

**Шифр: «ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ»**

## **НАУКОВА РОБОТА**

**На тему: «Аналіз стратегії розвитку підприємства за допомогою  
виробничої функції Кобба-Дугласа»**

## Зміст

<b>Вступ.....</b>	<b>3</b>
<b>I. Стратегічний аналіз на підприємстві.....</b>	<b>4</b>
1.1. Суть, зміст та завдання стратегічного аналізу. Сфера його застосування.....	4
1.2. Методи стратегічного аналізу середовища підприємства.....	8
<b>II. Виробнича функція Кобба-Дугласа.....</b>	<b>16</b>
2.1. Сутність та призначення функції Кобба-Дугласа. Напрямки використання показників динаміки функції.....	16
2.2. Практика застосування виробничої функції Кобба-Дугласа...	24
<b>Висновки.....</b>	<b>29</b>
<b>Список використаної літератури.....</b>	<b>30</b>
Додаток А	
Додаток Б	

## Вступ

Виробнича функція - це регресивна модель, що показує зв'язок між кількістю виробленої продукції і кількістю використовуваних ресурсів.

Оцінки параметрів виробничих функцій розраховують на основі статистичної інформації. Ця інформація є результатами одноразового спостереження за безліччю однорідних об'єктів або результати спостереження за одним і тим же об'єктом в різні періоди часу.

Статечні виробничі функції були запропоновані в двадцятих роках нашого сторіччя К. Коббом і П. Дугласом для опису зв'язку між об'ємом суспільного продукту і двома найважливішими ресурсами - трудовими ресурсами і основними виробничими фондами. В даний час статечні виробничі функції використовуються для моделювання широкого класу економічних систем.

Функція, запропонована американцями Коббом і Дугласом, досліджує залежність величини створеного суспільного продукту від двох найважливіших чинників: сукупних витрат живої праці (у матеріальному виробництві) і сумарного об'єму вживаних виробничих фондів.

# **I. Стратегічний аналіз на підприємстві**

## **1.1. Суть, зміст та завдання стратегічного аналізу. Сфера його застосування**

Суть стратегічного аналізу полягає у тому, що він використовується заради вибору конкретної стратегії з багатьох альтернатив і формування всієї системи стратегій. При здійсненні стратегічного аналізу визначається вплив зовнішніх і внутрішніх факторів на критерії конкретних стратегій. Оскільки у системі стратегій окремі стратегії взаємопов'язані, то один і той же критерій може належати різним стратегіям.

При формуванні сукупності критеріїв слід обмежуватися невеликою кількістю основних критеріїв, щоб стратегічний аналіз не був громіздким і перевага стратегії була очевидною. Таким чином, стратегічний аналіз допомагає обрати напрям, у якому підприємство буде розвиватися. Без стратегії у підприємства немає обґрунтованого плану діяльності і єдиної програми досягнення бажаних результатів.

Стратегія підприємства складається з таких взаємопов'язаних завдань:

1. Визначення сфери діяльності підприємства і формування стратегічних напрямів.
2. Постановка стратегічних цілей і завдань для їх досягнення.
3. Формування стратегії для досягнення намічених цілей і результатів діяльності виробництва.
4. Реалізація стратегічного плану.
5. Оцінка результатів діяльності. У разі необхідності зміна стратегічного плану або методів його реалізації.

Стратегічний аналіз макросередовища дає змогу менеджеру визначити сферу діяльності підприємства, а також види продукції (послуг), які воно реалізовуватиме своїм клієнтам, тобто сформулювати перше стратегічне завдання.

Друге завдання — визначення цілей. Цілі класифікуються на короткострокові і довгострокові. Перші передбачають швидке одержання потрібних результатів, другі — визначають дії, необхідні сьогодні заради бажаного результату завтра. Якщо передбачається вибір між досягненням довгострокових і короткострокових цілей, перевагу віддають довгостроковим. Коли загальна мета підприємства розбита на кілька конкретних завдань для кожного підрозділу підприємства, формується загальна зацікавленість у результатах роботи. В ідеалі підприємство повинно являти собою єдину команду, де кожний структурний підрозділ робить все можливе для досягнення потрібних результатів у своїй сфері, тим самим допомагаючи підприємству вирішувати завдання, що стоять перед ним.

У практичній діяльності розрізняють фінансові та стратегічні цілі. Фінансові цілі обов'язкові, тому що брак фінансових ресурсів може залишити підприємство без коштів, необхідних йому для виконання стратегічних програм. Стратегічні цілі спрямовані на зміцнення конкурентних позицій підприємства на ринку і довгостроковий розвиток бізнесу.

Стратегічний аналіз є інструментом вирішення третього стратегічного завдання, що дає можливість керівництву підприємства сформулювати стратегію для досягнення намічених цілей. Цілі — це результати, що їх передбачає отримати підприємство, а стратегія вказує шляхи їх досягнення. Дійсно, стратегія — це інструмент менеджера для виконання відповідних завдань як стратегічного, так і фінансового напрямку. Щоб визначити стратегію, необхідно вивчити, проаналізувати внутрішній стан підприємства і зовнішні чинники. Тільки чітка оцінка становища підприємства на ринку, з урахуванням особливостей ринку, допоможе визначити стратегію, яка сприяла б досягненню намічених цілей і фінансових результатів.

Стратегія підприємства, як правило, складається з:

- продуманих цілеспрямованих дій;

- реакції на передбачуваний розвиток подій та посилену конкурентну боротьбу.

Зовнішнє середовище підприємства швидко змінюється. Це пов'язано з відкриттям нових технологій, розробкою і успішним виведенням конкурентом на ринок нового товару, новою державною регламентацією та іншими чинниками. Для підприємства завжди залишається відповідний ступінь непевності в майбутньому, і менеджери не можуть передбачити всі стратегічні дії заздалегідь і прямувати в цьому передбаченому напрямі, не вносячи зміни.

Таким чином, стратегія підприємства складається із запланованих дій і поправок, якщо в них є потреба. Формування стратегії включає в себе розробку плану дій та їх адаптацію до нової ринкової ситуації. Поточна стратегія розробляється менеджером підприємства з урахуванням подій, що відбуваються як усередині, так і за межами підприємства.

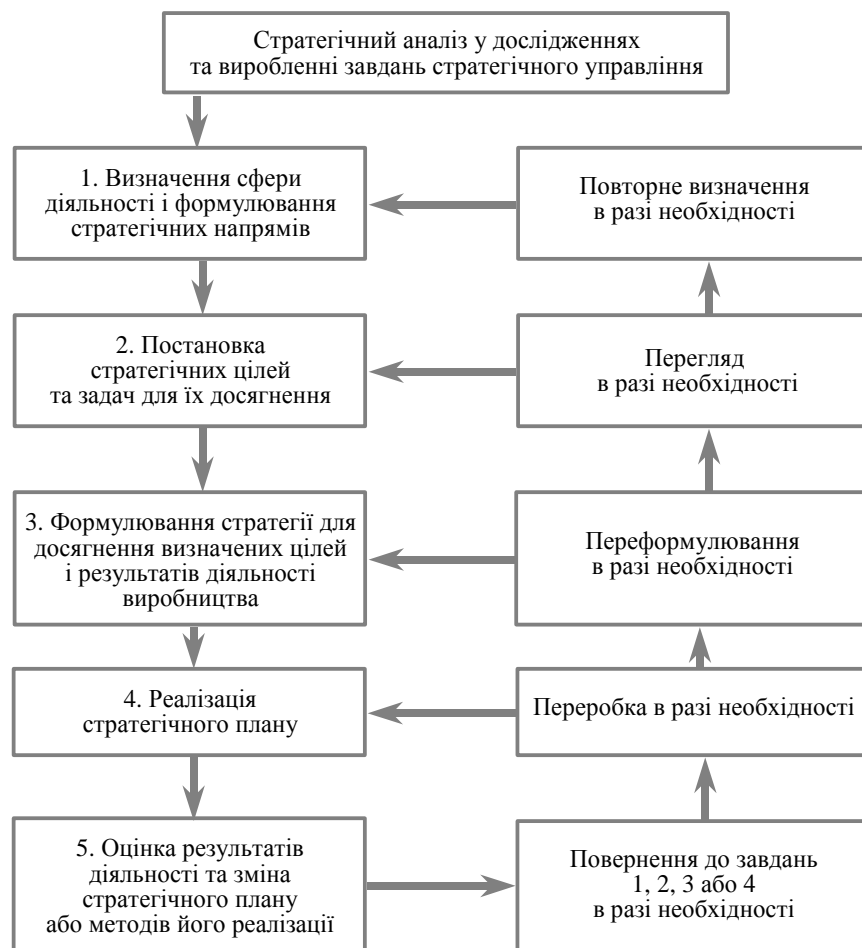
Четверте завдання стратегії підприємства — це реалізація стратегії. Користуючись інструментами стратегічного аналізу, адміністрація підприємства розробляє систему оцінок відповідності між тим як виконана робота і тим, що необхідно для ефективної реалізації стратегії. Конкретне здійснення стратегії починається з аналізу того, що підприємство має зробити для успішного виконання стратегічного плану.

Стратегічний аналіз має велике значення для оцінки результатів діяльності та зміни стратегічного плану підприємства або його реалізації, тобто для виконання п'ятого завдання стратегії. На цьому етапі стратегічного аналізу попередні чотири завдання переглядаються багато разів. Поява нових обставин змушує підприємство вносити корективи до стратегії розвитку: довготерміновий напрям розвитку може бути змінено, діяльність підприємства — переорієнтована, завдання управління і майбутня позиція підприємства — переглянуті.

Постійно відбувається пошук шляхів більш успішного здійснення стратегії. Її реалізація починається з об'єднання різних рішень і дій керівництва щодо організації роботи окремих груп і кожного працівника персонально. Перегляд

бюджету, зміна політики, реорганізація, вдосконалення системи заробітної плати, впровадження нових технологій у виробничий процес — усе це типові дії менеджерів, які дають змогу поліпшити стратегічну роботу.

Кожне з п'яти завдань стратегічного управління потребує постійного аналізу і прийняття рішень: чи продовжувати роботу в заданому напрямі, чи вносити зміни? В процесі стратегічного управління ніщо не є закінченим, і всі попередні дії коригуються залежно від трансформації навколишнього середовища або появи нових можливостей, здатних поліпшити стратегію. Стратегічне управління — процес, який перебуває в постійному русі. Зміни обставин як усередині підприємства, так і поза ним, або все разом потребують відповідних коригувань стратегії. Тому процес стратегічного управління є замкнутим циклом (рис. 1.1).



*Рисунок 1.1 Стратегічний аналіз у виробленні завдань стратегічного управління*

План управління підприємством охоплює всі його головні функції та підрозділи: виробництво, фінанси, маркетинг, кадри, наукові дослідження і розробки. Для кожного підрозділу підприємства, кожної функції визначається певна роль у цій стратегії. Зробити стратегічний вибір за даними стратегічного аналізу — означає пов'язати бізнес-рішення з конкурентоспроможними діями, виходячи при цьому з даних щодо всього підприємства. В цій єдності дій та підходів і полягає поточна стратегія підприємства.

## **1.2. Методи стратегічного аналізу середовища підприємства.**

Аналіз середовища — це важливий інструмент управління підприємством. Він допомагає менеджерам різних рівнів забезпечувати баланс між підприємством і середовищем шляхом створення продукції та обміну її у зовнішньому середовищі на необхідні для забезпечення життєдіяльності підприємства ресурси. У процесі взаємодії підприємства із зовнішнім середовищем менеджерів цікавить насамперед те, як повинно вести себе підприємство у довгостроковій перспективі, щоб в умовах конкурентної взаємодії з іншими підприємствами підтримувати баланс в обміні із зовнішнім середовищем і забезпечувати при цьому стаке функціонування підприємства.

У зовнішньому середовищі відбуваються динамічні процеси змін. Одні з цих процесів відкривають нові можливості для підприємства, створюють для нього сприятливі умови. Інші, навпаки, створюють додаткові труднощі. Для успішного виживання у довготерміновому періоді менеджери повинні вміти передбачати труднощі, з якими може зіткнутися підприємство у майбутньому, і нові можливості, які можуть відкритися для нього. Тому в процесі стратегічного аналізу необхідно зосередити увагу на майбутніх загрозах і можливостях, пов'язаних зі станом зовнішнього середовища, а також врахувати сильні та слабкі сторони внутрішнього середовища підприємства.



Для стратегічного аналізу середовища використовуються такі методи: SWOT-аналіз; аналіз ланцюжка цінностей; оцінка конкурентоспроможності.

**Метод SWOT** (у перекладі з англ. — сила (strength), слабкість (weakness), можливості (opportunities) і загрози (threats)) ґрунтується на підході, який дає змогу вивчати зовнішнє і внутрішнє середовища підприємства разом. За допомогою цього методу можна встановити взаємозв'язки між силою та слабкістю, які властиві підприємству, і зовнішніми загрозами та можливостями. Спершу виявляють сильні і слабкі сторони, а також загрози та можливості, після цього встановлюють взаємозв'язки між ними, що може бути використано для розробки стратегії підприємства. Томпсон і Стрикланд пропонували приблизно такий набір характеристик, висновок за якими дає можливість скласти список слабких та сильних сторін підприємства, а також перелік загроз і можливостей, пов'язаних із зовнішнім середовищем.

*Сильні сторони:*

високий рівень компетентності;  
адекватні фінансові ресурси;  
висока кваліфікація персоналу;  
добра репутація у покупців і клієнтів;  
відомий лідер ринку;  
винахідливий стратег у функціональних сферах діяльності підприємства;  
можливість одержання економії від збільшення обсягу виробництва;  
захищеність від сильного конкурентного тиску;  
технологія, що відповідає сучасним вимогам;  
наявність інноваційних здібностей і можливості їх реалізації;  
переваги в сфері витрат;  
перевірений часом менеджмент.

*Слабкі сторони:*

відсутність чітких стратегічних напрямів;  
погіршення конкурентної позиції;

застаріле обладнання;  
низька прибутковість;  
відсутність спеціалістів ключової кваліфікації і компетентності;  
вразливість щодо відношення до конкурентного тиску;  
наявність внутрішніх виробничих проблем;  
відставання у сфері досліджень і розробок;  
вузька виробнича лінія;  
слабке знання ринкової ситуації;  
неспроможність фінансувати необхідні зміни в стратегії.

*Можливості:*

вихід на нові ринки або сегменти ринку;  
розширення виробничої лінії;  
збільшення випуску різноманітної продукції;  
вертикальна інтеграція;  
можливість перейти до групи, яка має кращу стратегію;  
прискорення росту ринку.

*Загрози:*

можливість появи нових конкурентів;  
сповільнення росту ринку;  
зростаючий конкурентний тиск;  
несприятлива політика держави;  
зміна потреб і смаків споживачів;  
несприятливі демографічні зміни.

В практичній діяльності підприємство може доповнити список тими характеристиками зовнішнього і внутрішнього середовища, які відображають конкретну ситуацію.

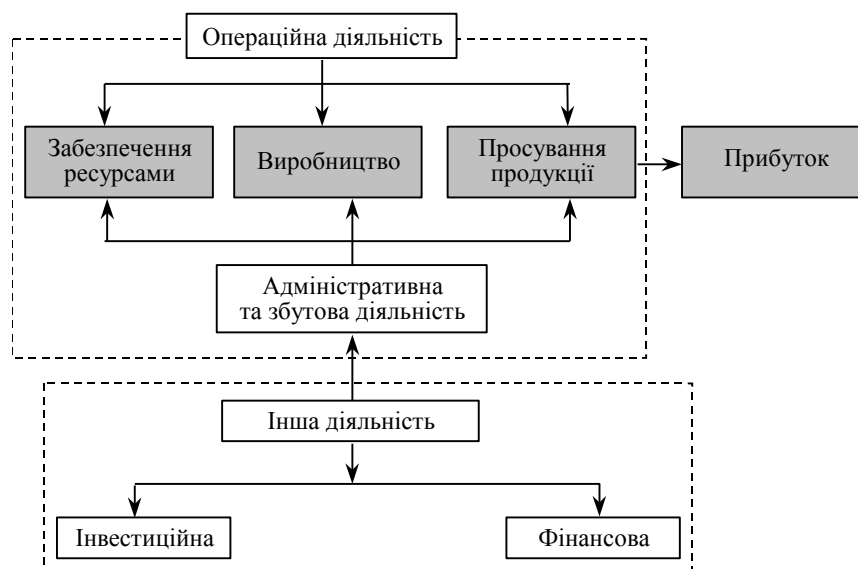
Аналіз середовища — це дуже складний і важливий процес для вироблення стратегії підприємства. Він потребує постійного спостереження і оцінки факторів, встановлення зв'язку між ними, а також виявлення сильних та

слабких сторін підприємства, можливостей і загроз, які існують у зовнішньому середовищі.

**Метод аналізу витрат і ланцюжка цінностей.** Важливим елементом стратегічного аналізу витрат є ланцюжок цінностей, який визначає діяльність, функції і процеси з розробки, виробництва, доставки, маркетингу продукції або послуг. Ланцюжок, що взаємопов'язує вартість окремих видів діяльності, починається з операцій із забезпечення сировиною і продовжується у процесі виробництва і випуску продукції, а також її просуванні на ринку до кінцевого споживача. Ланцюжок цінностей підприємства дає можливість оцінити основні види діяльності щодо створення продукту для споживача і вплив на процес виробництва допоміжних видів діяльності.

Розкладаючи діяльність підприємства на окремі операції, стратегічно пов'язані дії та напрями діяльності, можна краще зрозуміти структуру витрат підприємства і визначити їх основні складові. Кожний вид діяльності у ланцюжку пов'язаний з витратами і зв'язує в свою чергу активи. Зіставляючи виробничі витрати підприємства і активи з окремим видом діяльності у ланцюжку цінностей, можна проаналізувати витрати.

Формування витрат за кожним видом діяльності окремо дає широкі можливості для стратегічного аналізу. Структура ланцюжка цінностей підприємства представлена на рис. 1.2.



**Рисунок 1.2.** Ланцюжок цінностей підприємства

Система обліку в Україні, побудована відповідно до міжнародних стандартів обліку, дає можливість аналізувати витрати як за елементами, так і за видами діяльності.

Аналізуючи динаміку витрат підприємства і порівнюючи їх із співвідношеннями у конкурентів можна визначити певні тенденції розвитку підприємства та його конкурентів, прийняти відповідні стратегічні рішення. Інформацію для аналізу витрат можна отримати із звіту про фінансові результати (форма № 2), що входить до складу фінансової звітності підприємства.

У процесі оцінки виробничої діяльності слід звертати особливу увагу на показники, пов'язані з витратами виробництва, адміністративними та збутовими витратами. Для порівняння таких показників у динаміці та з показниками діяльності інших підприємств галузі можна використовувати відносні величини — коефіцієнти.

Коефіцієнт витрат виробництва ( $K_{\text{витр. вир}}$ ) розраховується шляхом ділення суми собівартості реалізованої продукції (товарів, робіт, послуг) на чистий дохід (виручку) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг). Якщо цей показник від періоду до періоду або у порівнянні з іншими підприємствами збільшується, то це може свідчити про підвищення вартості сировини,

збільшення трудових витрат або витрат, пов'язаних з процесом виробництва продукції. Така динаміка коефіцієнта може означати, що підприємство в умовах конкуренції з метою відповідності якості продукції вимогам споживачів було змушене знижувати ціни.

Для оцінки адміністративних витрат у динаміці та порівняння з аналогічними підприємствами — конкурентами використовується коефіцієнт адміністративних витрат ( $K_{\text{адм. витр}}$ ), який розраховується як відношення цих витрат до суми чистого доходу (виручки) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг). Адміністративні витрати розглядаються як постійні, або напівпостійні, тобто вони практично не залежать від обсягів реалізації. Для кожного підприємства існують специфічні обставини, які слід враховувати в аналізі.

Показники результатів діяльності підприємства також дають інформацію, яку можна використати для стратегічного аналізу тенденцій щодо зміни обсягів реалізації продукції, робіт, послуг та суми коштів, інвестованих підприємством в активи.

Для оцінки дохідності використовують два види показників рентабельності. Одні показники оцінюють рентабельність за відношенням до реалізації, інші — за відношенням до активів.

Перший показник називається коефіцієнтом валового прибутку ( $K_{\text{пр}}$ ) і розраховується як відношення суми валового прибутку до суми чистого доходу (виручки) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг). Цей показник характеризує ефективність не лише господарської діяльності, а й процесів ціноутворення. Якщо значення цього коефіцієнта вище, ніж середнє у конкурентів, то це означає, що господарська діяльність підприємства більш ефективна. Коефіцієнт валового прибутку показує, скільки копійок валового прибутку приносить кожна гривня обороту.

Про відносну ефективність господарської діяльності свідчить коефіцієнт чистого прибутку ( $K_{\text{ч. пр}}$ ). Його розраховують як відношення суми чистого

прибутку до суми чистого доходу (виручки) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг).

Розглянуті вище показники рентабельності в процесі аналізу дають уявлення про господарську діяльність підприємства. Якщо коефіцієнт валового прибутку істотно не змінюється протягом кількох періодів (років), а коефіцієнт чистого прибутку має тенденцію до зниження, то це може бути пов'язано або зі збільшенням витрат, або з підвищенням ставок податку. Щоб з'ясувати причини змін слід вивчити усі фактори, пов'язані з формуванням чистого прибутку. Якщо спостерігається тенденція зниження валового прибутку, то це вказує на підвищення собівартості реалізованої продукції (товарів, робіт, послуг) у порівнянні з виручкою від реалізації. Остання може у свою чергу свідчити про зниження конкурентоспроможності продукції.

Для оцінки рентабельності операційної діяльності використовується коефіцієнт операційного прибутку ( $K_{\text{оп. пр}}$ ), який відображає частку операційного прибутку в сумі чистого доходу (виручки) від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг).

Друга група показників рентабельності характеризує взаємозв'язок прибутку та активів. Коефіцієнт рентабельності активів ( $K_{\text{акт}}$ ) розраховується як відношення чистого прибутку до середньої суми активів.

Показники рентабельності активів відображають загальну прибутковість підприємства, яка залежить від ефективного управління активами.

Серед фінансових коефіцієнтів важливим показником є коефіцієнт рентабельності власного капіталу ( $K_{\text{вл. кап}}$ ). Він визначається як результат ділення чистого прибутку на середню суму власного капіталу. Цей коефіцієнт є одним із критеріїв, за яким власники приймають рішення щодо інвестицій.

**Метод оцінки конкурентоспроможності** підприємства ґрунтується на аналізі галузі і оцінці конкурентів. У процесі такого аналізу виявляються головні фактори успіху та конкурентні критерії, за якими учасники ринку розподіляються на лідерів та аутсайдерів. Дослідження конкурентів та їх

порівняльна оцінка є основою для визначення переваг і можливостей основних суперників.

Аналіз починається із виявлення ключових чинників успіху підприємства у даній галузі і важливих показників їх конкурентних переваг або недоліків. Після цього підприємство та його конкуренти оцінюються за кожним показником. Для цього можна використати шкалу оцінок від 1 до 10 (1 — дуже погано, 10 — дуже добре). На другому етапі оцінюються сильні сторони кожного із суперників і розраховуються підсумкові показники їх конкурентної сили. Після цього роблять висновки про ступінь конкурентних переваг або недоліків і визначають сфери, де позиції підприємства більш сильні або слабкі[1].

## II. Виробнича функція Кобба-Дугласа

### 2.1. Сутність та призначення функції Кобба-Дугласа. Напрямки використання показників динаміки функції.

Виникнення теорії виробничих функцій прийнято відносити до 1927 р., коли з'явилася стаття американських учених економіста П. Дугласа (P. Douglas) і математика Д. Кобба (D. Cobb) «Теорія виробництва». У цій статті, була зроблена спроба, емпіричним шляхом визначити вплив капіталу, що витрачається, і праці на об'єм продукції, що випускається, в оброблювальній промисловості США.

Як вже було сказано, виробнича функція відображає функціональний зв'язок між об'ємом ефективно використовуваних чинників виробництва (працею і майновим капіталом) і з їх допомогою випуском, що досягається, при існуючому технічному і організаційному знанні.

При субституційній виробничій функції виробництво може бути збільшене за рахунок підвищення кількісної характеристики одного з чинників, тоді як кількісна характеристика іншого чинника залишається без зміни, в іншому варіанті ж виробництво залишається без зміни при різних кількісних комбінаціях чинників праці і майнового капіталу.

Субституційна виробнича функція має загалом наступний вираз:

$$y = y(K, L); y'_x > 0; y''_{xx} < 0 \quad (2.1)$$

де:

$K$  – число виробничого капіталу

$L$  – число виробничих трудових годин або, іншими словами, число виробничих одиниць гуманного капіталу

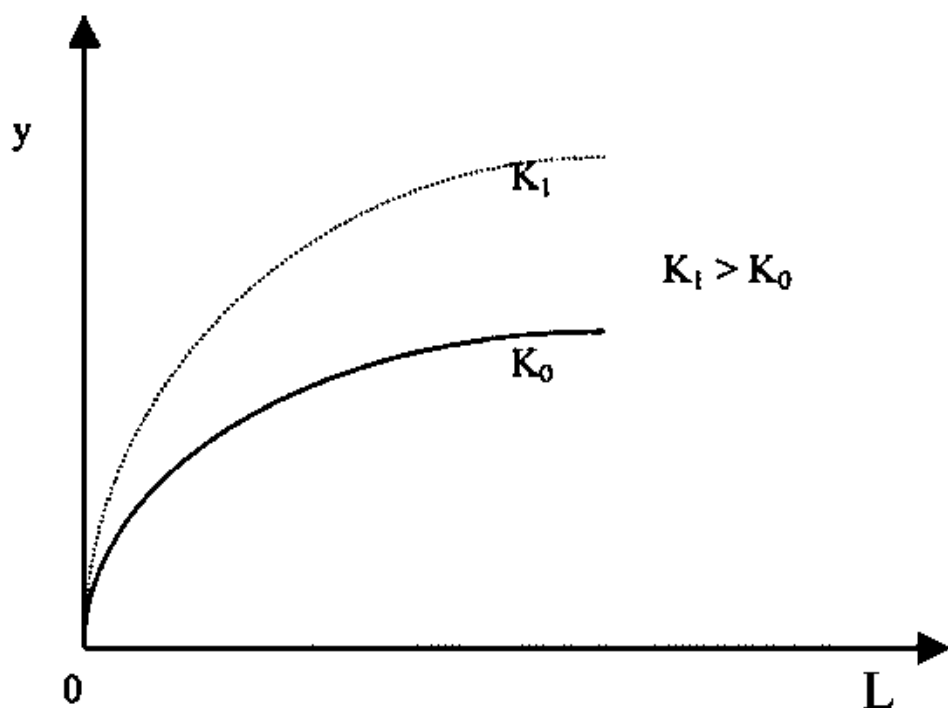
На основі умовної введеної субституційних чинників виробництва можна зробити наступні два висновки щодо функціонального взаємозв'язку даних чинників:

При інших рівних збільшення одного з чинників виробництва веде до збільшення випуску – перша похідна позитивна.



Проте гранична продуктивність зростаючого чинника зменшується із збільшенням величини даного чинника – друга похідна негативна.

Рівень організаційних і технічних знань відображається у відповідних формах взаємодій чинників. У даному випадку рівень знань постійний, тобто в даних рамках передбачається відсутність технічного прогресу. Таким чином, субституційна функція виробництва може бути представлена у вигляді наступного зображення, що відображає взаємозв'язок між кількістю праці і випуском при заданій кількості майнового капіталу (Рис. 2.1):



*Рисунок 2.1. Зв'язок між виробництвом і виробничою працею*

Кожне збільшення кількісного параметра майнового капіталу означає зсув кривої вгору і одночасного збільшення граничної продуктивності праці при заданій кількості робочої сили.

Із збільшенням кількісного параметра майнового капіталу збільшується і середня продуктивність праці, яка є часткою від ділення величини випуску на величину витраченої праці. Проте при цьому зменшується коефіцієнт праці, що визначає середню кількість витраченої праці на кожну одиницю випуску і є таким чином зворотною величиною середньої продуктивності праці.

Величина майнового капіталу приймається в рамках даного короткочасного аналізу як екзогенна задана, тому в моделі і описі не враховується технічний прогрес, а також ефект збільшення виробничих потужностей за рахунок інвестицій.

У 1927 р. П. Дуглас виявив, що якщо сумістити графіки залежності від часу логарифмів показників реального об'єму випуску ( $y$ ), капітальних витрат ( $K$ ) і витрат праці ( $L$ ), то відстані від крапок графіка показників випуску до крапок графіків показників витрат праці і капіталу складатимуть постійну пропорцію. Потім він звернувся до Чарльза Кобба з проханням знайти математичну залежність, що володіє такою особливістю, і Кобб запропонував наступну субституційну функцію:

$$y = AK^\alpha L^\beta \quad (2.2)$$

Ця функція була запропонована приблизно 30 роками раніше Філіпом Уїкстідом (Wicksteed), але Дуглас і Кобб були першими, хто використовував для її побудови емпіричні дані.

Проте при великих значеннях  $K$  і  $L$  ця функція не має економічного сенсу, оскільки випуск весь час зростає при зростанні витрат.

Кінетична функція  $y = AK^\alpha L^\beta e^\gamma$  (де  $\gamma$  - норма технічного прогресу за одиницю часу) отримана множенням функції Кобба-Дугласа на  $e^\gamma$ , що знімає дану проблему і робить функцію Кобба-Дугласа економічно цікавою.

Еластичність випуску продукції по капіталу і праці рівна відповідно  $\alpha$  і  $\beta$ , оскільки

$$\frac{\partial y / \partial K}{y / K} = \frac{A(\alpha K^{\alpha-1})L^\beta}{AK^{\alpha-1}L^\beta} = \alpha, \quad (2.3)$$

і аналогічним чином легко показати, що  $(dy/dL)/(y/L)$  рівно  $\beta$ .

Отже, збільшення витрат капіталу на 1% приведе до зростання випуску продукції на  $\alpha$  відсотків, а збільшення витрат праці на 1% приведе до зростання випуску на  $\beta$  відсотків. Можна припустити, що обидві величини  $\alpha$  і  $\beta$  знаходяться між нулем і одиницею. Вони повинні бути позитивними, оскільки

збільшення витрат виробничих чинників повинне викликати зростання випуску. В той же час, ймовірно, вони будуть менше одиниці, оскільки розумно припустити, що зменшення ефекту від масштабу виробництва приводить до повільнішого зростання випуску продукції, чим витрат виробничих чинників, якщо інші чинники залишаються постійними.

Якщо  $\alpha$  і  $\beta$  в сумі перевищують одиницю, то говорять, що функція має зростаючий ефект від масштабу виробництва (це означає, що якщо  $K$  і  $L$  збільшуються в деякій пропорції, то  $y$  росте в більшій пропорції). Якщо їх сума рівна одиниці, то це говорить про постійний ефект від масштабу виробництва ( $y$  збільшується в тій же пропорції, що і  $K$  і  $L$ ). Якщо їх сума менша, ніж одиниця, то має місце убуваючий ефект від масштабу виробництва ( $y$  збільшується в меншій пропорції, чим  $K$  і  $L$ ).

Відповідно до допущення про конкурентність ринків чинників виробництва  $\alpha$  і  $\beta$  мають подальшу інтерпретацію як прогнозовані долі доходу, отриманого відповідно за рахунок капіталу і праці. Якщо ринок праці має конкурентний характер, то ставка заробітної плати ( $w$ ) буде рівна граничному продукту праці ( $dy/dL$ ):

$$w = \frac{\partial y}{\partial L} = AK^\alpha \beta L^{\beta-1} = \frac{\beta y}{L}. \quad (2.4)$$

Отже, загальна сума заробітної плати ( $wL$ ) буде рівна  $y$ , а частка праці в загальному випуску продукції ( $wL/Y$ ) складе постійну величину  $\beta$ . Аналогічним чином норма прибутку виражається через  $dy/dK$ :

$$\rho = \frac{\partial y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1} L^\beta = \frac{\alpha y}{K}, \quad (2.5)$$

і, отже, загальний прибуток ( $K$ ) буде рівний  $y$ , а частка прибутку буде постійною величиною  $\alpha$ .

Існує ряд проблем по застосуванню такої функції, особливо в тих випадках, коли вона використовується для економіки в цілому. Зокрема, навіть в тих випадках, коли між випуском продукції, виробничим устаткуванням і працею у виробничому процесі існує технологічна залежність, то абсолютно

необов'язково, що подібна залежність існує тоді, коли вказані чинники комбінуються в масштабах економіки в цілому. По-друге, навіть якщо така залежність для економіки в цілому існує, то немає ніяких підстав вважати, що вона матиме просту форму.

При побудові виробничої функції Кобба–дугласа параметри  $A, \alpha, \beta$  можна оцінити за допомогою лінійного регресійного аналізу по методу найменших квадратів (МНК):

1) Виробничу функцію Кобба–дугласа приводять до лінійного вигляду шляхом логарифмування

$$\ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L) \quad (2.6)$$

2) При застосуванні МНК мета полягає в мінімізації суми квадратичних відхилень (SSD) між спостережуваними величинами  $\ln(y_i)$ , ( $i=1..N$ ;  $N$  – кількість спостережень) і відповідними оцінками  $\ln(\hat{A}), \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ .

$$SSD = \sum_{i=1}^N (\ln(y_i) - \ln(\hat{y}_i))^2 = \sum_{i=1}^N (\ln(y_i) - \ln(\hat{A}) - \hat{\alpha} \ln(K_i) - \hat{\beta} \ln(L_i))^2 \quad (2.7)$$

3) Введемо вектори

$$Z_{(N \times 1)} = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \ln(y_2) \\ \vdots \\ \ln(y_N) \end{pmatrix}; \quad W_{(N \times 1)} = \begin{pmatrix} \ln(K_1) \\ \ln(K_2) \\ \vdots \\ \ln(K_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix};$$

$$U_{(N \times 1)} = \begin{pmatrix} \ln(L_1) \\ \ln(L_2) \\ \vdots \\ \ln(L_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}; \quad \hat{X}_{(3 \times 1)} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\hat{A}) \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

і матрицю  $H_{(3 \times N)} = \begin{pmatrix} 1 & W_1 & U_1 \\ 1 & W_2 & U_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N & U_N \end{pmatrix}$

Тоді критерій можна записати у вигляді

$$SSD = (Z - HX)^T (Z - HX). \quad (2.8)$$

Диференціюючи SSD по вектору  $X$  і прирівнюючи похідну до нуля систему рівнянь МНК

$$H^T H \hat{X} = H^T Z \quad (2.9)$$

або

$$\hat{X} = (H^T H)^{-1} H^T Z. \quad (2.10)$$

4) Для оцінки критерію значущості вибірових коефіцієнтів регресії оцінюють дисперсію вибірових коефіцієнтів

$$\sigma_{\hat{X}_i}^2 = c_{ii} \sigma^2, \quad (2.11)$$

де  $c_{ii}$  – елементи головної діагоналі матриці  $(H^T H)^{-1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$\sigma^2$  – дисперсія погрішності вимірювань.

Оцінка  $\sigma^2$  визначається по формулі

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\ln(y_i) - \ln(\hat{y}_i))^2}{N - P} \quad (2.12)$$

Розраховується значення  $t$  – параметра

$$t = \frac{\hat{X}_i}{\sigma_{\hat{X}_i}} \quad (2.13)$$

Якщо набутого значення  $t$  більше, ніж табличне  $t_{\alpha}$  при  $(N-3-1)$  мір свободи, тоді  $X_i$  істотно відмінно від нуля при рівні  $\alpha$ .

Довірчі межі для  $\hat{X}_i$  визначаються по формулі

$$T = X_i \pm t_{\alpha} \sigma_{\hat{X}_i} \sqrt{c_{ii}} \quad (2.14)$$

Тоді вірогідність того, що величина  $X_i$  дійсно знаходиться в цих межах, складе  $1-\alpha$ .

5) Для оцінки адекватності регресивної моделі спостережуваним величинам об'єму випуску у розраховується коефіцієнт множинної детерміації:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\ln(\hat{y}_i) - \overline{\ln(y_i)})}{\sum_{i=1}^N (\ln(\hat{y}_i) - \overline{\ln(y_i)})^2}, \quad (2.15)$$

де  $\overline{\ln(y_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(y_i)$ .

При малому об'ємі вибірки використовується скоректований коефіцієнт множинної детерміації

$$\tilde{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N-1}{N-3} \quad (2.16)$$

Чим менше відрізняється  $\tilde{R}^2$  від одиниці, тим більше обгрунтовано рішення про те, що вибіркові коефіцієнти регресії можуть бути корисні для вивчення виробничого процесу.

### **Застосування виробничої функції Кобба-Дугласа**

Отже, будь-яка виробнича система характеризується залежністю між кількістю виробленої в ній продукції та спожитими для цього ресурсами. Причому певні показники цієї залежності мають деякі випадкові коливання. Залежність між ними, формалізовану у відповідний спосіб у вигляді регресійного рівняння, називають виробничою функцією.

Якщо виробнича функція відома, то за кількістю спожитих системою ресурсів можна передбачити кількість виробленої продукції і, навпаки, за заданою кількістю виробленої продукції можна розрахувати необхідну кількість відповідних ресурсів.

У реальних системах неможливо врахувати всі можливі фактори, що впливають на обсяги продукції. Тому розглядають найвизначніші з них і на підставі спостережень за цими факторами та результатом виробничої діяльності будують так звану емпіричну виробничу функцію.

Отже, виробнича функція - це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники.

Виробничі функції можуть мати різні галузі застосування, оскільки принцип "витрати — випуск", покладений в основу залежності, може бути реалізований як на мікроекономічному, так і на макроекономічному рівні.

На мікроекономічному рівні за допомогою таких функцій, наприклад, описують зв'язок між величиною використаного ресурсу протягом року та річним обсягом випуску продукції одного підприємства, однієї галузі чи міжгалузевого виробничого комплексу. Якщо виробничою системою є регіон чи країна загалом, то маємо виробничу функцію для макроекономічного рівня.

У реальних ситуаціях обсяг випуску продукції визначається, як правило, не одним, а багатьма факторами, тому частіше застосовують багаторесурсні або багатофакторні виробничі функції. Найпоширенішою серед них є виробнича функція Кобба - Дугласа, яка описує залежність між обсягом виробленої продукції  $Y$  і витратами праці  $L$  та капіталу  $K$ :

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad (2.19)$$

Множник  $A$  і показники степеня  $\alpha$  та  $\beta$  - параметри цієї моделі. Задана в такому вигляді виробнича функція є мультиплікативною (нелінійною відносно параметрів). Логарифмуванням її можна звести до адитивного (лінійного відносно параметрів) вигляду:

$$\ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L) \quad (2.20)$$

## 2.2. Практичне застосування виробничої функції Кобба-Дугласа

Відомі наступні економічні дані по ЗАТ «Стальконструкція-В»: об'єм виробництва, чисельність робітників та основний капітал за 2004-2010 р.р.

(Табл. 2.1)

<b>Рік</b>	<b>Об'єм виробництва, млн. грн. (y)</b>	<b>Капітал, млн. грн. (x<sub>1</sub>)</b>	<b>Робоча сила, чол. (x<sub>2</sub>)</b>
<b>2004</b>	187,284567	297,782461	432
<b>2005</b>	262,198393	262,198393	443
<b>2006</b>	314,638072	465,664346	467
<b>2007</b>	346,101879	522,613837	512
<b>2008</b>	463,776518	723,491368	563
<b>2009</b>	704,940308	1106,75628	620
<b>2010</b>	803,631952	1287,41838	737

*Таблиця 2.1 Економічні показники ЗАО «Стальконструкція-В»*

Перетворюючи початкові дані відповідно до лінійної функції шляхом логарифмування отримаємо наступні початкові дані (Табл. 2.2):

<b>Рік</b>	<b>ln(Об'єм вир.)</b>	<b>ln(Капітал)</b>	<b>ln(Робоча сила)</b>
<b>2004</b>	5,232629	5,696363	6,068426
<b>2005</b>	5,569101	5,569101	6,093570
<b>2006</b>	5,751423	6,143465	6,146329
<b>2007</b>	5,846733	6,258843	6,238325
<b>2008</b>	6,139403	6,584089	6,333280
<b>2009</b>	6,558113	7,009189	6,429719
<b>2010</b>	6,689141	7,160394	6,602588

*Таблиця 2.2 Початкові дані, приведені до лінійної функції*



Аналізуємо початкові дані за допомогою лінійного регресійного аналізу Microsoft Excel 2003, який полягає в підборі графіка для набору спостережень за допомогою методу найменших квадратів (див. додаток А). Регресія використовується для аналізу дії на окрему залежну змінну значень одній або більш незалежних змінних.

В результаті отримуємо наступні показники:

<b>Регресійна статистика</b>	
<i>Множинний R</i>	0,9751
<i>R-квадрат (<math>R^2</math>)</i>	0,9512
<i>Нормований R-квадрат (<math>\tilde{R}^2</math>)</i>	0,9268
<i>Стандартна помилка</i>	0,14215
<i>Спостереження</i>	7

**Таблиця 2.3** Показники регресійної статистики

<b>Дисперсійний аналіз</b>				
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
<i>Регресія</i>	2	$Q_R=1,5783$	0,78915	39,05002
<i>Залишок</i>	4	0,080835	0,02020875	
<i>Разом</i>	6	$Q=1,659135$		
	<i>Коефіцієнти</i>	<i>Стандартна помилка</i>	<i>t-статистика</i>	
<i>Y-пересечение</i>	-4,86972	4,828990	-1,008426	
<i>Змінна ln (K)</i>	0,43769	0,354401	1,23505	
<i>Змінна ln (L)</i>	1,285102	1,109058	1,15872	

**Таблиця 2.4** Показники дисперсійного аналізу

Дані показники визначаються таким чином:

**R-квадрат** характеризує частку варіації залежної змінної, обумовленою регресією або мінливістю пояснюючих змінних.

R-квадрат характеризує частку варіації залежної змінної, обумовленою регресією або мінливістю пояснюючих змінних.

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = \frac{1,5783}{1,659135} = 0,9512, \quad (2.21)$$

де

$Q_R$  – сума квадратів (SS), обумовлена регресією;

$Q$  – загальна сума квадратів відхилень залежної змінної від середньої .

У нашому випадку **R-квадрат** (0,9512) близький до 1, що говорить про високу якість підгонки даної моделі, тобто регресія добре описує залежність між тим що пояснюють і залежною змінною.

**Нормований R-квадрат** враховує кількість пояснюючих змінних  $P$ :

$$\tilde{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N-1}{N-P-1} = 1 - (1 - 0,9512) \frac{7-1}{7-2-1} = 0,9268 \quad (2.22)$$

де

$N$  – число спостережень (7)

$P$  – число пояснюючих змінних (2).

**Число мір свободи ( $df$ )** визначається таким чином:

$$\text{для регресії } df = M - 1 = 3 - 1 = 2, \quad (2.23)$$

$$\text{для залишку } df = N - M = 7 - 3 = 4, \quad (2.24)$$

$$\text{підсумковий } df = N - M = 7 - 1 = 6, \quad (2.25)$$

де  $M$  – число оцінюваних параметрів регресії;

$N$  – число спостережень.

**Сума квадратів відхилень** визначається таким чином.

**Сума квадратів, обумовлена регресією (RSS):**

$$Q_R = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 1,5783, \quad (2.26)$$

де  $\hat{y}_i$  – умовна (групова) середня змінної  $y$

**Залишкова сума квадратів**, що характеризує вплив неврахованих чинників (ESS):

$$Q_e = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0,080835. \quad (2.27)$$

**Загальна сума квадратів відхилень** залежної змінної від середньої (TSS):

$$Q = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = 1,659135. \quad (2.28)$$

**Середніми квадратами (MS)** є незміщені оцінки дисперсій залежності змінної, обумовлених відповідно регресією і дією неврахованих випадкових чинників помилок:

$$MS_R = \frac{Q_R}{m-1} = \frac{RSS}{df_R} = \frac{1,5783}{2} = 0,78915, \quad (2.29)$$

$$MS_e = \frac{Q_e}{n-m} = \frac{ESS}{df_e} = \frac{0,080835}{4} = 0,02020875. \quad (2.30)$$

**F-критерий значущості** рівняння регресії визначається:

$$F = \frac{R^2(N-P-1)}{(1-R^2)P} = \frac{Q_R(N-P-1)}{Q_e \cdot P} = \frac{MS_R}{MS_e} = \frac{4 \cdot 1,5783}{2 \cdot 0,080835} = 39,0499. \quad (2.31)$$

$F=39,0499$  більше табличного значення критерію **Фішера-Снедекора**  $F_{0,05;2;17}=3,59$ , тобто рівняння регресії значуще, отже досліджувана залежна змінна у дуже близько описується включеними в регресійну модель змінними  $\ln(K)$  і  $\ln(L)$ .

Стандартна помилка – це оцінка стандартного відхилення розподілу коефіцієнта регресії навколо його дійсного значення.

t-статистика – оцінка коефіцієнта, що ділиться на його стандартну помилку.

На підставі отриманих даних можна вивести функцію Кобба-Дугласа для вищеописаної ситуації:

$$\ln(y) = -4,86967 + 0,43769 \cdot \ln(K) + 1,28508 \cdot \ln(L)$$

На підставі отриманої моделі можна вивести виробничу функцію Кобба-Дугласа шляхом експонування:

$$y = 0,007676 \cdot K^{0,43769} \cdot L^{1,28508}$$

Отримана модель може бути використана для прогнозування майбутніх значень об'ємів виробництва на основі відомих або очікуваних рівнях капіталу і робочої сили.

У отриманій моделі спостерігається зростаючий ефект від масштабу, оскільки сума  $\alpha$  і  $\beta$  перевищує 1 (рівна 1,72277). Це означає, що якщо  $K$  і  $L$  збільшуються в деякій пропорції, то  $y$  росте в більшій пропорції.

Для прикладу визначимо об'єм виробництва в середньому при очікуваному рівні капіталу 1500 млн. грн. і рівні робочої сили 1000 чоловік.

$$Об'єм_{прогн} = 0,007676 \cdot 1500^{0,43769} \cdot 1000^{1,28508}$$

$$Об'єм_{прогн} = 1351,507155 \text{ млн.грн.}$$

## Висновок

*Виробнича функція Кобба-Дугласа* — найвідоміша зі всіх виробничих функцій неокласичного типу — була відкрита в 20-х роках нашого століття економістом Дугласом в співпраці з математиком Коббом і отримала широке застосування в емпіричних дослідженнях.

Використовуючи дані по американській оброблювальній промисловості, учені провели дослідження, в результаті якого виявилось, що виробничий результат росте пропорційно зростанню ресурсів. Дійсно, збільшивши об'єми ресурсів в раз, отримаємо кратне збільшення. Цей ефект в тому або іншому ступені характерний і для виробничих функцій інших економічних об'єктів. Хоча буває, що сума статечних коефіцієнтів відрізняється від одиниці у велику або меншу сторону. У таких випадках говорять про ефект масштабу. Наприклад, співвідношення указує на те, що при розширенні масштабів виробництва результат росте швидше за ресурсні витрати.

Основні характеристики функції Кобба-Дугласа. Перш за все відзначимо, що для функції Кобба-Дугласа випуск продукції неможливий за відсутності хоч би одного ресурсу.

Отже, виробнича функція Кобба-Дугласа – одна з широко вживаних економічних конструкцій. Необхідно враховувати, що за допомогою виробничої функції може бути описана еволюція у минулому, отже, прогноз, зроблений на її основі, включає відому частку ризику. Проте економісти, що досліджують реальні економічні процеси, застосовували і продовжують застосовувати виробничу функцію Кобба-Дугласа. Проте виробнича функція Кобба-Дугласа володіє і серйозними недоліками, одним з яких є рівність одиниці еластичності заміщення, яке утрудняє застосування цієї функції для широкого класу завдань.

## Список використаної літератури

1. Барлаков Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. М.: Издательство МГУ, 1981.
2. Боровков А.А. Математическая статистика. М., Наука, 2000.
3. Воронкова О.В., Иванилова Ю.П., Колдаева Н.Т. Некоторые вопросы теории и использования производственных функций. М., Вычислительный центр АН, 2001.
4. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение — М.: Финансы и статистика, 1986
5. Красс М. Математика для экономических специальностей. Учебник. 3-е изд., перераб и доп. М, Экономист, 2002.
6. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити-Дана, 2003.
7. Курант Р. Математика. М., Наука, 2003.
8. Курош А.Г.. Курс высшей алгебры. М., Наука, 2001.
9. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М., Наука, 2001.
10. Сизиков А.П. Экономико-математические модели и методы. Самара, СГМА, 2003.
11. Терехов Л.Л. Производственные функции. М., Статистика, 2000
12. Томпсон А. А., Стрикленд А. Дж. Стратегический менеджмент. Искусство разработки и реализации стратегии: Учебник для вузов: Пер. с англ. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. — С. 194—198
13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., Мир, 2001.
14. Фурманн В., Султанов А. Общеэкономический рынок труда (Der gesamtwirtschaftliche Arbeitsmarkt) – ресурс Интернет <http://ek-it.agava.ru/mul/mul003.htm>.
15. Ресурс Интернет – <http://allmath.ru/appliedmath/micro/labs/micro-labs1.htm>.
16. Ресурс Интернет – <http://nit.miem.edu.ru/cgi-bin/article?id=122>