

УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА
В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Л.А.Фильштинский, проф.; Л.В.Брацыхина, студ.

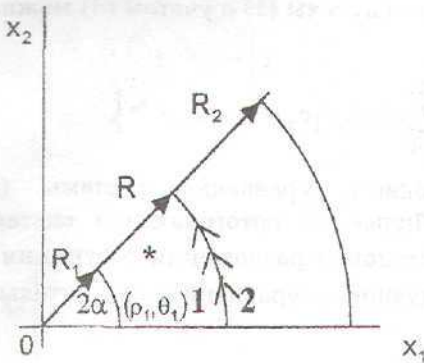


Рисунок 1 – Кусочно-однородная
секториальная область

Во многих областях современной техники широкое применение находят конструкции из композитных материалов, работающие при тепловых и электромагнитных нагрузках.

В последнее время большое развитие получили задачи теплообмена, заключающиеся в исследовании явлений теплопереноса в средах, физические характеристики которых зависят от координат области [1]. В частности, актуальными являются задачи расчета температурных полей в средах с кусочно-постоянными физическими характеристиками.

В данной работе рассматривается математическая модель составной секториальной области при наличии внутреннего сосредоточенного источника (рис.1).

1 Полная система уравнений модели имеет вид:
дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \nabla^2 U^{(1)} = \frac{P}{C^{(1)}} \delta(\rho - \rho_1) \delta(\theta - \theta_1) \frac{1}{\rho_1}; \\ \nabla^2 U^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

условия сопряжения сред:

$$\begin{aligned} U^{(1)} \Big|_{\rho=R} &= U^{(2)} \Big|_{\rho=R}, \\ C^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} &= C^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}; \end{aligned} \quad (2)$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\alpha} &= 0, \quad \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad (m = 1, 2), \\ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1} &= 0, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь верхние индексы (1) и (2) относятся к величинам, заданным в первой и второй средах соответственно.

2 Решение граничной задачи (1) – (3) построим методом разделения переменных, в соответствии с которым частные решения представляются в виде

$$\begin{aligned} U_n^{(1)}(\rho, \theta) &= \Phi_n(\theta) R_n^{(1)}(\rho), \\ U_n^{(2)}(\rho, \theta) &= \Phi_n(\theta) R_n^{(2)}(\rho), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi_n(\theta) = \sin \lambda_n \theta, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{4\alpha} (2n + 1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Общее решение однородного уравнения системы (1) с учетом (4) можно представить так:

$$U_n^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\theta) R_n^{(2)}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n \theta [c_n \rho^{\lambda_n} + d_n \rho^{-\lambda_n}].$$

Для определения решения неоднородного уравнения системы (1) разложим δ -функцию Дирака в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций $\Phi_n(\theta)$. После подстановки разложения δ -функции в исходную систему (1) приходим к следующему уравнению относительно $R_n^{(1)}(\rho)$:

$$\frac{d^2 R_n^{(1)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_n^{(1)}}{d\rho} - \frac{\lambda^2}{\rho^2} R_n^{(1)} = \frac{P \sin \lambda_n \theta_1}{C^{(1)} \alpha \rho_1} \delta(\rho - \rho_1).$$

В силу свойств функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, в окрестности особой точки $\rho = \rho_1$ имеют место соотношения [2]:

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(\rho_1 + 0) &= R_n^{(1)}(\rho_1 - 0), \\ \frac{dR_n^{(1)}(\rho_1 + 0)}{d\rho} - \frac{dR_n^{(1)}(\rho_1 - 0)}{d\rho} &= \frac{P \sin \lambda_n \theta_1}{C^{(1)} \alpha \rho_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом равенств (5), получаем решение:

$$\begin{aligned} U_n^{(1)} \Big|_{\rho < \rho_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\theta) R_n^{(1)}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n \theta [a_n \rho^{\lambda_n} + b_n \rho^{-\lambda_n}], \\ U_n^{(1)} \Big|_{\rho > \rho_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\theta) R_n^{(1)}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n \theta [a_n \rho^{\lambda_n} + b_n \rho^{-\lambda_n} + \\ &+ \frac{P \sin \lambda_n \theta_1}{2C^{(1)} \alpha \lambda_n} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-\lambda_n} \right]]. \end{aligned}$$

После удовлетворения граничных условий (3) и условий сопряжения сред (2) находим окончательно:

$$U_n^{(1)} \Big|_{\rho < \rho_1} = -A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \theta_1 \sin \lambda_n \theta}{\lambda_n \Delta_n} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R_1^2 \rho_1}{R_2^2 \rho} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R_1^2}{\rho_1 \rho} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{\rho_1 \rho}{R_2^2} \right)^{\lambda_n} \right] - \right. \\ \left. - k \cdot \left[\left(\frac{R_1^2 \rho_1}{R^2 \rho} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R^2 \rho}{R_2^2 \rho_1} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{\rho_1 \rho}{R^2} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R_1^2 R^2}{R_2^2 \rho_1 \rho} \right)^{\lambda_n} \right] \right\}, \quad (6)$$

$$U_n^{(2)} = -\frac{2A}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \theta_1 \sin \lambda_n \theta}{\lambda_n \Delta_n} \cdot \left\{ \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R_1^2 \rho}{R_2^2 \rho_1} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{R_1^2}{\rho_1 \rho} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{\rho_1 \rho}{R_2^2} \right)^{\lambda_n} \right\},$$

$$\Delta_n = \left[1 - \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^{\lambda_n} \right] - k \cdot \left[\left(\frac{R^2}{R_2^2} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{R_1^2}{R^2} \right)^{\lambda_n} \right],$$

$$\nu = \frac{C^{(2)}}{C^{(1)}}, \quad k = \frac{\nu - 1}{\nu + 1}, \quad A = \frac{P}{2C^{(1)}\alpha}.$$

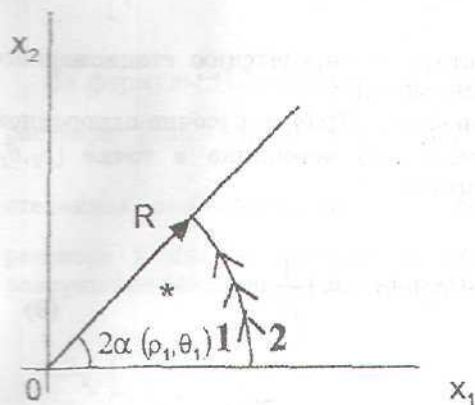


Рисунок 2 - Неограниченный кусочно-однородный клин

Выражение для $U^{(1)}$ при $\rho > \rho_1$ получается из (6) заменой ρ на ρ_1 . Решение (6) назовем функцией Грина смешанной задачи теории потенциала для составной секториальной области.

Более подробно рассмотрим вырожденный случай $R_1 \rightarrow 0$ и $R_2 \rightarrow \infty$ (рис.2).

Здесь функция Грина (6) принимает следующий вид:

$$U^{(1)} = \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n (\theta_1 - \theta) - \cos \lambda_n (\theta_1 + \theta)}{\lambda_n} \cdot \left[k \left(\frac{\rho \rho_1}{R^2} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\lambda_n} \right],$$

$$U^{(2)} = -\frac{A}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n (\theta_1 - \theta) - \cos \lambda_n (\theta_1 + \theta)}{\lambda_n} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^{\lambda_n}. \quad (7)$$

Фигурирующие здесь ряды плохо сходятся в окрестности точки (ρ_1, θ_1) , а производные от них вообще расходятся. Поэтому выражения (7) неудобны для анализа. Для устранения этого явления применим стандартную процедуру суммирования рядов. В результате получим:

$$U^{(m)} = \operatorname{Re} \left\{ f^{(m)}(z) \right\}, \quad (m=1,2), \quad z = \rho e^{i\theta}, \quad z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1},$$

$$f^{(1)}(z) = \frac{P}{2\pi C^{(1)}} \ln \left[\frac{\left(1 + (z \cdot \bar{z}_1 R^{-2})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right) \cdot \left(1 - (z \cdot z_1 R^{-2})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right)}{\left(1 - (z \cdot \bar{z}_1 R^{-2})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right) \cdot \left(1 + (z \cdot z_1 R^{-2})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right)} \right]^k \times \left[\frac{\left(1 - (z \cdot z_1^{-1})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right) \cdot \left(1 + (z \cdot \bar{z}_1^{-1})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right)}{\left(1 + (z \cdot z_1^{-1})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right) \cdot \left(1 - (z \cdot \bar{z}_1^{-1})^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right)} \right], \quad (8)$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{P}{(1+\nu)\pi C^{(1)}} \ln \left[\frac{\left(1 - (z^{-1} \cdot z_1)^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right) \cdot \left(1 + (z^{-1} \cdot \bar{z}_1)^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right)}{\left(1 + (z^{-1} \cdot z_1)^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right) \cdot \left(1 - (z^{-1} \cdot \bar{z}_1)^{\frac{\pi}{4\alpha}} \right)} \right].$$

3 Приложим полученные результаты к определению стационарного теплового поля в описанной выше композиции.

Стационарное распределение температур $T(\rho, \theta)$ в кусочно-однородном бесконечном клине при наличии теплового источника в точке (ρ_1, θ_1) описывается следующими соотношениями: дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \nabla^2 T^{(1)} = \frac{P}{\lambda_1} \delta(\rho - \rho_1) \delta(\theta - \theta_1) \frac{1}{\rho_1}, \\ \nabla^2 T^{(2)} = 0; \end{cases} \quad (9)$$

условия сопряжения сред:

$$\begin{aligned} T^{(1)} \Big|_{\rho=R} &= T^{(2)} \Big|_{\rho=R}, \\ \lambda_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} &= \lambda_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}; \end{aligned} \quad (10)$$

граничные условия:

$$\frac{\partial T^{(m)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\alpha} = 0, T^{(m)} \Big|_{\theta=0} = 0, (m=1,2). \quad (11)$$

Здесь $T(\rho, \theta)$ - температура в клине; λ_1, λ_2 - коэффициенты теплопроводности соответственно первой и второй сред; P - плотность теплового источника.

Учитывая аналогию между задачами (1) - (3) и (9) - (11), получаем, что $T^{(m)} = \text{Re}\{f^{(m)}(z)\}$, $m=1,2$, где $f^{(m)}(z)$ описывается формулами (8). При этом под $C^{(1)}, C^{(2)}$ следует понимать λ_1 и λ_2 соответственно.

Вектор плотности тепловых потоков в клине представим в виде [3]

$$q = q_1 - iq_2 = -\lambda f'(z), \quad (12)$$

где q_1 и q_2 - плотности тепловых потоков вдоль осей x_1 и x_2 .

В силу (12) тепловые потоки в первой и второй средах можно представить в виде:

$$q^{(1)}(z) = -\frac{P}{4\alpha \cdot z} \left\{ k \cdot \left[\frac{\left(z \cdot \bar{z}_1 R^{-2} \right)^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \left(z \cdot \bar{z}_1 R^{-2} \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}} - \frac{\left(z \cdot z_1 R^{-2} \right)^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \left(z \cdot z_1 R^{-2} \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}} \right] + \left[\frac{\left(z \cdot \bar{z}_1^{-1} \right)^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \left(z \cdot \bar{z}_1^{-1} \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}} - \frac{\left(z \cdot z_1^{-1} \right)^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \left(z \cdot z_1^{-1} \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$q^{(2)}(z) = -\frac{P\nu}{2(1+\nu)\alpha \cdot z} \left\{ \frac{\left(z^{-1} \cdot \bar{z}_1 \right)^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \left(z^{-1} \cdot \bar{z}_1 \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}} - \frac{\left(z^{-1} \cdot z_1 \right)^{\frac{\pi}{4\alpha}}}{1 - \left(z^{-1} \cdot z_1 \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}} \right\}, \quad \nu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Из формулы (13) следует, что в окрестности угловой точки клина при растворе угла клина $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi$ в тепловых потоках наблюдается степенная особенность вида ρ^γ , где $0 \leq \gamma \leq \frac{3}{4}$. При указанных углах раствора клина в окрестности его вершины возможно механическое разрушение (оплавление материала).

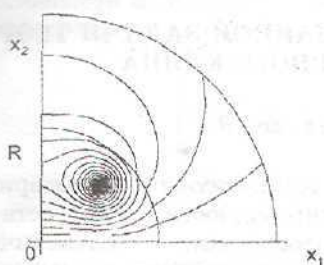


Рисунок 3 - Изотермы для $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ и

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

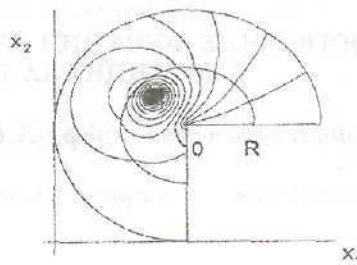


Рисунок 4 - Изотермы для $2\alpha = \frac{3\pi}{2}$ и

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$$

На рисунках 3 и 4 представлены изотермические линии относительных температур $\langle T(\rho, \theta) \rangle = \frac{\lambda_1}{P} T(\rho, \theta)$ для различных углов раствора клина. При этом разность относительных температур между уровнями $\Delta \langle T \rangle = 0,03$, отношение коэффициентов теплопроводности $\nu = 3$, источник находится в точке $\rho_1 = 0,7R$.

Из приведенных результатов следует, что вблизи нижней грани клина, на которой поддерживается постоянная температура, изотермы параллельны грани и наибольший градиент температуры наблюдается в направлении от источника по нормали к этой грани. Тепловой поток в направлении термоизолированной верхней грани клина отсутствует, что соответствует нормальному направлению линий уровня по отношению к этой грани. В среде с большим коэффициентом теплопроводности условия для передачи тепла лучше и на рисунках в такой среде наблюдаются меньшие градиенты температуры, чем в среде с меньшим коэффициентом теплопроводности (этим объясняется и преломление линий уровня на границе раздела двух сред). На рисунках 3 и 4 также хорошо просматриваются особенности в тепловом потоке при растворах клина, больших чем $\frac{\pi}{2}$.

Результаты могут иметь применение в практике проектирования композитных конструкций.

SUMMARY

This article describes one method of building of Green function of mixed boundary problem for piece-homogeneous sector area. The Green function was used to the problem of stationary heat conductivity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. - К.: Наукова думка, 1977.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. - М.: Наука, 1974.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.

Поступила в редколлегию 16 октября 1998 г.

УДК 517.2

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ СОСТАВНОГО КЛИНА

Л.А.Фильштинский, проф.; А.Б.Голубовская, студ.

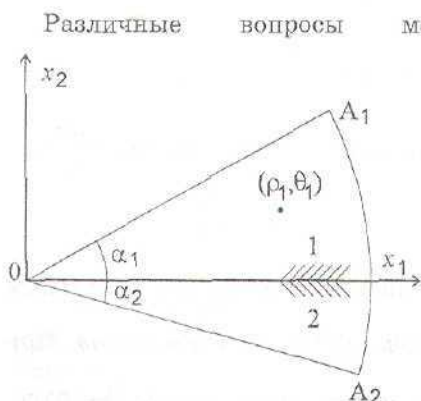


Рисунок 1

Различные вопросы механики композитных материалов, теплопроводности, электростатики, магнитостатики, математической биологии приводят к граничным задачам эллиптического типа для кусочно-однородных сред. В тех случаях, когда граница области имеет изломы (угловые точки), для корректного определения физических полей необходимо иметь информацию об особенностях полей в угловой точке. В данной статье рассматривается модельная задача теории потенциала для составного

клина. Строится функция Грина, соответствующая ситуации, когда в одной из фаз действует сосредоточенный источник.