УДК 539.3

Л. А. Фильштинский

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЫХОДЯЩИМ НА ГРАНИЦУ РЕБРОМ

Задача о передаче нагрузки от тонкого ребра к упругой изотропной полуплоскости рассмотрена в [9]. Контактные задачи для анизотропной среды исследованы в работе Г. Н. Савина [5]. В [6] дано решение контактной задачи об упругой анизотропной полуплоскости, усиленной вдоль участка границы упругой накладкой. В данной работе исследуется взаимодействие анизотропной полубесконечной пластинки с упругим ребром, выходящим под углом к ее границе. В этом случае порядок особенности контактных усилий в окрестности выходящего на границу конца ребра существенно зависит от характера анизотропии и угла наклона ребра. Задача сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению, которое реализуется численно. Приводятся результаты расчетов. Выявлены некоторые особенности в распределении контактных усилий, которые могут быть использованы при проектировании сварных или усиленных ребрами конструкций.

§ 1. Рассмотрим анизотропную полубесконечную пластинку, граница которой $y=0$ свободна от сил. Пусть вдоль произвольно ориентированного отрезка длиной $2l$ пластинка усилена тонким ребром жесткости, к концу которого приложена сосредоточенная сила P (рис. 1).

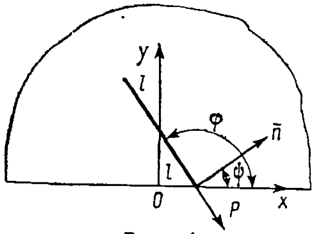

Рис. 1

Будем предполагать, что ребро непрерывно скреплено с пластиной, расположено симметрично относительно ее срединной плоскости и работает лишь на растяжение — сжатие.

Согласно [2], напряжения и смещения в пластинке выражаются через аналитические функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ следующим образом:

$$\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)];\quad z_\nu = x + \mu_\nu y;\quad \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)];\quad \Phi_\nu(z_\nu) = \varphi'_\nu(z_\nu);\quad \sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)];$$

$$\mathrm{Im}\,\mu_\nu > 0\,(\nu = 1, 2);\quad u = 2\mathrm{Re}\,[p_1\varphi_1(z_1) + p_2\varphi_2(z_2)];\quad v = 2\,\mathrm{Re}\,[q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)];\quad p_\nu = a_{11}\mu_\nu^2 + a_{12} - a_{16}\mu_\nu;\quad q_\nu = a_{12}\mu_\nu + \frac{a_{22}}{\mu_\nu} - a_{26}. \qquad (1.1)$$

Здесь σ_y, τ_{xy}, σ_x, u, v — соответственно компоненты тензора напряжения и вектора упругого смещения; a_{ik} — коэффициенты закона Гука; μ_ν — характеристические числа.

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии сосредоточенной силы $\vec{Q} = (-Q\sin\psi, Q\cos\psi)$, приложенной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ верхней полуплоскости со свободной от сил границей $y = 0$.

Можно показать, что решение этой задачи таково:

$$\Phi_1^0(z_1)=\frac{A_1}{z_1-z_{10}}+\frac{\alpha_{11}\overline{A}_1}{z_1-\overline{z}_{10}}+\frac{\alpha_{12}\overline{A}_2}{z_1-\overline{z}_{20}}\quad(\nu=1,2);\quad \Phi_2^0(z_2)=\frac{A_2}{z_2-z_{20}}+$$

$$+\frac{\alpha_{21}\overline{A}_1}{z_2-\overline{z}_{10}}+\frac{\alpha_{22}\overline{A}_2}{z_2-\overline{z}_{20}};\quad z_\nu=x+\mu_\nu y;\quad \alpha_{11}=\frac{\mu_2-\overline{\mu}_1}{\mu_1-\mu_2};\quad \alpha_{21}=\frac{\overline{\mu}_1-\mu_1}{\mu_1-\mu_2};$$

$$\alpha_{12}=\frac{\mu_2-\overline{\mu}_2}{\mu_1-\mu_2};\quad \alpha_{22}=\frac{\overline{\mu}_2-\mu_1}{\mu_1-\mu_2};\quad A_\nu=-\frac{Q}{2\pi h}\delta_\nu;\quad z_{\nu 0}=x_0+\mu_\nu y_0. \tag{1.2}$$

Здесь h — толщина пластинки; δ_ν — решения полученной из условий однозначности смещений и статических условий системы алгебраических уравнений.

$$2\,\mathrm{Im}\sum_{\nu=1}^{2}\delta_\nu\mu_\nu^{k-1}=\Delta_k\quad(k=0,1,2,3);\quad a_{22}\Delta_0=a_{26}\cos\psi-a_{12}\sin\psi;$$

$$\Delta_1=\cos\psi;\quad \Delta_2=\sin\psi;\quad a_{11}\Delta_3=a_{16}\sin\psi-a_{12}\cos\psi. \tag{1.3}$$

Определитель системы (1.3) — типа Вандермонда [7] — отличен от нуля.

Используя решение (1.2) вспомогательной задачи, представляем функции $\Phi_k(z_k)$, описывающие поля напряжений в полуплоскости с ребром, в виде

$$\Phi_k(z_k)=\frac{\delta_k}{2\pi h}\int_L\frac{q(t)\,ds}{t_k-z_k}+\sum_{m=1}^{2}\frac{\alpha_{km}\overline{\delta}_m}{2\pi h}\int_L\frac{q(t)\,ds}{\overline{t}_m-z_k};$$

$$\mathrm{Im}\,q(t)=0,\quad t_k=\mathrm{Re}\,t+\mu_k\,\mathrm{Im}\,t,\quad t\in L\quad(k=1,2). \tag{1.4}$$

Здесь под $q(t)$ понимается погонное контактное усилие, передающееся от ребра к пластине; ds — элемент дуги контура L.

Функции (1.4) удовлетворяют на границе полуплоскости $y=0$ краевым условиям $\sigma_y=\tau_{xy}=0$ независимо от выбора $q(t)$.

Условия совместности деформаций пластинки и ребра на L имеют вид

$$\frac{N(s_0)}{E_0F_0}=\varepsilon(t_0);\quad N(s_0)=\int_{s_0}^{l}q(s)\,ds;\quad N(-l)=-P;$$

$$t_0=t(s_0)\in L. \tag{1.5}$$

Здесь E_0; F_0, $N(s)$ — соответственно модуль упругости, площадь поперечного сечения ребра и погонное усилие в нем; $\varepsilon(t_0)$ — деформация пластины вдоль L; s, s_0 — координаты вдоль оси ребра.

Учитывая (1.1), деформацию вдоль оси ребра представляем формулой

$$\varepsilon=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}(q_k\cos\psi-p_k\sin\psi)\,a_k(\psi)\,\Phi_k(t_k);$$

$$a_k=\mu_k\cos\psi-\sin\psi. \tag{1.6}$$

Подставляя в (1.6) полусумму предельных значений функции (1.4) и привлекая условие совместности деформаций (1.5), приходим после преобразований к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно контактного усилия $q(s)$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2} R_k(\psi)\left\{\delta_k\int_L \frac{q(s)\,dt_k}{t_k-t_{k0}}+a_k(\psi)\sum_{m=1}^{2}\alpha_{km}\bar{\delta}_m\int_L \frac{q(s)\,ds}{\bar{t}_m-t_{k0}}\right\}=$$

$$=\frac{2\pi h}{E_0F_0}\int_{s_0}^{l} q(s)\,ds;\quad R_k(\psi)=q_k\cos\psi-p_k\sin\psi. \tag{1.7}$$

Если ребро не выходит на границу полуплоскости, то контактное усилие $q(s)$ имеет корневые особенности на концах линии L и численную реализацию уравнения (1.7) можно провести, например, по схеме [1].

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда нагруженный конец ребра выходит на границу полуплоскости. Тогда

$$\begin{aligned} &t=i\,(l\cos\psi+se^{i\psi});\quad t_k=l\mu_k\cos\psi+sa_k(\psi);\\ &t_0=i\,(l\cos\psi+s_0e^{i\psi});\\ &t_{k0}=l\mu_k\cos\psi+s_0a_k(\psi);\quad t\in L \end{aligned} \tag{1.8}$$

и уравнение (1.7) можно представить в виде

$$\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}+2\,\mathrm{Re}\sum_{k,m=1}^{2} b_{km}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi-r_{km}(\xi_0)}-\lambda\int_{\xi_0}^{1}\omega(\xi)\,d\xi=0;$$

$$b_{km}=\alpha_{km}\frac{\bar{\delta}_m a_k(\psi)\,R_k(\psi)}{\gamma\overline{a_m(\psi)}};\quad \gamma=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{2}R_k(\psi)\,\delta_k;\quad \lambda=\frac{2\pi lh}{E_0F_0\gamma};$$

$$r_{km}(\xi_0)=\frac{a_k(\psi)}{\overline{a_m(\psi)}}(1+\xi_0)-1;\quad -1\leqslant\xi_0\leqslant 1;\quad l\xi=s;\quad l\xi_0=s_0; \tag{1.9}$$

$$q(s)=\omega(\xi).$$

Наряду с подвижной особенностью типа Коши интегральное уравнение (1.9) содержит неподвижную особенность ($\xi=\xi_0=-1$). Уравнения подобного типа описаны, например, в [9, 4].

Для определения порядка особенности функции $\omega(\xi)$ в точке $\xi=-1$ положим

$$\omega(\xi)=\omega_0(\xi)(1+\xi)^{-\beta}\quad(\mathrm{Im}\,\beta=0,\ 0<\beta<1). \tag{1.10}$$

Имеем, согласно [3],

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\xi)}{\xi-\xi_0}\,d\xi=\pi(1+\xi_0)^{-\beta}\omega_0(-1)\,\mathrm{ctg}\,\pi\beta+C_1(\xi_0);\\ &\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi-r_{km}(\xi_0)}=\pi\frac{e^{i\pi\beta}}{\sin\pi\beta}\left(\frac{\overline{a_m(\psi)}}{a_k(\psi)}\right)^{\beta}\frac{\omega_0(-1)}{(1+\xi_0)^{\beta}}+C_2(\xi_0) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь функции $C_i(\xi)$ могут иметь особенность в точке $\xi_0=-1$, но более слабую, чем $(1+\xi_0)^{-\beta}$.

Подставляя вместо интегралов, фигурирующих в (1.9), их выражения из (1.11), приходим после обычной в таких случаях процедуры к транцендентному уравнению, определяющему величину β

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k,m=1}^{2}\frac{b_{km}}{\cos\pi\beta}\left(-\frac{\overline{a_m(\psi)}}{a_k(\psi)}\right)^{\beta}=-1. \tag{1.12}$$

§ 2. Графики величины (φ—угол наклона стрингера к оси ox) $\beta=\beta(\varphi)$ для текстолита с параметрами

$E_1=0{,}96\cdot10^4$ мн/м^2; $E_2=0{,}68\cdot10^4$ мн/м^2; $G=0{,}28\cdot10^4$ мн/м^2;

$\mu_1=1{,}376i$; $\mu_2=0{,}628i$ (кривая *1*), стеклопластика АГ — 4С с параметрами $E_1=2{,}1\cdot10^4$ мн/м^2; $E_2=1{,}6\cdot10^4$ мн/м^2;

$G=0{,}42\cdot10^4$ мн/м^2; $\nu_1=0{,}09$; $\mu_1=2{,}128i$; $\mu_2=0{,}539i$

(кривая *2*) и фанеры с упругими модулями $E_1=1{,}2\cdot10^4$ мн/м^2;

$E_2=0{,}6\cdot10^4$ мн/м^2; $G=0{,}07\cdot10^4$ мн/м^2; $\nu_1=0{,}071$; $\mu_1=4{,}11i$; $\mu_2=0{,}343i$

(кривая *3*) показаны на рис. 2.

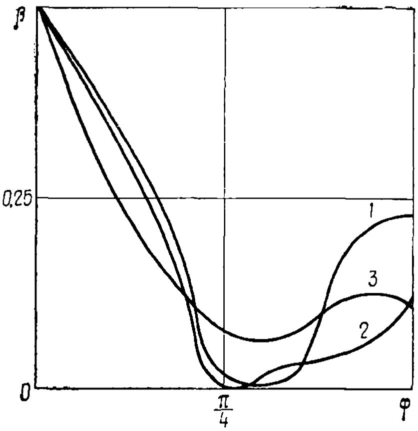

Рис. 2

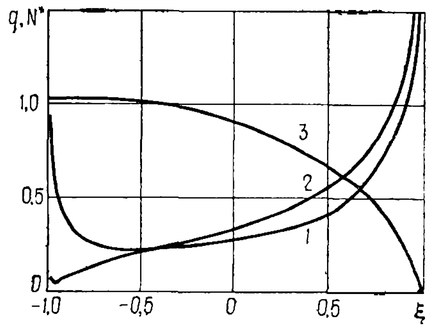

Рис. 3

На рис. 3 изображены графики распределения вдоль ребра контактных усилий $q(s)=\omega(\xi)/P$ (кривая *1* соответствует значению $\lambda=0$, кривая $2\sim\lambda=0{,}4$) и усилия в ребре $N^*=N(\xi)/Pl$ (кривая *3*) для пластинки из текстолита при $\varphi=\pi/2$.

Расчеты показывают, что усилие в ребре слабо зависит от ориентации ребра. Контактные усилия особенно в концевых зонах существенно зависят от ориентации ребра и его относительной жесткости (параметр λ). В достаточно малой окрестности любого конца контактные усилия неограниченно возрастают, однако в силу того, что порядок особенности на выходящем к границе конце ребра ниже, зона проявления этого эффекта здесь существенно меньше.

Интересное явление вскрылось при исследовании порядка особенности на выходящем к границе конце ребра (рис. 2). При угле наклона $\varphi \approx \pi/4 \div \pi/3$ концентрация напряжений исчезает почти полностью. Это обстоятельство, по-видимому, можно будет использовать в вопросах рационального проектирования, например, сварных конструкций.

1. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений.— Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 4, с. 715—718.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М. : Гостехиздат, 1957.— 356 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функции и некоторые приложения к математической физике.— 2-е изд.— М. : Физматгиз, 1962.— 600 с.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости.— М. : Наука, 1977.— 312 с.
5. Савін Г. М. Тиск абсолютно твердого штампу на пружне анізотропне середовище.— Доп. АН УРСР, 1939, № 6, с. 27—34.
6. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.— Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1976.— 536 с.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— М.; Л. : Гостехиздат, 1951.— Т. 3. Ч. 1. 336 с.
8. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к анизотропной среде.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 91—97.
9. Muki R., Sternberg E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet.— Trans. ASME. Ser. E, 1968, **35**, N 4, p. 737—746.

Сумский филиал
Харьковского политехнического института

Поступила
3.V 1979 г.