью устойчивости η , численно равной расстоянию до мнимой оси ближайшего к ней корня (рис. 31).

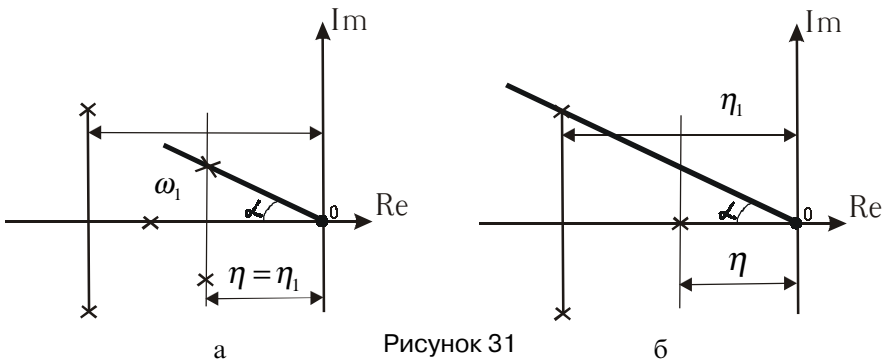


Рисунок 31

Если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных корней $p_{1,2} = -\eta_i \pm j\omega_i$ (рис. 31а), то переменная составляющего процесса характеризуется слагаемым

$$S(t) \approx ce^{-\eta t} \sin \omega t, \quad (26)$$

график которого показан на рис. 32.

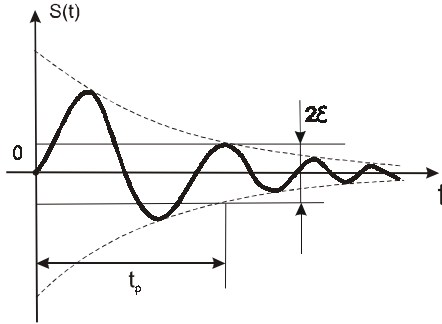


Рисунок 32

Положим $\mathcal{E} = \Delta c$ и приближенно по огибающей найдем время регулирования, решая трансцендентное уравнение

$$\Delta c = ce^{-\eta t_p}.$$

$$\text{Откуда } t_p = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (27)$$

Обычно полагают $\Delta = 0,05$ и тогда

$$t_p = \frac{1}{\eta} \ln 20 \approx \frac{3}{\eta}. \quad (28)$$

Если ближайший к мнимой оси корень вещественный (рис. 31б), то переходной процесс определяется слагаемым $S(t) \approx ce^{-\eta t}$, график которого в предыдущем случае играет роль огибающей. Поэтому для оценки времени регулирования используются те же формулы ((27) и (28)).

Если ближайший к мнимой оси корень является комплексно-сопряженным $p_{1,2} = -\eta_i \pm j\omega_i$, тогда слагаемое (26)

определяет переходной процесс, качество которого будет определяться не только степенью устойчивости η , но и так называемой *колебательностью* μ , которая есть отношение мнимой части к вещественной ближайшей к мнимой оси пары комплексно-сопряженных корней: $\mu = \frac{\omega}{\eta}$.

Колебательность μ однозначно определяет затухание за период ζ . Действительно, подставив в (25) $T = \frac{2\pi}{\omega}$, можем записать $\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$, откуда получаем

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\zeta}}. \quad (29)$$

В процессе проектировочных расчетов можно, задавшись требуемыми параметрами качества t_p и ζ , определить по формуле (28) степень устойчивости η и далее по формуле (29) колебательность μ и вычислить $\omega = \mu\eta$. Далее подобрать параметры системы так, чтобы корни располагались внутри открытой области $abcd$, показанной на рис. 33 [1].

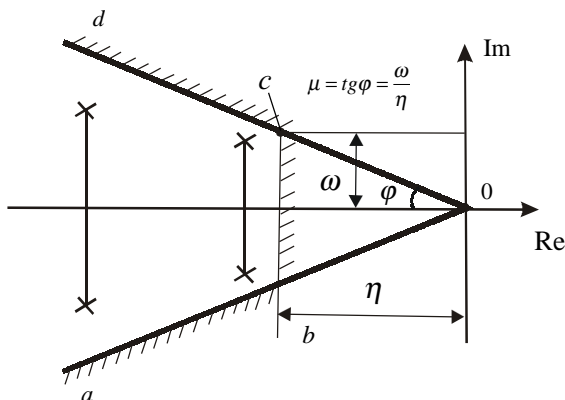


Рисунок 33

1.9.4 Диаграмма Вышнеградского

Системы третьего порядка (30)

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

И.А. Вышнеградский проанализировал в общем виде.

Иван Алексеевич Вышнеградский (1831-1895) является основоположником теории автоматического регулирования, а также основателем научной школы по конструированию машин.

Если разделить (30) на a_0 и перейти к безразмерному времени

$$t = \frac{\tau}{\Omega_0}, \text{ где } \Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}, \text{ то } p = \frac{d}{dt} = \Omega_0 \frac{d}{d\tau} = \Omega_0 q, \text{ где } q = \frac{d}{d\tau}$$

- оператор дифференцирования по безразмерному времени τ , то характеристическое уравнение (30) переписется в виде

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (31)$$

$$\text{где } A = \frac{a_1}{a_0 \Omega_0}, \quad B = \frac{a_2}{a_0 \Omega_0^2}.$$

Коэффициенты A , B называют параметрами Вышнеградского.

Условие устойчивости $AB-1 > 0$ или $B > \frac{1}{A}$ было получено Вышнеградским в 1876 году до появления критерия Гурвица (1895).

Уравнение (31) содержит всего два параметра. В плоскости этих параметров (рис. 34) Вышнеградским наряду с границей устойчивости гиперболой $B=1/A$ были определены области значения корней, которые определяют колебательный, монотонный и аperiodический характеры переходных процессов. На этой диаграмме [1] были нанесены линии равных нормированных значений степени $\eta_0 (\eta = \eta_0 \Omega_0)$, а также линии равных значений затуханий за период.

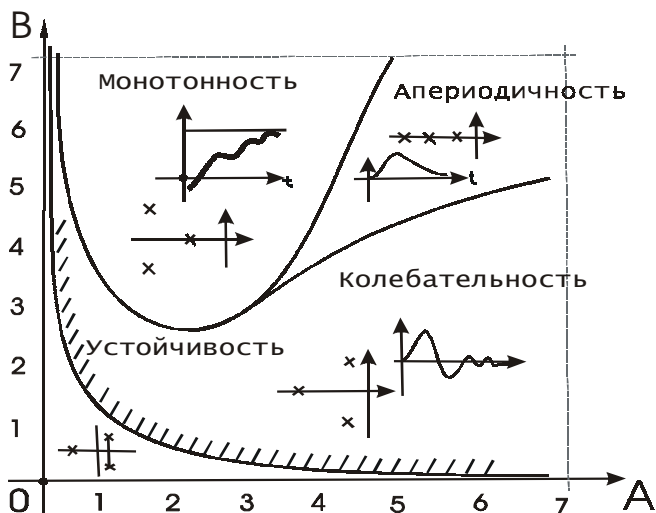


Рисунок 34

1.10 Методы улучшения качества процессов регулирования

1.10.1 Вводные замечания

Иногда при проектировании САР возникают ситуации, когда при заданной структуре невозможно подобрать параметры, обеспечивающие требуемое качество процессов регулирования. Поэтому наряду с описанными в разд. 1.1 основными функциональными элементами в САР используются так называемые корректирующие звенья, имеющие назначение улучшать динамику процессов регулирования. Эти звенья могут включаться в контуре цепи обратной связи последовательно, параллельно, а также по схеме соединения с отрицательной обратной связью.

1.10.2 *Последовательные корректирующие элементы* включаются в тракт цепи обратной связи последовательно (рис. 16). В качестве таких элементов используются

устройства, представляющие собой пассивно дифференцирующие и пассивно интегрирующие звенья, переходные характеристики которых были рассмотрены выше в разделе 1.8.3.1.

Технически эти элементы могут быть реализованы в виде R-С-цепей, а также на основе сочетания упругодемпферных элементов [1]. В этих звеньях содержится операция дифференцирования (т. е. введение сигнала по производной, см. ниже разд. 1.10.3), как это видно из структурной схемы, представляющей собой расчленение пассивно дифференцирующего или пассивно интегрирующего элемента на

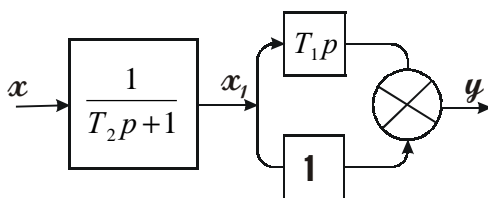


Рисунок 35

элементарные звенья (рис. 35).

1.10.3 Параллельные корректирующие звенья

Введение сигнала по производной.

Применяется, главным образом, когда в закон регулирования наряду с основным сигналом по отклонению вводят сигнал по производным, а также по интегралам от отклонения. Регулятор в этом случае «учитывает» не только величину рассогласования, но и скорость ее изменения.

Рассмотрим на двух примерах влияние введения сигнала по производной.

Пример 1 Астатическая САР (рис. 36).

Характеристическое уравнение этой системы получим из условия

$$1 + W_{pc} = 1 + \frac{k + k'p}{(T_0p + 1)Tp} = 0, \text{ откуда } T_0Tp^2 + (T + k'p + k) = 0.$$

Характер переходного процесса определяется корнями этого уравнения

$$p_{1,2} = (-T - k' \pm \sqrt{(T + k')^2 - 4kT_0T}) / (2T_0T).$$

Нетрудно видеть, что по мере увеличения коэффициента усиления по производной k' увеличивается степень устойчивости $\eta = (T + k') / (2T_0T)$ и уменьшается колебательность системы $\mu = \sqrt{4kT_0T} / (T + k')$ при $k' < k'_* = 2\sqrt{kT_0T} - T$. А при превышении величины k' значения k'_* корни становятся вещественными и процесс – аperiodическим.

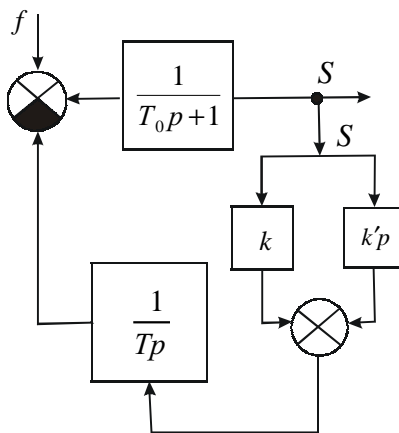


Рисунок 36

Пример 2 Статическая система третьего порядка (рис. 37).

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$T_0 T_1^2 p^3 + (T_1^2 + 2\zeta T_1 T_0) p^2 + (T_0 + 2\zeta T_1 + k') p + k = 0.$$

Условие устойчивости здесь записывается в виде

$$(T_1^2 + 2\zeta T_1 T_0)(T_0 + 2\zeta T_1 + k') - k T_0 T_1^2 > 0.$$

Из последнего соотношения видно, что при достаточно большом k' устойчивость может быть обеспечена при достаточно большом k , обуславливающем требуемый малый статизм:

$$\Delta = -\frac{1}{1+k}.$$

Введение сигнала по производной не влияет на статическую ошибку. Сигнал «работает» только в переходном режиме. Таким образом, введение этого сигнала решает проблему одновременного обеспечения качества динамического процесса и статической точности.

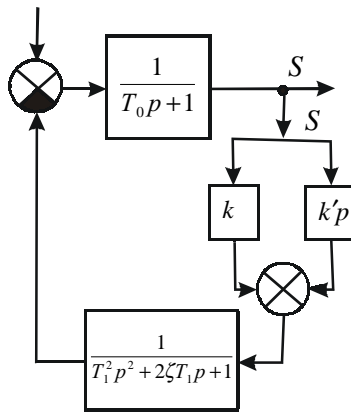


Рисунок 37

1.10.4 Введение местных отрицательных обратных связей

Введение корректирующего звена с передаточной функцией $W_k(p)$ по схеме местной отрицательной обратной связи (своего рода регулятор в регуляторе) показана на рис.38. Местная отрицательная обратная связь может быть гибкой и жесткой. *Гибкой* она называется в случае, когда корректирующее звено на

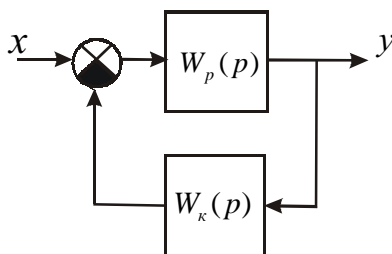


Рисунок 38

статика не влияет, то есть

$$W_o(0) = \frac{W_p(0)}{1 + W_p(0)W_k(0)} = W_p(0).$$

Отсюда следует, что гибкость отрицательной обратной связи определяется условием $W_k(0) = 0$.

Жесткой называется такая обратная связь, при которой это условие не выполняется, т. е. когда $W_k(0) \neq 0$.

Пример жесткой отрицательной обратной связи – охват интегрирующего звена усилительным звеном (рис.39).

Здесь

$$W_o(p) = \frac{1/Tp}{1 + r/Tp} = \frac{1}{Tp + r}.$$

Таким образом, охват жесткой отрицательной обратной связи интегрирующего звена эквивалентен замене интегрирующего звена апериодическим.

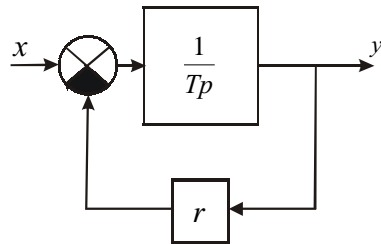


Рисунок 39

При этом интегральный закон регулирования заменяется пропорциональным, астатическая система становится статической.

Пример гибкой отрицательной обратной связи (ГООС) – охват интегрирующего звена изодромным (рис. 40а). Здесь

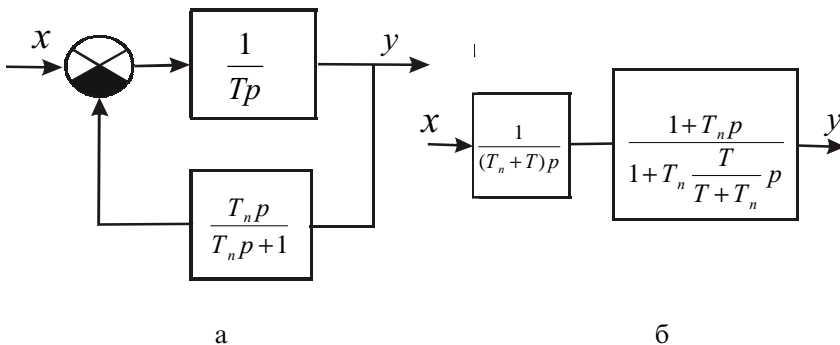


Рисунок 40

эквивалентная передаточная функция блока

$$W_o(p) = \frac{1/Tr}{1 + \frac{T_u p}{Tr(T_u p + 1)}} = \frac{1}{(T + T_u p)} \frac{1 + T_u p}{1 + T_u \frac{T}{T + T_u} p}$$

Из последнего выражения следует, что охват интегрирующего звена эквивалентен последовательному включению к интегральному звену пассивно-дифференцирующего звена (рис. 40б). Такая связь сохраняет интегральный закон регулирования. Таким образом, ГООС решает проблему улучшения качества переходного процесса, сохраняя астатичность.

2 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВЫХ РАБОТ

2.1 Анализ динамики гидропяты

2.1.1 Описание и уравнения системы

На рис. 41 приведена принципиальная схема уравнивания осевых сил ротора центробежного насоса (гидропяты).

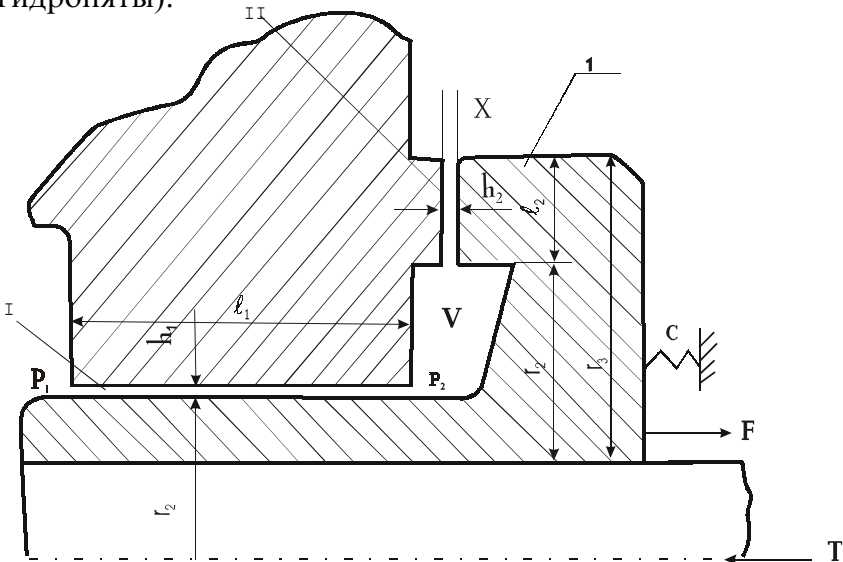


Рисунок 41

Основными элементами системы являются разгрузочный диск 1, цилиндрическая щель I с постоянным гидравлическим сопротивлением и торцовая щель II, сопротивление которой изменится в результате изменения зазора h_2 вследствие осевых смещений ротора.

При возрастании осевого усилия T диск 1 (вместе с ротором как одно целое) сдвигается влево. При этом зазор торцевой щели h_2 уменьшается, что приводит к увеличению давления в рабочей полости гидропалаты P_2 . При этом возрастает уравновешивающая (отжимающая) сила F . Таким образом, происходит автоматическая разгрузка упорного подшипника. Равновесные состояния гидропалаты реализуются при малых зазорах, что обеспечивает работу устройства в условиях смазываемого рабочей жидкостью упорного подшипника, а также выполнение функций бесконтактного торцового уплотнения.

Уравнения динамики системы описывают движение ротора в осевом направлении и гидродинамические процессы дросселирования рабочей жидкости.

Уравнение движения ротора в осевом направлении записывается в виде

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = F - T + F_{np}, \quad (32)$$

где m – масса ротора; μ – коэффициент вязкого трения; c – жесткость отжимного пружинного устройства; F_{np} – усилие предварительного натяга пружины.

Уравнение гидродинамических процессов выводится на основе баланса роторов $q_1 = q_1 + q_{об} + q_{сж}$,

где $q_1 = \alpha_1 \sqrt{p_1 - p_2}$ – расход через цилиндрическую щель;

p_1 – давление в рабочей ступени (принимается постоянным);

p_2 – давление в рабочей полости гидропалаты;

$q_2 = \alpha_2 \frac{x}{x_0} \sqrt{p_2}$ – расход через торцовую щель;

$q_{об} = S_0 \dot{x}$ – расход за счет увеличения объема полости при движении ротора в осевом направлении;

$$q_{сж} = \frac{V}{E} \dot{p}_2 - \text{расход на сжатие;}$$

V – объем рабочей полости гидропята; E – модуль упругости жидкости; x_{σ} – базисное значение торцового зазора, соответствующее номинальному рабочему режиму; S_o – площадь торцового сечения полости гидропята.

Расчет коэффициентов α_1 и α_2 по конструктивным параметрам $r_1, r_2, r_3, h_1, h_2 = x_{\sigma}, l_1, l_2$ изложен в [3,4]. В данном пособии величины α_1 и α_2 задаются как исходные.

Подставляя в уравнение баланса расходов их выражения,

$$\text{запишем } \alpha_1 \sqrt{p_1 - p_2} = \alpha_2 \frac{x}{x_{\sigma}} \sqrt{p_2} + S_o \dot{x} + \frac{V}{E} \dot{p}_2. \quad (33)$$

Уравновешивающая сила F пропорциональна давлению в рабочей полости p_2 :

$$F = S_s p_2, \quad (34)$$

где S_s – некоторая эквивалентная торцовая площадь [3, 4].

Система уравнений (32), (33), (34) полностью описывает статику и динамику гидропята. Для исследования устойчивости и динамических свойств системы в малом необходимо линеаризовать эти уравнения в области стационарного режима, характеризуемого значениями параметров $x = x_0 = x_{\sigma}, p_2 = p_{20}$. При этом между стационарными величинами в силу исходных уравнений должны выполняться соотношения:

$$cx_0 = F_0 - T_0 + F_{np}, F_0 = S_s p_{20}, \alpha_1 \sqrt{p_1 - p_{20}} = \alpha_2 \sqrt{p_{20}}. \quad (35)$$

В результате линеаризации получаем систему линейных уравнений относительно малых отклонений координат Δx , Δp_2 и ΔT от их стационарных значений x_0, p_{20} и T_0 , связанных соотношениями (35).

После перехода к безразмерным переменным путем линейной подстановки

$$\Delta x = x_{\sigma} u, \Delta p_2 = p_{\sigma} \psi, \Delta T = S_s p_{\sigma} f \quad (36)$$

получим уравнения системы для относительных отклонений u , ψ и внешнего возмущения f в стандартной символической записи:

$$\begin{aligned}(T_0^2 p^2 + 2\zeta T_0 p + 1)u &= k_0(\psi - f), \\ (T_1 p + 1)\psi &= -k_1(T_2 p + 1)u,\end{aligned}\tag{37}$$

$$\begin{aligned}\text{где } k_0 &= \frac{S_0 p_{20}}{c x_0}, T_0 = \sqrt{\frac{m}{c}}, \zeta = \frac{\mu}{2cT_0}, \\ T_1 &= \frac{2\alpha_2 \sqrt{p_{20}} V}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) E}, T_2 = \frac{S_0 x_0}{\alpha_2 \sqrt{p_{20}}}, k_1 = \frac{2\alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.\end{aligned}\tag{38}$$

2.1.2 Задание

Курсовая работа предусматривает выполнение следующих этапов:

1) из исходной системы уравнений (32), (33), (34) получить линеаризованные уравнения в безразмерных отклонениях (37) (все промежуточные выкладки привести с пояснениями в тексте работы);

2) составить структурную схему;

3) определить передаточную функцию замкнутой системы, записать дифференциальное и характеристическое уравнения;

4) построить область устойчивости в плоскости параметров $T_1 - T_2$ и оценить запас устойчивости;

5) на основе анализа области устойчивости сделать вывод о влиянии конструктивных параметров (объема камеры V и площади S_0) на устойчивость;

6) с помощью ЭВМ вычислить и построить переходную характеристику $h(t)$; определить время регулирования t_p из условия, что при $t > t_p$ будет $|h(t) - h_{уст}| \leq 0,05 h_{уст}$.

2.1.3 Исходные данные

Численные значения параметров m , μ и V для вариантов работы приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Номер вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m , кг	50	100	200	300	400	300	200	100	50	100	200	300
μ , $\frac{Нс}{м}$	$7 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	$9 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$
V , $м^3$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Для всех вариантов принять:

$$\alpha_1 = 0,6 \cdot 10^{-6} м^{3,5} кс^{-0,5}, \alpha_2 = 0,95 \cdot 10^{-6} м^{3,5} кс^{-0,5};$$

$$S_0 = 0,035 м^2, E = 2 \cdot 10^9 \frac{Н}{м^2}, x_0 = 0,8 \cdot 10^{-4} м;$$

$$S_3 = 0,04 м^2, p_{20} = 0,05 \cdot 10^8 \frac{Н}{м^2}, c = 10^8 \frac{Н}{м}.$$

2.1.4 Пример расчета и методические указания

Для параметров $m=100$ кг, $\mu = 7 \cdot 10^4 \frac{Н \cdot с}{м}$ и $V = 2 \cdot 10^{-3} м^3$

вычислим по формуле (2.16):

$$k_0 = 100; k_1 = 0,41; T_0 = 10^{-3} с; \zeta = 0,35; T_2 = 1,32 \cdot 10^{-3} с; T_1 = 3,36 \cdot 10^{-3} с.$$

Условие устойчивости для данной системы преобразуется к виду

$$T_2 > \frac{(k_0 k_1 - 4\zeta^2) T_0 T_1 - 2\zeta T_1^2 - 2T_0^2 \zeta}{k_0 k_1 (2\zeta T_1 + T_0)}.$$

На рис. 42 (а, б) показана область устойчивости в координатах $T_1 - T_2$, построенная при заданных значениях параметров. Для исходных $T_1=0,0034$ с и $T_2=0,00132$ с точка в плоскости параметров $T_1 - T_2$ лежит в области устойчивости (см. рис. 42б), причем для $T_1=0,0034$ с граничное значение T_2

составляет величину $T_{2zp} = 0,00085c$, а данная величина $T_2 = 0,00132c$ превышает ее на 55 %, что практически обеспечивает надежный запас устойчивости.

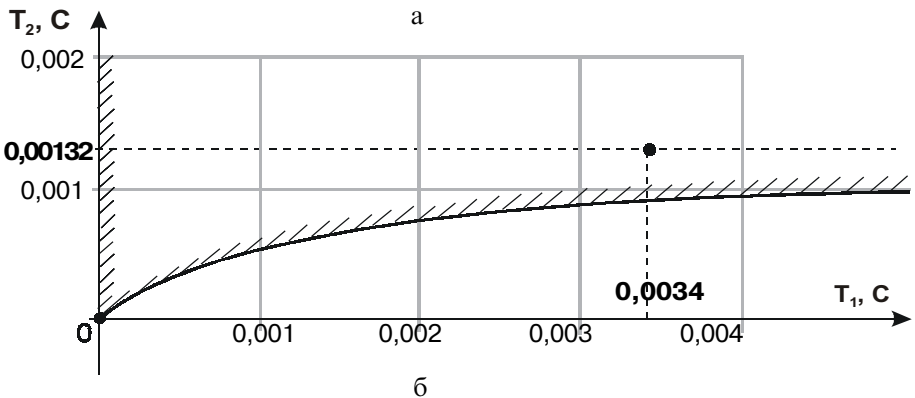
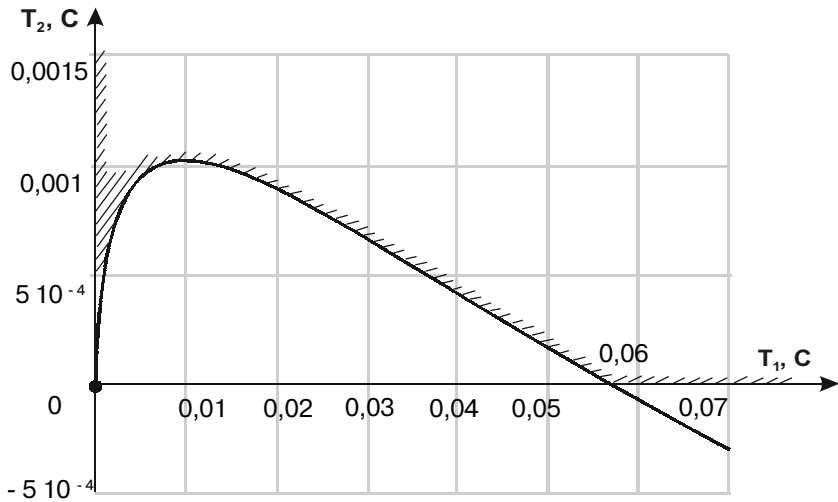


Рисунок 42

Поскольку область реальных значений объемов V полости гидропята соответствует сравнительно малым значениям T_1 ($T_1 < 0,01 c$), то по характеру граничной кривой (рис. 42а) делаем вывод, что для обеспечения устойчивой работы гидропята следует предусмотреть меньшие объемы V полости гидропята и возможно большие размеры значения площади торцового сечения этой полости S_o (которой пропорциональна постоянная T_2).

То есть конструктивно внутренняя полость должна быть возможно более мелкой, но «развитой в диаметре».

Положив $f(p) = -1/p$, запишем изображение переходной

$$\text{характеристики } H(p) = \frac{1}{p} W_{sc}(p) =$$

$$= \frac{k_0(T_1 p + 1)}{p[T_0^2 T_1 p^3 + (2\zeta T_0 T_1 + T_0^2) p^2 + (T_1 + 2\zeta T_0 + k_0 k_1 T_2) p + 1 + k_0 k_1]}$$

Переходная характеристика $h(t)$, соответствующая данному $h(t)$

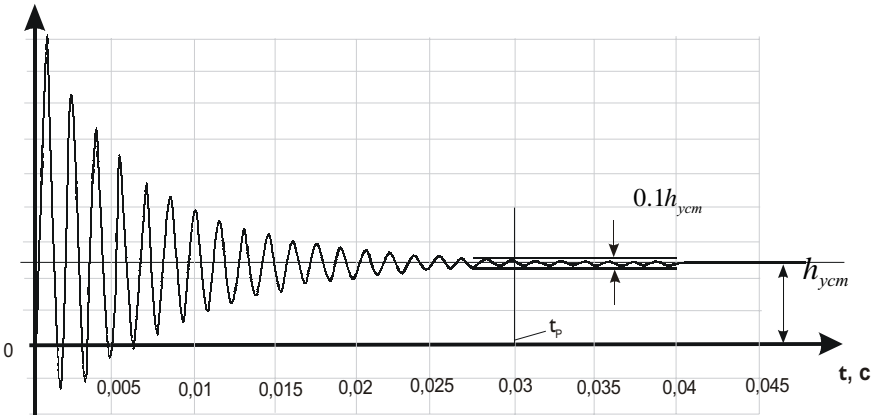


Рисунок 43

изображению $H(p)$ при заданных численных значениях всех коэффициентов, вычислена и построена (рис.43) с помощью пакета программ *MathCad*. На рисунке видно, что процесс затухает за время порядка $t_p \approx 0,03\text{с}$. Таким образом, делаем вывод, что для гидропаты как динамической системы характерно сравнительно быстрое затухание переходных процессов.

При выполнении п. 1 задания необходимо хорошо усвоить приемы линеаризации, изложенные, например, в [1, с. 62-75]. При несовпадении формул (38) с полученными студентом в процессе линеаризации и приведения уравнений к стандартному виду следует проконсультироваться с преподавателем.

Перед защитой курсовой работы следует твердо усвоить все понятия и определения (изложенные в первой части данного пособия), которые имеют отношение к выполненной работе.

2.2 Анализ динамики гидростатического уплотнения

2.2.1 Описание и уравнения системы

Принципиальная схема уплотнительного устройства приведена на рис. 44. Основным конструктивным элементом устройства является плавающее кольцо 1, перемещение которого в осевом направлении x определяет величину

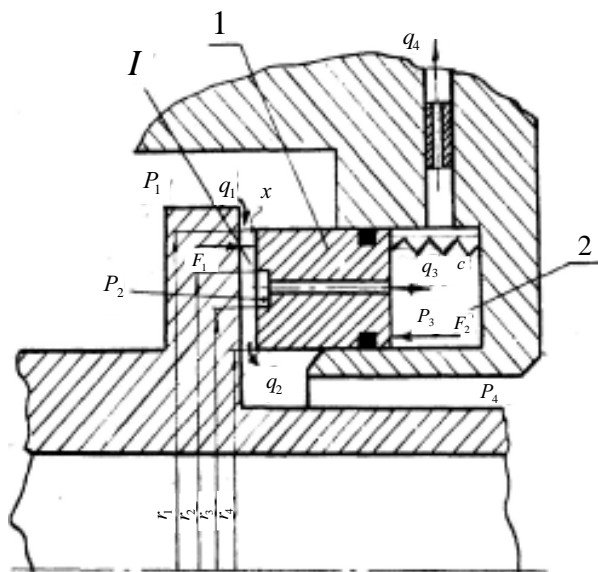


Рисунок 44

торцового зазора I . При случайном изменении некоторого стационарного положения кольца возникают гидроупругие силы, приводящие к восстановлению этого положения. Например, при увеличении торцового зазора увеличивается давление в камере 2, при этом кольцо начинает двигаться

влево, автоматически уменьшая зазор. Уплотнение рассчитывается таким образом, что равновесные состояния в обычных рабочих режимах имеют место при весьма малых зазорах. В результате обеспечивается требуемое качество уплотнения в условиях бесконтактной работы.

Уравнение динамики торцового уплотнительного устройства описывает движение кольца 1 в осевом направлении и гидродинамические процессы дросселирования рабочей жидкости.

Уравнение движения кольца имеет вид

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = F_1 - F_2 - F_3 + \Delta F, \quad (39)$$

где m – масса кольца; μ – коэффициент вязкого трения; c – жесткость прижимающей пружины; F_1 – сила, раскрывающая зазор; F_2 – сила, закрывающая зазор; ΔF – случайное возмущающее воздействие.

Уравнения гидростатических процессов составляются на основе баланса расходов (см. рис. 44):

$$q_1 = q_2 + q_3, q_3 = q_4 - q_{об} + q_{сж}.$$

В данной системе допустимо считать режим течения ламинарным. Тогда расходы будут пропорциональны соответствующим перепадам давлений:

$$q_1 = g_1(p_1 - p_2), q_2 = g_2 p_2, q_3 = g_3(p_2 - p_3), q_4 = g_4 p_3,$$

где $g_i (i = \overline{1,4})$ – гидравлические проводимости; давление внешней среды p_4 допустимо положить равным нулю. Расход на изменение расхода в камере 2 $q_{об} = S_0 \dot{x}$, где S_0 – площадь торцового сечения камеры.

Расход на сжатие пропорционален скорости изменения давления в камере 2:

$$q_{сж} = \frac{V}{E} \dot{p}_3, \text{ где } V \text{ – объем камеры; } E \text{ – модуль упругости}$$

жидкости. Гидравлические сопротивления g_1 и g_2 пропорциональны кубу относительного зазора $u = x/x_0$:

$g_1 = g_{16}u^3, g_2 = g_{26}u^3$, где g_{16}, g_{26} – проводимости при номинальном режиме, определяемом зазором $x=x_6$.

С учетом выражений для расходов и сопротивлений уравнения балансов расходов примут вид:

$$g_{16}u^3(p_1 - p_2) = g_{26}u^3 p_2 + g_3(p_2 - p_3), \quad (40)$$

$$g_3(p_2 - p_3) = g_4 p_3 - S_0 x_6 \dot{u} + \frac{V}{E} \dot{p}_3. \quad (41)$$

Выражения для раскрывающей и закрывающей зазор сил представляют собой линейные зависимости от соответствующих давлений:

$$F_1 = S_1 p_1 + S_2 p_2, \quad (42)$$

$$F_2 = S_3 p_3, \quad (43)$$

где S_1, S_2, S_3 – некоторые эквивалентные площади, расчет которых зависит от эпюр распределения давлений в торцовом зазоре [3, 4].

Система, состоящая из линейного дифференциального уравнения (39), нелинейного алгебраического соотношения (40), линейного дифференциального уравнения (41) и линейных зависимостей (42), (43), полностью описывает статику и динамику уплотнительного устройства. Методика расчета коэффициентов этих уравнений $g_{16}, g_{26}, g_3, S_0, S_2, S_3$, по данным конструкции r_1, r_2, r_3, r_4 и параметрам режима, изложена в [3, 4]. В данном пособии указанные коэффициенты задаются как исходные.

Для исследования устойчивости и динамики системы в малом линеаризуем ее уравнения в области стационарного режима $x = x_6 (u_0 = 1), p_2 = p_{20}, p_3 = p_{30}$. Между стационарными значениями параметров должны выполняться в силу исходных уравнений соотношения:

$$\begin{aligned}
cx_{\bar{o}} &= S_1 p_1 + S_2 p_{20} - S_3 p_{30} - F_3, \\
g_{1\bar{o}}(p_1 - p_{20}) &= g_{1\bar{o}} p_{20} + g_3(p_{20} - p_{30}), \\
g_3(p_{20} - p_{30}) &= g_4 p_{30}.
\end{aligned} \tag{44}$$

После записи линеаризованных уравнений для малых отклонений $\Delta x, \Delta p_2, \Delta p_3, \Delta F$ и перехода к безразмерным переменным путем подстановки $\Delta x = x_{\bar{o}} \Delta u, \Delta p_3 = p_{\bar{o}} \psi, \Delta F = x_{\bar{o}}(c - k_1) f$, получим уравнение системы в следующей операторной форме:

$$\begin{aligned}
(T_0^2 p^2 + 2\zeta T_0 p + 1)\Delta u &= -k_0 \psi + f, \\
(T_1 p + 1)\psi &= k_2(T_2 p + 1)\Delta u.
\end{aligned} \tag{45}$$

В (45) обозначено:

$$\begin{aligned}
T_0 \sqrt{\frac{m}{c - k_1}}, \zeta &= \frac{\mu}{2T_0(c - R_1)}, k_0 = \frac{P_{\bar{o}}}{x_{\bar{o}}(c - R_1)} (S_3 - S_2 \frac{g_3}{g_{\Sigma}}), \\
T_1 &= \frac{V}{Eg_0}, T_2 = \frac{S_0 x_{\bar{o}} g_{\Sigma}}{3g_3^2(p_{20} - p_{30})}, k_2 = \frac{3g_3^2(p_{20} - p_{30})}{p_{\bar{o}} g_{\Sigma} \cdot g_0}, \\
k_1 &= \frac{3g_3 S_2 g(p_{20} - p_{30})}{x_{\bar{o}} g_{\Sigma}}, g_{\Sigma} = g_{1\bar{o}} + g_{2\bar{o}} + g_3, g_0 = g_3 + g_4 - \frac{g_3^2}{g_3}.
\end{aligned} \tag{46}$$

В качестве базисного давления примем $p_{\bar{o}} = p_{10}$.

2.2.2 Задание

Курсовая работа предусматривает выполнение следующих этапов:

1) из исходной системы уравнений (39)-(43) получить линеаризованные в безразмерных отклонениях (45) (все промежуточные выкладки привести в тексте работы; контролем правильности линеаризации служит совпадение формул (46) с полученными студентом);

2) составить структурную схему;

3) определить передаточную функцию замкнутой системы,

записать дифференциальное и характеристическое уравнения;

4) построить область устойчивости в плоскости параметров $T_1 - T_2$ и оценить запас устойчивости;

5) на основе анализа области устойчивости сделать вывод о влиянии конструктивных параметров (объема камеры V и площади торцового сечения кольца S_0) на устойчивость;

6) с помощью ПЭВМ вычислить и построить переходную характеристику $h(t)$; определить время затухания процесса t_p из условия, что при $t > t_p$ будет $|h(t) - h_{уст}| \leq 0,05h_{уст}$.

2.2.3 Исходные данные

Численные значения параметров m , m и V для вариантов работы приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Номер вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m , кг	1,5	2,0	2,5	3,0	1,5	2,0	2,5	3,0	1,5	2,0	2,5	3,0
μ , $\frac{Hc}{m}$	100	90	80	70	70	80	90	100	90	100	70	80
V, M^3	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$

Для всех вариантов принять:

$$x_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}, E = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, S_0 = 0,012 \text{ м}^2, S_2 = 0,007 \text{ м}^2, S_3 = 0,01 \text{ м}^2;$$

$$p_{10} = 4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = p_6, p_{20} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2, p_{30} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2;$$

$$c = 10^7 \text{ Н/м}, g_{16} = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^5 / (\text{Н} \cdot \text{с}), g_{26} = 2,35 \cdot 10^{-10} \text{ м}^5 / (\text{Н} \cdot \text{с});$$

$$g_3 = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^5 / (\text{Н} \cdot \text{с}), g_4 = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^5 / (\text{Н} \cdot \text{с}).$$

2.2.4 Пример расчета и методические указания для параметров

$m=2кг$, $\mu=80 \frac{Нс}{м}$, $V=0,2 \cdot 10^{-3} м^3$ вычислим по формулам (2.28):

$$g_{\Sigma} = 10,35 \cdot 10^{-10} \frac{м^5}{(Н \cdot с)}, g_0 = 3,6 \cdot 10^{-10} \frac{м^5}{(Н \cdot с)},$$

$$k_1 = 0,29 \cdot 10^7 \frac{Н}{м}, k_0 = 12,7, T_1 = 0,00028с, T_2 = 0,098с,$$

$$T_0 = 0,00053с, k_2 = 0,034, \xi = 0,0106.$$

Условие устойчивости для данной системы преобразуется к виду

$$T_2 > \frac{-2\xi T_1^2 + (k_0 k_2 - 4\xi^2) T_0 T_1 - 2T_0^2 \xi}{k_0 k_2 (2\xi T_1 + T_0)} = f(T_1).$$

На рис. 45 показана область устойчивости в координатах $T_1 - T_2$, построенная при заданных значениях параметров. Для исходных $T_1=0,00028 с$ и $T_2=0,098 с$ рабочая точка лежит в устойчивой области, причем данное значение T_2 превышает граничное по устойчивости значение $T_{2гр} = f(T_1) = 0,001845$ в 53 раза.

Характер граничной кривой области устойчивости (рис.45) показывает, что для обеспечения надежной устойчивой работы уплотнения следует по возможности увеличить площадь торцового сечения камеры S_o (которой пропорциональна постоянная времени T_2) и предусмотреть возможно меньший объем V камеры 2 (которому пропорциональна постоянная времени T_1).

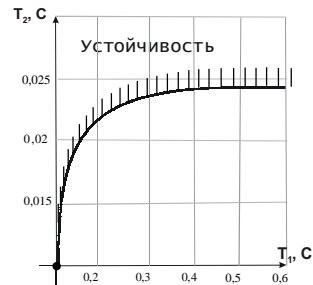


Рисунок 45

Положив $f(p) = \frac{1}{p}$, запишем изображение переходной характеристики $H(p) = \frac{1}{p} W_{zc}(p) =$

$$= \frac{T_1 p + 1}{p[T_0^2 T_1 p^3 + (2\zeta T_0 T_1 + T_0^2) p^2 + (T_1 + 2\zeta T_0 + k_0 k_2 T_2) p + 1 + k_0 k_2]}.$$

Переходная характеристика $h(t)$, вычисленная с помощью пакета программ *MathCad*, приведена на рис. 46. По кривой переходного процесса оцениваем время затухания $t_p \approx 0,08c$. Как видно из рис. 46, торцовому уплотнительному устройству характерны быстрое затухание и высокие частоты собственных колебаний. Последнее обуславливается сравнительно малыми постоянными времени T_o, T_p, T_2 .

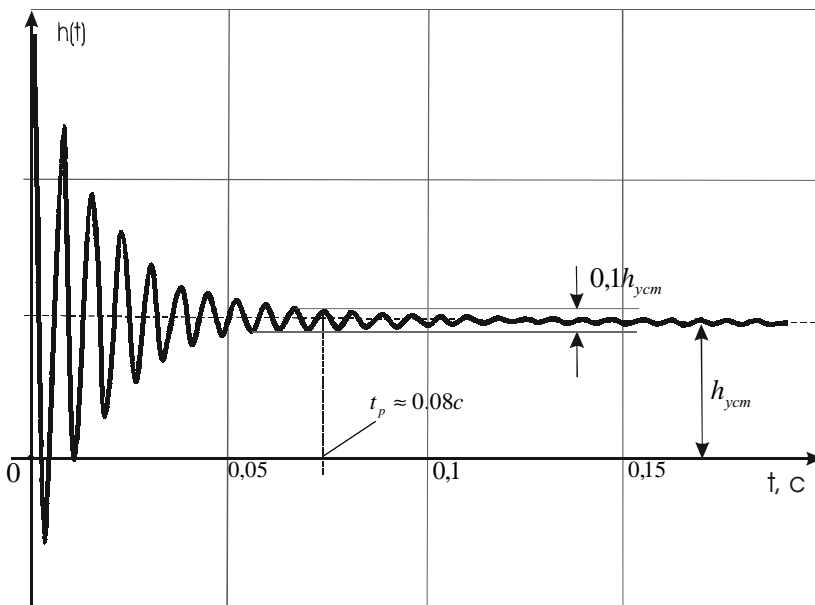


Рисунок 46

При выполнении п. 1 задания необходимо после линеаризации алгебраического соотношения (40) выразить вариацию Δp_2 через Δp_3 и Δu и подставить затем в уравнение (41), переписанное в вариациях. При несовпадении формул (46) с полученными студентом в процессе получения линеаризованных уравнений (45) необходимо проконсультироваться с преподавателем.

2.3 Расчет системы автоматического регулирования турбогенератора

2.3.1 Описание и уравнения системы

На рис. 47 приведена принципиальная схема автоматического регулирования частоты вращения турбогенератора. Объектом регулирования является турбогенераторная установка, состоящая из турбины T , генератора G и регулирующего органа – направляющего аппарата НА. Регулятор, обеспечивающий постоянство частоты вращения при любых допустимых нагрузках, состоит из центробежного

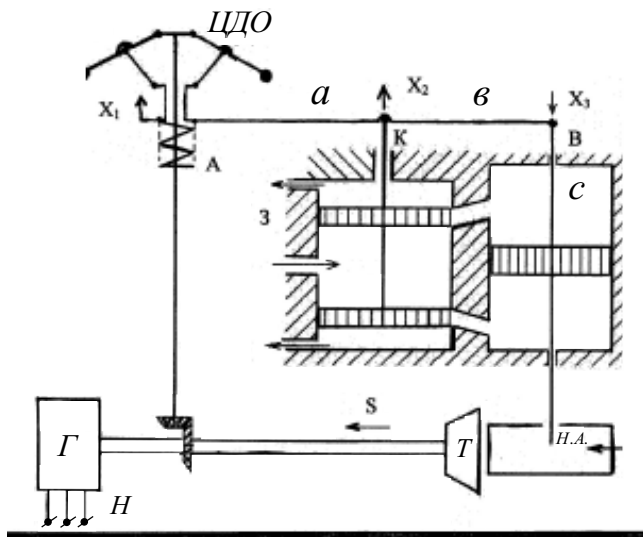


Рисунок 47

датчика оборотов ЦДО и гидравлической системы усиления, включающей в себя золотниковое устройство 3 и сервомотор С.

Система работает следующим образом. При изменении нагрузки (подключении или отключении энергопотребителей) частота вращения отклоняется от номинальной. При этом начинает перемещаться муфта ЦДО, изменяя положение поршней золотникового устройства. Это приводит к перемещению штока сервомотора и изменению положения направляющего аппарата НА в соответствии с новой нагрузкой. Правый конец рычага АВ шарнирно связан со штоком сервомотора, что является конструктивной реализацией жесткой отрицательной обратной связи. Например, при перемещении поршней золотника вверх от нейтрального положения поршень сервомотора будет опускаться вниз, замедляя это перемещение.

Турбогенератор представляет собой объект регулирования, математической моделью которого (после приведения к стандартной безразмерной форме) является апериодическое звено с коэффициентами усиления по управляющему воздействию и нагрузке, равными единице:

$$(T_0 p + 1)S = -x_3 - m_n, \quad (47)$$

где T_0 – постоянная времени объекта;

$$S = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n} \quad - \text{относительное отклонение регулируемой}$$

величины (частоты вращения $\omega \frac{1}{c}$) от номинального его значения ω_n ;

m_n – относительная нагрузка.

Центробежный датчик оборотов описывается также апериодическим звеном

$$(T_1 p + 1)x_1 = k_1 S. \quad (48)$$

Координаты штока золотника x_2 линейно зависят от положения муфты ЦДО x_1 и координаты штока сервомотора

$$x_3; x_2 = k_2 x_1 - r x_3. \quad (49)$$

Сервомотор является интегрирующим звеном

$$x_3 = \frac{1}{T_2 p} x_2. \quad (50)$$

2.3.2 Задание

Курсовая работа предусматривает выполнение следующих этапов:

1) составить структурную схему и преобразовать ее к одноконтурной;

2) определить передаточную функцию замкнутой системы, записать дифференциальное и характеристическое уравнения;

3) написать выражение для статической ошибки и определить величину отношения $k_1 k_2 / r$ из условия обеспечения статизма $\Delta = -0,01$;

4) пользуясь критерием Гурвица, определить область значений коэффициента усиления местной отрицательной обратной связи r , обеспечивающего устойчивость системы при заданных T_σ, T_p, T_2 ;

5) принять $r = 0,5 r_1$,

где r_1 – меньший из двух положительных корней уравнения $f(r) = 0, (*)$,

где $f(r)$ – парабола (рис. 48), уравнение которой получается из условия Гурвица для характеристического уравнения данной системы $f(r) > 0$; в случае, если уравнение $(*)$ имеет

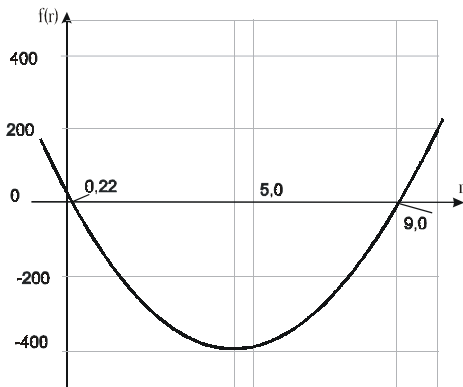


Рисунок 48

комплексные корни, принять $r=0,5$ (по конструктивным условиям $0 < r < 1,0$, поскольку $r=a/(a+v)$, где a, v – длины плеч рычага, рис. 2.7);

б) с помощью ПЭВМ вычислить и построить переходную характеристику $h(t)$; определить время регулирования t_p из условия, что при $t > t_p$ будет $|h(t) - h_{уст}| \leq 0,05 h_{уст}$. В случае, если $t_p > 15$ с, варьируя величиной r , добиться обеспечения $t_p < 15$ с путем численных экспериментов.

2.3.3 Исходные данные

Численные значения постоянных времени T_0, T_1, T_2 для

Таблица 2.3

Номер вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_0, c	5	6	7	8	9	10	5	6	7	8	9	10
T_1, c	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05
T_2, c	1,0	1,5	2,0	1,5	1,0	1,5	2,0	1,5	1,0	1,5	2,0	1,5

Номер вар.	13	14	15	16	17	18	19	20				
T_0, c	5	6	7	8	9	10	5	6				
T_1, c	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,05	0,06	0,07				
T_2, c	1,0	1,5	2,0	1,5	1,0	1,5	2,0	1,5				

вариантов работы приведены в табл. 2.3.

2.3.2 Пример расчета и методические указания

Условие устойчивости для данной системы имеет вид

$$f(r) = r^2(T_0 T_1 (T_0 + T_1) + (T_2 (T_1^2 + T_0^2) - 97 T_0 T_1 T_2) r + T_2^2 (T_0 + T_1)) > 0.$$

При заданных параметрах $T_0=10$ с, $T_1=0,2$ с и $T_2=2$ с первый корень $r_1=0,22$ (рис. 48). Примем $r=0,1$.

Положив $-m_n(p) = \frac{1}{p}$, запишем изображение переходной

характеристики

$$H(p) = \frac{1}{p} W_{sc} = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_2 + T_1 r)p + r}{p(T_0 T_1 T_2 p^3 + (T_0 T_1 r + T_1 T_2 + T_0 T_2)p^2 + (T_0 r + T_1 r + T_2)p + r + k_1 k_2)}.$$

Переходная характеристика $h(t)$ при заданных значениях параметров вычислена и построена (рис. 49) с помощью пакета программ *MathCad*. На рисунке видно, что время регулирования составляет около 12 с, что удовлетворяет заданному условию $t_p < 15$ с.

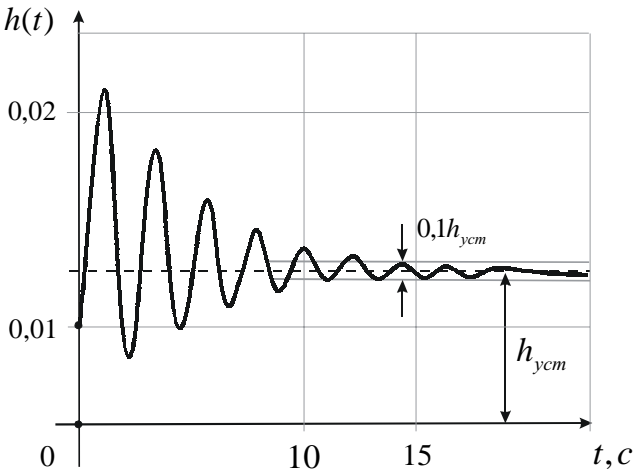


Рисунок 49

Список литературы:

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П.. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Изд-во «Наука», 1966 (и последние издания).
2. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. - М.: Машиностроение, 1987.
3. Марцинковский В.А. Бесконтактные уплотнения роторных машин. - М.: Машиностроение, 1980.
4. Марцинковский В.А., Ворона П.Н.. Насосы атомных электростанций. - М.: Энергоатомиздат, 1987.
5. Симоновский В.И. Колебания нелинейных систем. - Суми: Вид-во СумДУ, 1999.