

УДК 539.3

Л. А. Фильштинский, В. А. Любчак

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАСЧЕТА МАКРОМОДЕЛИ ДИСКА С РЕБРАМИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Исследование напряженного состояния в оболочках и дисках с ребрами содержится, например, в [1—3]. В настоящей статье циклически симметричная задача о вращении диска с ребрами изучается методами теории сингулярных интегральных уравнений. Такой подход дает возможность в явном виде выявить характер особенности в контактных усилиях.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим изотропный круговой диск с циклически симметричной системой радиальных ребер и вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Будем предполагать, что ребра скреплены с диском по линиям  $L_j$  ( $j=0, n-1$ ), угол циклически равен  $\beta$ , радиус и толщина диска  $R$  и  $h$  соответственно (рис. 1).

В этих условиях в диске возникает сингулярное циклически симметричное поле напряжений. Задача заключается в определении напряжений в диске и ребре, а также в определении эффективных упругих параметров системы диск—ребро.

Напряжения в диске выражаются через аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  по известным формулам [5]. Требования циклической симметрии напряжений приводят к условиям

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi(ze^{i\beta}) \quad (j = \overline{0, n-1}); \\ \Psi(z) &= e^{2ij\beta} \Psi(ze^{i\beta}).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Соответственно этому представим функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  в виде

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \\ \Psi(z) &= \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \int_{L_0} q(x) G_1(x, z) dx; \\ \Psi_1(z) &= \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \int_{L_0} q(x) G_2(x, z) dx; \quad \Phi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^{kn}; \\ \Psi_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn-2} z^{kn-2} \quad (n \geq 2); \quad G_1(x, z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^{ij\beta}}{xe^{ij\beta} - z}; \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}; \\ G_2(x, z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{x}{(xe^{ij\beta} - z)^2} + \frac{\kappa e^{-ij\beta}}{xe^{ij\beta} - z} \right],\end{aligned}\quad (1.2)$$

причем  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  учитывают инерционные члены в сплошном диске;  $q(x)$  — скачок касательных напряжений на  $L_0$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала диска.

Условия равновесия элемента ребра дают

$$P(x) = -h \int_a^x q(x) dx - \frac{1}{2} \rho_c F_c \omega^2 (x^2 - a^2). \quad (1.3)$$

Здесь  $P(x)$  — погонное усилие в ребре;  $\rho_c$  и  $F_c$  — соответственно плотность и площадь поперечного сечения ребра;  $a$  — начало,  $b$  — конец отрезка  $L_0$ .

Из (1.3) следует статическое условие

$$\int_a^b q(x) dx = -\frac{1}{2h} \rho_c F_c \omega^2 (b^2 - a^2). \quad (1.4)$$

Условия совместности деформаций ребра и диска имеют вид

$$\varepsilon(x_0) = \varepsilon_c(x_0); \quad \varepsilon_c(x_0) = \frac{P(x_0)}{E_c F_c}; \quad (1.5)$$

$$\varepsilon(x_0) = \frac{du}{dx_0} \quad (x_0 \in L_0).$$

Здесь  $u$  — смещение в диске вдоль оси  $x$ ;  $E_c$  — модуль упругости ребра.

Таким образом, необходимо определить функцию  $q(x)$  и коэффициенты  $a_{kn}$ ,  $b_{kn-2}$ , фигурирующие в представлениях (1.2), из условия совместности деформаций (1.5), краевых условий на контуре диска и дополнительного условия (1.4).

**§ 2. Сведение краевой задачи к сингулярному уравнению.** Краевые условия на контуре диска имеют вид

$$\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - e^{2i\theta} [\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)] = 0; \quad \zeta = Re^{i\theta}. \quad (2.1)$$

Подставляя в (2.1) предельные значения функций из (1.2), находим после преобразований ( $\rho$  — плотность материала диска)

$$\operatorname{Re} a_0 = \frac{\nu + 3}{16} \rho \omega^2 R^2 + \frac{n(\nu - 1)}{8\pi R^2} \int_{L_0} q(x) x dx;$$

$$a_{kn} = n(1 - \kappa + kn) \frac{R^{-2kn-2}}{2\pi(1 + \kappa)} \int_{L_0} q(x) x^{kn+1} dx -$$

$$- n(kn + 1) \frac{R^{-2kn}}{2\pi(1 + \kappa)} \int_{L_0} q(x) x^{kn-1} dx \quad (k \geq 1); \quad b_{kn-2} = n(1 - kn)(1 -$$

$$- \kappa + kn) \frac{R^{-2kn}}{2\pi(1 + \kappa)} \int_{L_0} q(x) x^{kn+1} dx + k^2 n^3 \frac{R^{-2kn+2}}{2\pi(1 + \kappa)} \int_{L_0} q(x) x^{kn-1} dx \quad (k \geq 1).$$

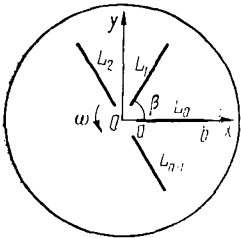


Рис. 1

Подставляя (1.2) в условия совместности деформаций (1.5) и учитывая соотношения (2.2), приходим к основному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{L_0} q(x) \left\{ \frac{1}{x-x_0} + G(x, x_0) \right\} dx - \Lambda \int_a^{x_0} q(x) dx = N(x_0);$$

$$N(x_0) = \frac{2\pi\rho\omega^2 R^2}{3-\nu} \left[ \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{4(1+\nu)} + \frac{E\rho_c}{E_c\rho(1+\nu)} \frac{x_0^2 - a^2}{R^2} - \frac{3(1-\nu)}{4} \cdot \frac{x_0^2}{R^2} \right]; \quad \Lambda = \frac{4\pi Eh}{(1+\nu)(3-\nu)E_c F_c};$$

$$G(x, x_0) = -\frac{1+\nu}{2(3-\nu)} \left\{ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(1-\kappa)e^{j\beta} - (1+\kappa)e^{-j\beta}}{xe^{j\beta} - x_0} - \right. \quad (2.3)$$

$$- \frac{n}{2}(\kappa-1)^2 \frac{x}{R^2} + nA \left[ (\kappa-1) \frac{R^2(x^2 - x_0^2) + x^2 x_0^2(1-\kappa)}{R^2 x x_0^2} + \right.$$

$$\left. \left. + nB \frac{2x^2 x_0^2(\kappa-1) - \kappa R^2(x^2 + x_0^2) + 2R^2 x_0^2}{R^2 x x_0^2} + n^2 BC \frac{(R^2 - x^2)(x_0^2 - R^2)}{R^2 x x_0^2} \right] \right\};$$

$$A = \frac{x^n x_0^n}{R^{2n} - x^n x_0^n}; \quad B = \frac{R^{2n}}{R^{2n} - x^n x_0^n}; \quad C = \frac{R^{2n} + x^n x_0^n}{R^{2n} - x^n x_0^n}.$$

К уравнению (2.3) необходимо присоединить дополнительное условие (1.4).

§ 3. Макромодель диска с ребрами. Под этим понимаем однородный цилиндрически анизотропный [4] диск того же радиуса, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ , радиальные смещения на ободе которого равны средним радиальным смещениям на ободе диска с ребрами.

Используя условия циклической симметрии, находим среднее радиальное смещение на ободе периодически повторяющегося сектора

$$\langle v_r \rangle = \frac{1}{\beta} \int_{-\frac{\beta}{2}}^{+\frac{\beta}{2}} v_r|_{r=R} d\theta; \quad (3.1)$$

$$\langle v_r \rangle = \frac{\rho\omega^2 R^3(1-\nu)}{4E} - \frac{n(1-\nu)}{2\pi RE} \int_{L_0} q(x) x dx.$$

Радиальные смещения модельного диска с цилиндрической анизотропией в поле центробежных сил имеют вид

$$u_r = \frac{\langle \rho \rangle \omega^2 R^3 (1 - \langle v_\theta \rangle \langle v_r \rangle)}{9 \langle E_r \rangle - \langle E_\theta \rangle - 3 \langle v_r \rangle \langle E_\theta \rangle + 3 \langle v_\theta \rangle \langle E_r \rangle} \left[ \frac{\langle v_\theta \rangle + 3}{\lambda + \langle v_\theta \rangle} \left( \frac{r}{R} \right)^\lambda - \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right]; \quad (3.2)$$

$$\lambda = \frac{(\langle E_\theta \rangle \langle \nu_r \rangle - \langle \nu_\theta \rangle \langle E_r \rangle) + \sqrt{(\langle E_\theta \rangle \langle \nu_r \rangle - \langle \nu_\theta \rangle \langle E_r \rangle)^2 + 4 \langle E_r \rangle \langle E_\theta \rangle}}{2 \langle E_r \rangle}.$$

Здесь  $\langle E_r \rangle$  и  $\langle E_\theta \rangle$ ,  $\langle \nu_r \rangle$  и  $\langle \nu_\theta \rangle$  — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона макромоделей;  $r$  — текущий радиус.

Сравнивая выражения (3.1) и (3.2) на ободе диска и отнеся их к соответствующему перемещению однородного изотропного диска, находим

$$M = \frac{4E(3-\lambda)\langle \rho \rangle(1-\langle \nu_\theta \rangle \langle \nu_r \rangle)}{\rho(\lambda + \langle \nu_\theta \rangle)(1-\nu)(9\langle E_r \rangle - \langle E_\theta \rangle - 3\langle \nu_r \rangle \langle E_\theta \rangle + 3\langle \nu_\theta \rangle \langle E_r \rangle)} = 1 - \frac{2n}{\pi \rho \omega^2 R^4} \int_{L_0} q(x) x dx. \quad (3.3)$$

Полученный макропараметр дает возможность свести задачу о приближенной оценке напряженного и деформированного состояния

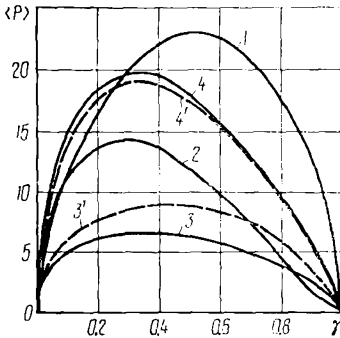


Рис. 2

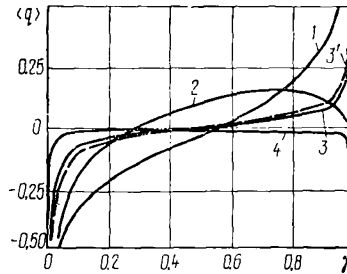


Рис. 3

диска с ребрами к осесимметричной задаче для однородного диска с цилиндрической анизотропией.

**§ 4. Равнопрочное ребро.** Под этим понимаем ребро, в любом сечении которого нормальные напряжения одинаковы. В этом случае сингулярное уравнение имеет вид

$$\int_{L_0} q(x) \left[ \frac{1}{x-x_0} + G(x, x_0) \right] dx = N_*(x_0); \quad (4.1)$$

$$N_*(x_0) = \frac{2\pi \rho \omega^2 R^2}{3-\nu} \left[ \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{4(1+\nu)} - \frac{3(1-\nu)}{4} \frac{x_0^2}{R^2} - \frac{2E[\sigma]}{(1+\nu)E_c \rho \omega^2 R^2} \right].$$

Здесь  $[\sigma]$  — допускаемые напряжения в ребре.

К (4.1) надо присоединить дополнительное условие

$$\int_a^b q(x) e^{\alpha x} dx = 0 \left( \alpha = \frac{\rho_c \omega^2}{2[\sigma]} \right). \quad (4.2)$$

Площадь в любом сечении ребра определяется по формуле

$$F(x) = -\frac{h}{[\sigma]} \int_a^x q(t) e^{\alpha(t^2-x^2)} dt. \quad (4.3)$$

§ 5. **Результаты расчетов.** Сингулярные уравнения (2.3) и (4.1) сводились к системе алгебраических уравнений при помощи процедуры, описанной в работе [6]. Отрезок  $L_0$  разбивался на 20 частей.

На рис. 2 приведены графики изменения  $\langle P \rangle = P(x) / \rho \omega^2 R^2 F_c$  в функции от параметра  $\gamma = 0,5(x - l_0 + l) / l$  ( $l_0$  — расстояние от центра диска до середины ребра;  $2l$  — длина ребра). Результаты соответствуют значениям  $\nu = 0,3$ ,  $R/l = 3$ ,  $hl/F_c = 100$ . Кривые 1, 2, 3, 3', 4, 4' отвечают значениям:

$$n = 9, l_0/l = 1,02, E/E_c = 0, \rho_c/\rho = 5;$$

$$n = 6, l_0/l = 2, E/E_c = 0, \rho_c/\rho = 0;$$

$$n = 19, l_0/l = 1,7, E/E_c = 0,01, \rho_c/\rho = 5;$$

$$n = 19, l_0/l = 1,7, E/E_c = 0, \rho_c/\rho = 5;$$

$$n = 2, l_0/l = 1,7, E/E_c = 0, \rho_c/\rho = 5;$$

$$n = 2, l_0/l = 1,7, E/E_c = 0, \rho_c/\rho = 0.$$

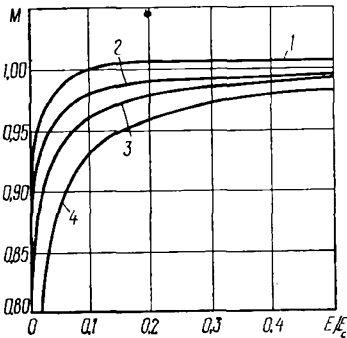


Рис. 4

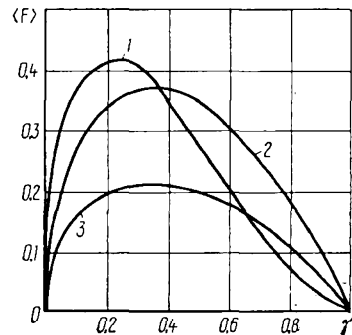


Рис. 5

Из сравнения кривых 4 и 4' видно, что учет сил инерции ребра при данных значениях параметров не существенно изменяет усилия в ребре; из сравнения кривых 3 и 3', — что жесткость ребра существенно влияет на усилия в нем.

На рис. 3 приведены графики изменения величины  $\langle q \rangle = q(x) / \rho \omega^2 R^2$  в функции от параметра  $\gamma$ . Кривые 1, 2, 3, 3' отвечают тем же значениям параметров, что и кривые 1, 2, 3, 3' рис. 1. Кривая 4 соответствует значениям

$$n = 6, R/l = 3, l_0/l = 2, \nu = 0,3, E/E_c = 0,5,$$

$hl/F_c = 100$ ,  $\rho_c/\rho = 10$ . Отсюда видно, что учет инерционных сил для достаточно массивного ребра изменяет характер касательных напряжений. Интересно отметить, что при выходе ребра на границу диска касательные усилия имеют особенность при наличии сил инерции; если же инерции не учитывать, то особенность исчезает.

На рис. 4 приведены графики изменения макропараметра (3.3) в функции от жесткости ребра. Результаты получены при значениях  $\nu = 0,3$ ,  $hl/F_c = 100$ . Кривые 1, 2, 3, 4 построены соответственно для зна-

чений

$$n = 9, R/l = 3, l_0/l = 1,7, \rho_c/\rho = 5;$$

$$n = 9, R/l = 3, l_0/l = 1,7, \rho_c/\rho = 0;$$

$$n = 19, R/l = 3, l_0/l = 1,7, \rho_c/\rho = 0;$$

$$n = 15, R/l = 2,04, l_0/l = 1,02, \rho_c/\rho = 0.$$

На рис. 5 приведены графики изменения величины  $\langle F \rangle = F(x)/hl$  в функции от параметра  $\gamma$ . Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям:

$$n = 5, R/l = 3, l_0/l = 1,7, \nu = 0,3, E/E_c = 0,01, \rho\omega^2 R^2/[\sigma] = 2, \rho_c/\rho = 5,$$

$$n = 5, R/l = 3, l_0/l = 1,7, \nu = 0,3, E/E_c = 0,01, \rho\omega^2 R^2/[\sigma] = 2, \rho_c/\rho = 0;$$

$$n = 15, R/l = 3, l_0/l = 1,7, \nu = 0,3, E/E_c = 0,01, \rho\omega^2 R^2/[\sigma] = 2;$$

$$\rho_c/\rho = 1.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин.— Киев: Изд-во АН УССР, 1952.— 420 с.
2. Волк С. И. Циклически симметричная деформация оболочек вращения с меридиальными ребрами.— Прикл. механика, 1971, 7, № 8, с. 16—23.
3. Григоренко Я. М., Митлин Б. И., Раер Г. А., Судацова Г. К. Исследование напряженности покрывающих дисков рабочих колес центробежных компрессоров с учетом дискретного размещения лопаток.— Прикл. механика, 1978, 14, № 1, с. 116—119.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.— 416 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.— 648 с.
6. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.— 304 с.

Сумский филиал  
Харьковского политехнического института

Поступила  
20.III 1978 г.