ловленных остаточными напряжениями в сварных соединениях с трещиной // Там же. — № 3. — С. 5—10.
4. *Прохоренко В. М.* Метод расчета коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещин в стыковых соединениях // Там же. — № 8. — С. 38—42.
5. *Касаткин Б. С., Прохоренко В. М., Чертов И. М.* Напряжения и деформации при сварке. — Киев: Вища школа, 1987. — 246 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. — М.: Наука, 1966. — 650 с.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
8. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. — Киев: Наук. думка, 1976. — 444 с.
9. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики: — М:: Наука, 1968. — 464 с.
10. *Таблицы* неполной бета-функции. — М.: Наука, 1974. — 260 с.
11. *Справочник* по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
12. *Копельман Л. Н.* Сопротивляемость сварных узлов хрупкому разрушению. — Л.: Машиностроение, 1978. — 232 с.
13. *Злочевский А. Б., Шувалов Н. А.* Факторы, тормозящие рост усталостных трещин после перегрузок // ФХММ. — 1985. — № 2. — С. 41—45.
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. — М.: Наука, 1966. — 1108 с.
15. *Филиппов Ю. Ф.* Таблицы неопределенных интегралов от высших трансцендентных функций. — Харьков: Вища школа, 1983. — 108 с.

Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко АН УССР, Львов

Получено 24.03.87

УДК 539.3

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, В. М. ОЛЕЙНИК

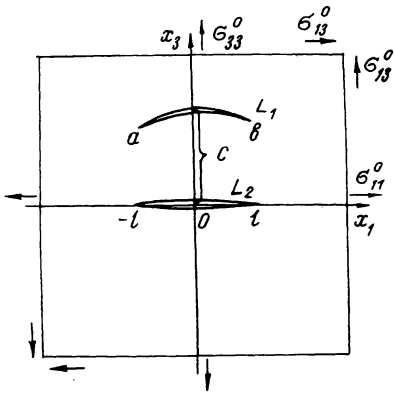
К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОВЕРХНОСТИ РАЗРУШАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ВЕРШИНЕ ТРЕЩИНЫ

Краевые задачи электроупругости для пьезокерамических пластин с трещиноподобными дефектами уже рассматривались [1, 2].

Ниже построены поверхности разрушающих напряжений для неограниченной пьезокерамической пластинки, ослабленной двумя трещинами. Приведены результаты расчетов.

Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к кристаллофизической системе координат (x_1, x_2, x_3) поляризованную вдоль оси x_3 пьезокерамическую пластинку (PZT-4, PZT-5), ослабленную двумя трещинами-разрезами (см. рисунок). На бесконечности заданы механические напряжения σ_{11}^0, σ_{33}^0, σ_{13}^0 и вектор напряженности электрического поля $E_1^0=E_3^0=0$, на берегах разрезов действует самоуравновешенная система усилий. Пусть контуры разрезов имеют непрерывную (по Гельдеру) кривизну, а действующая на берегах нагрузка также удовлетворяет условию Гельдера.

В этих условиях в окрестности разрезов возникают связанные сингулярные поля механических и электрических величин, что может привести не только к механическому, но и к электрическому разрушению в окрестности вершины (электрический пробой диэлектрика, нарушение структуры металла).



Компоненты механических и электрических величин в пластине можно выразить посредством трех аналитических функций комплексных переменных [2]. Для их определения необходимо задать механические граничные условия на берегах разрезов, а также электрические условия, выражающие непрерывность касательной компоненты вектора напря-

женности и нормальной компоненты вектора электрической индукции при переходе через разрез [3].

Используя выражения для электрических и механических величин [2], представим граничные условия на берегах разрезов в виде

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}[\Phi'_k(t_k)]^{\pm}=f_n^{\pm}(t)\quad(n=1,2),$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}\{[\Phi'_k(t_k)]^{+}-[\Phi'_k(t_k)]^{-}\}=f_n^{\pm}(t)\quad(n=3,4).\qquad(1)$$

Здесь $\alpha_{1k}=\gamma_k\mu_k a_k(\psi);\quad \alpha_{2k}=\gamma_k a_k(\psi);\quad \alpha_{3k}=\lambda_k a_k(\psi);$

$$\alpha_{4k}=\lambda_k\mu_k a_k(\psi);\quad f_1^{\pm}=\pm X_n^{\pm};\quad f_2^{\pm}=\mp Z_n^{\pm};\quad f_3^{\pm}=f_4^{\pm}=0;$$

$$a_k(\psi)=\mu_k\cos\psi-\sin\psi;$$

ψ — угол между положительной нормалью к левому (при движении от точки a к точке b) берегу разреза и осью x_1; $X_n^{\pm}$, $Z_n^{\pm}$ — компоненты вектора напряжения на берегах разрезов; параметры μ_k, γ_k, λ_k определены ранее [2].

Первые два уравнения (1) соответствуют механическим, а вторые два — электрическим краевым условиям на берегах разрезов.

Искомые аналитические функции представим как

$$\Phi'_k(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_k(t)}{t_k-z_k}\,dt_k+A_k,\qquad(2)$$

где постоянные A_k определяются из механических и электрических условий на бесконечности; $\omega_k(t)$ — неизвестные функции.

Сведение краевой задачи к интегральным уравнениям. Подставляя предельные значения функции (2) в краевые условия (1), приходим к смешанной системе интегральных и алгебраических уравнений относительно функций $\omega_k(t)$:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}^{0}\left[2A_k+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_k(t)}{t_k-t_{k_0}}\,dt_k\right]=F_n(t_0)\quad(n=1,2),$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{nk}\omega_k(t)=W_n(t)\quad(n=1,2,3,4),\quad F_n(t)=-f_n^{+}-f_n^{-},$$

$$W_n(t)=-f_n^{+}+f_n^{-}.\qquad(3)$$

Для замыкания системы (3) присоединим к ней условия однозначности перемещений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}p_{km}\int_L\omega_k(t)\,dt_k=0\quad(m=1,2),\quad p_{k1}=p_k,\quad p_{k2}=q_k.\qquad(4)$$

Величины p_k, q_k определены ранее [2].

Далее удобно ввести параметризацию контура разреза

$$t=t(\beta),\quad t_k=t_k(\beta),\quad a=t(-1),\quad b=t(1).$$

В соответствии с этим

$$\omega_k(t)=\Omega_k^0(\beta)/\sqrt{1-\beta^2};\quad \Omega_k^0(\beta)\in H[-1,\,1]\quad(-1\leqslant\beta\leqslant1).$$

Асимптотический анализ представлений (2) в окрестности вершины разреза дает:

$$\Phi'_k(z_k)=\Omega_k^0(\pm1)\sqrt{\mp t'_k(\pm1)}\,/\,2\sqrt{2}\sqrt{z_k-c_k};\qquad(5)$$

$$t'_k(\pm1)=dt_k(\beta)/d\beta\,|_{\beta=\pm1}.$$

Здесь верхний знак берется для $c_k=b_k=t(1)$, а нижний — для $c_k=a_k=t(-1)$.

Используя выражения (5), выпишем главную асимптотику механических и электрических величин в окрестности вершины трещины:

$$\sigma_{11}=S(\gamma,\ 2),\quad \sigma_{33}=S(\gamma,\ 0),\quad \sigma_{13}=-S(\gamma,\ 1),\quad E_1=S(\lambda,\ 0),$$
$$E_3=S(\lambda,\ 1), \tag{6}$$

$$S(\alpha,\ \beta)=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_k\mu_k^{\beta}\Omega_k^0(\pm 1)\,[\mp t_k'(\pm 1)]^{1/2}(z_k-c_k)^{-1/2}.$$

Поток энергии в вершину трещины определяется соотношением

$$I=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r (X_n\Delta u+Z_n\Delta w-D_n\Delta\varphi)\,d\rho, \tag{7}$$

где X_n, Z_n, D_n — компоненты векторов механического напряжения и электрической индукции на продолжении за вершину, Δu, Δw, $\Delta\varphi$ — скачки перемещений и потенциала поля на фронте трещины в окрестности вершины.

Подставляя в формулу (7) выражения входящих туда величин и используя соотношения (5), (6), получаем представление потока энергии в виде квадратичной формы в пространстве напряжений $\sigma_{11}=y_1$, $\sigma_{13}=y_2$, $\sigma_{33}=y_3$:

$$I=\pi\sum_{i,\,j=1}^{3}a_{ij}y_i\dot{y}_j,\quad a_{ij}=N(i,\ 1)\cdot M(j,\ p)-N(i,\ 0)\cdot M(j,\ q),$$

$$N(i,\alpha)=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\mu_k^{\alpha}\Omega_{ik}^0\sqrt{\pm t_k'(\pm 1)}\sqrt{a_k(\psi)},$$

$$M(j,\ \beta)=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{3}\beta_k\Omega_{jk}^0\sqrt{\mp t_k'(\pm 1)}\sqrt{a_k(\psi)}. \tag{8}$$

Здесь Ω_{ik}^0 — стандартные решения системы уравнений (3), (4), обусловливаемые соотношением $\Omega_k^0=y_1\Omega_{1k}^0+y_2\Omega_{2k}^0+y_3\Omega_{3k}^0$.

Можно показать, что квадратичная форма (8) положительно-определенная. Энергетический критерий Гриффитса $I=2\gamma$, где γ — поверхностная энергия, контролирует поверхность разрушающих напряжений в пространстве y_1, y_2, y_3.

В качестве примера рассмотрим пьезокерамическую пластинку, ослабленную параболической ($x_1=l\beta$, $x_3=C+B\beta^2$) и прямолинейной ($x_1=l\beta$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$) трещинами (см. рисунок). Стандартные решения Ω_{ik}^0 получаем из системы сингулярных и алгебраических уравнений (3), (4) методом Мультоппа. После этого вычисляем коэффициенты квадратичной формы (8).

Расчеты выполнены для прямолинейной (табл. 1) и криволинейной (табл. 2) трещин (C — расстояние между центрами трещин вдоль

Таблица 1

C	B	$\langle y_2\rangle$	$\langle y_3\rangle$
∞	0	0,325	0,295
1	0	0,384	0,355
1	—0,1	0,387	0,362
1	—0,3	0,402	0,365

Таблица 2

C	B	$\langle y_1\rangle$	$\langle y_2\rangle$	$\langle y_3\rangle$
∞	0	∞	0,325	0,295
∞	—0,1	∞	0,348	0,276
∞	—0,3	0,242	∞	0,407
1	0	∞	0,384	0,355
1	—0,1	∞	0,402	0,336
1	—0,3	0,304	∞	0,507

оси x_3, $2l$ — длина прямолинейной трещины). Относительные полуоси эллипсоида имеют вид

$$< y_1 > = (y_1 \pi l) / 2\gamma, \quad < y_2 > = (y_2 \pi l) / 2\gamma, \quad < y_3 > = (y_3 \pi l) / 2\gamma.$$

Данные расчетов иллюстрируют конфигурацию поверхности разрушающих напряжений в зависимости от взаимного сближения трещин и кривизны параболической трещины.

1. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезокерамических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // ПММ. — 1975. — **39**, № 1. — С. 149—159.
2. *Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А.* Двумерная краевая задача электроупругости для пьезокерамической среды с разрезами // Там же. — 1979. — **43**, № 1. — С. 138—143.
3. *Половинкина И. Б., Улитко А. Ф.* К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1978. — Вып. 18. — С. 10—17.

Сумский филиал
Харьковского политехнического института

Получено
22.07.86