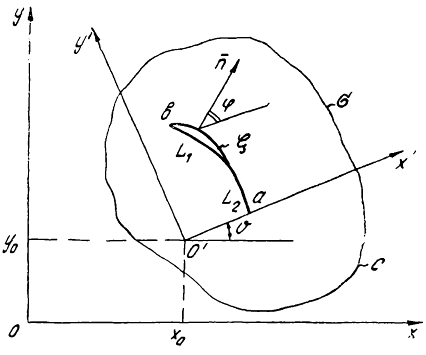
УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, В. Ф. ХВОРОСТ

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОСТЫВАЮЩЕМ ТЕЛЕ, ОСЛАБЛЕННОМ ТРЕЩИНОЙ, С УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Решения стационарных задач термоупругости для бесконечных и полубесконечных изотропных и анизотропных пластин с трещинами при частичном контакте их берегов известны [1—4]. Ниже рассматривается задача о нестационарных температурных напряжениях в цилиндрическом анизотропном теле, ослабленном туннельной трещиной с частично контактирующими берегами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропное по теплофизическим и упругим свойствам цилиндрическое тело с туннельной вдоль оси z трещиной-разрезом (см. рисунок). Тело находится в условиях теплообмена с внешней средой по закону Ньютона, его границы свободны от сил, и температура внешней среды является известной функцией времени. В этих условиях температура тела и его термонапряженное состояние не зависят от координаты z. Поскольку трещина моделируется математическим разрезом, будем считать, что температурное поле непрерывно продолжимо с одного ее берега на другой. Оно описывается следующими соотношениями:



$$k_{11}\,\partial^2 T/\partial x^2 + 2k_{12}\,\partial^2 T/\partial x\,\partial y + k_{22}\,\partial^2 T/\partial y^2 = \partial T/\partial t,$$
$$-\varkappa_{ii}\,\partial T/\partial n\,|_C = \beta_i\,[T - f(t)],\; T = T_0 \text{ при } t=0,\; i=1,2, \tag{1}$$

где $k_{ik}=\varkappa_{ik}(c\cdot\rho)^{-1}$ — коэффициенты температуропроводности; $\|\varkappa_{ik}\|$ — тензор теплопроводности второго ранга; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность материала; β_i — коэффициенты теплоотдачи; T_0 — температура тела в начальный момент времени.

Напряжения и смещения в теле определяются формулами

$$\sigma_x = \partial^2 F/\partial y^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\{\mu_1^2\cdot\Phi_1(t,z_1) + \mu_2^2\cdot\Phi_2(t,z_2)\} + \sigma_x^T,$$
$$\sigma_y = \partial^2 F/\partial x^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\{\Phi_1(t,z_1) + \Phi_2(t,z_2)\} + \sigma_y^T, \tag{2}$$
$$\tau_{xy} = -\partial^2 F/\partial x\partial y = -2\,\mathrm{Re}\,\{\mu_1\cdot\Phi_1(t,z_1) + \mu_2\cdot\Phi_2(t,z_2)\} + \tau_{xy}^T,$$
$$u = 2\,\mathrm{Re}\,\{S_1\varphi_1(t,z_1) + S_2\varphi_2(t,z_2)\} + u_T,\quad v = 2\,\mathrm{Re}\,\{q_1\varphi_1(t,z_1) + q_2\varphi_2(t,z_2)\} + v_T,$$
$$\sigma_x^T = \partial^2 F_T/\partial y^2,\; \sigma_y^T = \partial^2 F_T/\partial x^2,\; \tau_{xy}^T = -\partial^2 F_T/\partial x\,\partial y,$$
$$\Phi_\nu(t,z_\nu) = \partial\varphi_\nu(t,z_\nu)/\partial z_\nu,\; z_\nu = x + \mu_\nu y,$$
$$s_\nu = c_{11}\cdot\mu_\nu^2 + c_{12} - c_{16}\cdot\mu_\nu,\; q_\nu = c_{21}\cdot\mu_\nu + c_{22}\cdot(\mu_\nu)^{-1} - c_{26},\; \nu = 1,2,$$

где F_T — часть функции напряжений, соответствующая тепловому полю; c_{ij} — упругие постоянные; μ_ν — комплексные параметры анизотропии материала.

Граничные условия на внешнем контуре C при отсутствии внешних сил таковы:

$$a(\psi)\,\Phi_1^+(t,\sigma_1) + b(\psi)\,\overline{\Phi_1^+(t,\sigma_1)} + \Phi_2^+(t,\sigma_2) = \Phi^+(t,\sigma), \tag{3}$$
$$a(\psi) = (\mu_1 - \bar\mu_2)(\mu_1\cos\psi - \sin\psi)/[(\mu_2 - \bar\mu_2)(\mu_2\cos\psi - \sin\psi)],$$
$$b(\psi) = (\bar\mu_1 - \bar\mu_2)(\bar\mu_1\cos\psi - \sin\psi)/[(\mu_2 - \bar\mu_2)(\mu_2\cos\psi - \sin\psi)],$$

$$\Phi^{+}(t,\sigma) = -(\mu_2\cos\psi - \sin\psi)^{-1}(d/ds)(\partial F_T/\partial\sigma_2),\ \sigma = \operatorname{Re}\sigma + \mu_\nu \operatorname{Im}\sigma,$$
$$\nu = 1,\ 2,\ \sigma \in C.$$

Обозначим контур трещины-разреза через $L = L_1 \bigcup L_2$. Допустим, что на отрезке L_2 берега трещины вступают в контакт, на участке L_1 имеет место раскрытие берегов. Тогда при отсутствии трения между берегами краевые условия имеют вид

$$N^+ = N^-,\ T^+ = T^- = 0,\ u_n^+ + u_n^- = 0,\ \text{на}\ L_2, \tag{4}$$
$$u_n^{\pm} = \pm u^{\pm}\cdot\cos\psi \pm v^{\pm}\cdot\sin\psi,$$

где $N^{\pm}$ и $T^{\pm}$ — нормальные и касательные усилия на левом (+) и правом (—) берегах трещины; $u^{\pm}$, $v^{\pm}$ — компоненты вектора смещения; ψ — угол между осью ox и положительным направлением нормали к левому берегу в точке ζ,

$$N^+ = N^- = 0,\ T^+ = T^- = 0,\ \text{на}\ L_1, \tag{5}$$

Используя представления (2), краевые условия (4), (5) преобразуем к виду

$$a(\psi)\cdot[\Phi_1^+(t,\zeta_1) - \Phi_1^-(t,\zeta_1)] + b(\psi)\cdot[\overline{\Phi_1^+(t,\zeta_1)} - \overline{\Phi_1^-(t,\zeta_1)}] +$$
$$+ [\Phi_2^+(t,\zeta_2) - \Phi_2^-(t,\zeta_2)] - [\Phi^+(t,\zeta) - \Phi^-(t,\zeta)] = 0,\ \zeta \in L_2,$$
$$\operatorname{Re}\{[(1-\mu_1^2)\sin 2\psi - 2\mu_1\cos 2\psi]\cdot\Phi_1^{\pm}(t,\zeta_1) +$$
$$+ [(1-\mu_2^2)\cdot\sin 2\psi - 2\mu_2\cos 2\psi]\cdot\Phi_2^{\pm}(t,\zeta_2)\} + T^* = 0,\ \zeta \in L_2, \tag{6}$$
$$T^* = \tau_{xy}^T(\cos^2\psi - \sin^2\psi) + (\sigma_y^T - \sigma_x^T)\cos\psi\cdot\sin\psi,$$
$$2\operatorname{Re}\{(s_1\cdot\cos\psi + q_1\cdot\sin\psi)[\varphi_1^+(t,\zeta_1) - \varphi_1^-(t,\zeta_1)] + (s_2\cdot\cos\psi + q_2\sin\psi)\times$$
$$\times[\varphi_2^+(t,\zeta_2) - \varphi_2^-(t,\zeta_2)]\} + [(u_T^+ - u_T^-)\cos\psi + (v_T^+ - v_T^-)\sin\psi] = 0,$$
$$\zeta \in L_2,$$
$$a(\psi)\cdot\Phi_1^{\pm}(t,\zeta_1) + b(\psi)\overline{\Phi_1^{\pm}(t,\zeta_1)} + \Phi_2^{\pm}(t,\zeta_2) = \Phi^{\pm}(t,\zeta),\ \zeta \in L_1.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi_\nu(t, z_\nu)$ ($\nu = 1, 2$) и неизвестного заранее участка контакта L_2 по краевым условиям (3), (6) и некоторым дополнительным условиям однозначности перемещений в теле.

2. Интегральные уравнения краевой задачи. Искомые функции запишем так [5]:

$$\Phi_1(t,z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L p(t,\zeta)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \omega(t,\sigma)\frac{d\sigma_1}{\sigma_1 - z_1}, \tag{7}$$
$$\Phi_2(t,z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_L q(t,\zeta)\frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} - \frac{1}{2\pi i}\int_C a(\psi)\,\omega(t,\sigma)\frac{d\sigma_2}{\sigma_2 - z_2} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_C b(\psi)\overline{\omega(t,\sigma)}\frac{d\sigma_2}{\sigma_2 - z_2},$$
$$q(t,\zeta) = -a(\psi)p(t,\zeta) - b(\psi)\overline{p(t,\zeta)},$$

что обеспечивает непрерывное продолжение вектора напряжения через разрез.

Подставив предельные значения функции (7) в краевые условия (3), (6), приходим к системе интегральных уравнений

$$\omega(t,\sigma_0) + \int_L K_1(\zeta,\sigma_0)p(t,\zeta)\,d\zeta_1 + \int_L K_1^*(\zeta,\sigma_0)\overline{p(t,\zeta)}\,d\overline{\zeta}_1 +$$

$$+\int_C M_1(\sigma,\sigma_0)\,\omega(t,\sigma)\,d\sigma_1+\int_C M_1^*(\sigma,\sigma_0)\,\overline{\omega(t,\sigma)}\,d\bar{\sigma}_1=N_1(t,\sigma_0),\quad \sigma_0\in C, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{b_1(\psi_0)}\,\overline{b(\psi)}}{\bar{\zeta}_2-\bar{\zeta}_{20}}\,p(t,\zeta)\,d\bar{\zeta}_2+\int_L K_2(\zeta,\zeta_0)\,p(t,\zeta)\,d\zeta_1+\right.$$

$$\left.+\int_C M_2(\sigma,\zeta_0)\,\omega(t,\sigma)\,d\sigma_1\right\}=N_2(t,\zeta_0),\quad \zeta_0\in L_2, \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\left\{c_{11}(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_2)(\cos\psi_0+\bar{\mu}_1\cdot\sin\psi_0)\int_d^{\zeta_0} p(t,\zeta)\,d\zeta_1\right\}=0, \tag{10}$$

$$\zeta_0\in L_2,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L p(t,\zeta)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_{10}}+\int_L K_3(\zeta,\zeta_0)\,p(t,\zeta)\,d\zeta_1+\int_L K_3^*(\zeta,\zeta_0)\,\overline{p(t,\zeta)}\,d\bar{\zeta}_1+$$

$$+\int_C M_3(\sigma,\zeta_0)\,\omega(t,\sigma)\,d\sigma_1+\int_C M_3^*(\sigma,\zeta_0)\,\overline{\omega(t,\sigma)}\,d\bar{\sigma}_1=N_3(t,\zeta_0),\quad \zeta_0\in L_1, \tag{11}$$

$$b_1(\psi)=(1-\mu_2^2)\sin 2\psi-2\mu_2\cos 2\psi$$

(K_i, K_i^*, M_i, M_i^* ($i=\overline{1,3}$) — регулярные ядра, которые из-за громоздкости здесь не приводятся, а N_i ($i=\overline{1,3}$) — правые части интегральных уравнений).

Условие равенства нулю скачка нормальных перемещений в вершинах разреза обеспечивается уравнением (10). Равенство нулю скачка касательных компонент вектора перемещений приводит к дополнительному соотношению

$$\operatorname{Re}\left\{c_{11}(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\bar{\mu}_2)(\sin\psi_a-\bar{\mu}_1\cdot\cos\psi_a)\int_L p(t,\zeta)\,d\zeta_1\right\}=0. \tag{12}$$

Решение поставленной нелинейной краевой задачи будем искать методом последовательных приближений. Вначале рассмотрим краевую задачу для тела с разрезом L без учета контакта его берегов ($L=L_1$). В этом случае необходимо решить интегральные уравнения (8), (11) с дополнительным условием однозначности смещений

$$\int p(t,\zeta)\,d\zeta_1=0. \tag{13}$$

Затем, используя известный метод [6], вычисляем на отрезке L скачки нормальных смещений Δu_n. Если найдутся зоны $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$, на которых выполняются соответственно условия $\Delta u_n<0$, $\Delta u_n>0$, то они принимаются в качестве первого приближения для зоны раскрытия L_1 и зоны контакта L_2. Далее решаем контактную задачу, описываемую интегральными уравнениями (8)—(11) и дополнительным условием (12) при заданных зоне раскрытия $L_1^{(1)}$ и зоне контакта $L_2^{(1)}$. В зоне контакта $L_2^{(1)}$ вычисляем нормальное усилие N^+ и отыскиваем точку, в которой N^+ обращается в нуль. Эта точка используется для построения второго приближения $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$ и повторно решается контактная задача.

Таким образом, строится итерационный процесс, который в рассматриваемом случае сходится за два—три шага. Система интегральных уравнений (8)—(11) сводится к системе линейных алгебраических уравнений по схеме Мультоппа [7].

Алгоритм контактной задачи реализован на ЭВМ ЕС-1022 на языке ФОРТРАН. В качестве примера рассмотрим остывание отливки квадратного поперечного сечения $0{,}5\times 0{,}5$ м, материал которой характеризуется следующими механическими и теплофизическими параметрами:

$$E_1 = 21\,\text{ГПа}, \quad E_2 = 16\,\text{ГПа}, \quad G = 4{,}2\,\text{ГПа},$$

$$\alpha_1 = 0{,}59\cdot 10^{-5}\cdot \text{К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 0{,}77\cdot 10^{-5}\cdot K^{-1}, \quad \mu_1 = 0{,}539\cdot i, \quad \mu_2 = 2{,}127\cdot i,$$

$$\varkappa_{11} = \varkappa_{22} = 0{,}7\,\text{Вт}/(\text{м}\cdot K), \quad k_{11} = k_{22} = 1{,}8\cdot 10^{-5}\cdot \text{м}^2/\text{с},$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 12{,}6\,\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot K).$$

Тело ослаблено криволинейной трещиной, описанной параметрическими уравнениями

$$z = z_0 + z'\cdot e^{i\vartheta}, \quad z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad z' = x' + iy', \quad \psi = \vartheta + \varphi,$$

$$x' = R_1 \cos(\beta + 1/2)\,\varphi_0, \quad y' = R_2\cdot \sin(\beta + 1/2)\,\varphi_0, \quad -1 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

$$\varphi_0 \leqslant \pi/2, \quad \beta = \cos\Theta, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi.$$

Из результатов расчета следует, что коэффициент интенсивности напряжений резко падает при углублении внутренней трещины и появлении в ней зоны контакта. Так, через 10 ч после начала остывания тела при изменении δ от 0,01 м до 0,03 м коэффициент интенсивности напряжений уменьшается более чем в два раза. Интересно отметить также, что на границе тела вблизи внутренней трещины, перпендикулярной этой границе, возникают значительные нормальные напряжения, приводящие к появлению встречной краевой трещины.

1. *Кантор Б. Я., Стрельникова Е. А., Фильштинский Л. А.* Контактная задача теории упругости для плоской анизотропной среды, ослабленной криволинейным разрезом. — В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1981, вып. 16, с. 99...106.
2. *Кантор Б. Я., Стрельникова Е. А., Фильштинский Л. А.* Контактная задача теории упругости для анизотропной пластины, ослабленной криволинейным разрезом. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, **24**, № 2, с. 21...31.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев : Наук. думка, 1981. — 323 с.
4. *Кит Г. С., Кривцун М. Г., Грилицкий Н. Д.* Методы решения плоских контактных задач термоупругости для тел с криволинейными трещинами. — В кн.: Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Механика неоднородных структур». Львов, 1983, с. 102...103.
5. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. — МТТ, 1976, № 5, с. 91...97.
6. *Блох М. В., Гинц А. А., Кантор Б. Я.* Об одном методе решения контактной задачи для цилиндрических оболочек. — ПМ, 1977, № 5, с. 38...40.
7. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной теории упругости. — М. : Наука, 1973. — 303 с.

Сумский филиал
Харьковского политехнического института

Получено
05. 01. 84