

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Л. В. Волкова, Л. А. Фильштинский

(Сумы)

При динамических нагрузках в массивных деталях с начальными дефектами типа трещин возникают весьма высокие градиенты напряжений. Если трещин несколько и они расположены относительно недалеко друг от друга, то даже при низких уровнях внешних воздействий происходит подрастание и в конечном итоге слияние их в магистральную трещину. Поэтому для аргументированного проектирования массивных конструкций, содержащих узкие полости или разрезы, необходимо иметь решения сложных задач о взаимодействии упругих волн с дефектами. В первом приближении общие волновые поля напряжений можно разделить на состояния «плоской деформации» и «продольного сдвига». В данной работе изучается простейшая задача о взаимодействии волн напряжения с периодической системой криволинейных трещин в условиях продольного сдвига. Такая постановка дает возможность учесть взаимовлияние трещин, а также их кривизну на динамический коэффициент интенсивности напряжений. Полученные результаты приближенно справедливы и в том случае, когда трещин конечное число.

Описание различных стационарных волновых процессов в упругой среде с прямолинейными трещинами содержится в [1, 2], динамическая задача для криволинейной трещины — в [3]. В [4—7] приведены результаты исследований дифракции упругих и электромагнитных волн на периодических структурах.

1. Рассмотрим неограниченную упругую среду, ослабленную $2L$ -периодической системой криволинейных туннельных вдоль оси Oz разрезов $l_j \equiv l \pmod{2L}$.

Пусть из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига (w — компонента вектора упругого смещения вдоль оси Oz , ω — круговая частота, γ_2 — волновое число):

$$(1.1) \quad w_0 = \operatorname{Re} \{W_0 e^{-i\omega t}\}, \quad W_0 = \tau e^{-i\gamma_2 y}, \quad \tau = \text{const},$$

а на берегах разрезов задана одинаковая в конгруэнтных точках, гармоническая во времени нагрузка $X_n^\pm = Y_n^\pm = 0$, $Z_n^\pm = \operatorname{Re} \{Z^\pm e^{-i\omega t}\}$.

В этих условиях в среде возникает сингулярное $2L$ -периодическое волновое поле напряжений продольного сдвига τ_{xz} , τ_{yz} .

Пусть D — область, занятая средой, l — простая разомкнутая дуга Ляпунова с началом в точке a и концом в b . Будем предполагать, что $Z^+ = -Z^- = Z$ — функции класса H на замкнутой линии \bar{l} [8], причём знак плюс относится к левому берегу l при движении от a к b (фиг. 1).

Как известно, определение возникающего в среде с разрезами волнового поля сводится к краевой задаче

$$(1.2) \quad \nabla^2 W + \gamma_2^2 W = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (W + W_0)^\pm |_{l_j} = \pm \frac{1}{\mu} Z^\pm \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots),$$

где μ — модуль сдвига второго рода, верхний знак соответствует знаку скобки на левом берегу l_j , дифференцирование по направлению положительной нормали к левому берегу l_j .

Для построения общего представления решений краевой задачи (1.2) определим $2L$ -периодическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Исходим из уравнения

(1.3)

$$\nabla^2 E + \gamma_2^2 E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2kL, y),$$

где $\delta(x, y)$ — двумерная дельта-функция Дирака.

Используя разложение $2L$ -периодической дельта-функции

$$(1.4) \quad \delta_{2L}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2kL) = \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_k x}, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{L},$$

разделяя в (1.3) переменные и применяя затем преобразование Фурье в классе D' функций медленного роста [9], находим

$$(1.5) \quad E(x, y) = \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(y) e^{i\alpha_k x},$$

$$b_k(y) = -\frac{1}{2|r_k|} e^{-|r_k y|} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm \dots),$$

$$r_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{L^2} - \gamma_2^2, \quad \gamma_2 < \frac{\pi}{L},$$

где штрих над суммой означает, что член при $k = 0$, дающий ограниченное решение уравнения Гельмгольца и не затухающий при $y \rightarrow \infty$, следует отбросить.

Для выделения главной части фундаментального решения запишем $2L$ -периодическое фундаментальное решение E_0 старшего оператора в (1.3). Получаем, суммируя соответствующие ряды:

$$(1.6) \quad E_0(x, y) = \frac{1}{2L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(y) e^{i\alpha_k x} = \frac{1}{4\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{2L} \sin \frac{\pi \bar{z}}{2L} - \frac{|y|}{4L},$$

$$a_k(y) = -\frac{1}{2|\alpha_k|} e^{-|\alpha_k y|}, \quad z = x + iy \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm \dots).$$

С учетом (1.5), (1.6) представим фундаментальное решение E в окончательной форме

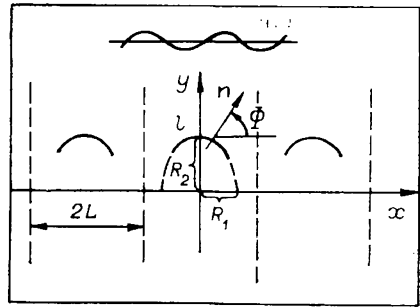
$$(1.7) \quad E(x, y) = E_0(x, y) + E^*(x, y),$$

$$E^*(x, y) = -\frac{1}{4L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_k x} f_k(y),$$

$$f_k(y) = \frac{1}{|r_k|} e^{-|r_k y|} - \frac{1}{|\alpha_k|} e^{-|\alpha_k y|}.$$

Таким образом, функция $E(x, y)$, определенная в (1.7), удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в любой точке $z \neq 2Lk$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), обладает характеристическими особенностями в точках приложения сосредоточенного функционала и затухает при $y \rightarrow \infty$.

После выделения главной части фундаментального решения общий член ряда в (1.7) затухает в точках приложения сосредоточенного функционала ($2Lk, 0$) как k^{-3} .



Ф и г. 1

2. Решение краевой задачи (1.2) будем разыскивать в виде [3]

$$(2.1) \quad W(x, y) = \frac{1}{2} \int_l P(\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial z} E(z - \zeta) d\zeta - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} E(z - \zeta) d\bar{\zeta} \right],$$

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad z \in D, \quad \zeta \in l, \\ \bar{z} = x - iy, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta,$$

где $P(\zeta)$ — искомая плотность; $E(z - \zeta) = G(x - \xi, y - \eta)$ определяются по формуле (1.7).

Представление (2.1) дает $2L$ -периодическое решение уравнения Гельмгольца (1.2), затухающее при $y \rightarrow \infty$. Раскрывая стоящие в (2.1) операторы, получаем после преобразований

$$(2.2) \quad W(x, y) = \frac{i}{8L} \int_l P(\zeta) [g(z, \zeta) + G(z, \zeta)] ds,$$

$$g(z, \zeta) = \text{Im} \left\{ \text{ctg} \frac{\pi(z - \zeta)}{2L} \frac{d\zeta}{ds} \right\}_s$$

$$G(z, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos \psi \sin \alpha_k (x - \xi) f_k(y - \eta) -$$

$$- \sin \psi \cos \alpha_k (x - \xi) f'_k(y - \eta) \text{sign}(y - \eta)] - \sin \psi \text{sign}(y - \eta),$$

где $P(\zeta)$ — искомая функция; $g(z, \zeta)$ — сингулярное, $G(z, \zeta)$ — ограниченное ядра; ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу l и осью Ox .

Переходя в (2.2) к предельным значениям при $z \rightarrow \zeta_0 \in l$, находим скачок смещения w на l

$$(2.3) \quad \Delta w = w^+ - w^- = 2\text{Re}\{e^{-i\omega t} (W^+ - W^-)\} = \text{Re}\{e^{-i\omega t} P(\zeta_0)\}.$$

Отсюда следует

$$(2.4) \quad P(a) = P(b) = 0.$$

На основании (2.4) будем предполагать, что $P(\zeta)$ — функция класса H [8] на замкнутой дуге \bar{l} , исчезающая на ее концах. Краевое условие (1.2) представим в форме

$$(2.5) \quad e^{i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (W + W_0) \right]^{\pm} + e^{-i\psi} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (W + W_0) \right]^{\pm} = \pm \frac{1}{\mu} Z^{\pm}.$$

Здесь верхний знак относится к значению величины на левом берегу l при движении от a к b .

Вычисляя необходимые производные от функции $W + W_0$, регуляризуя расходящиеся интегралы интегрированием по частям (эта операция возможна в силу (2.4)) и подставляя затем предельные значения производных при $z \rightarrow \zeta_0 \in l$ в краевое условие (2.5), приходим к сингулярному интегродифференциальному уравнению относительно функции $P(\zeta)$

$$(2.6) \quad \int_l P'(\zeta) h(\zeta, \zeta_0) ds + \int_l P(\zeta) H(\zeta, \zeta_0) ds = N(\zeta_0),$$

$$h(\zeta, \zeta_0) = \text{Im} \left\{ \text{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2L} e^{i\psi_0} \right\}, \quad \zeta_0 \in l,$$

$$H(\zeta, \zeta_0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(\zeta, \zeta_0) \cos \alpha_k (\xi_0 - \xi) + \sigma_k(\zeta, \zeta_0) \sin \alpha_k (\xi_0 - \xi)],$$

$$\varphi_k(\zeta, \zeta_0) = \alpha_k^2 \cos \psi \cos \psi_0 f_k(\eta_0 - \eta) - \sin \psi \sin \psi_0 f''_k(\eta_0 - \eta),$$

$$\sigma_k(\zeta, \zeta_0) = \alpha_k \sin(\psi + \psi_0) f'_k(\eta_0 - \eta) \operatorname{sign}(\eta_0 - \eta), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0),$$

$$N(\zeta_0) = \frac{8L}{i\mu} Z(\zeta_0) + 8L\tau\gamma_2 \sin \psi_0 e^{-i\gamma_2 \eta_0}, \quad P'(\zeta) = \frac{dP(\zeta)}{ds}.$$

Здесь ds — элемент дуги l , ядро h сингулярно, ядро H ограничено, функции f_k заданы в (1.7).

Функция $P'(\zeta)$ имеет на концах дуги l особенности типа квадратного корня, поэтому для фиксации решения необходимо присоединить к (2.6) дополнительное условие. В силу (2.4) оно имеет вид

$$(2.7) \quad \int_a^b P'(\zeta) ds = 0.$$

3. Для численной реализации уравнений (2.6), (2.7) введем параметризацию контура l по формулам

$$(3.1) \quad \zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1, \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1).$$

В соответствии со сказанным выше положим

$$(3.2) \quad P(\zeta) = \Omega(\beta), \quad P'(\zeta) = \Omega'(\beta)/s'(\beta),$$

$$\Omega'(\beta) = \Omega_0(\beta)/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \Omega'_0(\beta) = d\Omega/d\beta, \quad s'(\beta) = ds/d\beta,$$

где $\Omega_0(\beta)$ — функция класса H на \bar{l} .

С учетом (3.1), (3.2) представим уравнения (2.6), (2.7) в виде

$$(3.3) \quad \int_{-1}^1 \Omega'(\beta) \left[\frac{1}{\beta - \beta_0} + K(\beta, \beta_0) \right] d\beta + \int_{-1}^1 \Omega(\beta) R(\beta, \beta_0) d\beta = N_*(\beta_0),$$

$$\int_{-1}^1 \Omega'(\beta) d\beta = 0, \quad K(\beta, \beta_0) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi}{2L} \frac{d\zeta_0}{d\beta_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2L} - \frac{1}{\beta - \beta_0} \right\},$$

$$R(\beta, \beta_0) = \frac{\pi}{L} s'(\beta_0) s'(\beta) H(\zeta(\beta), \zeta(\beta_0)),$$

$$N_*(\beta_0) = \frac{\pi}{2L} s'(\beta_0) N(\zeta(\beta_0)).$$

В (3.3) ядро $K(\beta, \beta_0)$ в силу допущений относительно l может обладать не более чем слабой особенностью, ядро $R(\beta, \beta_0)$ ограничено.

Используя процедуру типа Мультиппа [10], сводим уравнение (3.3) к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции $\Omega_0(\beta)$ в чебышевских узлах

$$(3.4) \quad \sum_{\nu=1}^n \alpha_{k\nu} \Omega_\nu^0 = f_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

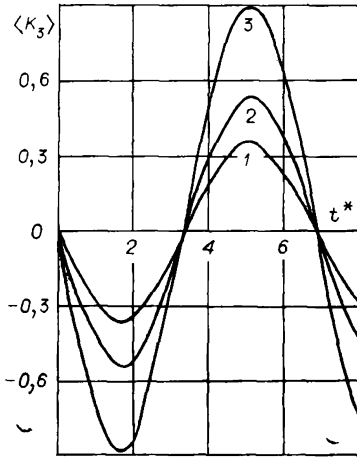
$$\alpha_{k\nu} = \frac{1}{\sin \theta_k} \operatorname{ctg} \frac{\theta_\nu \mp \theta_k}{2} + K(\cos \theta_k, \cos \theta_\nu) -$$

$$- \frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \sin \theta_m \cdot R(\cos \theta_m, \cos \theta_k) \delta_{\nu m},$$

$$\delta_{\nu m} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos j\theta_\nu \cdot \sin j\theta_m}{j}, \quad f_k^* = \frac{n}{\pi} N_*(\cos \theta_k),$$

$$\Omega_\nu^0 = \Omega_0(\cos \theta_\nu), \quad \theta_\nu = \frac{2\nu - 1}{2n} \pi \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь верхний знак берется в случае, когда $|k - \nu|$ нечетно, а нижний — при $|k - \nu|$ четном.



Ф и г. 2

При реализации алгоритма необходимо одно из уравнений системы (3.4) отбросить и на его место вставить дополнительное условие

$$\sum_{\nu=1}^n \Omega_{\nu}^0 = 0.$$

4. Напряжения в среде определяются по формулам

$$(4.1) \quad \tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x, \quad \tau_{yz} = \mu \partial w / \partial y.$$

Вычисляя соответствующие производные, используя (2.2)_у (3.2) и характер интегралов типа Коши в окрестности концов линии интегрирования [8], получаем асимптотические формулы для напряжений в окрестности конца разреза с

$$(4.2) \quad \tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{\mu \operatorname{Im} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1) \}}{4 \sqrt{\mp 2s'(\pm 1)} \sqrt{z-c}},$$

где верхний знак соответствует вершине $c = b$, нижний — $c = a$.

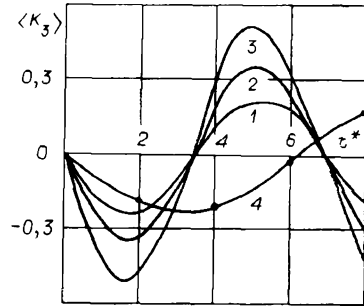
На продолжении за вершину трещины получаем из (4.2)

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\mu \cos \psi(\pm 1)}{4 \sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Im} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1) \}, \\ \tau_{yz} &= \frac{\mu \sin \psi(\pm 1)}{4 \sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Im} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1) \}, \\ \tau_n &= \frac{\mu}{4 \sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Im} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1) \}, \quad r = |z-c|, \end{aligned}$$

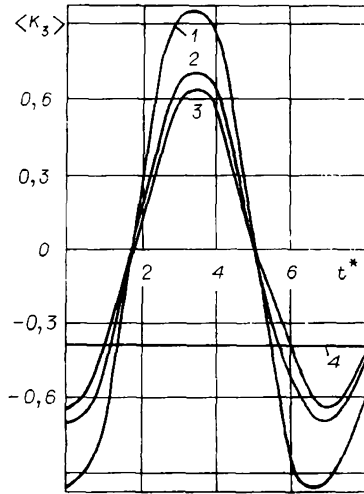
где верхний знак относится к концу b , нижний — к началу a ; τ_n — напряжение на площадке, являющейся продолжением трещины.

Таким образом, так же, как и в статической задаче о продольном сдвиге, распространение трещины возможно лишь вдоль гладкой траектории. Динамический коэффициент интенсивности напряжений определим из (4.3)

$$K_3 = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \tau_n] = \frac{\mu}{4} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Im} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\pm 1) \}.$$



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Ниже приведены результаты расчетов для среды, ослабленной периодической системой трещин вдоль дуг эллипсов, параметрическое представление которых имеет вид (см. фиг. 1)

$$x = R_1 \sin \beta\varphi, \quad y = R_2 \cos \beta\varphi \quad (-1 \leq \beta \leq 1).$$

1. Пусть берега трещин свободны от сил, а из бесконечности излучается монохроматическая волна (1.1), причем

$$\tau = \tau_0 \exp(i\gamma_2 R_2).$$

На фиг. 2 приведены кривые динамического коэффициента интенсивности напряжений $\langle K_3 \rangle = K_3 \sqrt{L} / \pi \mu \tau_0$ в функции безразмерного времени $t^* = \pi c_2 t / L$ (c_2 — скорость распространения волны сдвига, t — время), безразмерного волнового числа $\alpha = L\gamma_2 / \pi = 0,9$ и относительного размера области $\xi_0 = \pi l / L = 0,2; 0,4; 0,6$ (кривые 1–3 соответственно) при $R_1 = R_2 = 0,5$, $\varphi = 45^\circ$, $l = 0,392$.

На фиг. 3 в том же соответствии даны кривые $\langle K_3 \rangle$ при $R_1 = 0,25$, $R_2 = 0,5$, $\varphi = 60^\circ$, $l = 0,390$, $\alpha = 0,9$, $\xi_0 = 0,2; 0,4; 0,6$. Здесь же дана кривая 4, характеризующая изменение $\langle K_3 \rangle$ для «прямой» трещины ($R_1 = 1$, $R_2 = 0,001$, $l = 0,174$) при $\alpha = 0,5$ и $\xi_0 = 0,2$. Для сравнения точками нанесены соответствующие результаты из [1].

2. Пусть $\tau = 0$, а на берегах трещин приложена гармоническая во времени сдвигающая нагрузка постоянной интенсивности по длине трещины. В этом случае $Z^+ = -Z^- = q$.

На фиг. 4 приведены графики коэффициента интенсивности напряжений $\langle K_3 \rangle = K_3 \sqrt{L} / \pi q$ в функции t^* при $\alpha = 0,9$, $\xi_0 = 0,2; 0,4; 0,6$ (кривые 1–3 соответственно) для трещины вдоль дуги эллипса $R_1 = 0,25$, $R_2 = 0,5$, $\varphi = 60^\circ$, $l = 0,390$; кривая 4 изображает статический случай $\alpha = 0$, $R_1 = 1$, $R_2 = 0,001$, $l = 0,174$, $\xi_0 = 0,2$.

Поступила 6 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М., Наука, 1974.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974.
3. Фильштинский Л. А. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига).— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 6.
4. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев, Наукова думка, 1978.
5. Дмитриенко А. Г., Мышкис Г. В. Дифракция «наклонной» поверхностной волны на границе между двумя ребристыми структурами с ребрами, нормальными к этой границе.— В кн.: Исследования по электродинамике и распространению электромагнитных волн. Томск, изд. Томск. ун-та, 1977.
6. Kalthor M. A. Electromagnetic scattering by an array of conducting cylinders by finite-difference coupling technique.— J. Appl. Phys., 1977, vol. 48, N 4.
7. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., Мир, 1974.
8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
9. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., Мир, 1968.
10. Кааандия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 4.