

УДК 539.4

В. П. Колесников, Л. А. Фильштинский

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ЖЕСТКИМИ ВОЛОКНАМИ И АНИЗОТРОПНОЙ МАТРИЦЕЙ

Теория композиционных материалов с изотропной матрицей содержится в работах [2, 4, 6]. В настоящей статье рассматривается композиционный материал с анизотропной матрицей, армированной жесткими поперечными волокнами.

§ 1. Постановка основной задачи. Рассмотрим анизотропную среду, линейно-армированную жесткими волокнами. Будем предполагать, что матрица и волокна образуют регулярную двоякопериодическую упругую систему. Пусть на бесконечности действует однородное поле напряжений, не меняющееся вдоль оси волокон. Тогда задача о напряженно-деформированном состоянии такой армированной среды сводится к плоской двоякопериодической задаче теории упругости для анизотропной среды с жесткими включениями.

Пусть ω_1 и ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = 0$, $\text{Im } \omega_2 / \omega_1 > 0$) — основные периоды структуры (рис. 1); L_{mn} — контур включения ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$). Тогда полная граница области D будет $L = \bigcup L_{mn}$, а односвязные области с границей L_{mn} обозначим через D_{mn} и начало координат поместим внутри D_{00} . Под L_{mn} будем понимать простую замкнутую достаточно гладкую кривую. В результате приходим ко второй основной задаче теории упругости анизотропной среды; когда на всех контурах L_{mn} заданы одинаковые смещения, а в среде действуют средние напряжения σ_1, σ_2 и τ .

Для решения поставленной задачи следует построить функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$, регулярных в областях D_1 и D_2 плоскостей комплексных переменных $z_1 = x + \mu_1 y$ и $z_2 = x + \mu_2 y$ соответственно и удовлетворяющих на L краевому условию

$$(p_1 + iq_1) \varphi_1(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \overline{\varphi_1(t_1)} + (p_2 + iq_2) \varphi_2(t_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \times \\ \times \overline{\varphi_2(t_2)} = u + iv. \quad (1.1)$$

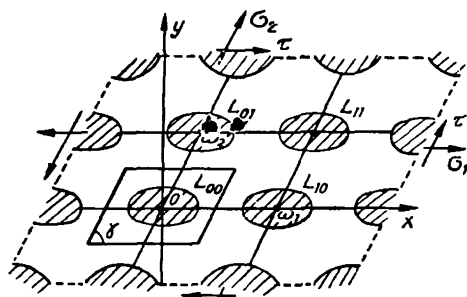


Рис. 1.

Условие (1.1) можно преобразовать к виду

$$a\varphi_1(t_1) + b\overline{\varphi_1(t_1)} + \varphi_2(t_2) = q(u, v), \quad (1.2)$$

где

$$a = \frac{1}{\Delta} (\bar{p}_2 q_1 - p_1 \bar{q}_2); \quad b = \frac{1}{\Delta} (\bar{p}_2 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 q_2);$$

$$q(u, v) = \frac{1}{\Delta} (\bar{p}_2 v - \bar{q}_2 u); \quad \Delta = \bar{p}_2 q_2 - p_2 \bar{q}_2.$$

Смещения через функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ определяются формулами [5]

$$u = 2 \operatorname{Re} [p_1 \varphi_1(z_1) + p_2 \varphi_2(z_2)] - \alpha y + u_0; \quad v = 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi_1(z_1) + q_2 \varphi_2(z_2)] + \alpha x + v_0; \quad (1.3)$$

$$p_j = a_{11} \mu_j^2 + a_{12} - a_{16} \mu_j; \quad q_j = a_{12} \mu_j + \frac{a_{22}}{\mu_j} - a_{28} \quad (j = 1, 2),$$

причем α , u_0 , v_0 — произвольные постоянные, характеризующие «жесткое» перемещение в плоскости XOY без деформации.

Функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ запишем в следующем виде:

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^{(1)}} \omega(t) [\zeta(t_1 - z_1) - \zeta(t_1)] dt_1 + Az_1; \quad (1.4)$$

$$\varphi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^{(2)}} [-a\omega(t) + b\overline{\omega(t)}] \zeta(t_2 - z_2) dt_2 + Bz_2.$$

Здесь $\omega(t)$ — искомая плотность, удовлетворяющая на L условию Гельдера; $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса; A и B — постоянные, подлежащие определению.

Можно показать, что представления (1.4) обеспечивают двояко-периодическое распределение напряжений в области D .

Постоянные A и B , фигурирующие в представлениях (1.4), определим из статических условий. Компоненты главного вектора усилий, действующих на некоторой дуге l , определяем по формулам [5]

$$\int_l X_n ds = 2 \operatorname{Re} [\mu_1 \varphi_1(z_1) + \mu_2 \varphi_2(z_2)]; \quad \int_l Y_n ds = -2 \operatorname{Re} [\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)]. \quad (1.5)$$

Приравнявая правые части (1.5) к главному вектору усилий, действующих на соответствующей грани параллелограмма периодов, получаем [3]

$$2 \operatorname{Re} (A + B) = \sigma_y^0 + 2\Delta_1; \quad 2 \operatorname{Re} (\mu_1 A + \mu_2 B) = -\tau_{xy}^0 + 2\Delta_2;$$

$$2 \operatorname{Re} (\mu_1^2 A + \mu_2^2 B) = \sigma_x^0 + 2\Delta_3 - 4\Delta_4;$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} (\delta_1^{(1)} \gamma_1 + \delta_1^{(2)} \gamma_2); \quad \Delta_2 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} (\mu_1 \delta_1^{(1)} \gamma_1 + \mu_2 \delta_1^{(2)} \gamma_2);$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} (\mu_1^2 \delta_1^{(1)} \gamma_1 + \mu_2^2 \delta_1^{(2)} \gamma_2); \quad \Delta_4 = \frac{\pi}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} (i\mu_1 \gamma_1 + i\mu_2 \gamma_2); \quad (1.6)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^{(1)}} \omega(t) dt_1; \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^{(2)}} [-a\omega(t) + \overline{b\omega(t)}] dt_2;$$

$$\delta_k^{(j)} = \zeta(z_j + \omega_k^{(j)}) - \zeta(z_j) = 2\zeta\left(\frac{\omega_k^{(j)}}{2}\right) \quad (k, j = 1, 2).$$

Здесь σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 — средние напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям;

$$\operatorname{Im}(\gamma_1 + \gamma_2) = 0. \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) обеспечивает разрешимость системы (1.6). Решая систему (1.6), находим

$$A = \beta_1 K_0 + A_1 \sigma_x^0 + A_2 \sigma_y^0 + A_3 \tau_{xy}^0 + K_1; \quad B = \beta_2 K_0 + B_1 \sigma_x^0 + B_2 \sigma_y^0 + B_3 \tau_{xy}^0 + K_2, \quad (1.8)$$

где K_0 — неопределенная пока постоянная, а величины β_1 , β_2 , A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , B_3 , K_1 , K_2 в зависимости от параметров $\mu_1 = \mu_1' + i\mu_1''$, $\mu_2 = \mu_2' + i\mu_2''$ имеют вид: при $\mu_1' = \mu_2'$

$$\beta_1 = i; \quad \beta_2 = -\frac{\mu_1''}{\mu_2''} i; \quad A_1 = -\frac{1}{2\Delta_0}; \quad A_2 = -\frac{|\mu_2|^2}{2\Delta_0}; \quad A_3 = -\frac{\mu_1'}{2\Delta_0};$$

$$B_1 = \frac{1}{2\Delta_0}; \quad B_2 = \frac{|\mu_1|^2}{2\Delta_0}; \quad B_3 = \frac{1}{\Delta_0} + \frac{i}{2\mu_2''};$$

$$K_1 = \frac{1}{\Delta_0} (-|\mu_2|^2 \Delta_1 - 2\mu_1' \Delta_2 - \Delta_3 + 2\Delta_4); \quad (1.9)$$

$$K_2 = \frac{1}{\Delta_0} \left[(|\mu_1|^2 + i \frac{\mu_1'}{\mu_2''} \Delta_0) \Delta_1 - (2\mu_1' + i \frac{\Delta_0}{\mu_2''}) \Delta_2 + \Delta_3 - 2\Delta_4 \right];$$

$$\Delta_0 = \mu_1''^2 - \mu_2''^2;$$

при $\mu_1' \neq \mu_2'$

$$\beta_1 = 1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\Delta_0}{\mu_1''} - \frac{\mu_1''^2 - \mu_2''^2}{\mu_1'' \Delta_0} \right); \quad \beta_2 = -1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\Delta_0}{\mu_2''} + \frac{\mu_1''^2 - \mu_2''^2}{\mu_2'' \Delta_0} \right);$$

$$A_1 = -\frac{i}{4\mu_1'' \Delta_0}; \quad A_2 = -\frac{i|\mu_2|^2}{4\mu_1'' \Delta_0}; \quad A_3 = -\frac{i\mu_2'}{2\mu_1'' \Delta_0};$$

$$B_1 = \frac{i}{4\mu_2'' \Delta_0}; \quad B_2 = \frac{1}{2} + i \frac{2\mu_1' \mu_2' - \mu_2''^2 + \mu_1''^2}{4\mu_2'' \Delta_0}; \quad B_3 = \frac{i\mu_1'}{2\mu_2'' \Delta_0}; \quad (1.10)$$

$$K_1 = -\frac{i}{\mu_1'' \Delta_0} \left(\frac{1}{2} |\mu_2|^2 \Delta_1 - \mu_2' \Delta_2 + \frac{1}{2} \Delta_3 - \Delta_4 \right);$$

$$K_2 = \frac{i}{\mu_2'' \Delta_0} \left[\frac{1}{2} (2\mu_1' \mu_2' - \mu_2''^2 + \mu_1''^2) \Delta_1 - \mu_1' \Delta_2 + \frac{1}{2} \Delta_3 - \Delta_4 \right] + \Delta_1.$$

Таким образом, представления (1.4) при условии (1.7) описывают класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений при заданных средних напряжениях в среде.

§ 2. Решение поставленной краевой задачи. На основании формул Сохоцкого — Племяля граничные значения функций $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t_{10}) &= \frac{\omega(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^{(1)}} \omega(t) [\zeta(t_1 - t_{10}) - \zeta(t_1)] dt_1 + At_{10}; \\ \varphi_2(t_{20}) &= \frac{1}{2} [-a\omega(t_0) + b\overline{\omega(t_0)}] + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^{(2)}} [-a\omega(t) + b\overline{\omega(t)}] \times \\ &\quad \times \zeta(t_2 - t_{20}) dt_2 + Bt_{20}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в граничное условие (1.1) и используя (1.3) и (1.6), после преобразования получаем интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно плотности $\omega(t)$

$$\begin{aligned}& \overline{b\omega(t_0)} + \frac{a}{2\pi i} \int_{L_{00}} \omega(t) d \ln \left[\frac{\sigma(t_1 - t_{10})}{\sigma(t_1)\sigma(t_2 - t_{20})} \right] - \frac{b}{2\pi i} \int_{L_{00}} \overline{\omega(t)} \times \\ & \times d \ln \left[\frac{\overline{\sigma(t_1 - t_{10})}}{\sigma(t_1)\sigma(t_2 - t_{20})} \right] + \Phi_1(\omega(t), t_{00}) = q(u, v) - C_1(t_{00})\sigma_x^0 - \\ & \quad - C_2(t_{00})\sigma_y^0 - C_3(t_{00})\tau_{xy}^0 - C_4(t_{00})K_0; \\ C_1(t_{00}) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\overline{p_2 a_{22}} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{A_1}{\mu_1} + \frac{B_1}{\mu_2} \right) - \overline{q_2} a_{11} \right] \operatorname{Re} t_{00} + \right. \\ & \quad \left. + [\overline{p_2} a_{12} + \overline{q_2} a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 A_1 + \mu_2^3 B_1)] \operatorname{Im} t_{00} \right\}; \\ C_2(t_{00}) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\overline{p_2} a_{22} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{A_2}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} \right) - \overline{p_2} a_{26} - \overline{q_2} a_{12} \right] \operatorname{Re} t_{00} + \right. \\ & \quad \left. + [\overline{p_2} a_{22} - \overline{q_2} a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 A_2 + \mu_2^3 B_2)] \operatorname{Im} t_{00} \right\}; \\ C_3(t_{00}) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\overline{p_2} a_{22} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{A_3}{\mu_1} + \frac{B_3}{\mu_2} \right) - \overline{p_2} a_{12} - \overline{q_2} a_{16} \right] \operatorname{Re} t_{00} + \right. \\ & \quad \left. + [\overline{p_2} a_{26} + \overline{q_2} a_{12} - \overline{q_2} a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 A_3 + \mu_2^3 B_3)] \operatorname{Im} t_{00} \right\}; \\ C_4(t_{00}) &= \frac{1}{\Delta} \left[\overline{p_2} a_{22} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \right) \operatorname{Re} t_{00} - \overline{q_2} a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 \beta_1 + \mu_2^3 B_2) \operatorname{Im} t_{00} \right]; \\ \Phi_1(\omega(t), t_{00}) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\overline{p_2} a_{22} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{K_1}{\mu_1} + \frac{K_3}{\mu_2} \right) - 2(\overline{p_2} a_{26} + \overline{q_2} a_{12}) \Delta_1 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2(\overline{p_2} a_{12} + \overline{q_2} a_{26}) \Delta_2 - 2\overline{q_2} a_{11} \Delta_3 - 4\overline{q_2} a_{11} \Delta_4 \right] \operatorname{Re} t_{00} + [2\overline{p_2} a_{22} \Delta_1 - \right.\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$- 2 (\bar{\rho}_2 a_{26} + \bar{q}_2 a_{12}) \Delta_2 + 2 (\bar{\rho}_2 a_{12} + \bar{q}_2 a_{16}) \Delta_3 - 4 (\bar{\rho}_2 a_{26} + \bar{q}_2 a_{12}) \Delta_4 - \\ - \bar{q}_2 a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 K_1 + \mu_2^3 K_2) \operatorname{Im} t_{00} \Big\},$$

где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса.

Выясним механический смысл условия (1.7). Для этого запишем выражения главного момента сил, действующих на L_{00}

$$M = \operatorname{Re} \int_{L_{00}} f(t) \bar{d}t = 2 \operatorname{Re} \int_{L_{00}} [\varphi_1(t_1) dt_1 + \varphi_2(t_2) dt_2]. \quad (2.3)$$

Подставляя в (2.3) представления (1.4), приходим к равенству

$$\operatorname{Re} \int_{L_{00}} f(t) \bar{d}t = 4\pi \operatorname{Im} (\gamma_1 + \gamma_2). \quad (2.4)$$

Таким образом, (1.7) является условием равенства нулю главного момента сил, действующих вдоль L_{00} .

Определим величину K_0 , фигурирующую в интегральном уравнении (2.2), из условия, что всякое решение интегрального уравнения (2.2) удовлетворяет условию разрешимости (1.7). Для этого подберем K_0 из условия, что главный момент сил, действующих вдоль L_{00} , равняется нулю. Умножив обе части граничного условия (1.1) на $\bar{d}t$, выделив главный момент и взяв интеграл по контуру L_{00} , с учетом (1.6) находим

$$K_0 = \frac{1}{N} \operatorname{Re} \int_{L_{00}} (u + iv) \bar{d}t - \frac{1}{N} [R_1 \sigma_x^0 + R_2 \sigma_y^0 + R_3 \tau_{xy}^0 + \Phi_2(\omega(t), t_{00})]; \\ \Phi_2(\omega(t), t_{00}) = \pi \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\mu_j''} \left[|\mu_j|^2 a_{11} \operatorname{Im} (i\mu_j \gamma_j) + (a_{26} - a_{16} |\mu_j|^2) \operatorname{Im} (i\gamma_j) - \right. \right. \\ \left. \left. - a_{22} \operatorname{Im} \left(\frac{i\gamma_j}{\mu_j} \right) \right] (-1)^{j+1} + \frac{1}{\mu_j} \operatorname{Im} \left[K_j \int_{L_{00}^{(j)}} \psi_j \bar{d}\psi_j \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\mu_j^3 a_{11} - \mu_j^2 a_{16} - \frac{a_{22}}{\mu_j} + a_{26} \right) \right] \right\}; \quad (2.5) \\ N = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\mu_j} \operatorname{Im} \left[\beta_j \int_{L_{00}^{(j)}} \psi_j \bar{d}\psi_j \left(\mu_j^3 a_{11} - \mu_j^2 a_{16} - \frac{a_{22}}{\mu_j} + a_{26} \right) \right] \right\}; \\ R_v = \frac{1}{\mu_1''} \operatorname{Im} \left[A_v \int_{L_{00}^{(1)}} \psi_1 \bar{d}\psi_1 \left(\mu_1^3 a_{11} - \mu_1^2 a_{16} - \frac{a_{22}}{\mu_1} + a_{26} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\mu_2''} \operatorname{Im} \left[B_v \int_{L_{00}^{(2)}} \psi_2 \bar{d}\psi_2 \left(\mu_2^3 a_{11} - \mu_2^2 a_{16} - \frac{a_{22}}{\mu_2} + a_{26} \right) \right] \quad (v = 1, 2, 3).$$

Можно показать, что $N \neq 0$.

С учетом (2.5) интегральное уравнение (2.2) примет вид

$$\begin{aligned}
 & b\overline{\omega(t_0)} + \frac{a}{2\pi i} \int_{L_{00}} \omega(t) d \ln \left[\frac{\sigma(t_1 - t_{10})}{\sigma(t_1)\sigma(t_2 - t_{20})} \right] - \frac{b}{2\pi i} \int_{L_{00}} \overline{\omega(t)} d \ln \times \\
 & \times \left[\frac{\sigma(t_1 - t_{10})}{\sigma(t_1)\sigma(t_2 - t_{20})} \right] + \Phi(\omega(t), t_{00}) = Q(u, v, t_{00}) + F_1(t_{00})\sigma_x^0 + \\
 & \quad + F_2(t_{00})\sigma_y^0 + F_3(t_{00})\tau_{xy}^0; \\
 & \Phi(\omega(t), t_{00}) = \Phi_1(\omega(t), t_{00}) - \frac{1}{N} C_4(t_{00}) \Phi_2(\omega(t), t_{00}); \\
 & Q(u, v, t_{00}) = q(u, v) - \frac{1}{N} C_4(t_{00}) \operatorname{Re} \int_{L_{00}} (u + iv) \bar{d}t; \\
 & F_j(t_{00}) = \frac{1}{N} R_j C_4(t_{00}) - C_j(t_{00}) \quad (j = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Можно показать, что (2.6) имеет решение и притом единственное.

§ 3. Макромодель композиционного материала. Выясним закон связи между средними напряжениями и деформациями в композиционной среде. Под макромоделью такой среды будем понимать однородную анизотропную среду, управляемую тем же законом Гука.

Положим

$$\begin{aligned}
 u(z) |_z^{z+\omega_1} &= \operatorname{Re} h_1; & u(z) |_z^{z+\omega_2} &= \operatorname{Re} h_2; & v(z) |_z^{z+\omega_1} &= \operatorname{Im} h_1; \\
 v(z) |_z^{z+\omega_2} &= \operatorname{Im} h_2; & h_1 &= \operatorname{Re} h_1 + i \operatorname{Im} h_1; & h_2 &= \operatorname{Re} h_2 + i \operatorname{Im} h_2.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Используя выражения (1.3) и (1.4), представим (3.1) в виде

$$\begin{aligned}
 u(z) |_z^{z+\omega_1} &= 2 \operatorname{Re} (p_1 A \omega_1^{(1)} + p_2 B \omega_1^{(2)}) - 2 \operatorname{Re} (p_1 \delta_1^{(1)} \gamma_1 + p_2 \delta_1^{(2)} \gamma_2); \\
 v(z) |_z^{z+\omega_1} &= 2 \operatorname{Re} (q_1 A \omega_1^{(1)} + q_2 B \omega_1^{(2)}) - 2 \operatorname{Re} (q_1 \delta_1^{(1)} \gamma_1 + q_2 \delta_1^{(2)} \gamma_2); \\
 u(z) |_z^{z+\omega_2} &= 2 \operatorname{Re} (p_1 A \omega_2^{(1)} + p_2 B \omega_2^{(2)}) - 2 \operatorname{Re} (p_1 \delta_2^{(1)} \gamma_1 + p_2 \delta_2^{(2)} \gamma_2); \\
 v(z) |_z^{z+\omega_2} &= 2 \operatorname{Re} (q_1 A \omega_2^{(1)} + q_2 B \omega_2^{(2)}) - 2 \operatorname{Re} (q_1 \delta_2^{(1)} \gamma_1 + q_2 \delta_2^{(2)} \gamma_2).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Приравнявая правые части равенств (3.1) и (3.2), учитывая (1.3), (1.6) и соотношение Лежандра [1], находим

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{Re} h_1}{\omega_1} &= a_{11} \sigma_x^0 + a_{12} \sigma_y^0 + a_{16} \tau_{xy}^0 - 4a_{11} \Delta_4; \\
 \frac{\operatorname{Im} h_1}{\omega_1} &= -a_{26} \sigma_x^0 - a_{12} \tau_{xy}^0 + a_{22} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{A}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2} \right) - \frac{a_{22}}{\omega_1} \times \\
 & \quad \times 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\delta_1^{(1)} \gamma_1}{\mu_1} + \frac{\delta_1^{(2)} \gamma_2}{\mu_2} \right);
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{Re} h_2}{\operatorname{Im} \omega_2} - \frac{\operatorname{Re} h_1}{\omega_1} \operatorname{ctg} \gamma &= -a_{16} \sigma_x^0 - a_{12} \tau_{xy}^0 + a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 A + \mu_2^3 B) - \\
 & - \frac{a_{11}}{\omega_1} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 \delta_1^{(1)} \gamma_1 + \mu_2^3 \delta_1^{(2)} \gamma_2) + \frac{4\pi a_{11}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} (i\mu_1^2 \gamma_1 + i\mu_2^2 \gamma_2);
 \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{Im} h_2}{\operatorname{Im} \omega_2} - \frac{\operatorname{Im} h_1}{\omega_1} \operatorname{ctg} \gamma = a_{12} \sigma_x^0 + a_{22} \sigma_y^0 + a_{26} \tau_{xy}^0 + \frac{4\pi a_{22}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} \left(\frac{i\gamma_1}{\mu_1} + \frac{i\gamma_2}{\mu_2} \right).$$

С другой стороны, имеем [6]

$$\begin{aligned} u(z) \Big|_{z_1}^{z+\omega_1} &= \frac{\partial u}{\partial x} \omega_1; & u(z) \Big|_z^{z+\omega_2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Re} \omega_2 + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{Im} \omega_2; \\ v(z) \Big|_z^{z+\omega_1} &= \frac{\partial v}{\partial x} \omega_1; & v(z) \Big|_z^{z+\omega_2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \operatorname{Re} \omega_2 + \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{Im} \omega_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

На основании (3.1) равенства (3.4) запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} h_1}{\omega_1} &= e_1; & \frac{\operatorname{Re} h_2}{\operatorname{Im} \omega_2} &= e_1 \operatorname{ctg} \gamma + e_{12} - \omega; \\ \frac{\operatorname{Im} h_1}{\omega_1} &= e_{12} + \omega; & \frac{\operatorname{Im} h_2}{\operatorname{Im} \omega_2} &= (e_{12} + \omega) \operatorname{ctg} \gamma + e_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда с учетом (3.5) соотношения (3.3) примут вид

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11} \sigma_x^0 + a_{12} \sigma_y^0 + a_{16} \tau_{xy}^0 - 4a_{11} \Delta_4; \\ e_2 &= [a_{12} \sigma_x^0 + a_{22} \sigma_y^0 + a_{26} \tau_{xy}^0 + \frac{4\pi a_{11}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} \left(\frac{i\gamma_1}{\mu_1} + \frac{i\gamma_2}{\mu_2} \right)]; \\ 2e_{12} &= a_{16} \sigma_x^0 + a_{26} \sigma_y^0 + a_{66} \tau_{xy}^0 - \frac{a_{11}}{\omega_1} 2 \operatorname{Re} (\mu_2^3 \delta_1^{(1)} \gamma_1 + \mu_2^3 \delta_1^{(2)} \gamma_2) - \\ &- \frac{a_{22}}{\omega_1} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\delta_1^{(1)} \gamma_1}{\mu_1} + \frac{\delta_1^{(2)} \gamma_2}{\mu_1} \right) + a_{11} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 K_1 + \mu_2^3 K_2) + \\ &+ a_{22} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{K_1}{\mu_1} + \frac{K_2}{\mu_2} \right) + \frac{4\pi a_{11}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} (i\mu_1^2 \gamma_1 + i\mu_2^2 \gamma_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Положим $\omega(t) = \omega_1(t) \sigma_x^0 + \omega_2(t) \sigma_y^0 + \omega_3(t) \tau_{xy}^0$, тогда

$$\gamma_1 = \gamma_{11} \sigma_x^0 + \gamma_{12} \sigma_y^0 + \gamma_{13} \tau_{xy}^0; \quad \gamma_2 = \gamma_{21} \sigma_x^0 + \gamma_{22} \sigma_y^0 + \gamma_{23} \tau_{xy}^0. \quad (3.7)$$

Подставляя выражения (3.7) в (3.6), приходим к закону связи между средними напряжениями и деформациями структуры

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11}^* \sigma_x^0 + a_{12}^* \sigma_y^0 + a_{16}^* \tau_{xy}^0; & e_2 &= a_{21}^* \sigma_x^0 + a_{22}^* \sigma_y^0 + a_{26}^* \tau_{xy}^0; \\ 2e_{12} &= a_{61}^* \sigma_x^0 + a_{62}^* \sigma_y^0 + a_{66}^* \tau_{xy}^0; & a_{1k}^* &= a_{1k} - \frac{4\pi a_{11}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} (i\mu_1 \gamma_{1j} + i\mu_2 \gamma_{2j}); \\ a_{2k}^* &= a_{2k} + \frac{4\pi a_{22}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re} \left(\frac{i\gamma_{1j}}{\mu_1} + \frac{i\gamma_{2j}}{\mu_2} \right); \\ a_{6k}^* &= a_{k6} - \frac{a_{11}}{\omega_1} 2 \operatorname{Re} (\mu_1^3 \delta_1^{(1)} \gamma_{1j} + \mu_2^3 \delta_1^{(2)} \gamma_{2j}) - \frac{a_{22}}{\omega_1} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\delta_1^{(1)} \gamma_{1j}}{\mu_1} + \frac{\delta_1^{(2)} \gamma_{2j}}{\mu_2} \right) + \end{aligned} \quad (3.8)$$

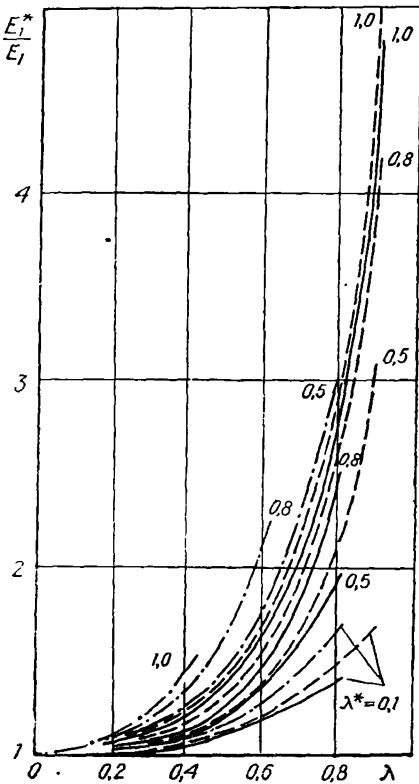


Рис. 2.

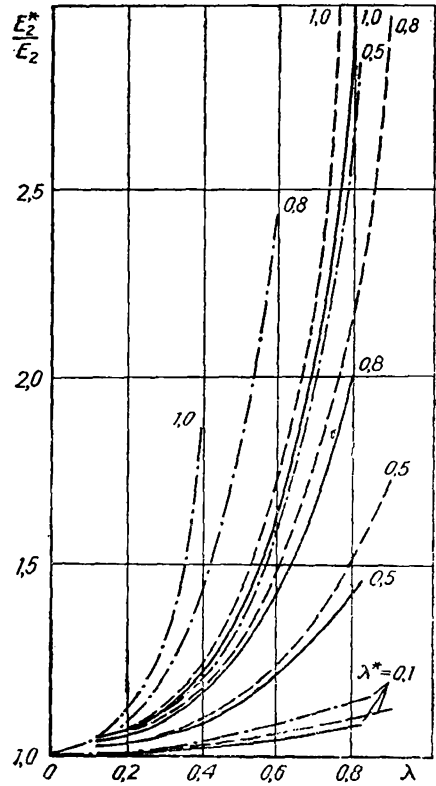


Рис. 3.

$$+ a_{11} 2 \operatorname{Re}(\mu_1^3 K_{1j} + \mu_2^3 K_{2j}) + a_{22} 2 \operatorname{Re}\left(\frac{K_{1j}}{\mu_1} + \frac{K_{2j}}{\mu_2}\right) +$$

$$+ \frac{4\pi a_{11}}{\omega_1 \operatorname{Im} \omega_2} \operatorname{Re}(i\mu_1^2 \gamma_{1j} + i\mu_2^2 \gamma_{2j}) \quad (k = 1, 2, 6; j = 1, 2, 3),$$

где K_{1j} и K_{2j} определяются с учетом (3.7) по формулам (1.9) и (1.10).

Величины α_{ik}^* представляют собой макроскопические упругие параметры структуры. Построение макромодели закончено.

Пример. Рассмотрим текстолит с параметрами $E_1 = 0,941 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $E_2 = 0,669 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $G = 0,277 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu_1 = 0,328$; $\mu_1 = 1,376i$; $\mu_2 = 0,862i$. Поперечное сечение волокон возьмем в виде эллипса с полуосями a^* и b^* (полуось a^* — ориентирована вдоль оси E_1). Расчеты были проведены для трех типов решеток: квадратной ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$), правильной треугольной ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$), прямоугольной ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = i$). Результаты численных расчетов для каждого вида решетки даны в виде графиков на рис. 2—5. Сплошные линии соответствуют квадратной решетке, штриховые — правильной треугольной, штрих-пунктирные — прямоугольной. Каждая кривая построена для определенного значения параметра $\lambda^* = b^*/a^*$. Вся серия кривых построена относительно параметра $\lambda = 2a^*/\omega_1$ (ω_1 — расстояние между центрами отверстий по оси OX).

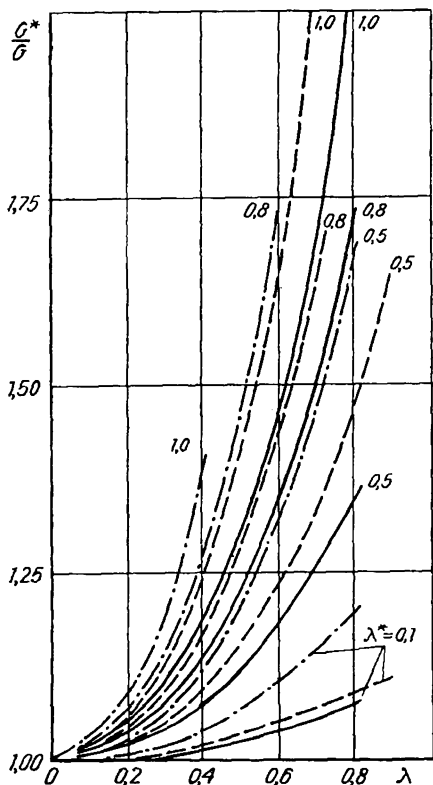


Рис. 4.

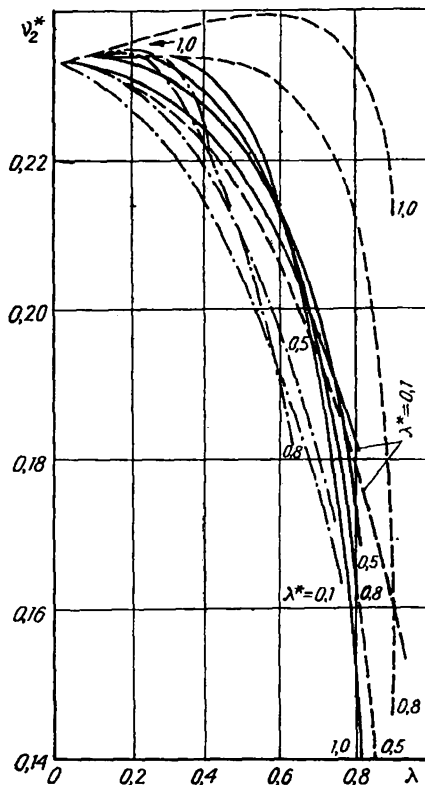


Рис. 5.

На рис. 2, 3, 4 даны кривые отношения проведенных модулей упругости E_1^* , E_2^* , G^* к модулю упругости материала E_1 , E_2 , G соответственно, а на рис. 5 показан график изменения приведенного коэффициента Пуассона v_2^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., «Наука», 1970. 303 с.
2. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями. К., «Наук. думка», 1971. 229 с.
3. Григолюк Э. И., Кац В. Е., Фильштинский Л. А. Двоякопериодическая задача теории упругости для плоской анизотропной среды.— Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1971, № 6, с. 45—53.
4. Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала.— Прикл. мат. и мех., 1975, 39, № 3, с. 537—546.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., ГИТТЛ, 1957. 463 с.
6. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой.— Прикл. мат. и мех., 1973, 37, № 2, с. 262—273.

Новосибирский электротехнический институт
Сумский филиал Харьковского политехнического института

Поступила
10.XI 1975 г.