

УДК 539.3

Н. И. Волков, В. А. Любчак, Л. А. Фильштинский,
С. П. Шаповалов

О ДВУХ СПОСОБАХ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА С РАЗРЕЗАМИ

Плоские задачи теории упругости для кругового диска с разрезами рассматривались, например, в работах [3, 4], где представления решений выписаны с использованием функции Грина для круга, поэтому граничные условия на контуре диска выполнялись автоматически. Если диск имеет более сложную конфигурацию, то указанную схему реализовать трудно. В этом случае имеет смысл краевые условия на внешнем контуре диска также свести к интегральному уравнению.

На первый взгляд кажется, что введение этого интегрального уравнения увеличит вычислительные трудности, а также внесет дополнительные погрешности в величины окружных напряжений на внешнем контуре диска.

Ниже решение задачи о напряжениях во вращающемся диске с разрезами получено двумя различными указанными способами. Отмечается эффективность метода интегральных уравнений.

Рассмотрим вращающийся с постоянной угловой скоростью ω однородный изотропный диск, ослабленный криволинейными разрезами L_k ($k=0, n-1$).

Напряжения в диске представимы в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$ — напряжения, обусловленные действием центробежных сил, а $\sigma_{ij}^{(1)}$ — дополнительные напряжения, вызванные наличием границы диска и разрезов.

Напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$ могут быть выражены согласно [2] через две аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного z

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^2 \Phi_m(z); \quad \Psi(z) = \sum_{m=1}^2 \Psi_m(z). \quad (2)$$

Функции $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$, учитывающие границу области, могут быть построены

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau)}{\tau - z} d\tau; \quad \tau \in L \left(L = \bigcup_{k=0}^{n-1} L_k \right); \quad (3)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{p(\tau)}}{\tau - z} d\overline{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\tau} p(\tau)}{(\tau - z)^2} d\tau.$$

Функции $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$, учитывающие границу области, могут быть построены двумя путями:

а) в виде рядов (для круговой границы)

$$\Phi_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m; \quad \Psi_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m, \quad (4)$$

где коэффициенты a_m и b_m определяются из краевого условия на границе диска;

б) интегральными представлениями типа Д. И. Шермана [6]

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(t)}{t - z} dt; \quad t \in \Gamma; \quad (5)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{q(t)}}{t - z} d\overline{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{t} q(t)}{(t - z)^2} dt.$$

Если диск с разрезами имеет циклически симметричную структуру, то функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ следует подчинить условиям групповой симметрии

$$\Phi(ze^{ik\alpha}) = \Phi(z); \quad \Psi(ze^{ik\alpha}) = e^{-2ik\alpha}\Psi(z); \quad \alpha = 2\pi/n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

где α — угол раствора фундаментального сектора.

Считая границу диска и берега разрезов свободными от усилий, запишем краевые условия в виде [2]

$$\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})} - e^{2i\theta} [\bar{\zeta}\Phi'(\bar{\zeta}) + \Psi(\bar{\zeta})] = f(\zeta); \quad (6)$$

$$\zeta = re^{i\theta}; \quad f(\zeta) = \begin{cases} \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 R^2, & \zeta \in \Gamma; \\ \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} [2(1+\nu) + (1-\nu)e^{2i(\psi-\theta)}], & \zeta \in L. \end{cases}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала; R — радиус диска, ψ — угол между внешней нормалью к левому берегу L и осью Ox .

Подставляя предельные значения функций (2) в соответствующие краевые условия (6), в первом случае приходим к сингулярным интегральным уравнениям на разрезах, причем ядра в этих уравнениях построены на соответствующей функции Грина для круга, во втором случае приходим к смешанной системе интегральных уравнений.

Выпишем, например, интегральные уравнения для случая а)

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau + \int_L [G(\tau, \tau_0) p(\tau) d\tau + G^*(\tau, \tau_0) \overline{p(\tau)} d\bar{\tau}] = N(\tau_0);$$

$$2\pi i G(\tau, \tau_0) = \frac{d}{d\tau} \left[\ln \frac{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0}{\tau - \tau_0} \right] - \frac{e^{2i(\psi-\psi_0)} - 1}{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0} e^{-2i\psi} +$$

$$+ \frac{(R^2 - \tau\bar{\tau})(3R^2\tau - \bar{\tau}_0\tau^2 - 2R^2\tau_0) + \tau b^2}{e^{2i\psi_0} b^3} - \frac{\bar{\tau}}{b} + \frac{\bar{\tau}_0(2R^2 - \tau_0\bar{\tau})(R^2 - \tau\bar{\tau})}{R^2 b^2};$$

$$2\pi i G^*(\tau, \tau_0) = \frac{e^{2i(\psi-\psi_0)} - 1}{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0} + 2e^{-2i\psi_0} \frac{e^{i\psi} \operatorname{Re}[(\tau - \tau_0)e^{-i\psi}]}{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)^2} + \frac{\tau^2(\tau - \tau_0)}{b^2 e^{2i\psi_0}} +$$

$$+ \frac{\tau}{b} - \frac{\tau_0(R^2 - \tau\bar{\tau})(2R^2 - \tau_0\bar{\tau})}{R^2 b^2}; \quad (7)$$

$$N(\tau_0) = \frac{\rho\omega^2}{8} \left[\frac{3+\nu}{2} R^2 - (1-\nu)\tau_0\bar{\tau}_0 - \frac{1-\nu}{2} \tau_0^2 e^{-2i\psi_0} \right]; \quad b = R^2 - \bar{\tau}_0\tau.$$

К разрешающим уравнениям (7) необходимо присовокупить дополнительное условие однозначности перемещений

$$\int_{L_k} p(\tau) d\tau = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (8)$$

Таким образом, поставленная задача сведена к одному интегральному уравнению (7) или к смешанной системе интегральных уравнений, при выполнении условий (8).

Рассмотрим ряд примеров. В обоих подходах сингулярные уравнения методом [1] сводились к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестных функций в узлах интерполяции. Число точек разбиения разреза доводилось до $N=25$, причем начиная с $N=17$ дальнейшее дробление практически не сказывалось на точности результатов. Уравнение Фредгольма сводилось к линейной системе при помощи квадратурных формул типа Гаусса. Внешний контур диска последовательно разбивался на $M=40; 60; 90; 120$ равных частей, что позволило проследить динамику уточнения результатов.

Алгоритмы реализованы на ЭВМ ЕС-1022 с использованием языка FORTRAN.

В качестве первого примера рассмотрим круговой вращающийся диск с одиночным разрезом ($\nu=0,3$).

На рис. 1 приведено распределение величины $\langle \sigma_{\theta} \rangle = \sigma_{\theta} / \rho\omega^2 R^2$ (σ_{θ} — окружные напряжения) вдоль контура диска. Кривые 1 и 2 построены для диска с прямолинейным

разрезом в случае $l/R=0,1$; $R_1/R=0,85$, при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/3$ соответственно (R_1 — расстояние от центра диска до середины разреза; l — половина длины; φ — угол наклона разреза к оси Ox).

Кривая 3 соответствует разрезу вдоль дуги окружности $R_1/R=0,8$ с углом разворота $\pi/4$, а кривая 4 — разрезу вдоль дуги эллипса $x_1=r_1\cos[\varphi(\beta+1)/2]$; $y_1=r_2\sin[\varphi(\beta+1)/2]$; $r_1/R=0,5$; $r_2/R=0,7$; $\varphi=\pi/2$ (r_1 и r_2 — полуоси эллипса, $-1 \leq \beta \leq 1$).

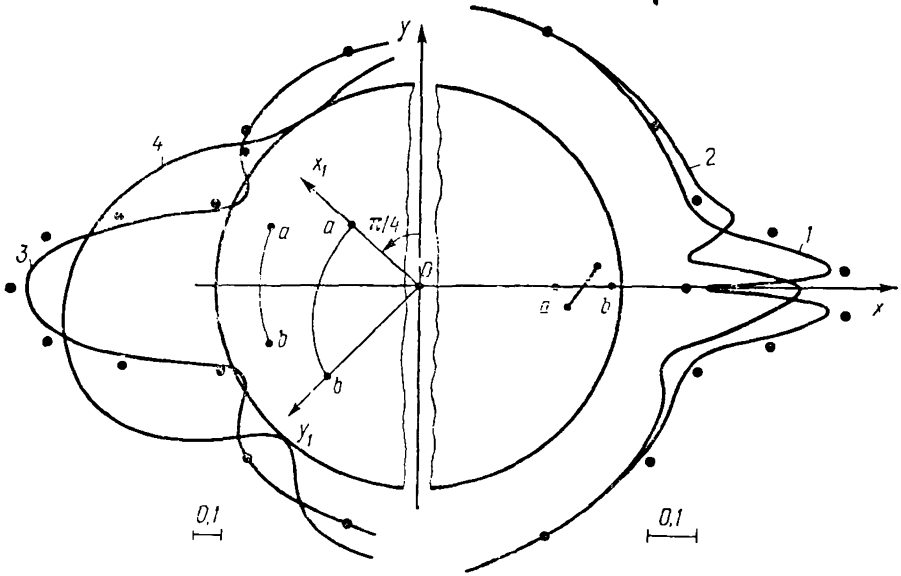


Рис. 1

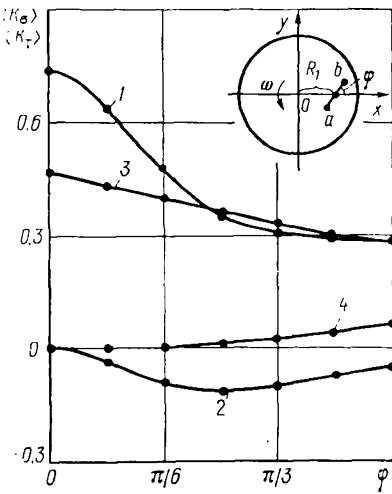


Рис. 2

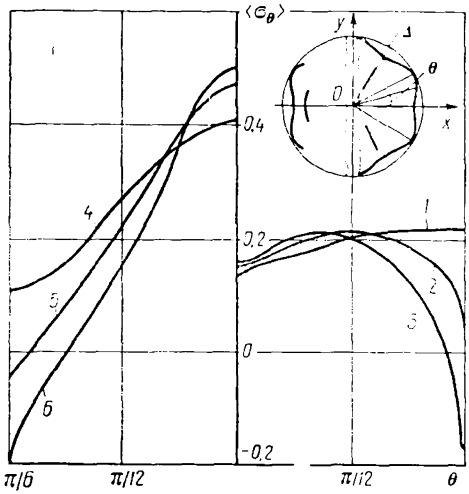


Рис. 3

Точками вдоль кривых 1 и 3 отмечены значения $\langle \sigma_\theta \rangle$, полученные вторым способом при $M=90$. Максимальная относительная погрешность при сравнении величин $\langle \sigma_\theta \rangle$, полученных двумя способами, не превышала для $M=60$; 90; 120 соответственно 21, 10, 4%.

Асимптотические значения напряжений в окрестности вершин разреза определим по методике работы [5] для $l/R=0,25$; $R_1/R=0,74$.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость от угла φ безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений нормального разрыва (кривые 1, 3)

$$\langle K\sigma \rangle = \frac{\sigma_n}{\rho\omega^2 R^3} \sqrt{\frac{r}{l}}$$

и сдвига (кривые 2, 4)

$$\langle K_{\tau} \rangle = \frac{\tau_{ns}}{\rho \omega^2 R^3} \sqrt{\frac{r}{l}},$$

где r — расстояние до вершины разреза; l — половина длины разреза.

Кривые 1, 2 приведены для вершины b , кривые 3, 4 — для вершины a . Для сравнения точками нанесены соответствующие результаты, полученные вторым способом.

В качестве следующего примера исследуем методом интегральных уравнений (второй способ) напряженное состояние циклически симметричного ($n=6$) некругового диска с системой разрезов.

Для удобства варьирования конфигурацией контура, последний задавался аналитически в виде (Δ — безразмерный параметр)

$$t_j R = (1 - \Delta \sin \Theta) e^{2i\Theta/n}; \quad 0 \leq \Theta \leq \pi.$$

На рис. 3 приведено распределение величины $\langle \sigma_{\Theta} \rangle$ вдоль границы фундаментального сектора ($0 \leq \Theta \leq \alpha/2$). Кривые 1, 2, 3 соответствуют радиальным разрезам при $l/R=0,1$; $R_1/R=0,6$ для значений $\Delta=0$ (круговой диск); $\Delta=0,05$; $\Delta=0,1$ соответственно. Кривые 4, 5, 6 построены для диска с окружными разрезами углом охвата $\pi/4$ при тех же значениях параметров R_1/R и Δ , что и для кривых 1, 2, 3 соответственно.

Из приведенных примеров видно, что наличие в диске периферийных окружных разрезов вызывает резкое увеличение концентрации окружных напряжений на контуре диска. В то же время радиальный разрез вызывает существенное перераспределение окружных напряжений таким образом, что за разрезом появляется некоторая теневая зона.

Для прямолинейного, расположенного у границы, разреза наибольшее значение коэффициента интенсивности напряжений наблюдается при его радиальной ориентации.

1. К а л а н д я А. И. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973. — 304 с.
2. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН СССР, 1966.— 707 с.
3. П а н а с ю к В. В., С а в р у к М. П., Д а ц ы ш и н А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.— 444 с.
4. С а в р у к М. П., Р у д ь Н. А., Д а ц ы ш и н А. П. Система криволинейных трещин при циклической симметрии в пластине с круговой границей.— Прикл. механика, 1978, 14, № 4, с. 125—128.
5. Ф и л ь ш т и н с к и й Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 5, с. 91—97.
6. Ш е р м а н Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах.— Докл. АН СССР, 1940, 28, № 1, с. 25—28.

Сумский филиал
Харьковского политехнического института

Поступила
03.03.81

О двух способах анализа напряженного состояния вращающегося диска с разрезами [Текст] / Н.И. Волков, В.А. Любчак, Л.А. Фильштинский, С.П. Шаповалов // Прикладная механика. — 1983. — Т. 19, №5. — С. 121-124.