

$$U^{(r)} = \varphi^{(r)}, \quad C^{(r)} = \varepsilon^{(r)} \quad (r = 1, 2), \quad (21)$$

где  $\varepsilon^{(r)}$  - диэлектрическая проницаемость  $r$ -й среды.

Таблица 1

$\lambda$	0	1	5	10	100	1000
$\chi(1)$	$\pi/2$	$\pi/3$	$5\pi/18$	$4\pi/15$	$\pi/4$	$\pi/4$
$\gamma$	0	0.33	0.44	0.47	0.5	0.5

По полученным соотношениям были проведены расчеты, характеризующие порядок степенной особенности  $\gamma = 1 - \frac{\chi(1)}{\alpha_1}$  в вершине составного клина при  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = \pi$  (табл.1). Для случаев  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi/3$ ,  $\rho_1 = 0.5$ ,  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\lambda = 3$  и  $\lambda = 0.01$  построены изотермические линии (рис.2 и рис.3 соответственно).

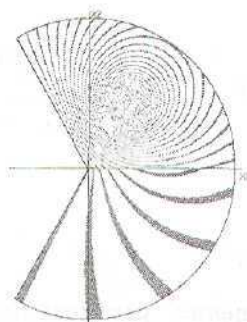


Рисунок 2

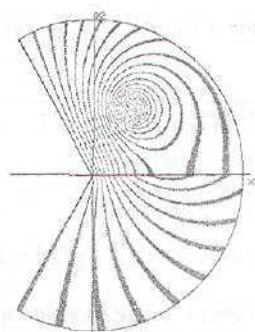


Рисунок 3

## SUMMARY

*Different questions mechanics of composite materials, heat conductivity, electrostatics, magnetostatics, mathematical biology result in boundary problems of elliptic type for piecewise-homogeneous mediums. When the border of area has angular points for correct determination of physical fields it is necessary to have the information about fields singularities in an angular point. It is considered a problem of the potential theory for compound wedge. Green's function is built for situation when the concentrated source works in one of phases.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсенин В.Я., Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. - М.: Наука, 1966.

Поступила в редколлегию 16 декабря 1998 г.

УДК 537.624

## ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПАРАМАГНЕТИК-ФЕРРОМАГНЕТИК В СИСТЕМЕ ОДНОДОМЕННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ

С.И.Денисов, проф.; В.Ф.Нефедченко, асп.

Хорошо известно [1], что причиной появления дальнего магнитного порядка в большинстве известных в настоящее время магнетиков

является обменное взаимодействие. Вместе с тем еще в 1946 году Латтинжер и Тисса [2] теоретически показали, что магнитодипольное взаимодействие также может выполнять эту роль. Поскольку последнее взаимодействие, как правило, намного слабее обменного, температура фазового перехода в упорядоченное состояние системы атомных магнитных моментов, взаимодействующих магнитодипольным образом, оказывается очень малой и составляет доли градуса Кельвина. Это обстоятельство, а также отсутствие веществ, в которых иерархический ряд магнитных взаимодействий начинается с магнитодипольного, долгое время не позволяли провести экспериментальную проверку этой гипотезы. И только недавно соответствующая проверка, подтвердившая вывод Латтинжера и Тиссы, была проведена в [3] на кристаллах солей редких земель, имеющих химическую формулу  $Cs_2NaR(NO_2)_6$ .

Класс систем, в которых магнитодипольное взаимодействие структурных элементов играет основную роль, включает также системы однодоменных ферромагнитных частиц, случайно распределенных в немагнитной твердой матрице. Исследованию таких систем, чрезвычайно важных с практической точки зрения, посвящено много литературы. Однако изучение кооперативных эффектов в них начато только в последние годы. Основной результат, полученный как численными [4], так и аналитическими [5,6] методами, и подтверждаемый как косвенными [7,8], так и прямыми [9,10] экспериментальными данными, состоит в том, что так же, как и в системах атомных магнитных моментов, в системах однодоменных ферромагнитных частиц может происходить фазовый переход в ферромагнитное состояние. Хотя некоторые особенности этого перехода изучены в [4-6], остались нерешенными многие важные вопросы. Среди них, в частности, принципиальный вопрос о влиянии на фазовый переход анизотропии распределения частиц в пространстве. Дело в том, что аналитические методы, развитые в [5,6], предсказывают существование фазового перехода и для изотропного распределения частиц. Однако этот вывод противоречит одному из результатов [2], согласно которому в системе магнитных диполей, расположенных в узлах простой кубической решетки, фазовый переход в ферромагнитное состояние не происходит. Ранее не рассматривался также вопрос о влиянии конечности размера ферромагнитных частиц на величину среднего магнитного поля, действующего на какую-либо частицу со стороны остальных. Между тем его решение необходимо, в частности, для построения количественной теории кооперативных эффектов в системах плотноупакованных частиц. Решению отмеченных выше вопросов как раз и посвящена данная работа.

Рассмотрим ансамбль сферических однодоменных ферромагнитных частиц радиуса  $r$ , случайно распределенных в немагнитной твердой матрице. Распределение частиц в матрице будем моделировать, предполагая, что их центры с вероятностью  $p$  занимают узлы простой тетрагональной решетки, имеющей периоды  $d_1 (\geq 2r)$  (вдоль осей  $x$  и  $y$ ) и  $d_2 (\geq 2r)$  (вдоль оси  $z$  - оси четвертого порядка). Будем также предполагать, что частицы одноосные, их легкие оси намагничивания перпендикулярны плоскости  $xy$ , взаимодействие частиц магнитодипольное, а динамика магнитного момента  $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$  произвольно выбранной частицы описывается стохастическим уравнением Ландау-Лифшица

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{m} \times (\mathbf{H} + \mathbf{h}) - (\lambda\gamma/m)\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{H} \quad (\mathbf{m}(0) = \mathbf{e}_z m). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma (>0)$  - гиромагнитное отношение;  $\lambda$  - параметр диссипации;  $m=|\mathbf{m}|$ ;  $\mathbf{e}_z$  - единичный вектор вдоль оси  $z$ ;  $\mathbf{H} = -\partial W/\partial \mathbf{m}$  - эффективное



магнитное поле;  $W$  - магнитная энергия частицы;  $h$  - тепловое магнитное поле, определяемое соотношениями:

$$\overline{h_\alpha(t)} = 0, \quad \overline{h_\alpha(t)h_\beta(t+\tau)} = (2\lambda kT/\gamma m)\delta_{\alpha\beta}\delta(\tau), \quad (2)$$

где  $T$  - абсолютная температура;  $\delta_{\alpha\beta}$  - символ Кронекера;  $\alpha, \beta = x, y, z$   $\delta(\tau)$  -  $\delta$ -функция, а черта обозначает усреднение по реализациям  $h$ .

Согласно выбранной модели в приближении среднего поля имеем

$$W = -(H_\alpha/2m)m_z^2 - H(t)m_z, \quad (3)$$

где  $H_\alpha$  - поле магнитной анизотропии;  $H(t)$  - среднее магнитное поле, действующее на выделенную частицу со стороны остальных. В (3) мы учли, что в соответствии с симметричными соображениями в рассматриваемом случае среднее поле имеет только  $z$ -компоненту. Поместив начало координат в узел решетки, занимаемый выделенной частицей, и пронумеровав остальные индексом  $i$ , выражение для  $H(t)$  представим в виде

$$H(t) = \left\langle \sum_i \frac{1}{V_0^2} \int \frac{3(r_{iz} + \rho_z - \tilde{\rho}_{iz})^2 - |\mathbf{r}_i + \rho - \tilde{\rho}_i|^2}{|\mathbf{r}_i + \rho - \tilde{\rho}_i|^5} d\rho d\tilde{\rho}_i \overline{m_{iz}(t)} \right\rangle \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$  - радиус-вектор  $i$ -й частицы,  $V_0$  - объем частицы, интегрирование ведется по объему выделенной и  $i$ -й частицы, а угловые скобки обозначают усреднение по допустимым размещениям частиц (каждый узел решетки может занимать только одна частица). Процедура вычисления интегралов (4) является достаточно громоздкой, однако окончательный результат имеет такой же вид, как и в случае точечных диполей, так что

$$H(t) = \left\langle \sum_i \frac{3r_{iz}^2 - |\mathbf{r}_i|^2}{|\mathbf{r}_i|^5} m_{iz}(t) \right\rangle. \quad (5)$$

Проведем в (5) усреднение по допустимым размещениям частиц. Для этого, выделив в матрице область объемом  $V$ , содержащую  $S$  узлов, из которых  $N$  ( $\leq S$ ) заняты частицами, найдем сначала вероятность каждого распределения. Поскольку общее число  $R$  размещений  $N$  различных частиц по  $S$  узлам дается формулой  $R = S!/(S-N)!$ , искомая вероятность равна  $1/R$ . Следовательно, пронумеровав размещения частиц индексом  $\sigma$  и обозначив радиусы-векторы частиц в этих размещениях как  $\mathbf{r}_\sigma$ , выражение (5) можно переписать в виде

$$H(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_\sigma \sum_{\mathbf{r}_\sigma} \frac{3r_{\sigma z}^2 - |\mathbf{r}_\sigma|^2}{|\mathbf{r}_\sigma|^5} m_{\mathbf{r}_\sigma z}(t). \quad (6)$$

Перейдем в (6) от суммирования по  $\sigma$  и  $\mathbf{r}_\sigma$  к суммированию по всем радиусам-векторам  $\mathbf{r} = d_1(n_1\mathbf{e}_x + n_2\mathbf{e}_y) + d_2n_3\mathbf{e}_z$  ( $n_1, n_2, n_3$  - целые числа, не равные нулю одновременно) узлов решетки. Нетрудно видеть, что каждый узел занят частицами в  $R_1 = (N/S)R$ , размещениях, поэтому, обозначив  $z$ -компоненты магнитных моментов частиц в узле  $\mathbf{r}$  как  $m_{\mathbf{r}}^{(l)}(t)$ , где индекс  $l$  пробегает значения от 1 до  $R_1$ , получаем

$$H(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{R_1}{R} \sum_r \frac{3r_z^2 - |r|^2}{|r|^5} \left( \frac{1}{R_1} \sum_{l=1}^{R_1} \overline{m_{r2}^{(l)}(t)} \right). \quad (7)$$

Наконец, отождествив в (7) выражение в скобках с  $\overline{m_z(t)}$ , учтя соотношение  $\lim_{V \rightarrow \infty} R_1/R = p$  и определив функцию

$$S(\xi) = \frac{1}{8} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{2\xi^2 n_3^2 - n_1^2 - n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2 + \xi^2 n_3^2)^{5/2}} \quad (8)$$

( $\xi = d_2/d_1$ ), для среднего магнитного поля получаем следующее выражение:

$$H(t) = 8n\xi S(\xi) \overline{m_z(t)}, \quad (9)$$

где  $n = p/d_1^2 d_2$  — концентрация частиц.

Характерной особенностью функции  $S(\xi)$ , обуславливающей особенности магнитных свойств трехмерного ансамбля однодоменных частиц, анизотропно распределенных в пространстве, является непостоянство ее знака:  $S(\xi) > 0$  при  $\xi < 1$  и  $S(\xi) < 0$  при  $\xi > 1$  (см. рис. 1). Согласно (9) это означает, что при  $\xi < 1$  направления средних магнитных моментов частиц и среднего магнитного поля совпадают, а при  $\xi > 1$  имеют противоположные направления.

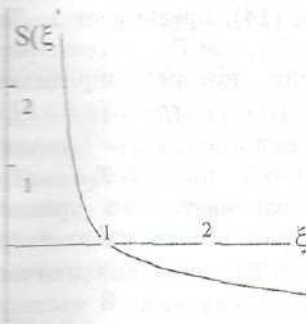


Рисунок 1

Следовательно, ферромагнитное упорядочение в системах однодоменных частиц имеет место лишь при  $\xi < 1$ . В частности, в полном соответствии с предсказанием Латтинжера и Тиссы в случае  $\xi=1$ , отвечающем простой кубической решетке, ферромагнитное

упорядочение отсутствует. Отметим также, что ферромагнитный порядок отсутствует и в предельном случае двумерного распределения частиц, когда  $\xi = \infty$ , а  $S(\infty) \approx -1,129$ .

Согласно (2),(3) и (9) стохастическому уравнению (1), интерпретируемому по Стратоновичу [11], отвечает уравнение Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{t, \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[ \alpha (\sin 2\theta + 2b(t) \sin \theta) - \cot \theta \right] P + \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\} \quad (10)$$

( $t, = 2/\lambda\gamma H_a$ ,  $\alpha = H_a m/2kT$ ,  $b(t) = H(t)/H_a$ ), для плотности ( $P=P(\theta, t)$ ) вероятности того, что вектор  $m$  в момент времени  $t$  имеет полярный угол  $\theta$ . Полагая, что на границах интервала  $(0, \pi)$  изменения угла  $\theta$  поток вероятности отсутствует, находим стационарное решение уравнения (10):

$$P_s(\theta) = C^{-1} (a, 2ab) \sin \theta e^{a(\cos^2 \theta + 2b \cos \theta)} \quad (11)$$

где

$$C(a, 2ab) = \int_{-1}^1 e^{a(x^2 + 2bx)} dx \quad (12)$$



( $b=b(\infty)$ ). Определим параметр порядка рассматриваемой системы однодоменных частиц как  $\mu = m_z(\infty)/m$ . Тогда, воспользовавшись соотношением

$$\overline{m_z(\infty)} = m \int_0^\pi \cos \theta P_s(\theta) d\theta \quad (13)$$

и выражениями (11) и (12), для  $\mu$  получаем уравнение

$$\mu = \frac{1}{2a} \left[ \frac{2e^a}{C(a, 3T_0 \mu/T)} \sinh\left(\frac{3T_0}{T} \mu\right) - \frac{3T_0}{T} \mu \right], \quad (14)$$

где  $T_0 = 8\pi m^2 \xi S(\xi)/3k$ .

Анализ уравнения (14) показывает, что в соответствии с изложенными выше физическими соображениями при  $\xi \geq 1$  (когда  $T_0 \leq 0$ ) оно имеет единственное решение  $\mu=0$  при любых температурах, т.е. дальний порядок в этом случае не возникает. Ненулевое же решение может существовать лишь при  $\xi < 1$ . Как и в случае уравнения Ланжевена,  $\mu = \coth(3T_0 \mu/T) - T/3T_0 \mu$ , к которому сводится уравнение (14) при  $H_a \rightarrow 0$ , оно существует, если при  $\mu \rightarrow 0$  тангенс угла наклона касательной к графику функции, определяемой правой частью (14), превышает 1. Легко проверить, что это условие выполняется при  $T < T_{cr}$ , где  $T_{cr}$  – температура фазового перехода парамагнетик–ферромагнетик, которая определяется как решение уравнения  $T = 3T_{of}(a)$  ( $f(a) = [2e^{ax} p / C(a, 0) - 1] / 2a$ ) относительно  $T$ . Отметим, что  $f(a)$ ,  $m$  и, следовательно,  $T_{of}(a)$  являются убывающими функциями  $T$ , причем  $T_{of}(a) = 0$  при  $T \geq T_C$  ( $T_C$  – температура Кюри материала частиц). Это означает, что уравнение  $T = 3T_{of}(a)$  имеет единственное решение, которое всегда удовлетворяет условию  $T_{cr} < T_C$ . Поскольку  $m = m(T)$  и  $a = a(T)$ , его аналитическое решение возможно лишь в некоторых предельных случаях. В частности, если  $m(T_{cr}) \approx m(0)$  (это условие выполняется при значениях  $T_{cr}$ , не слишком близких к  $T_C$ ), тогда, воспользовавшись разложениями  $f(a) = 1/3 + 4a/45$  ( $a \ll 1$ ) и  $f(a) = 1 - 1/a$  ( $a \gg 1$ ), находим

$$T_{cr} = \begin{cases} T_0(1 + 4a(T_0)/15), & a(T_0) \ll 1, \\ 3T_0(1 - 1/a(3T_0)), & a(3T_0) \gg 1. \end{cases} \quad (15)$$

С увеличением радиуса частиц температура фазового перехода  $T_{cr}$  быстро приближается к их температуре Кюри  $T_C$ . Так, например, для системы однодоменных частиц  $Co$ , которая характеризуется параметрами  $T_C = 1400K$ ,  $M_s = 1400G$  ( $M_s$  – намагниченность насыщения  $Co$ ),  $H_a = 64000e$ ,  $p = 1$ ,  $\xi = 0.5$  и  $d_2 = 3r$ , на основании нижней формулы из (15) (ее использование оправданно, т.к. в рассматриваемом случае  $a(3T_0) \approx 5$ ) находим

$T_{cr} \approx 2.18 \times 10^{-2} r^3 K$  ( $[r] = \text{Å}$ ). Отсюда следует, что  $T_{cr}$  может заметно отличаться

от  $T_C$  только при  $r < 40 \text{ Å}$ ; для частиц большего радиуса  $T_{cr} \approx T_C$ . В качестве иллюстрации на рис. 2 показаны

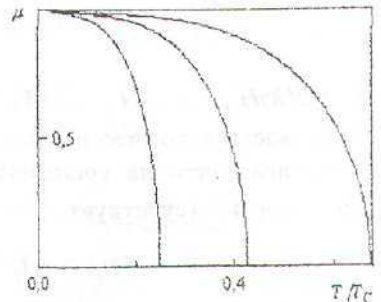


Рисунок 2

показаны температурные зависимости параметра порядка для данной системы однодоменных частиц  $Co$  (при  $T=0$  спонтанная намагниченность этой системы равна  $nm(0) \approx 54G$ ).

В окрестности точки  $T = T_{cr}$  ряд термодинамических параметров системы однодоменных частиц имеет особенности поведения, которые в соответствии с использованным приближением являются характерными для теории среднего поля. В частности, магнитная восприимчивость  $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \partial M / \partial H$  ( $H$  – постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$ ) при  $m(T_{cr}) \approx m(0)$  и  $a(3T_0) \gg 1$  дается выражениями

$$\chi = \begin{cases} 1 / 16\xi S(\xi)(1 - T/T_{cr}), & T < T_{cr}, \\ 1 / 8\xi S(\xi)(T/T_{cr} - 1), & T > T_{cr}, \end{cases} \quad (16)$$

а намагниченность  $M = nm\mu$  имеет корневую асимптотику  $M \sim (T_{cr} - T)^{1/2}$ .

В заключение отметим, что физической причиной, обуславливающей существование (при  $\xi < 1$ ) или отсутствие (при  $\xi \geq 1$ ) ферромагнитного упорядочения в системе однодоменных частиц, является конкуренция взаимодействий магнитодипольной природы, стремящихся ориентировать магнитный момент любой частицы соответственно вдоль и против намагниченности. В самом деле, все частицы, окружающие произвольно выбранную, можно условно разделить на две группы в соответствии с тем, выполняется ли для них условие  $3r_{iz}^2 - |r_i|^2 > 0$  или  $3r_{iz}^2 - |r_i|^2 \leq 0$ .

Согласно (5) и (9) частицы первой группы создают в месте расположения выбранной частицы среднее дипольное магнитное поле, параллельное намагниченности, а частицы второй группы – антипараллельное ей. Очевидно, что ферромагнитному упорядочению отвечает случай, когда вклад в суммарное дипольное поле частиц первой группы превышает вклад частиц второй группы, что имеет место при  $\xi < 1$ .

## SUMMARY

*The peculiarities of magnetic ordering in systems of single-domain particles are investigated. The equation for the system order parameter is obtained and numerically solved.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М.: Наука, 1971. – 1032 с.
2. Luttinger J.M., Tisza L. //Phys. Rev. - 1946. - V.70. - P.954.
3. Roser M.R., Corruccini L.R. //Phys. Rev. Lett. - 1990. - V.65. - P.1064.
4. Bouchaud J.P., Zérah P.G. //Phys. Rev. B. - 1993. - V.47. - P.9095.
5. Zhang H., Widom M. //Phys. Rev. B. - 1995. - V.51. - P.8951.
6. Zaiuska-Kotur M.A. //Phys. Rev. B. - 1996. - V.54. - P.1064.
7. Abarra E.N., Suzuki T. //IEEE Trans. Mag. - 1997. - V.33. - P.2995.
8. Abarra E.N., Glijer P., Kisker H., Okamoto I., Suzuki T. //J. Magn. Mater. - 1997. - V.175. - P.148.
9. Такзей Г.А., Гунько Л.П., Сыч И.И., Троценков Ю.Н., Черепов С.В., Миребо И. //Письма в ЖЭТФ. - 1996. - Т.63. - С.959.
10. Del Bianco L., Ballesteros C., Rojo J.M., Hernando A. //Phys. Rev. Lett. - 1998. - V.81. - P.4500.
11. Stratonovich R.L. //SIAM J. Control. - 1966. - V.4. - P.362.

Поступила в редколлегию 23 ноября 1998 г.