

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
Л. И. ФОМЕНКО

Сумы

**ДИФРАКЦИЯ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ
НА КОНЦЕНТРАТОРАХ НАПРЯЖЕНИЙ В
ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛАХ
(АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)**

Если диа(пара)-магнетик, находящийся в статическом магнитном поле, подвергнуть механическому возбуждению, то в теле возникают наведенные (вихревые) токи, что приводит к появлению объемных сил Лоренца. Учет этих сил дает дополнительный тензор — максвелловских напряжений, вносящий существенные поправки в напряженное состояние тела.

Ниже рассматривается краевая задача магнитоупругости для полупространства, ослабленного туннельными концентраторами напряжений (трещины, отверстия).

Исходя из соотношений линейной магнитоупругости [1—3], приписав среде идеальную проводимость и предположив электромагнитное поле квазистатическим ($\vec{D}=0$, $\partial\vec{D}/\partial t=0$), имеем замкнутую систему соотношений

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu_e \text{rot } \vec{h} \times \vec{H}^0 = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\vec{h} = \text{rot} (\vec{u} \times \vec{H}^0), \quad \vec{e} = -\mu_e \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}^0 \right);$$

$$[\vec{h}]_\tau = 0, \quad [\mu_e \vec{h}]_n = 0;$$

$$[\sigma_{ij} + t_{ij}] n_j = X_{in}, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$t_{ij} = \mu_e (H_i^0 h_j + H_j^0 h_i - \delta_{ij} H_k^0 h_k), \quad (i, j, k = \overline{1, 3}).$$

Здесь $H^0 = (H_1^0; H_2^0; H_3^0)$ — напряженность внешнего магнитного поля; \vec{e} , \vec{h} — флуктуации электрического и магнитного полей; \vec{u} — механические перемещения; σ_{ij} , t_{ij} — соответственно механические и максвелловские напряжения; X_{in} — компоненты внешней нагрузки; μ_e — магнитная проницаемость вещества; ρ — плотность вещества; μ , λ — постоянные Ламе; δ_{ij} — символ

Кroneкера; x_i — декартовы прямоугольные координаты. Символ [*] обозначает скачок соответствующей величины на линии раздела двух сред.

Предположим, что магнитоупругая среда занимает полупространство $x_2 \geq 0$ (рис. 1) и содержит туннельные вдоль x_3 концентраторы типа трещин L_j ($j=1, k$) или отверстий l_i ($i=1, n$).

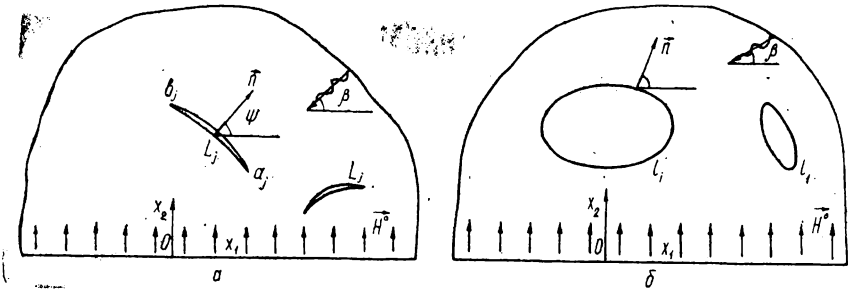


Рис. 1

Пусть полупространство граничит с вакуумом, в котором имеет место статическое магнитное поле $\vec{H}_*^0 = (0; H_0^*; 0)$, $H_0^* = \text{const}$. Под механическим возбуждением будем понимать действующую на поверхности полости гармоническую во времени сдвиговую нагрузку $X_{3n} = \text{Re}(X_3 e^{-i\omega t})$, $X_3 = X_3(x_1; x_2)$ или магнитоупругую волну смещения

$$u_3^0 = \text{Re}(U_3^0 e^{-i\omega t}); \quad (2)$$

$$U_3^0 = U \exp(-i\gamma(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)), \quad U = \text{const};$$

$$\gamma = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 + \chi^2 \sin^2 \beta}}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \chi^2 = \frac{\mu_e H_0^2}{\mu},$$

где β — угол между нормалью к фронту падающей волны и осью OX_1 ; ω — круговая частота.

В этих условиях в среде возникают волновые механические и электромагнитные поля, соответствующие состоянию антиплоской деформации. Полная система уравнений имеет следующий вид:

уравнение движения

$$\nabla^2 u_3 + \chi^2 \partial_2^2 u_3 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (3)$$

компоненты электромагнитного поля

$$h_1 = h_2 = 0, \quad h_3 = H_0 \partial_2 u_3, \quad (4)$$

$$e_1 = -\mu_e H_0 \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad e_2 = e_3 = 0;$$

граничные условия на контуре полости

$$\sigma_{13} \cos \psi + \sigma_{23} \sin \psi = X_{3n}; \quad (5)$$

$$h_3^* = h_3; \quad \sigma_{i3} = \mu \partial_i u_3.$$

Здесь ψ — угол между положительной нормалью к контуру и осью ox_1 (рис. 1); звездочка относится к полости дефекта.

Рассмотрим полупространство с тунельными вдоль x_3 трещинами $L_j (j=1, k)$. В соответствии с указанным выше в нем имеет место статическое магнитное поле $\vec{H}^0 = (0; H_0; 0)$, $H_0 = \mu_0 H_0^*/\mu_e$, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

При механическом возбуждении в теле с трещинами имеет место стационарный (колебательный) волновой процесс, причем компоненты полей σ_{i3} , t_{23} ($i=1, 2$) и h_3 обладают в вершинах дефектов характерной корневой особенностью, что приводит к необходимости учета влияния электромагнитных эффектов на напряженность тела.

Механическое поле в полупространстве с дефектом складывается из поля падающей волны (2), поля отраженной волны

$$u_3^1 = \text{Re} (U_3^1 e^{-i\omega t}), \quad (6)$$

$$U_3^1 = U \exp(-i\gamma(x_1 \cos \beta - x_2 \sin \beta))$$

и рассеянного поля, которое, обобщая [4], представим в виде

$$u_3 = \text{Re} (U_3 e^{-i\omega t}), \quad (7)$$

где

$$U_3(x_1; x_2) = \frac{1}{2} \int_L p(\zeta) \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} E(\zeta_1; z_1) d\zeta_1 - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} E(\zeta_1; z_1) d\bar{\zeta}_1 \right\} + \int_L q(\zeta) E(\zeta_1; z_1) ds;$$

$$E(\zeta_1; z_1) = H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1) + H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1^*);$$

$$z_1 = x_1 + \frac{ix_2}{\sqrt{1+\chi^2}}, \quad \zeta_1 = \xi_1 + \frac{i\xi_2}{\sqrt{1+\chi^2}};$$

$$r_1 = |\zeta_1 - z_1|, \quad r_1^* = |\bar{\zeta}_1 - z_1|, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L = \bigcup_{j=1}^k L_j;$$

$p(\zeta) = \{p_j(\zeta), \zeta \in L_j\}$, $q(\zeta) = \{q_l(\zeta), \zeta \in L_l\}$ — неизвестные «плотности»; $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода n -го порядка; ds — элемент дуги контура L . Плотность $p(\xi) = -0,5 [U_3(\xi)]$, где $[U_3(\xi)]$ — скачок амплитуды перемещения на L .

Функция (7) является решением уравнения (3), автоматически удовлетворяет условию $\sigma_{23} = 0$ на границе полупространства, а также условию излучения.

Граничное условие (5) с учетом (2), (6) и (7) представим в виде

$$c(\psi) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} (U_3 + U_3^0 + U_3^1) \right\}^{\pm} + \overline{c(\psi)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} (U_3 + U_3^0 + U_3^1) \right\}^{\pm} = \\ = \pm X_3^{\pm}; \quad (8)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу L_j (при движении от его начала a_j к концу b_j); Ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу L_j и осью ox_1 . Учитывая непрерывное продолжение вектора механических напряжений через разрезы и реализуя предписанные в (8) операции, находим связь между плотностями

$$q(\zeta) = \frac{\chi^2 \sin 2\psi}{4i\sqrt{1+\chi^2}} \frac{dq}{ds}, \quad (9)$$

Подставляя в граничное условие на левом берегу разреза предельные значения входящих туда функций, приходим к следующему сингулярному интегродифференциальному уравнению:

$$\int_L \frac{df}{ds} g(\zeta; \zeta_0) ds + \int_L f(\zeta) G(\zeta; \zeta_0) ds = N(\zeta_0), \quad (10)$$

где

$$g(\zeta; \zeta_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) + \frac{\chi^2 \sin 2\psi}{2\pi\sqrt{1+\chi^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) + \\ + \frac{i\gamma_2 \chi^2 \sin 2\psi}{4\sqrt{1+\chi^2}} \{ H_1(\gamma_2 r_{10}) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}}) + \\ + H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}^*}) \};$$

$$G(\zeta; \zeta_0) = \frac{\gamma_2^2}{4i} \{ H_2(\gamma_2 r_{10}) \operatorname{Im}(\overline{a(\psi)} \overline{c(\psi_0)} e^{2i\alpha_{10}}) + \\ + \operatorname{Im}(a(\psi) c(\psi_0)) (H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) + H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*)) + \\ + H_2^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Im}(\overline{a(\psi)} c(\psi_0) e^{-2i\alpha_{10}^*}) \};$$

$$N(\zeta) = \frac{2}{\mu} X_3 + 2i\gamma (\cos(\psi - \beta) U_3^0 + \cos(\psi + \beta) U_3^1);$$

$$f(\zeta) = [U_3(\zeta)], \quad \zeta_0 \in L, \quad a(\psi) = dc(\psi)/d\psi;$$

$$r_{10} = |\zeta_1 - \zeta_{10}|, \quad \alpha_{10} = \arg(\zeta_1 - \zeta_{10});$$

$$r_{10}^* = |\overline{\zeta_1} - \zeta_{10}|; \quad \alpha_{10}^* = \arg(\overline{\zeta_1} - \zeta_{10}).$$

Интегральное уравнение необходимо решать в совокупности с дополнительным условием

$$\int_L df = 0. \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) полностью определяют решение в классе h_0 функций неограниченных на концах L_j [5].

Получим формулу для определения коэффициента интенсивности напряжений в вершинах дефекта. Введем параметризацию контура L_i :

$$\zeta = \zeta(\delta), \quad \zeta_0 = \zeta(\delta_0), \quad -1 \leq \delta, \delta_0 \leq 1.$$

В соответствии с этим положим

$$\frac{df}{ds} = \frac{\Omega(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta}, \quad \Omega(\delta) \in H[-1; 1]. \quad (12)$$

Суммарный коэффициент интенсивности, учитывающий как механическую, так и максвелловскую части тензора напряжений, определяется через сингулярную часть выражения

$$Q_n = (S_{13} + T_{13}) \cos \psi + (S_{23} + T_{23}) \sin \psi \quad (13)$$

по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \operatorname{Re}(Q_n e^{-i\omega t}), \quad t_{ij} = \operatorname{Re}(T_{ij} e^{-i\omega t}), \\ \sigma_{ij} &= \operatorname{Re}(S_{ij} e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

В силу (1), (4), (5) можем записать

$$Q_n = \mu (\partial_1 U_3 \cos \psi + (1 + \chi^2) \partial_2 U_3 \sin \psi).$$

С учетом асимптотики Q_n находим суммарный коэффициент интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} K_{III}^s &= \lim \sqrt{2\pi r} \operatorname{Re}(Q_n e^{-i\omega t}) = \\ &= - \frac{\mu \sqrt{\pi(1+\chi^2)}}{2 \sqrt{s'(\mp 1)}} |\Omega(\mp 1)| \cos(\omega t - \arg \Omega(\mp 1)). \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициент интенсивности механических напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} K_{III} &= \lim \sqrt{2\pi r} \operatorname{Re}(S_n e^{-i\omega t}); \quad (15) \\ S_n &= S_{13} \cos \psi_c + S_{23} \sin \psi_c = - \frac{\mu \Omega(\mp 1)}{2 \sqrt{2\pi s'(\mp 1)}} \times \\ &\times \left(\sqrt{1+\chi^2} + \frac{\chi^4 \sin^2 \psi_c}{4 \sqrt{1+\chi^2}} \right) (1 + \chi^2 \sin^2 \psi_c)^{-1}, \end{aligned}$$

где ψ_c — угол нормали к левому берегу L_j в вершине c ($c = a_j$ или b_j).

В качестве первого примера рассмотрим неограниченное пространство, ослабленное туннельной прямой трещиной, занимающей отрезок $[-l; l]$ оси x_2 . Поверхность трещины свободна от сил, а их бесконечности вдоль оси x_1 излучается магнитоупругая волна

(2): Сингулярное уравнение (10), в котором ядра, соответствующие сопряженному источнику, полагались равными нулю, решалось численно методом механических квадратур [6].

На рис. 2 представлены результаты расчетов величины $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha$. Коэффициент интенсивности напряжений K_{III}^S выражается через α^\mp по формуле ($2l$ — длина трещины)

$$K_{III}^S = P_h \sqrt{\pi l} \alpha^\mp \cos(\omega t - \arg \alpha^\mp), \quad (16)$$

$$P_h = -i\mu U \gamma \sin \beta.$$

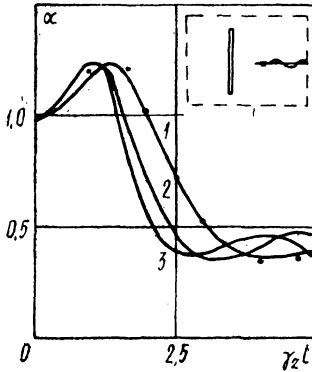


Рис. 2

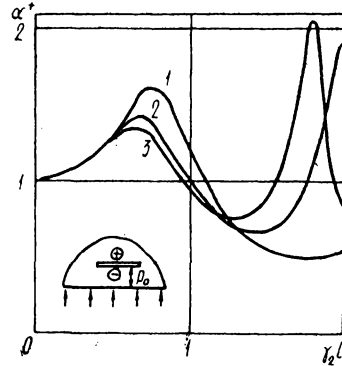


Рис. 3

Кривые 1, 2, 3 построены для значений $\chi = 1; 0,5; 0$ соответственно ($l=1$). Точками нанесены результаты, полученные другим методом [1].

В качестве второго примера рассмотрим полупространство $x_2 \geq 0$, ослабленное горизонтальной трещиной ($2l=2$) для случая, когда падающей волны нет, а на берегах трещины задана гармоническая во времени сдвиговая нагрузка $X_{3n}^\pm = \text{Re}(X_3 e^{-i\omega t})$, $X_3 = \text{const}$. Изменение величины $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha$ в том же соответствии, что и выше, представлено на рис. 3. Предполагаем, что расстояние трещины до границы $x_2=0$ равно ее длине. Коэффициент интенсивности напряжений K_{III} определяется по формуле (16), в которую вместо P_h необходимо подставить X_3 .

Пусть теперь полупространство $x_2 \geq 0$, граничащее с вакуумом, ослаблено цилиндрическими вдоль x_3 полостями-отверстиями l_i (рис. 1). В условиях указанной выше постановки механическое поле в полупространстве складывается из поля падающей волны (2), поля отраженной волны (6) и рассеянного поля, которое представим в виде

$$u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t}), \quad l = \bigcup_{i=1}^n l_i, \quad (17)$$

где

$$U_3(x_1; x_2) = \int_{\zeta} p(\zeta) (H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{1\zeta}) + H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{1\zeta}^*)) ds,$$

$p(\zeta) = \{p_l(\zeta), \zeta \in l\}$ — неизвестная „плотность“. Интегрирование осуществляется против часовой стрелки. Представление (17) автоматически удовлетворяет условию $\sigma_{23} = 0$ на границе полупространства, условию излучения, а функция u_3 является решением уравнения (3).

Граничное условие (5) на l представим в амплитудах

$$(S_{13} + S_{13}^0 + S_{13}^1) \cos \psi + (S_{23} + S_{23}^0 + S_{23}^1) \sin \psi = X_3. \quad (18)$$

Здесь S_{13} , S_{13}^0 , S_{13}^1 — соответственно амплитуды величин σ_{13} , σ_{13}^0 , σ_{13}^1 .

Вычисляя напряжения с учётом (2), (6), (17) подставляем их предельные значения при $z \rightarrow \xi_0 \in l$ в краевое условие (18) и приходим к интегральному уравнению относительно $p(\zeta)$

$$p(\zeta_0) + \int_l p(\zeta) G(\zeta; \zeta_0) ds = N(\zeta_0), \quad (19)$$

где

$$G(\zeta; \zeta_0) = \frac{2}{i\pi\eta(\psi_0)} \operatorname{Re} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) + \frac{\gamma_2}{\eta(\psi_0)} (H_1(\gamma_2 r_{10}) \times \\ \times \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}}) + H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}^*}));$$

$$N(\zeta) = \frac{1}{\mu\eta(\psi)} X_3 + \frac{i\gamma}{\eta(\psi)} (\cos(\beta - \psi) U_3^0 + \cos(\beta + \psi) U_3^1);$$

$$\eta(\psi) = -2i \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi)}{a(\psi)} \right).$$

В случае отсутствия предварительного магнитного поля ($\chi = 0$) уравнение (19) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Если же $\chi > 0$, то получаем сингулярное интегральное уравнение второго рода.

Сдвиговые напряжения на площадке, перпендикулярной к контуре отверстия, определяются формулами

$$\tau_z = -(\sigma_{13} + \sigma_{13}^0 + \sigma_{13}^1 + t_{13}) \sin \psi + (\sigma_{23} + \sigma_{23}^0 + \sigma_{23}^1 + t_{23}) \cos \psi, \quad (20)$$

$$\tau_s = \operatorname{Re}(T e^{-i\omega t}).$$

В нашем случае максвелловские напряжения

$$t_{13} = 0, \quad t_{23} = \mu_e H_0^2 \partial_2 u_3. \quad (21)$$

Привлекая соотношения (21), (17), (6), (2) в формулу (20), получаем амплитуду напряжений в точке $\xi_0 \in l$

$$T = -2i\mu \sqrt{1 + \chi^2} p(\zeta_0) \operatorname{Re} \left(-\frac{c(\psi_0)}{a(\psi_0)} \right) + i\mu\gamma (\sin(\psi_0 - \beta) U_3^0 + \\ + \sin(\psi_0 + \beta) U_3^1) + \int_l p(\zeta) K(\zeta; \zeta_0) ds; \quad (22)$$

$$K(\zeta; \zeta_0) = \frac{2i\mu \sqrt{1+\chi^2}}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) - \mu\gamma_2 (H_1(\gamma_2 r_{10}) b + H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) b^*).$$

Здесь

$$b = \cos \alpha_{10} \sin \psi_0 - \sqrt{1+\chi^2} \cos \psi_0 \sin \alpha_{10};$$

$$b^* = \cos \alpha_{10}^* \sin \psi_0 - \sqrt{1+\chi^2} \cos \psi_0 \sin \alpha_{10}^*.$$

В качестве примера рассмотрим полупространство, ослабленное полостью эллиптического поперечного сечения, пара-

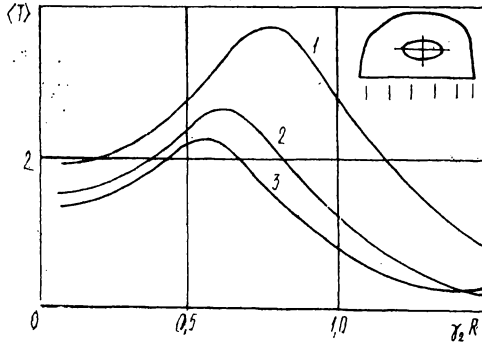


Рис. 4

метрическое уравнение которого $\xi_1 = a_1 \cos \varphi$, $\xi_2 = h + b_1 \sin \varphi$. Падающая из бесконечности волна отсутствует, а на поверхности полости имеет место сдвиговая нагрузка $X_{3n} = \operatorname{Re}(X_3 e^{-i\omega t})$, $X_3 = X_3^0 \sin \varphi$, $X_3^0 = \operatorname{const}$. На рис. 4 приведены результаты расчета величины $\langle T \rangle = T/X_3^0$ в точке $\varphi = 0$ для $h = 1,75$, $b_1/a_1 = 0,75$. Кривые построены в том же соответствии, что и выше; $R = (a_1 + b_1)/2$.

Таким образом, учет предварительного магнитного поля необходим для достоверной оценки напряженности тела с концентраторами напряжений.

Список литературы: 1. Shindo Y. Diffraction of Antiplane Shear waves by a finite crack in the presence of the magnetic field//Z. Angew. Math. und Mech. 1976. 56, N 1. P. 33—41. 2. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., 1986. 159 с. 3. Паргон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезокерамических и электропроводных сред. М., 1988. 472 с. 4. Фильшинский Л. А. Взаимодействие волн напряжения с криволинейными туннельными трещинами продольного сдвига в полупространстве//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 482—487. 5. Мухомеливили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые приложения к математической физике. М., 1962. 600 с. 6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985. 255 с.

Поступила в редколлегию 15.08.90