ПОРОДЖУЮЧІ ГРУПИ ЛОРЕНЦА В ОРИСФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ НА КОНУСІ ІМПУЛЬСНОГО РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО ПРОСТОРУ

Ільєнко Д.В., *магістрант*
Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка

У нерелятивістській квантовій механіці широко використовуються власні функції моменту кількості руху – оператора, який комутує з усіма операторами групи поворотів, яка зберігає інваріантним інтервал у 3-вимірному евклідовому просторі. Група Лоренца зберігає інваріантним інтервал у 4-вимірному просторі Мінковського і включає в себе групу звичайних поворотів у 3-вимірному евклідовому просторі, як підгрупу.

У даній роботі розглядається 4-вимірний імпульсний простір Мінковського векторів енергії-імпульсу $p \equiv (\vec{\varepsilon}, \vec{p}) = (p_0 = \varepsilon, p_1, p_2, p_3)$ – таких, що лежать на поверхні конуса: $p_0^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 0$, $p_0 > 0$, у цьому просторі.

Ми вводимо на цьому просторі орисферичну систему координат: $p_0 = e^a \dfrac{r^2+1}{2}, p_1 = e^a r\cos\varphi, p_2 = e^a r\sin\varphi, p_3 = e^a \dfrac{r^2-1}{2}, -\infty < a < \infty,\quad 0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi$, і обчислюємо в цій системі координат генератори групи Лоренца. У декартових координатах їх можна представити у наступному вигляді:

$$L_{0i} = -i\left(p_0 \frac{\partial}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_0}\right), L_{jk} = -i\left(p_j \frac{\partial}{\partial p_k} - p_k \frac{\partial}{\partial p_j}\right),\ i, j = 1,2,3$$

Вони задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

$$\left[M_i, M_j\right] = i\varepsilon_{ijk} M_k,\ \left[N_i, N_j\right] = i\varepsilon_{ijk} M_k,\quad \left[M_i, N_j\right] = i\varepsilon_{ijk} N_k,$$

де $N_j \equiv L_{0j}, M_1 \equiv L_{23}, M_2 \equiv L_{31}, M_3 \equiv L_{12}$. Тут ε_{ijk} - це антисиметричний тензор другого рангу, який дорівнює 1 для індексів, які знаходяться у циклічному порядку переміщення; -1 для індексів, які знаходяться у нециклічному порядку переміщення; 0, якщо хоча б два з них співпадають.

Зауважимо, що оператори M_1, M_2, M_3 генерують групу 3-вимірних поворотів, і є компонентами моменту кількості руху $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Квадрат цього оператора є інваріантним оператором цієї групи (оператор, що комутує з усіма компонентами M_1, M_2, M_3).

Оператори N_1, N_2, N_3 самостійно не утворюють групи Лоренца. Вони генерують чисто лоренцівські (гіперболічні) повороти, тобто перехід між різними інерціальними системами відліку, які генерують зв'язок між векторами $(p_0, \vec{p})$ 4-енергій-імпульсів у різних системах відліку. Самі оператори M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3 ми називаємо компонентами 4-вимірного моменту кількості руху. З них складається інваріантний оператор групи Лоренца. Розрахунки у введеній системі координат дають такий явний вигляд для цих операторів:

$$N_1 = L_{01} = -i\left(r\cos\varphi \frac{\partial}{\partial a} - \frac{(r^2-1)\cos\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(r^2+1)\sin\varphi}{2r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$N_2 = L_{02} = -i\left(r\sin\varphi \frac{\partial}{\partial a} - \frac{(r^2-1)\sin\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(r^2+1)\cos\varphi}{2r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$N_3 = L_{03} = -i\left(-\frac{\partial}{\partial a} + \frac{r^3+1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$M_1 = L_{23} = -i\left(-r\sin\varphi \frac{\partial}{\partial a} + \frac{(r^2+1)\sin\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(r^2-1)\cos\varphi}{2r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$M_2 = L_{31} = -i\left(r\cos\varphi \frac{\partial}{\partial a} - \frac{(r^2+1)\cos\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(r^2-1)\sin\varphi}{2r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$M_3 = L_{12} = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Використовуючи ці формули ми показали, що ці оператори задовольняють вище приведеним комутаційним співвідношенням. Подальшою задачею є знаходження явного вигляду оператора F^2 та його власних функцій у розглядуваній системі координат.

Використання матеріалів цієї роботи можливе під час викладання курсів класичної та квантової механіки для поглиблення знань та практичних навичок студента вищої школи, та в курсі диференціального та інтегрального числення для реалізації принципу міжпредметних зв’язків у навчальній діяльності.

Керівник: Качурик І.І., *професор, д.ф.м.н.*