Ж. нано- електрон. фіз./
J. Nano- Electron. Phys.
2011. – Т.3, №4. – С. 66-72

PACS numbers: 07.57. – c, 02.30. Rz

ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ НА ДОФРАКТАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ЩІЛИН В ПЛОСКОМУ ЕКРАНІ

Г.І. Кошовий

Національний аерокосмічний університет (ХАІ)
м. Харків, вул. Чкалова 17, 61070,
E-mail: gikosh@gmail.com

На основі строгої електромагнітної теорії проводиться дослідження процесу взаємодії плоскої хвилі з дофрактальною системою щілин в ідеально провідному та нескінченно тонкому плоскому екрані. Для математичної впорядкованості системи береться певна стадія побудови досконалої множини Кантора зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Дослідження базується на методі інтегральних рівнянь з використанням асимптотичного підходу. Основою розробленої схеми розв'язку системи інтегральних рівнянь є формули обернення, що в межах методу Релея дають явні асимптотичні формули.

Ключові слова: *ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ, ФРАКТАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД РЕЛЕЯ.*

(Одержано 15.07.2011, опубліковано online 30.12.2011)

1. ВСТУП

Задачі дифракції хвиль на безмежно довгій прямій щілині в нескінченно тонкому, плоскому і ідеально провідному екрані належать до класичних базових задач [1]. З практичної точки зору можуть бути цікавими задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі на послідовності таких паралельних щілин, впорядкованих за певною стадією побудови досконалої множини Кантора (ДМК) зі змінною фрактальною розмірністю [2-4]. Класична ДМК є найпростішим самоподібнимфракталом [2], а стадії побудови є тільки певними наближеннями до нього, тобто дофракталами, тому систему зазначених щілин доречно назвати дофрактальною системою щілин (ДФСЩ).

Оскільки пропонована структура доповнює дофрактальнуґратку у вигляді систем стрічок [4], то, на підставі теореми Бабіне [1], задача дифракціїз математичної точки зору рівносильна задачі розсіювання відповідною ґраткою. Отже, потрібно розв'язувати зовнішні задачі Діріхле та Неймана для двовимірного рівняння Гельмгольца на системі прямолінійних сегментів. Зазначена задача Діріхле на сегментах певної стадії побудови ДМК була досліджена досить ретельно раніше [4,5]. Тому тут буде більше уваги приділено задачі Неймана.

Метою даної статті є розв'язок крайової задачі дифракції плоскої хвилі на скінченій послідовності паралельних щілин, впорядкованих за певною стадією побудови ДМК зі змінною розмірністю Хаусдорфа (РХ). Значна увага буде відведенаперетворенню систем інтегральних рівнянь першогороду, до яких приведені зовнішні граничні задачі математичної фізики таотриманню розв'язків у найпростішому вигляді за методом Релея.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ

Нехай екран займає площину xOz прямокутної системи координат, а щілини є паралельними до осі аплікат. Напрям розповсюдження плоскої електромагнітної хвилі перпендикулярний до країв екрану і складає звіссю абсцис кут φ. Розташування щілин у екрані має бути строго впорядкованим у відповідності з різними математичними законами, що відповідають процесам побудови ДМК зі змінною РХ. Таку систему щілин доречно назвати дофрактальною, тобто маємо дофрактальну систему щілин (ДФСЩ). Перетин площиною $z = 0$ половини ДФСЩ, що відповідає третій стадії побудови ДМК з РХ 1/2, зображено на Рис.1.

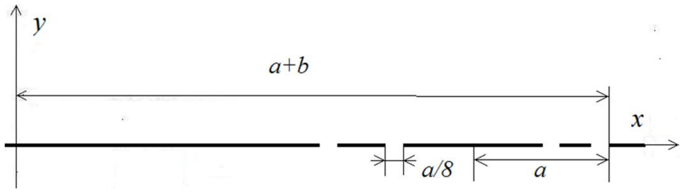

Рис. 1 *– Поперечний перетин ДФСЩ, що відповідає 3 стадії побудови ДМК з РХ* 0,5

Слід зазначити, що при впорядкуванні щілин за законом, що відповідає процесу побудови ДМК принципово важливим є можливість зміни їх РХ в межах інтервалу (0, 1). Не важливо для дослідження яким є початковий об’єкт (утворювач) творення ДМК, тому тут вико рис-товується утворювач з двох сегментів.

Коли позначимо розв’язки задач Діріхле та Неймана для двовимірного рівняння Гельмгольца через υ_e та υ_x, то вектори електромагнітного поля можна записати у такій формі [1]:

$$\vec{E} = (0, 0, \upsilon_e)\,,\ \vec{H} = \frac{i}{k}\left(-\frac{\partial \upsilon_e}{\partial y}, \frac{\partial \upsilon_e}{\partial x}, 0\right);$$

$$\vec{E} = \frac{i}{k}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}, -\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}, 0\right),\ \vec{H} = (0, 0, \upsilon_x)\,.$$

Перший набір векторів поля у якому напруженість електричного поля паралельна щілинам відповідає Е-поляризації, другий набір векторів поля у якому напруженість магнітного поля паралельна щілинам відповідає Н-поляризації.

Для перетворення зовнішніх граничних задач математичної фізики використовується класичний метод інтегральних рівнянь (ІР) [1]. В результаті виникають такі рівняння:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\int_{\Gamma} j_e(x')H_0^{(1)}(k|x - x'|)dx' = 2k\sin\phi_0 \exp(ik\cos\phi_0 x)\,.$$

$$\int_{\Gamma} j_x(x')H_0^{(1)}(k|x - x'|)dx' = 2i\exp(ik\cos\phi_0 x),\ x \in \Gamma\,, \qquad (1)$$

Тут $H_0^{(1)}(z)$ – функція Ханкеля першого роду з нульовим порядком (індексом), що визначає фундаментальний розв’язок двовимірного рівняння Гельмгольца. Невідомі функції $j_e(x)$ та $j_x(x)$, визначені на об'єднанні сегментів Г, пов'язані зі старими функціями співвідношеннями $j_e(x) = \upsilon_e\ (x, \pm 0)$, $j_x(x) = \partial\upsilon_x\ (x, \pm 0)/\partial y$. Тобто перше рівняння є диференціально-інтегральним відносно напруженості електричного поля в щілинах, що розташовані відповідно сегментам певної стадії побудови ДМК. Воно досить просто перетворюється в інтегральне рівняння. Для цього звернемось до його диференціальної частини і скористаємось загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною. В результаті отримаємо таке ІР:

$$\int_{\Gamma} j_x(x')H_0^{(1)}(k|x-x'|)dx' = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} + 2e^{ik\cos\phi_0 x} / k\sin\phi_0 \qquad (2)$$

Це рівняння відрізняється від ІР (1) тільки правою частиною, де невідомі сталі A та B потрібно визначати з умов у кінцевих точках щілин. Слід зазначити, що функції $j_e(x)$ та $j_x(x)$, визначені на сегментах, мають принципову відмінність у поведінці на кінцях сегментів. Інтегральні рівняння (1, 2) вважаються основними електродинамічними моделями дифракції плоскої хвилі на послідовності паралельних щілин. Коли перше рівняння не завдає значного клопоту і може успішно розв'язаним різними методами[4, 5], то друге – вимагає інших схем розв'язання, тому перейдемо до його детального дослідження. Серед класичних методів особливою повагою та популярністю користуються аналітичні методи малого параметра і, зокрема, метод Релея [1, 6]. Це тому, що за їх допомогою отримують явні розв'язки тестових задач, без яких не може обійтись жодне серйозне дослідження.

3. МЕТОД РЕЛЕЯ В ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ Е-ПОЛЯРИЗОВАННОЇ ХВИЛІ

Коли у якості малого параметра беруть частотний параметр, що визначається відношенням характерного розміру об'єкта на який набігає хвиля до її довжини, то це буде метод Релея. Його значимість та ефективність була продемонстрована як у випадку окремих стрічки та щілини [1], так і у випадку систем стрічок [4, 5]. Тому природно застосування методу Релея до математичної моделі дифракції на ДФСЩ, коли малим буде параметр $\alpha_n = 2\pi a / \lambda\kappa^{n-1}$, тут $2a$ – ширина щілини початкового об'єкта творення ДМК, а λ – довжина хвилі. Про очікувану ефективність застосування методу свідчить система щілин, зображена на Рис. 1. Тут навіть для досить великого значення РХ і невисокій (третій) стадії побудови ДМК маємо досить малі розміри щілин. При переході до наступної стадії розміри щілин зменшується в $k = 4$ разів, а далі ще і ще. Зрозуміло, що і у випадку класичної МДК при переході від стадії до стадії йде зменшення в $k = 3$ разів, але при цьому відстань між ними може бути рівновеликою розмірові щілин. Тому про коректність застосування методу Релея можна говорити тільки при використанні закону для впорядкування щілин, що відповідає процесу побудови ДМК з досить малою фрактальною розмірністю (РХ). Оскільки ця розмірність для обраного класу ДМК визначається за формулою $\ln 2/\ln k$, де коефіцієнт подібності $k = 1 + b/a$ (Рис. 1), то можна взяти $b >> a$ і застосування методу Релея стане коректним. Більше того, виникає можливість поєднання різних частотних діапазонів: $\lambda >> a/k$, $\lambda \sim b / k$, $a + b >> \lambda$.

Щоб перейти від загальної електродинамічної моделі дифракції E-поляризованої хвилі (2) до математичної моделі дифракції на ДФСЩ слід взяти вихідні змінні моделі процесу побудови ДМК обраного класу [4,5]. Це будуть, зокрема, функції $x_\ell^n(\tau)$, що є лінійними на сегменті [− 1, 1]. Вони наведені в структурній схемі процесу творення ДМК[4]. В результаті отримаємо наступну систему вже звичайних ІР першого роду:

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^{1} j_m(t) H_0^{(1)}\left(\left|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)\right|\right) dt = f_\ell(\tau) \tag{3}$$

Тут підлягають визначенню функції $j_m(t) = \alpha_n j_e(x_m^n(t)/k)$, $a_n = a/\kappa^{n-1}$, функція $f_\ell(\tau)$ дорівнює правій частині рівняння (2), де замість x слід підставити $x_\ell^n(\tau) = x_\ell^n(0) + \alpha_n \tau$, а індекс ℓ змінюється від 1 до 2^n. Для спрощення правої частини помножимо кожне з рівнянь системи на величину $k \sin\phi_0 \exp(-ix_\ell^n(0)\cos\phi_0)/2$ та долучимо до сталих A і B множники $e^{\pm ix_\ell^n(0)}$. Таким чином, система формально не зміниться, тільки права частина стане такою: $f_\ell(\tau) = A_\ell \exp(i\alpha_n\tau) + B_\ell \exp(-i\alpha_n\tau) + \exp(i\alpha_n\tau\cos\phi_0)$, невідомі функції теж зміняться $j_m(t) = \alpha_n j_e(x_m^n(t)/k)\sin\phi_0 \exp(-ix_\ell^n(0)\cos\phi_0)/2$. Очевидно, що невідомі функції мають порядок $O(\alpha_n)$, тому враховуючи розвинення ядра та вигляд правої частини отримаємо співвідношення $A_{\ell 0} + B_{\ell 0} = -1$, тут $A_{\ell 0}$ та $B_{\ell 0}$ – головні коефіцієнти у рядах за степенями малого параметра α_n сталих A і B. Тепер можна користуватись розвиненнями невідомих функцій, ядра та правої частини за степенями α_n, підставляти до (3) і прирівнювати вирази при однакових степенях α_n. Так, від прирівнювання виразів при α_n виникне система ІР

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^{1} j_{m1}(t)\left[\delta_{m\ell} \frac{2i}{\pi} \ln\frac{\alpha_n \gamma}{2i}|\tau - t| + (1-\delta_{m\ell}) H_0^{(1)}(\rho_{\ell m})\right] dt = A_{\ell 1} + B_{\ell 1} + i\tau(A_{\ell 0} - B_{\ell 0} + \cos\phi_0) \tag{4}$$

Тут $\delta_{m\ell}$ – символ Кронекера, $\ln\gamma = 0{,}5772...$ – стала Ейлера, $\rho_{\ell m} = \left|x_\ell^n(0) - x_m^n(0)\right|$. Якщо для його розв'язання використати формулу обернення Карлемана, як це робилося при дослідженні E-поляризації [4, 5], то отримаємо функцію, що не задовольняє умовам у кінцевих точках щілин [1]. Диференціюємо отримані рівняння за зовнішньою змінною і отримаємо особливе ІР з ядром Коші

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{j_{\ell 1}(t)}{\tau - t} dt = A_{\ell 0} - B_{\ell 0} + \cos\phi_0, \quad \ell = 1, \ldots, 2^n.$$

Необхідна умоваіснування потрібного розв'язку приводить до рівності, яка $A_{\ell 0} - B_{\ell 0} = -\cos\phi_0$ разом з попереднім співвідношенням $A_{\ell 0} + B_{\ell 0} = -1$ визначає коефіцієнти $A_{\ell 0}$ та $B_{\ell 0}$: $A_{\ell 0} = -\cos^2(\phi_0/2)$, $B_{\ell 0} = -\sin^2(\phi_0/2)$. Окрім того, ІР з ядром Коші дає $j_{\ell 1}(t) \equiv 0$, що є очікуваним. При цьому з ІР (4) отримуємо $A_{\ell 0} + B_{\ell 0} = 0$. Таким чином, перше наближення в методі Релея виявилось тривіальним. Перейдемо до наступного наближення в методі Релея, яке буде головним.

4. АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ НА ДФСЩ

Коли прирівняти вирази при другій степені α_n то виникне система ІР відносно $j_{m2}(t)$, яка відрізняється від (4) тільки правою частиною. У системі відносно $j_{m2}(t)$, права частина має такий вигляд: $f_{\ell 2}(\tau) = A_{\ell 2} + B_{\ell 2} + i\tau(A_{\ell 1} - B_{\ell 1}) + \tau^2 \sin^2 \phi_0 / 2$. Відповідне особливе ІР з ядром Коші буде таким:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{j_{\ell 2}(t)}{\tau - t} dt = i(A_{\ell 1} - B_{\ell 1}) + \tau \sin^2 \phi_0 \cdot$$

Воно має розв'язок потрібного класу $j_{m2}(t) = -i \sin^2 \phi_0 \sqrt{1 - t^2} \big/ 2$ при виконанні умови $A_{\ell 0} = B_{\ell 0} = 0$. Отже, можна виписати асимптотичний вираз для розв'язку ІР (2), що дає напруженість електричного поля в щілинах

$$j_e(x_m^n(t) / k) = -i\alpha_n \sin \phi_0 \exp(i x_\ell^n(0) \cos \phi_0)\sqrt{1 - t^2} + \mathrm{O}(\alpha_n^2)\,. \qquad (5)$$

Коли взяти ортогональне набігання хвилі ($\phi_0 = \pi/2$), то отримаємо відомий результат дифракції на одній щілині [1]. Тобто у цьому випадку головне наближення пов'язане з відокремленими щілинами, що є очікуваним у межах застосування методу Релея.Більш цікавим може бути порівняння з асимптотичним виразом для розв'язку ІР (1), яке вже було досліджено у статтях [4, 5].

Математична модель дифракції H-поляризованої хвилі на ДФСЩ задана системою (3), де права частина $f_\ell(\tau) = 2i \exp(i x_\ell^n(\tau) \cos \phi_0)$ і підлягають визначенню функції $j_m(t) = a_n j_x(x_m^n(t) / k)$. Головне наближення в методі Релея, яке можна отримати за наведеною схемою з використанням тільки формули обернення Карлемана, приводить до такого виразу: $j_m(x) = j_{m0} / \pi\sqrt{1 - x^2} + \mathrm{O}(\alpha_n)$, де j_{m0} є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь [5]. Таким чином, асимптотичний вираз для розв'язку ІР (1), що визначає поле у щілинах, буде таким:

$$j_x(x_m^n(t) / k) = j_{m0} / [a_n \pi \sqrt{1 - x^2}] + \mathrm{O}(\alpha_n / a_n)\,. \qquad (6)$$

Коли порівняти його з (5), то можна помітити, що дифракційне поле H-поляризованої хвилі у випадку вузьких щілин $a/\kappa^n << \lambda$, більше ніж на порядок перевищує дифракційне поле E-поляризованої хвилі. Зрозуміло, що мова йде про ближнє поле, яке сконцентроване навколо щілин. Воно є основним джерелом для дальнього поля, яке утворюється всіма щілинами ДФСЩ. Поле в далекій зоні, а також, коефіцієнт проходження характеризують дофрактальний об'єкт і можуть бути тими величинами за допомогою яких виявляться фрактальні властивості. Але це вже буде метою подальшого дослідження дифракції на ДФСЩ.

Отже, задачу дифракції плоскої електромагнітної хвилі системою паралельних щілин, впорядкованих за певною стадією побудови ДМК зі змінною розмірністю Хаусдорфа (РХ) у рамках зроблених припущень можна вважати вирішеною.

5. ВИСНОВКИ

В деталях досліджується задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі на системі паралельних щілин в нескінченно тонкому, плоскому і ідеально провідному екрані. Для математичної впорядкованості системи щілин пропонується взяти певну стадію побудови досконалої множини Кантора зі змінною розмірністю Хаусдорфа, що визначається виразом $\ln 2/\ln \kappa$. Дослідження проводиться на основі строгої електромагнітної теорії за методом інтегральних рівнянь з використанням методу Релея. В його межах розроблена нова схема визначення вихідних змінних електродинамічних моделей дифракції плоскої хвилі на дофрактальній послідовності паралельних щілин. Отримано асимптотичні вирази напруженості електричного поля в щілинах та проведено їх порівняння.

WAVE'S DIFFRACTION BY PREFRACTAL SYSTEM OF SPLITS IN A PLANE SCREEN

G.I. Koshovy

National Aerospace University
17, Chkalov Str., Kharkov, 61070, Ukraine
E-mail: gikosh@gmail.com

The process of plane wave's interaction with prefractal system of splits in perfectly conducting and in finitely thing screen is examined on the base of strong electromagnetic theory. Some stage of construction for perfect Cantor set with variable Hausdorf's dimension is used for the system's mathematic order. The examination is based on the integrale quation technique with usage of a symptotical approach. Inversion formula sareapplied for reworking schema of integrale quation's solution and some asymptotical formula sare given with in the limits of the Raleigh method.

Keywords: *WAVES DIFFRACTION, FRACTAL MODELING, INTEGRAL EQUATIONS, THE RALEIGH METHOD.*

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НАДОФРАКТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЩЕЛЕЙ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Г.И. Кошевой

Национальный аэрокосмическийуниверситет (ХАИ)
Украина, 61070, г. Харьков, ул. Чкалова 17,
E-mail: gikosh@gmail.com

На основе строгой электромагнитной теории проводится исследование процесса взаимодействия плоской волны с дофрактальной системой щелей в идеально проводящем и бесконечно тонком экране. Для математического упорядочения системы берется некоторая стадия построения совершенного множества Кантора с переменной размерностью Хаусдорфа. Исследование базируется на методе интегральных уравнений с использованием асимптотического подхода. Основой разработанной схемы решения системы интегральных уравнений есть формулы обращения, которые в рамках метода Релея дают явные асимптотические формулы.

Ключевые слова: *ДИФРАКЦИЯ ВОЛН, ФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, МЕТОД РЕЛЕЯ.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, *Теория дифракции* (Москва, Мир: 1964).
2. Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы* (Москва, Институт Компьютерных Исследований: 2002).
3. Г.И. Кошевой, *Электромагнитные волны и электронные системы* **11**, 28 (2007).
4. Г.І. Кошовий, *Радіофізика та електроніка* **2 (16)**, 1 (2011). (G.I. Koshovy, *Telecommun. Radio Eng.* **67**, 1321(2008)).
5. Г.І. Кошовий, О.О. Шматько, *Ж. Нано- Електрон. Фіз.* **3** №2, 19 (2011).
6. T.A. Karam, D.M. Levine, Y.M. Autar, A. Stogryn, *IEEE T. Anten. Propag.* **43**, 681 (1995).