

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

СУМСЬКИЙ  
ДЕРЖАВНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ



НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ  
УКРАЇНИ «КПІ»

*О. С. Цибенко,  
Ю. Я. Парасевич*

***ЙМОВІРНІСНІ МЕТОДИ В МЕХАНІЦІ***

*Навчальний посібник*

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

Суми  
Сумський державний університет  
2013

Навчальне видання

**Цибенко Олександр Сергійович,  
Тарасевич Юлія Ярославівна**

# ***ЙМОВІРНІСНІ МЕТОДИ В МЕХАНІЦІ***

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки Ю. Я. Тарасевич  
Редактор С. М. Симоненко  
Комп'ютерне верстання Ю. Я. Тарасевич

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 13,95. Обл.-вид. арк. 9,82. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

УДК 519.21 (075.8)

ББК 34.445+22.12

Ц 56

Рецензенти:

*В. В. Астанін* – доктор технічних наук, професор (Національний авіаційний університет);

*Ю. Б. Гнучій* – доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет біоресурсів та природокористування України);

*Е. В. Штефан* – доктор технічних наук, професор (Національний університет харчових технологій)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямками підготовки  
«Прикладна механіка» та «Інженерна механіка»  
( лист № 1/11-11848 від 22.07.2013 р.)*

**Цибенко С. О.**

Ц 56      Ймовірнісні методи в механіці : навч. посіб. /  
С. О. Цибенко, Ю. Я. Тарасевич. – Суми : Сумський  
державний університет, 2013. – 240 с.  
ISBN 978-966-657-483-4

Посібник розрахований на студентів спеціальностей „Динаміка та міцність машин”, «Комп’ютерна механіка», а також на студентів, аспірантів та інженерів, які займаються імовірнісними розрахунками механічних систем.

Викладені основи теорії випадкових процесів та полів. Особлива увага приділена методам описання і спектральним розкладанням випадкових процесів та їх похідних, випадкових полів. Наведені приклади, що полегшують вивчення та освоєння матеріалу.

**УДК 519.21 (075.8)**

**ББК 34.445+22.12**

© Цибенко О.С., Тарасевич Ю.Я., 2013  
ISBN 978-966-657-483-4      © Сумський державний університет, 2013

## ЗМІСТ

	С.
1. ВСТУП	6
2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	10
2.1. Основні визначення та теореми	10
2.1.1. Теорема додавання ймовірностей для несумісних (таких, що не перетинаються) подій	13
2.1.2. Теорема про множення ймовірностей	13
2.1.3. Теорема додавання ймовірностей для сумісних (таких, що перетинаються) подій	14
2.1.4. Теорема про повну ймовірність	15
2.1.5. Формула Байєса (формула перевірки гіпотез)	16
2.2. Випадкові величини	21
2.2.1. Закони розподілу випадкових величин	21
2.2.2. Числові характеристики випадкових величин	32
2.2.3. Поняття про характеристичні функції	45
2.2.4. Центральні граничні теореми	50
2.3. Векторні випадкові величини	54
2.3.1. Сумісний розподіл компонент $n$ - вимірного випадкового вектора	55
2.3.2. Аналог теореми множення для компонент випадкового вектора	58
2.3.3. Аналог теореми про повну ймовірність	60
2.3.4. Числові характеристики випадкових векторів	61
2.4. Невипадкові функції випадкових аргументів	70
2.4.1. Невипадкові функції скалярних випадкових величин	70

2.4.2. Невипадкові функції векторних випадкових величин	73
2.4.3. Числові характеристики невинадкових функцій випадкових аргументів	77
3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	89
3.1. Методи опису випадкових функцій (процесів)	89
3.1.1. Характеристики розподілу випадкових функцій	90
3.1.2. Числові характеристики випадкових функцій	93
3.2. Стаціонарні випадкові процеси	101
3.3. Ергодичні стаціонарні випадкові процеси	110
3.4. Спектральне подання випадкових функцій (процесів)	112
3.5. Спектральне подання стаціонарних випадкових процесів	119
3.5.1. Дискретне розкладання	119
3.5.2. Безперервне розкладання	122
4. МЕТОДИ ОПИСУ БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	130
4.1. Сумісні характеристики розподілу компонент багатовимірного випадкового процесу	131
4.2. Числові характеристики компонент багатовимірного випадкового процесу	134
4.3. Багатовимірні стаціонарні випадкові процеси	137
4.4. Спектральні подання векторних випадкових процесів	140
4.5. Спектральне подання векторних стаціонарних випадкових процесів	143

5. МАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ	147
5.1. Основні відомості та поняття	147
5.2. Диференціальне рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова	150
5.3. Багатовимірні марковські процеси	154
6. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	159
6.1. Поняття похідних випадкових функцій	159
6.2. Спектральне подання процесів та їх похідних	171
6.3. Сумісний розподіл стаціонарного випадкового процесу та його похідних	177
6.4. Інтегрування випадкових процесів	180
7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ	186
7.1. Методи опису випадкових полів	186
7.1.1. Сумісні характеристики розподілу випадкових полів	187
7.1.2. Числові характеристики випадкових полів	189
7.1.3. Спектральне подання випадкових полів	192
7.2. Однорідні й ізотропні випадкові поля	196
7.2.1. Поняття про однорідні випадкові поля	196
7.2.2. Поняття про однорідні ізотропні випадкові поля	203
7.2.3. Однорідні й ізотропні векторні та тензорні поля	208
Додаток А. Закони розподілу випадкових величин	212
Список літератури	241

## 1. ВСТУП

В інженерній практиці для описання процесів та систем різної фізичної природи використовують, як правило, детерміністичні моделі розрахунку. При цьому їх властивості розглядаються як цілком визначені. Застосування детерміністичних моделей є обґрунтованим, якщо усі фактори та величини, що враховуються під час розрахунку, мають випадковий розкид, який можна вважати несуттєвим при необхідній точності розрахунку, а також коли не потрібно оцінювати надійність отриманих результатів. Разом із тим, очевидно, не існує жодної величини, яка враховується у розрахунках, що не була б випадковою. Як немає жодного розрахунку (моделі), який за своїм змістом не був би ймовірнісним.

Вплив випадкової зміни величин та факторів, що характеризують механічні системи, може відігравати суттєву, а іноді й визначну роль, тому нехтувати цим в інженерних розрахунках є неприпустимим. Так, фізичні та геометричні параметри (характеристики) деталей, що входять до складу механічних систем, коливаються в околі деяких заданих параметрів у межах відповідних допусків. Ці відхилення мають випадковий характер, підлягають визначенням закономірностям, що розглядаються у такій математичній дисципліні, як *теорія ймовірностей*. Виражений випадковий характер мають аеродинамічні навантаження, що діють на елементи літальних апаратів у процесі лету, реакції дорожнього покриття на підвіску транспортних засобів, що рухаються, гідродинамічні навантаження, що виникають у турбулентних потоках та ін. Для адекватного описання

такого роду навантажень та механічних систем, що перебувають під їх впливом, необхідно використовувати *теорію випадкових процесів та полів*.

Подібних прикладів можна навести безліч. Усі ці приклади об'єднує необхідність застосування статистичних методів аналізу техніко-технологічного стану досліджуваних систем.

Математичний базис статистичних методів у механіці створюють наведені у другому розділі цього навчального посібника основні поняття, теореми та закони теорії ймовірностей, способи описання скалярних і векторних випадкових величин, а також невідповідних функцій випадкових аргументів.

У третьому розділі посібника наведені основи теорії випадкових функцій (процесів) та способи їх описання. Детально розглянуто стаціонарні та ергодичні випадкові процеси, що мають велике прикладне значення. Наведено математичний апарат розв'язування задач статистичної динаміки на основі методів спектральних розкладань (дискретних та безперервних).

Четвертий розділ посібника містить узагальнення даних третього розділу у застосуванні до багатовимірних (векторних) випадкових процесів.

Особливе місце в теорії випадкових процесів займають марковські процеси. Математичний апарат для описання аналізу процесів марковського типу досить добре розроблений. У п'ятому розділі наведені основні відомості з теорії безперервних марковських процесів, що дозволяють адекватно описувати поведінку ряду фізичних систем та пристроїв, широко використовуваних на практиці.



У шостому розділі наведені поняття похідних та інтегралів від випадкових функцій за ймовірністю та у середньоквадратичному розумінні. У рамках кореляційної теорії сформульовані умови, за яких випадкові функції можна диференціювати та інтегрувати. Наведені спектральні подання випадкових процесів та їх похідних.

Сьомий розділ посібника містить основи теорії випадкових просторових та просторово-часових скалярних, векторних і тензорних полів. Наведені методи їх описання. Особливу увагу приділено розгляду однорідних та ізотропних випадкових полів та їх спектральним розкладанням.

Для зручності використання у додатку А наведені основні закони розподілу ймовірностей дискретних та безперервних випадкових величин, що найбільш часто застосовуються в інженерних розрахунках.

Навчальний посібник створено на основі першої частини курсу лекцій, що читається одним з авторів для спеціалістів та магістрів напряму підготовки «Динаміка і міцність машин» в НТУУ «КПІ». Прикладний напрям випускників визначив як відбір матеріалу, що вміщений до посібника, так і метод його викладання – з розумним ступенем строгості та без зайвої формалізації у вигляді лем, теорем і т. п. Усі розділи посібника супроводжуються прикладами розв'язування задач, що, як вважають автори, сприяє кращому засвоєнню матеріалу та є наочною ілюстрацією практичного застосування викладених теоретичних положень.

Автори сподіваються, що викладений матеріал буде корисним не тільки студентам, інженерам та науковим співробітникам, які спеціалізуються у сфері механіки, але й усім тим, хто цікавиться питаннями ймовірнісних

розрахунків техніко-технологічних систем довільної фізичної природи.

Автори глибоко вдячні академіку В. В. Болотіну за численні цінні ідеї та поради, у тому числі й використані у цьому навчальному посібнику, які були висловлені ним при неодноразовому обговоренні у період підготовки та становлення даного лекційного курсу.

## 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

### 2.1. Основні визначення та теореми

**Подія** – явище, яке характеризується деяким якісним або кількісним результатом. Теорія ймовірностей розглядає події, що відбуваються при деякому постійному комплексі умов: однорідних і таких, що є порівнянними.

**Достовірним** називається подія, яка обов'язково станеться при заданому комплексі умов.

**Неможлива** подія напевне не станеться при заданому комплексі умов.

**Випадкова** подія при заданому комплексі умов або станеться, або не станеться.

Очевидно, випадковою подія вважається тоді, коли не знають усіх чинників, що визначають дану подію, або свідомо їх ігнорують.

Для характеристики настання (або ненастання) події  $A$  прийнято вводити ймовірність настання цієї події  $P(A)$ .

Ймовірність  $P(A)$  настання події  $A$  є об'єктивною чисельною мірою, яка характеризує настання події  $A$ . Величину  $P(A)$  прийнято нормувати:  $0 \leq P(A) \leq 1$ . При  $P(A) = 0$  подія  $A$  не відбудеться (неможлива подія), при  $P(A) = 1$  вона обов'язково відбудеться (достовірна подія), при  $0 < P(A) < 1$  подія  $A$  – випадкова.

Взагалі величина  $P(A)$  має властивості деякого функціонала, який характеризує еволюцію настання події  $A$  [10].

Подія  $A$  вважається **незалежною** від події  $B$ , якщо результат події  $A$  не залежить від того, сталася подія

$B$  чи ні. Подія  $A$  є залежною від події  $B$ , якщо ймовірність  $P(A)$  змінюється залежно від того, сталася або не сталася подія  $B$ .

Історично теорія ймовірностей бере свій початок із XVII століття. З її розвитком пов'язані імена Ферма<sup>1)</sup>, Паскаля, Бернуллі.

Перші результати теорії ймовірностей базуються на використанні безпосереднього детерміністичного визначення ймовірності

$$P(A) = \frac{n_A}{n}, \quad (2.1)$$

де  $n_A$  – число випадків (результатів), що сприяють події  $A$ ;  $n$  – загальне число випадків. Очевидно, що метод *безпосереднього підрахунку ймовірностей* за формулою (2.1) може бути застосований тільки до обмеженого кола явищ із відомими кількісними оцінками ситуаційних проявів випадкових подій.

При багатократному відтворенні в однорідних умовах  $n$  дослідів і фіксації числа  $n_A$  проявів події  $A$  відношення  $n_A$  до  $n$ , що називають *емпіричною (статистичною) частотою*, є випадковою величиною, яка залежить від кількості випробувань і змінюється від однієї серії випробувань до іншої. У

---

<sup>1)</sup> П'єр де Ферма́ (1601–1665) – французький математик, один із засновників аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей і теорії чисел.

Блез Паска́ль (1623–1662) – французький математик, фізик, літератор і філософ. Класик французької літератури, один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей і проектної геометрії, створив перші зразки рахункової техніки.

Якоб Берну́ллі (1654–1708) – швейцарський математик, один із засновників теорії ймовірностей та математичного аналізу.

цьому випадку Мізесом<sup>2)</sup> (1836 р.) для знаходження ймовірності  $P(A)$  було запропоновано використовувати границю відношення

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}. \quad (2.2)$$

Бернуллі (1840 р.), відзначивши нестрогість (2.2), сформулював визначення ймовірності настання події  $A$  у формі **закону великих чисел**<sup>3)</sup> [3]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|P(A) - \frac{n_A}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1, \forall \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Цей закон складає основу емпіричної теорії ймовірностей, оскільки він базується на експериментальних даних.

У сучасній математиці, поряд з емпіричним, розглядається аксіоматичне визначення ймовірності. При цьому до розгляду вводиться абстрактний простір подій, для якого формулюється адитивна чисельна міра настання подій і визначається деяка аксіоматика дій на ній [10]. Взагалі кажучи, результати емпіричної й аксіоматичної теорій ймовірностей збігаються.

---

<sup>2)</sup> Ріхард Едлер фон Мізес (1883–1953) – математик і механік австрійського походження; праці присвячені аеродинаміці, прикладній механіці, механіці рідин, аеронавтиці, статистиці та теорії ймовірностей. У теорії ймовірностей запропонував частотну концепцію поняття ймовірності, ввів у загальне вживання інтегралі Стілтгеса і першим використав теорію марковських ланцюгів у фізиці.

<sup>3)</sup> Закон великих чисел – перша асимптотична теорема теорії ймовірностей, був уперше опублікований у праці Я. Бернуллі «Мистецтво припущень», виданій у 1713. Перші доведення цієї теореми вимагали складних математичних засобів, і тільки у 1867 р. П. Л. Чебишев знайшов коротке доведення.

### 2.1.1. Теорема додавання ймовірностей для несумісних (таких, що не перетинаються) подій

Дві події  $A$  і  $B$  називаються несумісними або такими, що не перетинаються, якщо в одному випробуванні вони не можуть проявитися одночасно. Будемо називати **сумою** несумісних подій  $A$  і  $B$  таку складну подію, яка полягає у тому, що відбудеться або подія  $A$ , або  $B$ . У даному випадку

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.4)$$

Для  $n$  несумісних подій  $A_k$ , де  $k = 1, 2, \dots, n$ , маємо

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k). \quad (2.5)$$

Події в одному досліді утворюють повну групу, якщо у результаті цього досліді обов'язково з'явиться хоча б одне з них. Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.

### 2.1.2 Теорема про множення ймовірностей

Нехай події  $A$  і  $B$  пов'язані одна з одною так, що подія  $B$  визначає настання події  $A$  (результат події  $A$  залежить від настання події  $B$ ). Назвемо **добутком подій**  $A$  і  $B$  таку складну подію  $AB$ , яка полягає у тому, що станеться і подія  $A$ , і подія  $B$ . Зробимо  $n$  випробувань (однорідних, порівнянних), фіксуючи  $n_A$  і  $n_B$ . Емпірична частота настання відповідних подій визначається як

$$\frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n} \frac{n_B}{n_B} = \frac{n_A}{n_B} \frac{n_B}{n},$$

або у термінах ймовірностей

$$P(AB) = P(A/B)P(B), \quad (2.6)$$

де  $P(A/B)$  – умовна ймовірність, тобто ймовірність настання події  $A$  за умови настання події  $B$ .

З (2.6) випливає, що внаслідок умов нормування ймовірність настання події  $AB$  та умовна ймовірність події  $A/B$  задовольняють нерівність

$$P(AB) \leq P(A/B). \quad (2.7)$$

У випадку незалежних подій

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k). \quad (2.8)$$

### 2.1.3. Теорема додавання ймовірностей для сумісних (таких, що перетинаються) подій

Теорему додавання ймовірностей (п. 2.1.1) можна узагальнити на випадок **сумісних (таких, що перетинаються)** подій:

- двох  $A$  і  $B$  (рис. 2.1 а):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB); \quad (2.9)$$

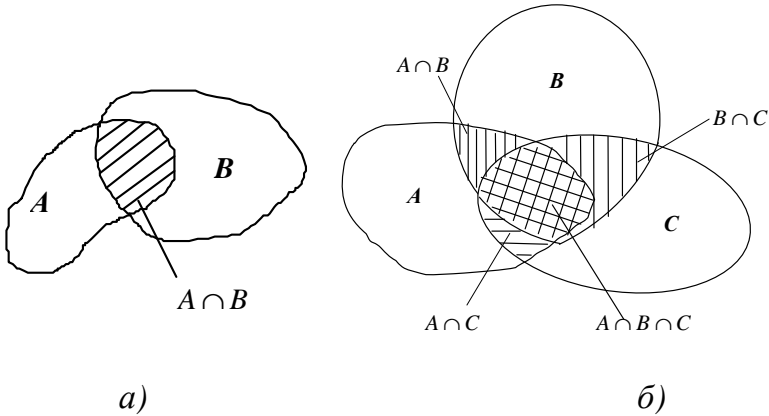


Рисунок 2.1

- трьох  $A, B$  і  $C$  (рис. 2.1 б):

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

Узагальнення результату для  $n$  подій  $A_k$ , що перетинаються, де  $k = 1, 2, \dots, n$ , дає

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \quad (2.10)$$

#### 2.1.4. Теорема про повну ймовірність

Розглянемо складну подію  $A$ , на яку впливають  $n$  несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Згідно з теоремами про додавання та множення ймовірностей (пп. 2.1.1, 2.1.2) маємо



$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k)P(B_k), \quad (2.11)$$

що є визначенням *теорему про повну ймовірність*.

### 2.1.5. Формула Байєса<sup>4)</sup> (формула перевірки гіпотез)

Як наслідок із теореми множення ймовірностей, має місце *формула Байєса* (для залежних подій).

Згідно з (2.6)

$$P(AB) = P(A/B)P(B), \quad (2.12)$$

або

$$P(BA) = P(B/A)P(A). \quad (2.13)$$

Очевидно, що

$$P(AB) = P(BA),$$

тобто

$$P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A), \quad (2.14)$$

звідки отримаємо формули Байєса:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}, \quad (2.15)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}.$$

---

<sup>4)</sup> Томас Байєс (1702–1761) – англійський математик, сформулював і розв’язав одну з основних математичних задач, яка дозволяє оцінити ймовірність подій емпіричним шляхом і відіграє важливу роль у сучасній математичній статистиці та теорії ймовірностей.

**Приклад 2.1.** Маємо дві коробки з готовими деталями. У кожній із коробок –  $n$  якісних і  $m$  неякісних. З першої коробки навмання взяли одну деталь і переклали в другу коробку, після чого з другої коробки витягли одну деталь. Визначити ймовірність того, що витягнута деталь виявиться якісною.

*Розв'язання.* Введемо такі позначення для відповідних подій:  $A$  – з другої коробки дістали якісну деталь;  $H1$  – з першої коробки у другу переклали якісну деталь;  $H2$  – з першої коробки у другу переклали неякісну деталь. Відповідні ймовірності дорівнюють:

$$P(H1) = \frac{n}{n+m}, \quad P(H2) = \frac{m}{n+m}.$$

Умовна ймовірність  $P(A/H1)$  події, яка полягає у тому, що з другої коробки дістали якісну деталь за умови, що з першої до неї поклали якісну деталь, дорівнює

$$P(A/H1) = \frac{n+1}{n+m+1}.$$

Аналогічно ймовірність події, яка полягає у тому, що з другої коробки дістали якісну деталь за умови, що з першої до неї поклали неякісну деталь, дорівнює

$$P(A/H2) = \frac{n}{n+m+1}.$$

Тоді згідно з формулою повної ймовірності (2.11) знайдемо ймовірність того, що деталь, яку вийняли з другої коробки, є якісною:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(H1)P(A/H1) + P(H2)P(A/H2) = \\
 &= \frac{n(n+1) + nm}{(n+m)(n+m+1)}.
 \end{aligned}$$

**Приклад 2.2.** В ящику лежить  $n$  якісних і  $m$  дефектних деталей. Із нього навмання беруть одну деталь і відкладають убік, потім виймають ще одну, яка виявляється дефектною. Якою є ймовірність того, що відкладена деталь буде якісною.

*Розв'язання.* Введемо такі позначення відповідних подій:

$H1$  – деталь, яку вийняли з ящика перший раз, є якісною;

$H2$  – вийнята перший раз деталь є дефектною;

$A$  – вийнята другий раз деталь є дефектною.

Відповідні ймовірності дорівнюють:

$$P(H1) = \frac{n}{n+m}, \quad P(H2) = \frac{m}{n+m}.$$

Ймовірність того, що вдруге взята деталь є дефектною за умови, що перший раз узята деталь – якісна,

$$P(A/H1) = \frac{m}{n+m-1}.$$

Ймовірність того, що вдруге взята деталь є дефектною за умови, що перший раз також вийняли дефектну деталь, дорівнює

$$P(A/H2) = \frac{m-1}{n+m-1}.$$

За формулою повної ймовірності (2.11) знаходимо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H1)P(A/H1) + P(H2)P(A/H2) = \\ &= \frac{nm + m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}. \end{aligned}$$

За умовами задачі необхідно знайти  $P(H1/A)$ , тобто ймовірність того, що перша деталь, яку відклали, буде якісною, якщо ми знаємо, що вдруге взята з ящика деталь – дефектна.

За формулою Байєса (2.15) знаходимо

$$\begin{aligned} P(H1/A) &= \frac{P(H1)P(A/H1)}{P(A)} = \\ &= \frac{nm}{(n+m)(n+m-1)} \cdot \frac{(n+m)(n+m-1)}{nm + m(m-1)} = \\ &= \frac{nm}{nm + m(m-1)}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.3.** Деталь, яка входить до складу будівельної конструкції, може належати до однієї з трьох партій з імовірностями 0,2; 0,3; 0,5. Ймовірності того, що ця деталь пропрацює задане число циклів навантаження, для цих партій відповідно дорівнюють 0,8; 0,95; 0,97. Визначити ймовірність того, що деталь належить першій партії, якщо відомо, що вона не витримала задане число циклів навантаження.

*Розв'язання.* Нехай подія  $H1$  – деталь належить першій партії;  $H2$  – деталь належить другій партії та  $H3$  – третій партії. Ймовірності відповідних подій за умовами задачі задані й дорівнюють:

$$P(H1) = 0,2, P(H2) = 0,3, P(H3) = 0,5.$$

Розглянемо подію  $A$  – деталь не витримала заданого числа циклів навантаження. Ймовірність того, що деталь не витримає заданого числа циклів навантаження за умови, що вона належить до першої партії, дорівнює

$$P(A/H1) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Аналогічно ймовірність того, що деталь не відпрацює задану кількість циклів за умови, що вона належить до другої партії,

$$P(A/H2) = 1 - 0,95 = 0,05,$$

і відповідно

$$P(A/H3) = 1 - 0,97 = 0,03.$$

За формулою повної ймовірності (2.11):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H1)P(A/H1) + P(H2)P(A/H2) + P(H3)P(A/H3) = \\ &= 0,2^2 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,03 = 0,07. \end{aligned}$$

Шукану ймовірність події, що деталь належить до першої партії, якщо відомо, що вона не витримала заданої кількості циклів навантаження, визначимо за формулою Байєса (2.15):

$$P(H1/A) = \frac{P(H1) P(A/H1)}{P(A)} = \frac{0,2^2}{0,07} = 0,51.$$

## 2.2. Випадкові величини

### 2.2.1. Закони розподілу випадкових величин

Нехай випадкова подія полягає у спостереженні, вимірюванні і т. п. деякої величини  $X$ , яка набуває залежно від номера спостереження значень з інтервалу  $[a, b]$ . Тоді  $X$  прийнято називати **випадковою величиною**.

Будемо називати випадкову величину **розподіленою дискретно** в інтервалі  $[a, b]$ , якщо її значення на цьому інтервалі можна злічити, причому кількість їх не обов'язково є скінченною.

Якщо випадкова величина набуває значень у будь-яких точках інтервалу  $[a, b]$ , то вона називається **безперервно розподіленою** на цьому інтервалі.

Для опису випадкових величин використовують **два основних способи**. **Перший** передбачає введення так званих **характеристик розподілу**: **функцій розподілу та щільностей імовірності**. **Другий** полягає в заданні **числових характеристик**, або **моментів**.

**Функція розподілу** випадкової величини  $X$  визначається як

$$F(x) \stackrel{def}{=} P(X < x). \quad (2.16)$$

З геометричної точки зору  $F(x)$  характеризує ймовірність того, що випадкова величина  $X$  знаходиться лівіше від точки (значення)  $x$  на числовій осі (рис. 2.2 а).

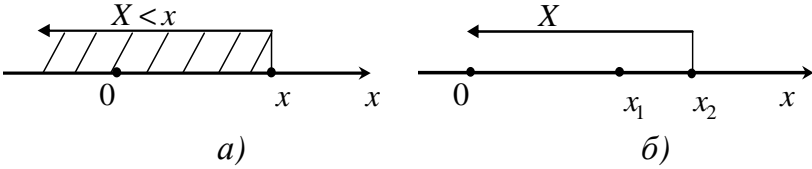


Рисунок 2.2

З визначення (2.16) **функції розподілу** випливають її **очевидні властивості**:

1.  $F(x)$  обмежена на всій числовій осі:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (2.17)$$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$  (2.18)

3. Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу  $X \in [a, b]$  (де  $a < b$ ), дорівнює приросту функції  $F(x)$  на відрізку  $[a, b]$ :

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a). \quad (2.19)$$

4.  $F(x)$  – неспадна функція, оскільки (рис. 2.2 б):

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2). \quad (2.20)$$

5.  $F(x)$  безперервна зліва, тобто у будь-якій точці  $c$  числової осі виконується рівність

$$\lim_{x \rightarrow c-0} F(x) = F(c-0) = F(c). \quad (2.21)$$

б. Ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  у довільну точку  $c$  дорівнює стрибку функції  $F(x)$  у цій точці:  $P(X = c) = F(c + 0) - F(c)$ . Таким чином, функція  $F(x)$  є безперервною у точці тоді й тільки тоді, коли ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  у цю точку дорівнює нулю.

Випадкова величина  $X$  є *розподіленою дискретно* на множині точок дійсної осі, що є зліченною, але не обов'язково скінченною, причому ймовірність потрапляння в одну з цих точок дорівнює

$$P(x_k) = P(X = x_k) = P_k. \quad (2.22)$$

У даному випадку функція розподілу

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) = \sum_{k(x_k < x)} P_k. \quad (2.23)$$

Графік функції розподілу дискретно розподіленої випадкової величини містить точки розриву першого роду (точки скінченного стрибка) (рис. 2.3).

Випадкова величина  $X$  є *розподіленою безперервно*, якщо її функція розподілу  $F(x)$  – безперервна функція.

Безперервна функція розподілу є такою, що можна диференціювати:

$$p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (2.24)$$



Тут  $p(x)$  – функція *щільності ймовірності*, яка характеризує ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  у малий окіл точки  $x$ :

$$p(x)dx = \overset{\text{def}}{P}(x < X < x + dx). \quad (2.25)$$

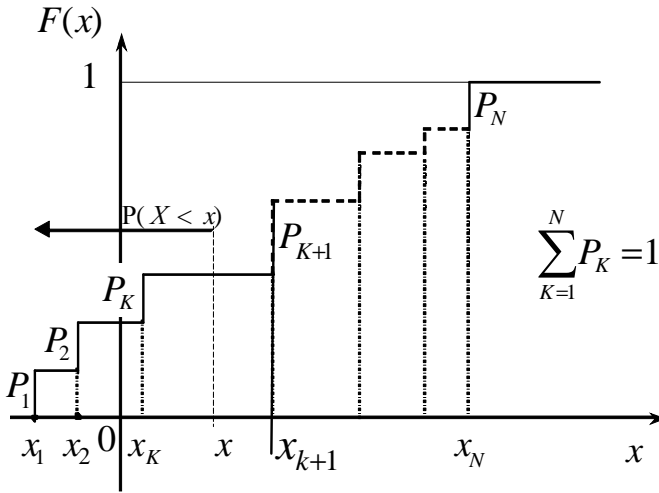


Рисунок 2.3

Щільність імовірності так само, як і функція розподілу, є характеристикою розподілу випадкової величини  $X$ . Однак на відміну від функції розподілу вона не є універсальною, оскільки існує тільки для безперервно розподілених випадкових величин.

Із (2.24) випливає, що ймовірність знайти випадкову величину в інтервалі  $[a, b]$  дорівнює (рис. 2.4):

$$P(a \leq X \leq b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b p(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.26)$$

При цьому очевидно, що для безперервно розподіленої випадкової величини ймовірність  $P(X = a)$  дорівнює нулю.

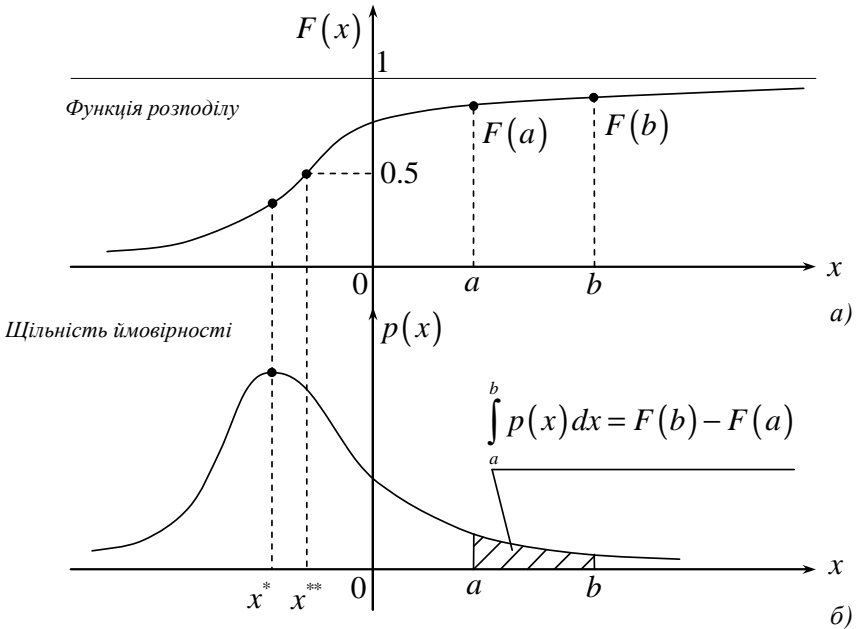


Рисунок 2.4

Щільність імовірності задовольняє умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (2.27)$$

При емпіричному визначенні функції щільності ймовірності умова нормування є основним критерієм перевірки коректності знайденого закону розподілу.

Якщо  $F(x)$  – безрозмірна, то розмірність  $p(x)$  є оберненою до розмірності випадкової величини  $X$ .

Значення  $x^*$ , при якому  $p(x)$  досягає екстремуму, називається *модю*. Точка  $x^{**}$ , що відповідає значенню  $F(x) = 0,5$ , називається *медіаною* і може бути

визначена з умови  $P(X < x^{**}) = P(X > x^{**}) = \frac{1}{2}$

(рис. 2.4). На практиці зустрічаються *одномодальні*, *бімодальні* і т. д. розподіли. Для симетричних розподілів мода збігається з медіаною, інакше розподіли є *несиметричними*.

Розподіли випадкових величин, що найчастіше використовуються у механічних задачах, наведені у додатку А.

Поряд із дискретними та безперервними розподілами також мають місце змішані розподіли, для яких випадкова величина  $X$  набуває з певними ймовірностями значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , множина яких є такою, що можна злічити, не обов'язково скінченною, а в інтервалах між сусідніми значеннями  $x_j, x_{j+1}$  при  $j = 1, 2, \dots$  наявний випадковий фон (рис. 2.5).

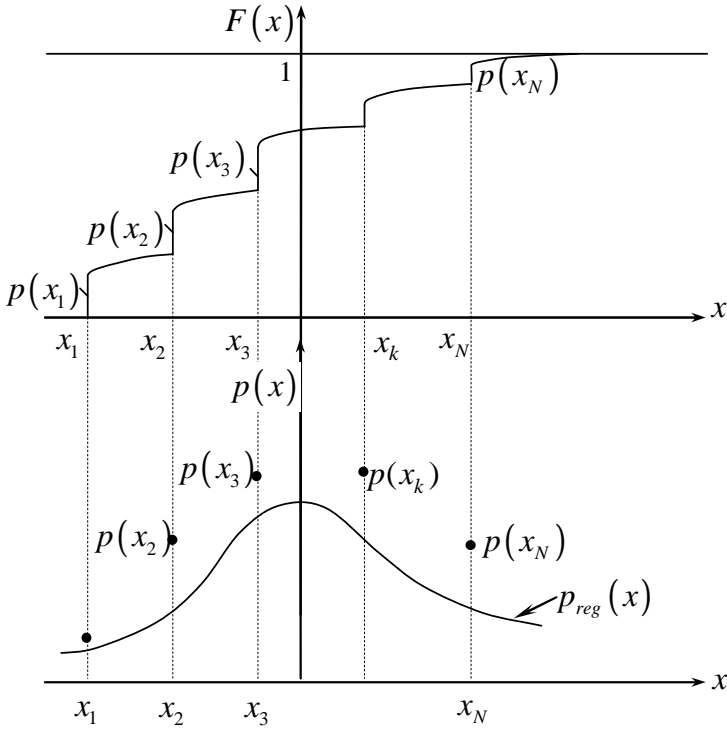


Рисунок 2.5

У цьому випадку щільність імовірності визначається сумою внесків регулярної та нерегулярної складових:

$$p(x) = p_{reg}(x) + \sum_k p_k \delta(x - x_k), \quad (2.28)$$

$$\delta(x - x_k) = \begin{cases} 1, & x = x_k, \\ 0, & x \neq x_k. \end{cases}$$

Тут  $p_{reg}(x)$  обумовлена випадковим фоном, а  $p_k$  – імовірності потрапляння у точки  $x_k$ ,  $k=1,2,\dots$

Для змішаних розподілів при визначенні ймовірнісних характеристик зручно використовувати апарат *інтегралів типу Стілтєса* [8].

*Згідно з першим способом опису випадкових величин характеристики (закони) розподілу дають вичерпну інформацію про ці величини.*

**Приклад 2.4.** Точкова маса  $m$  (рис. 2.6) здійснює сталі коливання під дією горизонтально прикладеної гармонічної сили. Визначити щільність імовірності події, яка полягає в тому, що у випадковий момент часу вона виявиться на відстані  $x$  від положення рівноваги ( $x = 0$ ).

*Розв'язання.* У випадку сталих гармонічних коливань зміщення маси в довільний момент часу описується законом

$$x = A \sin(\omega t),$$

де  $A$  – амплітуда коливань;  $\omega$  – частота.

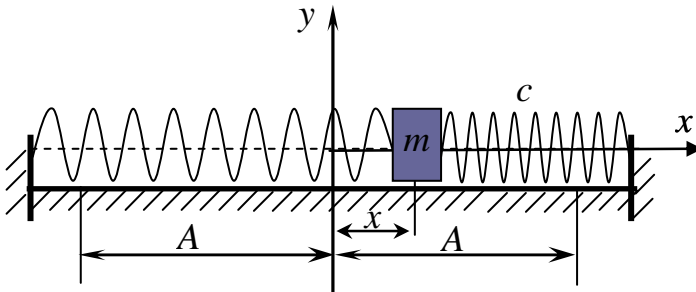


Рисунок 2.6

Імовірність знаходження маси  $m$  у довільний момент часу в інтервалі  $(x, x + dx)$  пропорційна

довжині інтервалу  $dx$  та обернено пропорційна швидкості руху маси  $\frac{dx}{dt}$ , тобто

$$dP(x \leq X \leq x + dx) = k \frac{dx}{dt} = k dt,$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. За визначенням  $dP = p(x)dx$ , тобто

$$p(x) = k \frac{dt}{dx}.$$

Виключимо час  $t$ , скориставшись законом руху точкової маси. Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\omega \cos(\omega t) = A\omega \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)} = \\ &= A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Звідки

$$p(x) = \frac{k}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Величину  $k$  визначимо за допомогою умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-A}^A \frac{k}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}} dx = 1.$$

Після нескладних розрахунків отримаємо  $k = \frac{\omega}{\pi}$  – колова частота.

Остаточно вираз для щільності ймовірності можна подати у вигляді

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Відповідну функцію розподілу знаходять інтегруванням щільності ймовірності:

$$F(x) = \int_{-A}^x p(x)dx = \frac{1}{\pi} \left( \arcsin \frac{x}{A} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Ймовірність знаходження маси  $m$  у довільний (випадковий) момент часу в інтервалі  $[x_1, x_2]$  дорівнює

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \arcsin \frac{x_2}{A} - \arcsin \frac{x_1}{A} \right). \end{aligned}$$

**Приклад 2.5.** Випадкова амплітуда навантаження, що діє на детерміністичну механічну систему, характеризується розподілом Коші [3]:

$$F(x) = A + B \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Визначити: параметри  $A$  і  $B$ , щільність імовірності  $p(x)$  та ймовірність появи амплітуди в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

*Розв'язання.* Виходячи з властивостей функції розподілу (2.18), маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A + \text{Barctg}(-\infty) = A - \frac{\pi}{2}B = 0, \\ A + \text{Barctg}(+\infty) = A + \frac{\pi}{2}B = 1. \end{cases}$$

Звідки знаходимо  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{\pi}$ .

Із визначення щільності ймовірності (2.24) отримуємо

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{Ba}{(a^2 + x^2)} = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Відзначимо, що параметр розподілу  $B$  можна також знайти з умови нормування (2.27):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ba}{(a^2 + x^2)} dx = \text{Barctg} \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = B \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Звідки отримуємо попередній результат:  $B = \frac{1}{\pi}$ .

Згідно з (2.26) шукана ймовірність виявлення випадкової амплітуди навантаження в інтервалі  $(\alpha, \beta)$  дорівнює

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left( \text{arctg} \frac{\beta}{a} - \text{arctg} \frac{\alpha}{a} \right).$$



## 2.2.2. Числові характеристики випадкових величин

Знаходження числових характеристик складає основу другого способу опису випадкових величин.

Нехай має місце  $n$  вимірювань випадкової величини  $X : x_1, x_2, \dots, x_n$ . За аналогією з середнім арифметичним знайдемо статистичне середнє  $\bar{X}$  як

$$\bar{X} \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}. \quad (2.29)$$

Нехай далі значення  $x_1$  випадкової величини  $X$  у серії з  $n$  дослідів відтворюється  $n_1$  разів,  $x_2$  –  $n_2$  рази і т. д. аж до  $x_m$ , що відтворюється  $n_m$  разів. При цьому загальна кількість дослідів  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ . Тоді, скориставшись формулою для середнього статистичного (2.29), матимемо

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j n_j}{n} = \sum_{j=1}^m x_j \frac{n_j}{n} = \sum_{k=1}^m x_j P(x_j), \quad (2.30)$$

де  $\frac{n_j}{n}$  – так звана **емпірична частота** (аналог імовірності (2.2)).

Першою числовою характеристикою випадкової величини  $X$  є її **математичне сподівання**  $\langle X \rangle$ .

Для **дискретно розподілених** випадкових величин **математичне сподівання** визначається як

$$\langle X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n x_j P(x_j). \quad (2.31)$$

Згідно із **законом великих чисел у формі Чебишева**<sup>5)</sup> (**теорема Чебишева**), при необмеженому збільшенні кількості дослідів статистичне середнє наближається (збігається за ймовірністю) до математичного сподівання [3]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X} - \langle X \rangle\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.32)$$

Необхідною та достатньою умовою існування межі (2.32) є скінченність дисперсії (2.37) випадкової величини  $X$ .

Для **безперервно розподіленої** випадкової величини  $X$ , переходячи у (2.31) до границі під знаком суми, маємо

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (2.33)$$

Замість форми запису  $\langle X \rangle$  для математичного сподівання в літературі також зустрічаються такі позначення:  $MX$ ,  $M[X]$ ,  $m_x$ ,  $EX$ .

Із (2.33) можна зробити висновок, що для безперервно розподіленої випадкової величини  $X$  математичне сподівання відповідає абсцисі центра

---

<sup>5)</sup> Пафн'утій Льв'ович Чебишев (1821–1894) – видатний російський математик і механік. Один із засновників теорії наближення функцій; його праці зробили істотний внесок у розвиток інтегрального числення, теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії механізмів і багатьох інших розділів математики та суміжних сфер знання.

тяжіння  $C$  площі плоскої фігури, що обмежена кривою  $p(x)$  (рис. 2.7).

Математичне сподівання випадкової величини має такі властивості:

1. Постійну величину можна розглядати як дискретну випадкову величину, що набуває єдиного значення з імовірністю 1, тому математичне сподівання постійної величини дорівнює самій величині:

$$\langle C \rangle = C.$$

2. Якщо  $\varphi(x)$  є детерміністичною функцією або лінійним диференціальним (інтегральним) оператором, то

$$\langle \varphi(x)X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)xp(x)dx = \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \varphi(x)\langle X \rangle.$$

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$\langle X_1 + X_2 + \dots + X_n \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \dots + \langle X_n \rangle.$$

За аналогією до математичного очікування вводяться також *моменти  $k$ -го порядку*, які іноді називають *початковими*. Так, для дискретно розподіленої випадкової величини

$$\langle X^k \rangle = \sum_{j=1}^n x_j^k P(x_j);$$

для безперервно розподіленої

$$\langle X^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx. \quad (2.34)$$

На практиці зручніше оперувати **центрованими випадковими величинами**, що являють собою різниці власне випадкової величини та її математичного сподівання

$$\tilde{X} = X - \langle X \rangle.$$

Операція центрування відповідає перенесенню початку координат у точку математичного сподівання (рис. 2.7).

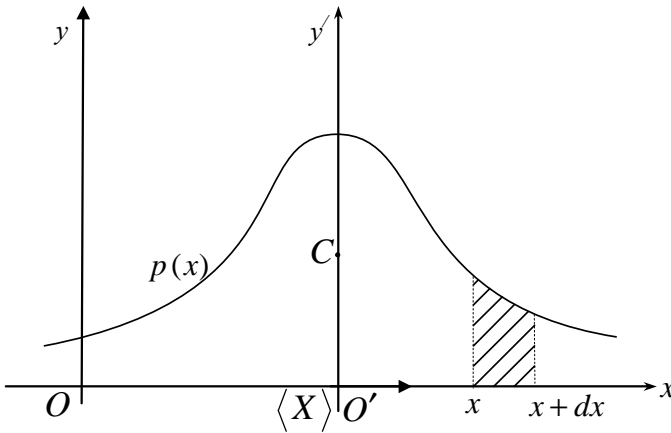


Рисунок 2.7

Для безперервно розподілених випадкових величин  $\tilde{X}$  центральні моменти *k*-го порядку визначаються як

$$\langle \tilde{X}^k \rangle = \langle (X - \langle X \rangle)^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^k p(x) dx. \quad (2.35)$$

При  $k = 1$  *центральний момент першого порядку дорівнює нулю:*

$$\begin{aligned} \langle x - \langle X \rangle \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle) p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx - \langle X \rangle \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \langle X \rangle \left( 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

тобто математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює 0.

Центральний момент другого порядку ( $k = 2$ ) називається *дисперсією випадкової величини* і позначається  $D_X$  або  $DX$ :

$$\begin{aligned} D_X &\stackrel{def}{=} \langle (x - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\langle X \rangle + \langle X \rangle^2) p(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2\langle X \rangle^2 + \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Із (2.37) випливає, що *дисперсія дорівнює середньому квадрата без квадрата середнього.*

При практичному використанні поряд із дисперсією зручно використовувати середнє квадратичне відхилення випадкової величини:

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}. \quad (2.38)$$

Із (2.37) бачимо, що розмірність дисперсії дорівнює квадрату розмірності випадкової величини, а з (2.38)

можемо зробити висновок, що розмірність середнього квадратичного відхилення збігається з розмірністю випадкової величини  $X$ .

В інженерній практиці також широко використовують відносну (безрозмірну) характеристику розсіювання, що називається *коефіцієнтом варіації* (іноді розсіяння):

$$v_x = \frac{\sqrt{D_x}}{\langle X \rangle},$$

який показує наскільки великим є розкид порівняно із середнім значенням  $\langle X \rangle$  випадкової величини  $X$ .

Нормований центральний момент 3-го порядку, який називається *коефіцієнтом асиметрії*, характеризує асиметрію графіка  $p(x)$  відносно осі ординат, що проходить через її математичне сподівання:

$$\alpha = \frac{\langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle}{\sigma_x^3}. \quad (2.39)$$

Момент четвертого порядку зручно розглядати у формі *коефіцієнта ексцесу*

$$\gamma = \frac{\langle (X - \langle X \rangle)^4 \rangle}{\sigma_x^4} - 3, \quad (2.40)$$

який характеризує ступінь відхилення закону розподілу випадкової величини  $X$  від нормального (гаусового<sup>6)</sup>) розподілу (див. додаток А), для якого  $\alpha = \gamma = 3$ .

---

<sup>6)</sup> Іоганн Карл Фрідріх Гаус (1777–1855) – німецький математик, астроном і фізик. Вважається одним із найвидатніших математиків усіх часів. З ім'ям Гауса пов'язані фундаментальні дослідження майже у всіх

У загальному випадку *для опису ймовірнісних властивостей випадкової величини необхідно мати весь набір числових характеристик (моментів) порядків 1, 2, ...* Однак чим вищий порядок, тим відповідний момент виявляється менш інформативним. На практиці розглядом моментів порядку вище четвертого можна знехтувати. ***Найбільшу інформацію про випадкову величину дають її перші два моменти.***

Введення числових характеристик відповідає другому (після законів розподілу) способу опису випадкових величин. Необхідно відмітити, що, знаючи закони розподілу випадкових величин, завжди можна знайти їх числові характеристики за формулами (2.34), (2.35). Але обернена задача знаходження законів розподілу за відомими числовими характеристиками не завжди може мати аналітичний розв'язок.

В інженерній практиці часто виникає необхідність розрахунку ймовірності потрапляння нормально розподіленої випадкової величини на інтервал, що є симетричним відносно центра розсіювання  $\langle X \rangle$ . Ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини  $X$  на інтервал довжиною  $2l$  визначається за формулою [3]:

$$P(\langle X \rangle - l < X < \langle X \rangle + l) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma_x}\right),$$

де  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . Ураховуючи, що функція

$\Phi(z)$  непарна, тобто  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ , отримаємо

---

основних розділах математики: алгебри, диференціальній і неевклідовій геометрії, в математичному аналізі, теорії функцій комплексної змінної, теорії ймовірностей, а також в астрономії, геодезії та механіці.

$$P(|X - \langle X \rangle| < l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right) - 1.$$

Розраховуючи значення ймовірності потрапляння випадкової величини  $X$  на заданий інтервал для деяких значень відношення  $\frac{l}{\sigma_x}$ , маємо:

$$\frac{l}{\sigma_x} = 1, \quad P(|X - \langle X \rangle| < l) = 0,6826,$$

$$\frac{l}{\sigma_x} = 2, \quad P(|X - \langle X \rangle| < l) = 0,9544,$$

$$\frac{l}{\sigma_x} = 3, \quad P(|X - \langle X \rangle| < l) = 0,9972.$$

Отже, ймовірність відхилення випадкової величини  $X$ , що підлягає нормальному закону, від математичного сподівання на величину, більшу за  $3\sigma_x$ , не перевищує 0,0028, тобто можна вважати, що **практично усі значення випадкової величини належать ділянці  $\langle X \rangle \pm 3\sigma_x$ .**

Це **правило трьох сигм** дозволяє, знаючи середнє квадратичне відхилення та математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини, практично точно визначити інтервал її можливих значень. Із правила трьох сигм впливає також наближений спосіб знаходження  $\sigma_x$ : максимальне практично можливе відхилення  $X$  від середнього значення  $\langle X \rangle$  (за графіком  $p(x)$ ) ділять на три. Така груба оцінка може бути рекомендована тільки у тому



випадку, коли немає інших, більш точних способів визначення  $\sigma_X$ .

**Приклад 2.6.** Безперервна випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x < \pi; \\ 1, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Визначити математичне сподівання  $\langle X \rangle$  та дисперсію  $D_X$ .

*Розв'язання.* За визначенням, щільність імовірності випадкової величини

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x < \pi; \\ 0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

За формулою (2.33):

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\pi} x \frac{1}{2} \sin x dx.$$

Інтегруючи останній інтеграл за частинами, отримаємо

$$\int_0^{\pi} x \frac{1}{2} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u \rightarrow dx = du \\ \sin x dx = dv \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \cos \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Дисперсія згідно із формулою (2.37) дорівнює

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 p(x) dx = \int_0^{\pi} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \sin x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left( x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} \right) \sin x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} \cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}.$$

Застосовуючи інтегрування за частинами, отримаємо

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} + 2x \sin x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = \pi^2 - 4.$$

Остаточно, дисперсія випадкової величини  $X$  :

$$D_X = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

**Приклад 2.7.** Балка постійної згинальної жорсткості  $EJ$  та геометрії навантажена випадковою поперечною силою  $P$  із відомим математичним сподіванням  $\langle P \rangle$  та дисперсією  $D_P$  (рис. 2.8). Визначити математичне

сподівання та дисперсії опорних реакцій, прогинання у точці прикладання сили  $P$  та максимального нормального напруження.

*Розв'язання.* За відомими формулами опору матеріалів [11] для детерміністичної сили  $P$  маємо:

$$R_A = \frac{b}{a+b}P, \quad R_B = \frac{a}{a+b}P,$$

$$w_c = \frac{a^2b^2}{3EJ(a+b)}P, \quad \sigma_c^{\max} = \frac{ab}{(a+b)W}P,$$

де  $W$  – момент опору при вигині.

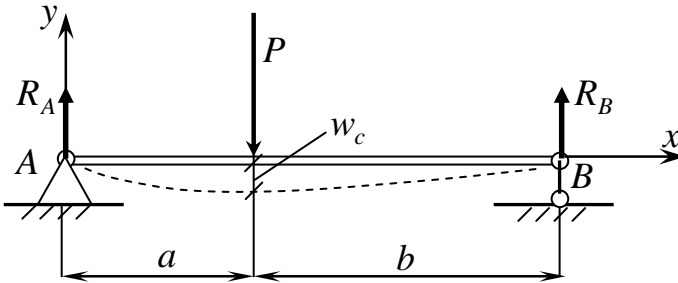


Рисунок 2.8

При випадковій силі  $P$  математичні сподівання даних величин відповідно дорівнюватимуть:

$$\langle R_A \rangle = \frac{b}{a+b} \langle P \rangle, \quad \langle R_B \rangle = \frac{a}{a+b} \langle P \rangle,$$

$$\langle w_c \rangle = \frac{a^2b^2}{3EJ(a+b)} \langle P \rangle, \quad \langle \sigma_c^{\max} \rangle = \frac{ab}{(a+b)W} \langle P \rangle.$$

Згідно з формулою (2.37) дисперсія опорної реакції у точці А

$$D_{R_A} = \langle (R_A - \langle R_A \rangle)^2 \rangle = \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle = \left( \frac{b}{a+b} \right)^2 D_P.$$

Аналогічно знаходимо дисперсії опорної реакції у точці В, прогинання та максимального нормального напруження у точці С прикладання сили  $P$ :

$$D_{R_B} = \frac{a^2}{(a+b)^2} D_P, \quad D_{w_C} = \left( \frac{a^2 b^2}{3EJ(a+b)} \right)^2 D_P,$$

$$D_{\sigma_C^{\max}} = \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 W^2} D_P.$$

**Приклад 2.8.** Визначити інтервал можливих значень максимального напруження, що виникає у поперечному перерізі консольної балки, навантаженої випадковою нормально розподіленою зосередженою силою з відомим математичним сподіванням  $\langle P \rangle$  і дисперсією  $D_P$ .

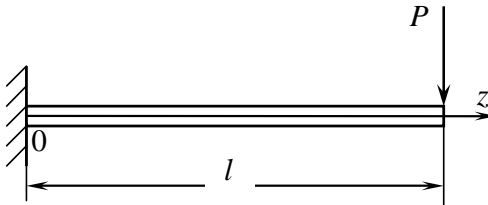


Рисунок 2.9

*Розв'язання.* Максимальні нормальні напруження  $\sigma_{\max}$  виникають у найбільш віддалених від

нейтральної осі точках поперечного перерізу балки у замуруванні (рис. 2.9):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x},$$

де  $M_{\max} = Pl$  – згинальний момент у замуруванні;

$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$  – момент опору при вигині;  $y_{\max}$  – відстань

від нейтральної осі до найбільш віддаленої точки поперечного перерізу.

Математичне сподівання та дисперсія максимального нормального напруження відповідно дорівнюють:

$$\langle \sigma_{\max} \rangle = a \langle P \rangle, \quad D_{\sigma_{\max}} = a^2 D_P,$$

де  $a = \frac{l}{W_x}$  – детерміністична величина, що

характеризує геометрію балки.

Внаслідок лінійного зв'язку між  $\sigma_{\max}$  та нормально розподіленим випадковим навантаженням  $P$  напруження також матиме нормальний (гаусів) розподіл. Тому для знаходження інтервалу можливих значень максимального напруження скористаємося правилом трьох сигм. Так, з імовірністю 99,7 % значення максимального нормального напруження лежать в інтервалі:

$$\langle \sigma_{\max} \rangle - 3\sqrt{D_{\sigma_{\max}}} \leq \sigma_{\max} \leq \langle \sigma_{\max} \rangle + 3\sqrt{D_{\sigma_{\max}}},$$

або

$$a \left( \langle P \rangle - 3\sqrt{D_P} \right) \leq \sigma_{\max} \leq a \left( \langle P \rangle + 3\sqrt{D_P} \right).$$

### 2.2.3. Поняття про характеристичні функції

Крім першого (п. 2.2.1) та другого (п. 2.2.2) способів, для опису випадкових величин можуть бути використані також *характеристичні функції*, що є комплексними перетвореннями Фур'є<sup>7)</sup> від щільностей імовірності [3]:

$$f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\xi x} dx, \quad (2.41)$$

де  $\xi$  – дійсний аргумент (хвильове число). Обернене до (2.41) перетворення Фур'є має вигляд

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (2.42)$$

Покажемо, що характеристична функція містить усю інформацію про випадкову величину  $X$ . Продиференціюємо  $f(\xi)$  за  $\xi$   $k$  разів:

$$\frac{d^k f(\xi)}{d\xi^k} = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} (x)^k p(x) e^{i\xi x} dx$$

і знайдемо  $k$ -у похідну у точці  $\xi = 0$ :

$$\frac{d^k f(0)}{d\xi^k} = (i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx = (i)^k \langle X^k \rangle.$$

Звідси випливає, що  $k$ -й початковий момент випадкової величини  $X$  дорівнює

---

<sup>7)</sup> Жан Батіст Жозеф Фур'є (1768–1830) – видатний французький математик і фізик. Перетворення Фур'є використовується у багатьох галузях науки: фізиці, теорії чисел, комбінаториці, обробці сигналів, теорії ймовірностей, статистиці, криптографії, акустиці, океанології, оптиці, геометрії та багатьох інших.

$$\langle X^k \rangle = (-i)^k \left. \frac{d^k f}{d\xi^k} \right|_{\xi=0}. \quad (2.43)$$

**Характеристична функція** має такі **властивості**:

1. Характеристична функція задовольняє умову:

$$|f(\xi)| \leq 1.$$

2. Якщо випадкові величини зв'язані лінійною детерміністичною залежністю вигляду  $Y = aX + b$ , де  $a$  і  $b$  – постійні, то

$$f_Y(\xi) = e^{i\xi b} f_X(a\xi).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} f_Y(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(y) e^{i\xi y} dy = \left\{ \begin{array}{l} y = ax + b; \\ dy = a dx \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\xi(ax+b)} a dx = \\ &= e^{i\xi b} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i(\xi a)x} a dx = e^{i\xi b} f_X(a\xi). \end{aligned}$$

3. Характеристична функція суми двох незалежних випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює добутку їх характеристичних функцій [3]

$$f_{X+Y}(\xi) = f_X(\xi) f_Y(\xi).$$

Варто відмітити, що для знаходження числових характеристик випадкової величини за відповідною щільністю ймовірності необхідно її інтегрування з вагою (згідно із 2.34). Однак якщо відома характеристична функція, то з цією метою можна використовувати операцію диференціювання (2.43). У деяких випадках це значно спрощує розрахунки.

**Приклад 2.9.** Випадкова величина  $X$  має експоненціальний розподіл  $p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, & x > 0. \end{cases}$

Знайти характеристичну функцію  $f(\xi)$  випадкової величини  $X$ , а також математичне сподівання  $\langle X \rangle$  та дисперсію  $D_X$ .

*Розв'язання.* Згідно із (2.41) для заданого експоненціального закону розподілу маємо

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} e^{i\xi x} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{a} - i\xi\right)x} dx = - \frac{e^{-\left(\frac{1}{a} - i\xi\right)x}}{\left(\frac{1}{a} - i\xi\right)a} \Bigg|_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{a \left(\frac{1}{a} - i\xi\right)} = \frac{1}{1 - ia\xi}. \end{aligned}$$

Математичне сподівання

$$\langle X \rangle = -i \frac{df}{d\xi} \Bigg|_{\xi=0} = -i \left( - \frac{-ia}{(1 - ia\xi)^2} \right) \Bigg|_{\xi=0} = a.$$

Для визначення дисперсії знайдемо другий початковий момент випадкової величини  $X$ :



$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= (-i)^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = - \left( ia \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{(1-ia\xi)^2} \right) \right) \Big|_{\xi=0} = \\ &= -ia \frac{(-2)(-ia)}{(1-ia\xi)^3} \Big|_{\xi=0} = 2a^2. \end{aligned}$$

За формулою (2.37):

$$D_X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 2a^2 - a^2 = a^2.$$

**Приклад 2.10.** Випадкова величина  $X$  рівномірно розподілена на відрізку  $|x| \leq a$ . Знайти характеристичну функцію  $f(\xi)$  випадкової величини  $X$ , а також математичне сподівання  $\langle X \rangle$  та дисперсію  $D_X$ .

*Розв'язання.* Щільність імовірності  $X$  має вигляд (рис. 2.10):

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \frac{1}{2a}, & |x| \leq a. \end{cases}$$

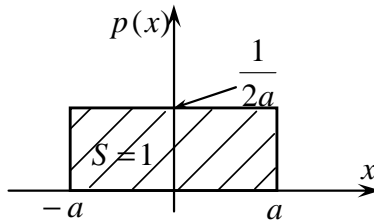


Рисунок 2.10

Згідно із (2.41) характеристична функція випадкової величини  $X$  :

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{i\xi x} dx.$$

Для заданого рівномірного закону розподілу, з урахуванням формули Ейлера:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , маємо

$$f(\xi) = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{i\xi x} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{2a} \cos(\xi x) dx = \frac{\sin(\xi a)}{\xi a}.$$

Перший початковий момент (математичне сподівання) випадкової величини  $X$  знаходимо як

$$\langle X \rangle = -i \left. \frac{df(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -i \left[ \frac{\cos(\xi a)}{\xi} - \frac{\sin(\xi a)}{\xi^2 a} \right]_{\xi=0}.$$

Введемо змінну  $x = \xi a$ , тоді

$$\langle X \rangle = -ia \left[ \frac{\cos(x)x}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^2} \right]_{x=0}.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо

$$\langle X \rangle = -ia \left[ \frac{\cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)}{2x} \right]_{x=0} = 0,$$

тобто  $\langle X \rangle = 0$ , і випадкова величина є центрованою.

Для центрованої випадкової величини дисперсія дорівнює другому початковому моменту:

$$\begin{aligned} D_X = \langle X^2 \rangle &= (-i)^2 \left. \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = - \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{\sin(\xi a)}{\xi a} \right)_{\xi=0} = \\ &= \left. \frac{2 \sin(\xi a) - a^2 \xi^2 \sin(\xi a) - 2a \xi \cos(\xi a)}{a \xi^3} \right|_{\xi=0}. \end{aligned}$$

Проводячи далі заміну змінних ( $x = \xi a$ ), остаточно матимемо

$$D_x = \frac{-a^2 \left[ (2 - x^2) \sin(x) - 2x \cos(x) \right]}{x^3} \Bigg|_{x=0}.$$

Застосовуючи правило Лопіталія, остаточно отримаємо

$$D_x = -a^2 \frac{-x^2 \cos(x)}{3x^2} \Bigg|_{x=0} = \frac{a^2 \cos(x)}{3} \Bigg|_{x=0} = \frac{a^2}{3}.$$

#### 2.2.4. Центральні граничні теореми

*Теорема Муавра – Лапласа*<sup>8)</sup>. Якщо ймовірність появи події  $A$  у кожному з  $n$  незалежних дослідів постійна і дорівнює  $p$ , а не появи –  $q = 1 - p$ , то ймовірність того, що у цих дослідах подія  $A$  відбудеться  $m$  разів, дорівнює (формула Бернуллі):

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Якщо число дослідів достатньо велике ( $n \rightarrow \infty$ ), то ймовірність  $P_n(m)$  може бути розрахована за наближеною формулою:

---

<sup>8)</sup> Абрахам де Муавр (1667–1754) — англійський математик французького походження. Вніс значний вклад у теорію ймовірностей: довів окремі випадки теореми Лапласа. Провів імовірнісне дослідження азартних ігор і ряду статистичних даних із народонаселення. Крім нормального, використовував рівномірний розподіл.

П'єр-Симон Лаплас (1749–1827) — видатний французький математик, фізик і астроном; відомий працями у сфері небесної механіки, диференціальних рівнянь, один із засновників теорії ймовірностей. Його праці зробили значний внесок у галузі чистої та прикладної математики і особливо астрономії.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (2.44)$$

$$\text{де } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Формула (2.44) виражає *локальну теорему Муавра-Лапласа*: при  $n \rightarrow \infty$  та скінченному  $p$  (а відповідно і  $q$ ) біноміальний розподіл асимптотично прямує до нормального (гаусового) розподілу [13].

Під час розгляду числа проявів події  $A$  (при  $p, q = \text{const}$ ), як правило, необхідно визначити ймовірність того, що число  $n$  лежить між деякими значеннями  $a$  і  $b$ . Оскільки при достатньо великих  $n$  безпосереднє використання біноміального розподілу вимагає громіздких розрахунків, то використовують асимптотичну формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Звідси, зокрема, випливає, що ймовірність проявлення події  $A$  не менше  $m_1$  та не більше  $m_2$  разів у  $n$  дослідах може бути визначена за наближеною формулою

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad (2.45)$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Формула (2.45) виражає *інтегральну форму теорему Муавра–Лапласа*. Точність наближеної формули (2.45) збільшується зі зростанням  $n$ . На практиці формулу (2.45) використовують у випадку, коли  $npq > 10$ , а  $p \neq 0, p \neq 1$ .

**Теорема Ляпунова<sup>9)</sup>**. Розглянемо випадкову величину  $X$ , що є сумою центрованих незалежних випадкових величин зі скінченним початковим моментом та ненульовою скінченною дисперсією:

$$X = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n. \quad (2.46)$$

*Згідно з теоремою Ляпунова, при  $n \rightarrow \infty$  розподіл випадкової величини  $X$  прагне до нормального (Гаусівського) розподілу [3].*

Ця теорема частіше за інші використовується на практиці, оскільки в математичній статистиці вибіркові випадкові величини мають однакові розподіли, тому що отримані з однієї й тієї самої генеральної послідовності.

**Приклад 2.11.** Знайти ймовірність 5 влучень в ціль при 100 пострілах, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,1.

*Розв'язання.* У даному випадку

$$np = 100 \cdot 0,1 = 10, \quad \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot (1 - 0,1)} = 3,$$

$$x = \frac{5 - 10}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Згідно з формулою (2.44) маємо

---

<sup>9)</sup> Олександр Михайлович Ляпунов (1857–1918) – видатний російський математик і механік. Основні праці присвячені механіці, математичній фізиці і теорії ймовірностей.

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{25}{18}} = 0,033.$$

**Приклад 2.12.** Ймовірність виготовлення якісної деталі на верстаті дорівнює 0,9. Скільки деталей необхідно обробити, щоб із імовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 деталей будуть якісними?

*Розв'язання.* За умовами задачі

$$p = 0,9, \quad q = 0,1, \quad m_1 = 150, \quad m_2 = n, \\ P_n(150, n) = 0,98.$$

Застосовуючи формулу Лапласа (2.45), з урахуванням заданих значень  $m_1, m_2$  і  $P_n(m_1, m_2)$ , отримаємо

$$0,98 = \Phi\left(\frac{n - 0,9n}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1n}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1n}}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right).$$

Оскільки за умовами задачі  $n \geq 150$ , то  $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq \frac{\sqrt{150}}{3} \geq 4,1$ . Визначаючи значення функції Лапласа у точці  $\Phi(4) \approx 0,5$ , отримаємо

$$0,98 = 0,5 - \Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right),$$

або  $\Phi\left(\frac{150 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = -0,48.$

Ураховуючи парність функції Лапласа, за таблицями, що наведені, наприклад у [3], знаходимо, що значенню функції 0,48 відповідає значення аргументу 2,06:  $\Phi(2,06) = 0,48$ .

Таким чином, приходимо до рівняння відносно кількості деталей  $n$ :

$$0,9n - 0,618\sqrt{n} - 150 = 0,$$

розв'язання якого, з урахуванням того, що  $n > 1$ , дає потрібну кількість деталей:

$$\sqrt{n} \approx 13,3, \text{ або } n = 177.$$

### 2.3. Векторні випадкові величини

*Векторною випадковою величиною*  $\vec{X}$ , інакше  *$n$ -вимірним випадковим вектором*, називається сукупність  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  випадкових величин:

$$\vec{X} \stackrel{def}{=} (X_1, X_2, \dots, X_n), \text{ або } \vec{X} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Компоненти випадкового вектора можуть мати різний фізичний зміст. Наприклад, датчики, що розміщені на космічних ракетах-носіях, вимірюють та передають на Землю до декількох десятків різних, взагалі кажучи, випадкових параметрів: швидкість, прискорення, температуру, тиск, напруження, деформації та ін.

Для опису ймовірнісних властивостей векторної випадкової величини, як і у раніше розглянутому скалярному варіанті, використовуються два основних способи:

1) за допомогою законів розподілу (сумісних розподілів);

2) за допомогою числових характеристик.

### 2.3.1. Сумісний розподіл компонент $n$ -вимірного випадкового вектора

Уведемо вектор значень компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора  $\vec{X}$ :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.48)$$

Назвемо *сумісною функцією розподілу* компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора  $\vec{X}$  ймовірність сукупності випадкових подій, що виявляються як  $X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n$ , а саме:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} P \left( \begin{array}{l} X_1 < x_1 \\ X_2 < x_2 \\ \dots \\ X_n < x_n \end{array} \right) \quad (2.49)$$

або у згорненій формі

$$F(\vec{x}) \stackrel{def}{=} P(\vec{X} < \vec{x}),$$

де векторна нерівність у дужках є умовною.

Для безперервної сумісної функції розподілу  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  *сумісну щільність імовірності*



компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора визначаємо диференціюванням:

$$p(\vec{x}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (2.50)$$

Пояснимо фізичний зміст сумісної щільності ймовірності. Множачи  $p(\vec{x})$  на елемент об'єму  $dV$  у  $n$ -вимірному просторі значень, отримаємо

$$p(\vec{x})dV \stackrel{\text{def}}{=} P \left\{ \begin{array}{l} x_1 < X_1 < x_1 + dx_1 \\ x_2 < X_2 < x_2 + dx_2 \\ \dots \\ x_n < X_n < x_n + dx_n \end{array} \right\}, \quad (2.51)$$

де  $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ .

Добуток щільності ймовірності  $p(\vec{x})$  на елементарний об'єм  $dV$  являє собою ймовірність такої випадкової події, яка полягає у тому, що кінець вектора  $\vec{X}$  потрапляє до елементарного об'єму  $dV$  (рис. 2.11).

Із визначення сумісної щільності ймовірності  $p(\vec{x})$  випливає, що ймовірність виявити випадковий вектор  $\vec{X}$  у деякому об'ємі  $V$  дорівнює

$$P(\vec{X} \in V) = \int_V \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2.52)$$

Поширюючи (2.52) на інтегрування за нескінченним об'ємом  $V$ , приходимо до **умови нормування**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1, \quad (2.53)$$

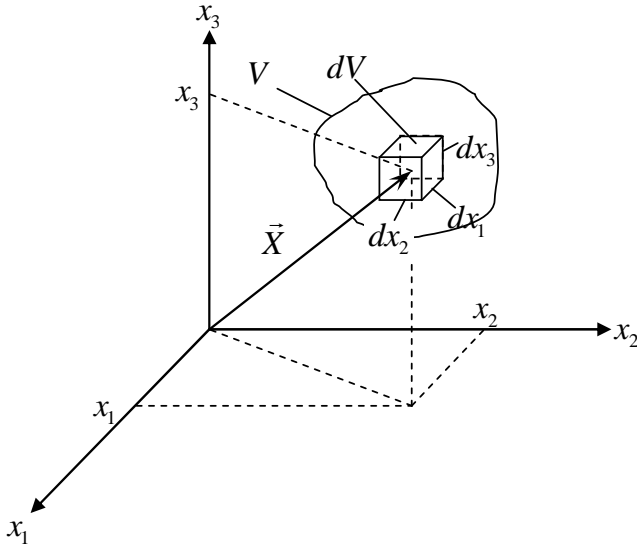


Рисунок 2.11

а у випадку інтегрування за однією (двома, трьома і т. д.) координатою – до **умови узгодженості** за будь-яким з аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , наприклад, за  $x_j$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_j = p(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad (2.54)$$

або за будь-яким поєднанням аргументів  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_k$ , наприклад,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-2} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \dots dx_n = p(x_1, x_2) \quad (2.55)$$

і т. д.

Таким чином, *поряд із сумісною функцією розподілу сумісна щільність імовірності компонент  $n$ -вимірною випадкового вектора містить вичерпну інформацію про випадкові властивості його компонент та про їх взаємний вплив (двох, трьох і т. д.).*

### 2.3.2. Аналог теореми множення для компонент випадкового вектора

А. Нехай компоненти  $n$ -вимірною випадкового вектора є *стохастично незалежними*, тобто зміна однієї не впливає на ймовірність виявлення інших, у цьому випадку сумісна щільність імовірності визначається як

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n p(x_j). \quad (2.56)$$

Б. Нехай імовірність виявлення компонент випадкового вектора  $\vec{X}$  залежить від компонент випадкового вектора  $\vec{Y}$ . Назвемо *умовною щільністю ймовірності* таку функцію  $n + m$  змінних, що, якщо її помножити на елементарні об'єми  $dV_x = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  і  $dV_y = dy_1 dy_2 \dots dy_m$ , дає ймовірність такої події:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n / y_1, y_2, \dots, y_m) dV_x dV_y \stackrel{\text{def}}{=} P \left( \begin{array}{c|c} x_1 < X_1 < x_1 + dx_1 & y_1 < Y_1 < y_1 + dy_1 \\ x_2 < X_2 < x_2 + dx_2 & y_2 < Y_2 < y_2 + dy_2 \\ \dots & \dots \\ x_n < X_n < x_n + dx_n & y_m < Y_m < y_m + dy_m \end{array} \right). \quad (2.57)$$

Умовна сумісна щільність імовірності, згідно із (2.57), характеризує ймовірність того, що якщо кінець вектора  $\vec{Y}$  з деякою ймовірністю потрапляє до елементарного об'єму  $dV_y$  у просторі  $Y$ , то при цьому кінець вектора  $\vec{X}$  із певною ймовірністю може потрапити до елементарного об'єму  $dV_x$  у просторі  $X$  (рис. 2.12).

Згідно з теоремою множення ймовірностей для випадкових подій  $A$  і  $B$  (п. 2.1.2) маємо

$$P(AB) = P(A/B)P(B). \quad (2.58)$$

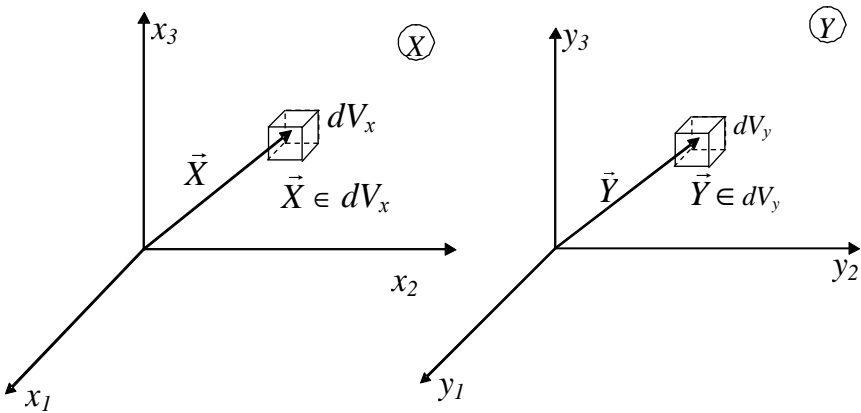


Рисунок 2.12

Ототожнимо подію  $A$  з виявленням вектора  $\vec{X}$ , а подію  $B$  – з виявленням вектора  $\vec{Y}$ , крім того, нехай подія  $B$  передуює події  $A$ . За (2.58) отримуємо **аналог теореми множення для компонент випадкового вектора**:

$$p(\vec{x} \cdot \vec{y}) = p(\vec{x} / \vec{y})p(\vec{y}), \quad (2.59)$$

або у розгорненій формі:

$$\begin{aligned} & p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) = \\ & = p(x_1, x_2, \dots, x_n / y_1, y_2, \dots, y_m) p(y_1, y_2, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (2.60)$$

З урахуванням того, що

$$\begin{aligned} & p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) \equiv \\ & \equiv p(y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.61)$$

із (2.60) випливає **аналог формул Байеса для компонент випадкових векторів**:

$$p(\vec{x} / \vec{y}) p(\vec{y}) = p(\vec{y} / \vec{x}) p(\vec{x}) \quad (2.62)$$

або

$$\begin{aligned} p(\vec{x} / \vec{y}) &= \frac{p(\vec{y} / \vec{x}) p(\vec{x})}{p(\vec{y})}, \\ p(\vec{y} / \vec{x}) &= \frac{p(\vec{x} / \vec{y}) p(\vec{y})}{p(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

### 2.3.3. Аналог теореми про повну ймовірність

Якщо на результат події  $A$  впливають  $m$  несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , то згідно з теоремою про повну ймовірність (п. 2.5.) маємо

$$P(A) = \sum_{k=1}^m P(A / B_k) P(B_k). \quad (2.64)$$

Ототожнимо подію  $A$  з виявленням випадкового вектора  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , а подію  $B_k$

( $k = 1, 2, \dots, m$ ) – відповідно з виявленням компонент  $Y_k$  випадкового вектора  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ . Тоді, керуючись (2.64), для сумісних щільностей імовірності векторів  $\vec{X}$  і  $\vec{Y}$  отримаємо **аналог теореми про повну ймовірність**:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_m p(x_1, x_2, \dots, x_n / y_1, y_2, \dots, y_m) \times \quad (2.65)$$

$$\times p(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \dots dy_m.$$

Відмітимо, що формулу (2.65) можна отримати із (2.60), використовуючи умову узгодженості за компонентами вектора  $\vec{Y}$ .

#### **2.3.4. Числові характеристики випадкових векторів**

Числові характеристики компонент випадкових векторів визначаються аналогічно скалярним випадковим величинам (п. 2.2.2), але з уведенням відповідних індексів.

Так, **для  $k$ -ї компоненти вектора  $\vec{X}$  математичне сподівання дорівнює**

$$\langle X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_k p(x_k) dx_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.66)$$

**Вектор математичних сподівань** (вектор моментів першого порядку) має вигляд

$$\langle \vec{X} \rangle = \begin{pmatrix} \langle X_1 \rangle \\ \langle X_2 \rangle \\ \dots \\ \langle X_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

У свою чергу, *змішані початкові моменти 2-го порядку*

$$\langle X_j X_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j, x_k) dx_j dx_k, \quad (2.68)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, n,$$

де  $p(x_j, x_k)$  – сумісна щільність імовірності  $j$ -ї та  $k$ -ї компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора, *утворюють квадратну матрицю розмірами  $n \times n$ .*

*Змішаним початковим моментам третього порядку* відповідає кубічна матриця

$$\langle X_j X_k X_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k x_m p(x_j, x_k, x_m) dx_j dx_k dx_m. \quad (2.69)$$

За аналогією з (2.68) і (2.69) можуть бути введені моменти більш високого порядку.

Необхідно відмітити, що при використанні сумісної щільності ймовірності *усіх* компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора його числові характеристики *згідно з умовою узгодженості* визначаються  $n$ -кратним інтегруванням сумісної щільності ймовірності з ваговими множниками, що відповідають відповідним компонентам. Наприклад,

$$\begin{aligned} \langle X_k \rangle &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n x_k p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_k p(x_k) dx_k, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \langle X_j X_k \rangle &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n x_j x_k p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_k x_j p(x_k, x_j) dx_k dx_j. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Для того щоб найбільш повно охарактеризувати векторну випадкову величину, необхідно розглянути взаємний вплив усіх можливих поєднань її компонент та визначити відповідні моменти якомога більш високого порядку. Однак варто мати на увазі, що найбільш інформативні внески в опис випадкового вектора дають моменти нижчих порядків. У зв'язку з цим *на практиці* для опису векторних випадкових величин *поряд із першим моментом (математичним сподіванням)* обмежуються розглядом *змішаних центральних моментів 2-го порядку*, які називаються *кореляційними моментами* і утворюють кореляційну матрицю:

$$\begin{aligned} K_{jk} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{X}_j \cdot \tilde{X}_k \rangle = \langle (X_j - \langle X_j \rangle)(X_k - \langle X_k \rangle) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \langle X_j \rangle)(x_k - \langle X_k \rangle) p(x_j, x_k) dx_j dx_k, \end{aligned} \quad (2.72)$$



або

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

де  $\tilde{X}_j = X_j - \langle X_j \rangle$  – центрована  $j$ -та компонента випадкового вектора  $\vec{X}$ .

**Кореляційна матриця компонент випадкового вектора має такі властивості:**

1. Задовольняє умови парності:

$$K_{jk} = K_{kj}. \quad (2.74)$$

2. Є додатно визначеною у тому сенсі, що відповідна їй квадратична форма невід’ємна:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{jk} z_j z_k \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n z_j^2 \geq 0. \quad (2.75)$$

Умова (2.75) виконується також для кореляційних матриць із комплексними компонентами.

3. Якщо **компоненти**  $X_j$  або  $X_k$  випадкового вектора  $\vec{X}$  є **детерміністичними**, то відповідні елементи кореляційної матриці, що мають індекси  $j$  або  $k$ , **дорівнюють нулю**.

Дійсно, нехай  $X_j$  – детерміністична  $j$ -та компонента випадкового вектора  $\vec{X}$ . Тоді, за визначенням, перший співмножник елементів кореляційної матриці (2.72) дорівнює нулю, оскільки для не випадкової величини її значення

збігається з математичним сподіванням:  $x_j \equiv \langle X_j \rangle$ .

Таким чином, у цьому випадку  $j$ -й рядок і  $j$ -й стовпець матриці  $\mathbf{K}$  (2.3) виявляються нульовими.

Для детерміністичного вектора  $\vec{X}$ , очевидно, усі  $K_{jk} \equiv 0$ .

4. Має місце *додатність визначника матриці*  $\det \mathbf{K} \geq 0$  *та усіх її головних мінорів* (теорема Сільвестра [7]). Звідки *випливає існування оберненої матриці*  $\mathbf{K}^{-1}$ .

5. *Діагональні елементи* кореляційної матриці *дорівнюють дисперсіям* відповідних компонент випадкового вектора  $\vec{X}$ :

$$K_{jj} \stackrel{def}{=} D_{X_j} \geq 0. \quad (2.76)$$

6. З нерівності Коші-Буняковського<sup>10)</sup> загального вигляду [7]:

$$\left( \int_V \varphi \psi dV \right)^2 \leq \int_V \varphi^2 dV \int_V \psi^2 dV$$

впливає нерівність для компонент кореляційної матриці

$$K_{jk}^2 \leq K_{jj} K_{kk}. \quad (2.77)$$

---

<sup>10)</sup> Опостен Луї Коші (1789–1857) – французький математик, автор фундаментальних досліджень у галузі теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної механіки, математичної фізики, теорії ймовірностей та ін.

Віктор Якович Буняковський (1804–1889) – автор першого курсу теорії ймовірностей російською мовою, засновник сучасної російської термінології в теорії ймовірностей, автор оригінальних досліджень у галузі статистики і демографії.

На практиці замість кореляційних моментів, що утворюють матрицю  $\mathbf{K}$ , часто використовують безрозмірні *коефіцієнти кореляції*:

$$\rho_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_{jk}}{\left(K_{jj} K_{kk}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.78)$$

які згідно з (2.77) задовольняють умову нормування

$$|\rho_{jk}| \leq 1. \quad (2.79)$$

При цьому  $\rho_{jk} = 1$ , якщо випадкові компоненти  $X_j$  і  $X_k$  зв'язані між собою лінійною залежністю з позитивним кутовим коефіцієнтом;  $\rho_{jk} = -1$ , якщо відповідна лінійна залежність має від'ємний кутовий коефіцієнт;  $\rho_{jk} = 0$  – для випадку, коли  $X_j$  і  $X_k$  стохастично незалежні.

**Приклад 2.13.** Задана функція сумісного розподілу двох компонент випадкового вектора  $\vec{X} = \{X_1, X_2\}^T$ :

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - 3^{-x_1} - 3^{-x_2} + 3^{-x_1 - x_2}, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Знайти сумісну щільність імовірності  $p(x_1, x_2)$  цих компонент.

*Розв'язання.* Для знаходження сумісної щільності імовірності компонент випадкового вектора визначимо частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \ln 3 (3^{-x_1} - 3^{-x_1-x_2}),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 3^{-x_1-x_2} \ln^2 3.$$

Шукана функція

$$p(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \begin{cases} 3^{-x_1-x_2} \ln^2 3, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

**Приклад 2.14.** Для системи випадкових величин  $X, Y$ , що є компонентами випадкового вектора, задана сумісна щільність імовірності:

$$p(x, y) = \begin{cases} A \sin(x + y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < 0. \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт  $A$ , сумісну функцію розподілу  $F(x, y)$ , математичні сподівання, дисперсії, кореляційну матрицю  $[K]$  та коефіцієнт кореляції  $\rho_{xy}$  випадкових величин  $X$  і  $Y$ .

*Розв'язання.* З умови нормування (2.53) знаходимо коефіцієнт  $A$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin(x + y) dx dy = 1.$$

Послідовно інтегруючи спочатку за  $x$ , потім за  $y$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin(x+y) dx dy &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \cos(y) \right] dy = \\ &= - \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \sin(y) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Звідки  $A = \frac{1}{2}$ .

Згідно із (2.50) сумісна функція розподілу

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x \int_0^y \frac{1}{2} \sin(\xi + \eta) d\xi d\eta = - \frac{1}{2} \int_0^x \left[ \cos(\xi + y) - \cos(\xi) \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2} (\sin(x) + \sin(y) - \sin(x + y)). \end{aligned}$$

На основі умови узгодженості (2.70) визначаємо математичне сподівання кожної з компонент:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle = \langle Y \rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \sin(x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2} \sin(x+y) dx dy = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x) \right] dx = \\ &= - \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x) + x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - x \sin(x) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,785. \end{aligned}$$

Діагональні компоненти кореляційної матриці (дисперсії) знаходимо за формулою (2.72):

$$\begin{aligned}
 K_{XX} &= D_X = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \langle X \rangle)^2 p(x, y) dx dy = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (x - 0,785)^2 \sin(x + y) dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 1,57x + 0,785^2) \sin(x + y) dx dy.
 \end{aligned}$$

Інтегруючи за частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x + y) dx dy &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x) \right] dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ 2 \sin(x) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - x^2 \sin(x) + \right. \\
 &\quad \left. + 2x \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2x \cos(x) + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0,804.
 \end{aligned}$$

З урахуванням того, що

$$\frac{0,785^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + y) dx dy = 0,785^2, \text{ отримаємо}$$

$$K_{XX} = D_X = 0,804 - 0,5 \cdot 1,57 \cdot 0,785 - 0,785^2 = 0,188.$$

Відповідні недіагональні елементи кореляційної матриці

$$K_{XY} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) p(x, y) dx dy = -0,046.$$

Таким чином, кореляційна матриця компонент  $X$  і  $Y$  випадкового вектора має вигляд

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,187 & -0,046 \\ -0,046 & 0,187 \end{bmatrix}.$$

Остаточно, за формулою (2.78) знаходимо коефіцієнт кореляції випадкових величин  $X$  і  $Y$ :

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D_X D_Y}} = -0,245.$$

## 2.4. Невипадкові функції випадкових аргументів

### 2.4.1. Невипадкові функції скалярних

#### випадкових величин

Нехай дві випадкові величини  $X$  і  $Y$  зв'язані детерміністичною залежністю так, що кожному значенню  $X$  ставиться у відповідність за деяким законом величина  $Y$ . Говорять, що у цьому випадку задана *невипадкова функція випадкового аргументу*

вигляду  $Y = f(X)$ , наприклад,  $Y = X^2$  або  $Y = \cos X$  і т. п.

Нехай для випадкової величини  $X$  відома функція розподілу  $F_x(x)$ , і відповідно щільність імовірності (у випадку безперервного розподілу):

$$p_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}.$$

Знайдемо закони розподілу випадкової величини  $Y$ :  $F_y(y)$  та  $p_y(y)$ .

Розглянемо два окремих випадки.

1. **Функція  $f(X)$  монотонна**, випадковий аргумент  $X$  безперервно розподіляється в інтервалі  $-\infty < x < \infty$ .

Згідно із (2.16) функція розподілу випадкової величини  $Y$  дорівнює

$$F_y(y) \stackrel{\text{def}}{=} P(Y < y), \quad (2.80)$$

де

$$P(Y < y) = P(f(X) < y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{f(X) < y} p_x(x) dx. \quad (2.81)$$

Для монотонної функції  $f(X)$  завжди існує однозначна обернена функція  $g(Y)$ , така, що

$$X = g(Y), \quad (2.82)$$

де  $g = f^{-1}$ . При цьому

$$p_x(x) = p_x[g(y)], \quad (2.83)$$

і згідно із (2.82) метрики просторів  $X$  і  $Y$  зв'язані співвідношенням

$$dx = |g'(y)| dy. \quad (2.84)$$

З урахуванням (2.83) та (2.84) інтеграл у виразі для функції розподілу (2.81) перетворюється до вигляду



$$F_y(y) = \int_{f(X) < y} p_x(x) dx = \int_{-\infty}^y p_x[g(y)] |g'(y)| dy, \quad (2.85)$$

при цьому відповідна щільність імовірності дорівнює

$$p_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = p_x[g(y)] |g'(y)|. \quad (2.86)$$

2. У випадку *немонотонності не випадкової функції*  $Y = f(X)$  завжди можна знайти зліченне, але не обов'язково скінченне число ділянок монотонності в області її визначення  $-\infty \leq x \leq \infty$ , для кожного з яких

$$Y = f_k(X),$$

де  $f_k(X)$  – монотонна функція  $k$ -ї ділянки,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Для кожної  $k$ -ї ділянки монотонності  $f_k(X)$  існує однозначна обернена функція  $g_k(Y)$  і, очевидно, справедливі отримані для попереднього випадку формули (2.83) – (2.86).

Згідно з теоремою про додавання ймовірностей матимемо

$$p_y(y) = \sum_{k=1}^n p_x[g_k(y)] |g_k'(y)|. \quad (2.87)$$

де підсумовування проводиться за усіма ділянками монотонності.

Відповідна (2.87) функція розподілу  $F_y(y)$  визначається інтегруванням щільності ймовірності  $p_y(y)$ :

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y p_y(y) dy = \int_{-\infty}^y \sum_{k=1}^n p_x[g_k(y)] |g'_k(y)| dy. \quad (2.88)$$

Масштабний множник  $|g'_k(y)|$  у (2.85) – (2.88) прийнято називати **якобіаном перетворення простору  $X$  у простір  $Y$**  [8].

#### 2.4.2. Невипадкові функції векторних випадкових величин

Розглянемо  $n$ -вимірний випадковий вектор  $\vec{X}$  і  $m$ -вимірний випадковий вектор  $\vec{Y}$ , відповідність між компонентами яких устанавлюється детерміністичними функціональними залежностями вигляду

$$Y_k = f_k(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.89)$$

або у векторній формі:

$$\vec{Y} = f(\vec{X}). \quad (2.90)$$

Розмірності векторів  $\vec{X}$  і  $\vec{Y}$ , відповідно  $n$  і  $m$ , взагалі кажучи, можуть бути різними, при цьому у випадку  $m > n$  функції  $f_k$ , де  $k = n + 1, n + 2, \dots, m$  є лінійно залежними.

Припустимо, що  $f_k$  монотонні, тоді обернені функції  $g_k$  є однозначними та диференційованими ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

За аналогією з одновимірним (скалярним) варіантом **сумісна функція розподілу компонент випадкового вектора**  $F_y(y_1, y_2, \dots, y_m)$  може бути визначена

$n$ -кратним інтегруванням сумісної щільності ймовірності компонент вектора  $\vec{X}$ :

$$F_y(y_1, y_2, \dots, y_m) = P \left( \begin{array}{l} Y_1 < y_1 \\ Y_2 < y_2 \\ \dots \\ Y_m < y_m \end{array} \right) = \quad (2.91)$$

$$= \int_V \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

при цьому область  $V$  інтегрування у (2.91) визначається сукупністю нерівностей:

$$f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) < y_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.92)$$

Спочатку розглянемо **випадок, коли  $m < n$** . Припустимо, що серед  $n$  аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  завжди можна знайти такі  $m$  аргументів, для яких вирази через обернені функції

$$x_k = g_k(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.93)$$

будуть однозначними та диференційованими. Проведемо заміну даних  $m$  змінних у виразі для сумісної щільності ймовірностей:

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_x(g_1, g_2, \dots, g_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n).$$

Як і в одновимірному (скалярному) варіанті (п. 2.4.1), із рівності елементарних об'ємів у зв'язаних підпросторах  $X^m$  і  $Y^m$  розмірності  $m$  маємо

$$dV_x^m = dx_1 dx_2 \dots dx_m = |J| dy_1 dy_2 \dots dy_m = |J| dV_y^m, \quad (2.94)$$

де якобіан перетворення  $J$  згідно із (2.93) визначається як

$$|J| \stackrel{def}{=} \det \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}. \quad (2.95)$$

З урахуванням (2.91) і (2.94) вираз сумісної функції розподілу  $F_y(y)$  може бути поданий у вигляді

$$F_y(y_1, y_2, \dots, y_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_m}}_m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} p_x(g_1, g_2, \dots, g_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \times \quad (2.96) \\ \times |J| dy_1 dy_2 \dots dy_m dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n.$$

Тут ураховано, що область визначення  $f_k(\vec{X}) < y_k$  (2.92) відповідає інтервалам  $[-\infty, y_k]$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ .

Сумісну щільність імовірності  $p_y(y_1, y_2, \dots, y_m)$  отримаємо диференціюванням функції розподілу (2.96) за аргументами  $y_1, y_2, \dots, y_m$ :

$$p_y(y_1, y_2, \dots, y_m) = |J| p_x^m[g_1, g_2, \dots, g_m] \stackrel{def}{=} \\ = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} p_x[g_1, g_2, \dots, g_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n] \times \quad (2.97) \\ \times |J| dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n,$$

при цьому інтегрування у (2.97) відповідає **умові узгодженості** за аргументами  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ .

Відмітимо, що в окремому випадку, коли  $m = n$ , тобто розмірності векторів  $\vec{Y}$  і  $\vec{X}$  збігаються, формула (2.97) спрощується. У ній відсутні  $n - m$  інтегралів за аргументами  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ :

$$p_y(\vec{y}) = p_x[\vec{g}(\vec{y})] |J|. \quad (2.98)$$

Як і в одновимірному варіанті (п. 2.4.1), викладену методикку можна узагальнити на випадок немонотонних функцій  $f_k$ . Згідно з теоремою про додавання ймовірностей, проводячи підсумовування за ділянками монотонності  $\vec{f}$ , або, що одне й те саме, за ділянками однозначності  $\vec{g}$ , маємо

$$p_y(\vec{y}) = \sum_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} p_x[g_1, g_2, \dots, g_k; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n] \times \\ \times |J^k| dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n, \quad (2.99)$$

або при  $m = n$

$$p_y(\vec{y}) = \sum_k p_x[\vec{g}^k(\vec{y})] |J^k|. \quad (2.100)$$

Відмітимо, що формули (2.98) і (2.100) справедливі, якщо для усіх компонент вектора  $\vec{X}$  **ділянки монотонності збігаються**.

### 2.4.3. Числові характеристики не випадкових функцій випадкових аргументів

За аналогією з числовими характеристиками випадкових величин можуть бути введені числові характеристики *невипадкових функцій випадкових аргументів*.

Нехай у  $n$  дослідах значення  $x_k$  відтворювалося  $n_k$  разів, де  $k = 1, 2, \dots, m$ , а  $n = \sum_{k=1}^m n_k$ . Тоді подібно статистичному середньому випадкової величини (2.30) можна визначити статистичне середнє детерміністичної функції  $f(X)$  випадкового аргументу  $X$ :

$$f(X) = \frac{\sum_{k=1}^m f(x_k) n_k}{n} = \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{n_k}{n}. \quad (2.101)$$

Оскільки емпірична частота  $\frac{n_k}{n}$  є аналогом імовірності (п. 2.2.2), то можна від статистичних характеристик перейти до ймовірнісних, наприклад, у випадку безперервних розподілів:

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx. \quad (2.102)$$

І далі за аналогією з (2.35) та (2.36) отримаємо

$$\langle f(X)^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^k p(x) dx, \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(X)^k \rangle &= \langle (f(X) - \langle f(X) \rangle)^k \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \langle f(X) \rangle)^k p(x) dx, \end{aligned} \quad (2.104)$$

де  $\tilde{f}(X)$  – центрована функція  $\tilde{f}(X) = f(X) - \langle f(X) \rangle$ .

Числові характеристики випадкового вектора  $\vec{Y} = f(\vec{X})$  визначаються тотожно одновимірному випадку.

Так, для  $k$ -ї компоненти вектора  $\vec{Y}$  математичне сподівання дорівнює

$$\begin{aligned} \langle Y_k \rangle &= \langle f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

У свою чергу, змішані початкові моменти 2-го порядку

$$\langle Y_j Y_k \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n f_j(\vec{x}) f_k(\vec{x}) p(x_1, x_2, \dots, x_n) d\vec{x}, \quad (2.106)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, m,$$

За аналогією з (2.103) та (2.104) можуть бути введені моменти  $k$ -го порядку відповідних компонент:

*початкові*

$$\begin{aligned} \langle Y_j^k \rangle &= \underbrace{\int \dots \int}_{-\infty \dots -\infty}^{\infty \dots \infty} f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)^k \times \\ &\times p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n; \end{aligned} \quad (2.107)$$

**центральні**

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Y}_j^k \rangle &= \langle (Y_j - \langle Y_j \rangle)^k \rangle = \\ &= \underbrace{\int \dots \int}_{-\infty \dots -\infty}^{\infty \dots \infty} (f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) - \langle Y_j \rangle)^k p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

**Змішані центральні моменти 2-го порядку (кореляційні моменти)** визначаються як

$$\begin{aligned} K_{Y_j Y_k} &\stackrel{def}{=} \langle \tilde{Y}_j \cdot \tilde{Y}_k \rangle = \langle (Y_j - \langle Y_j \rangle)(Y_k - \langle Y_k \rangle) \rangle = \\ &= \int \int_{-\infty \dots -\infty}^{\infty \dots \infty} (f_j(\vec{x}) - \langle Y_j \rangle)(f_k(\vec{x}) - \langle Y_k \rangle) p(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Таким чином, для визначення числових характеристик векторної випадкової величини  $\vec{Y} = f(\vec{X})$  необов'язково визначати закон розподілу випадкового вектора  $\vec{Y}$ , а достатньо знати закон розподілу компонент випадкового вектора-аргументу  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Як приклад, що широко використовується на практиці, наведемо невинпадкову функцію випадкового аргументу вигляду  $Y = e^{i\xi X}$ , математичне сподівання якої



$$\langle Y \rangle = \langle e^{i\xi X} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} p(x) dx$$

є характеристичною функцією випадкової величини  $X$  (див. п. 2.2.3). Тобто для такої випадкової функції перший початковий момент містить усю інформацію про випадкову величину  $Y$ : числові характеристики будь-якого порядку можуть бути визначені шляхом диференціювання  $\langle Y \rangle$  за  $\xi$  у точці  $\xi = 0$  (2.43).

**Приклад. 2.15.** Знайти функцію розподілу випадкової величини  $Y = X^2$ , якщо випадкова величина  $X$  підлягає нормальному розподілу з параметрами  $\langle X \rangle = 0$ ,  $D_X = \sigma^2$ .

*Розв'язання.* Невипадкова функція  $Y = f(X) = X^2$  – немонотонна в області визначення  $x$ : при  $x \in (-\infty, 0)$  – монотонно спадає, при  $x \in (0, \infty)$  – монотонно зростає (рис. 2.13). Обернена функція  $g(Y) = \pm\sqrt{Y}$  однозначна на кожній із цих ділянок. Причому  $|g'_y| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ . Тоді за теоремою додавання ймовірностей щільність імовірності випадкової величини  $Y$ :

$$p_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (p_x(-\sqrt{y}) + p_x(\sqrt{y})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}}.$$

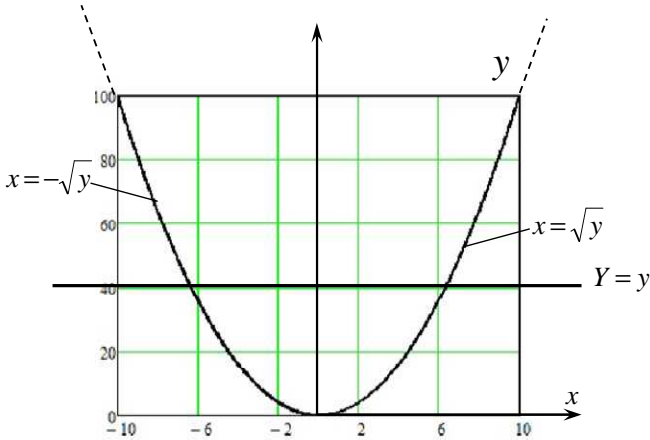


Рисунок 2.13

Інтегруючи отриману щільність імовірності, знайдемо відповідну функцію розподілу:

$$F(y) = \int_{-\infty}^y p_y(y') dy' = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma^2} e^{-\frac{y'}{\sigma^2}} dy'.$$

Тут штрихом помічено аргумент інтегрування.

**Приклад 2.16.** На балку постійного перерізу діє випадкове навантаження (рис. 2.14), що має нормальний закон розподілу, з параметрами:  $\langle Q \rangle = 0$ ,  $\sigma_Q = 1$ :

$$p_1(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (-\infty < q < \infty),$$

і рівномірний закон розподілу координати точки прикладання навантаження

$$p_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \leq x \leq l; \\ 0, & x < 0, x > l. \end{cases}$$

Визначити щільність імовірності моменту у замуруванні, якщо випадкові величини  $Q$  і  $X$  є незалежними.

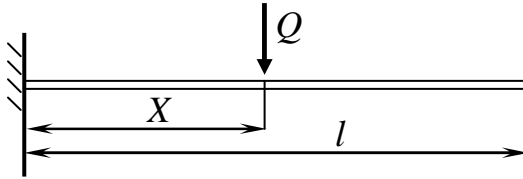


Рисунок 2.14

*Розв'язання.* Для балки (рис. 2.14) момент у замуруванні дорівнює  $M = QX$ .

Для знаходження щільності ймовірності моменту  $M$  необхідно знати сумісний закон розподілу системи випадкових  $Q$  і  $X$ .

Згідно з формулою (2.91):

$$\begin{aligned} F(m) &\stackrel{\text{def}}{=} P(M < m) = \iint_{f(Q,X) < m} p(q,x) dq dx = \\ &= \iint_{f(Q,X) < m} p_1(q) p_2(x) dq dx = \iint_{QX < m} p_1(q) p_2(x) dq dx. \end{aligned}$$

Випадкове навантаження  $Q = \frac{M}{X}$  є однозначною функцією  $M$  в області можливих значень  $Q$ , при цьому умова  $qx < m$  як для  $m > 0$  (рис. 2.15 а), так і

для  $m < 0$  (рис. 2.15 б) відповідає області інтегрування за  $q$ :  $-\infty \leq q < \frac{m}{x}$ . У зв'язку з цим функція розподілу моменту у замуруванні визнається як

$$\begin{aligned} F(m) &= \int_0^l \left( p_2(x) \int_{-\infty}^m p_1\left(\frac{m}{x}\right) \frac{1}{x} dm \right) dx = \\ &= \int_0^l \frac{1}{l} \int_{-\infty}^m \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{x}\right)^2} dm dx. \end{aligned}$$

Відповідно щільність імовірності у замуруванні дорівнює

$$p(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF(m)}{dm} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2x^2}} dx.$$

Проводячи заміну змінних  $t = \frac{m^2}{2x^2}$ ,  $x = \frac{m}{\sqrt{2t}}$ ,  $dx = -\frac{m}{2t\sqrt{2t}} dt$ , отримаємо

$$\begin{aligned} p(m) &= \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\frac{m^2}{2l^2}} \sqrt{\frac{2t}{2\pi}} \frac{1}{m} e^{-t} \left( -\frac{m}{2t\sqrt{2t}} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\frac{m^2}{2l^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{1}{2l} \int_{\frac{m^2}{2l^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

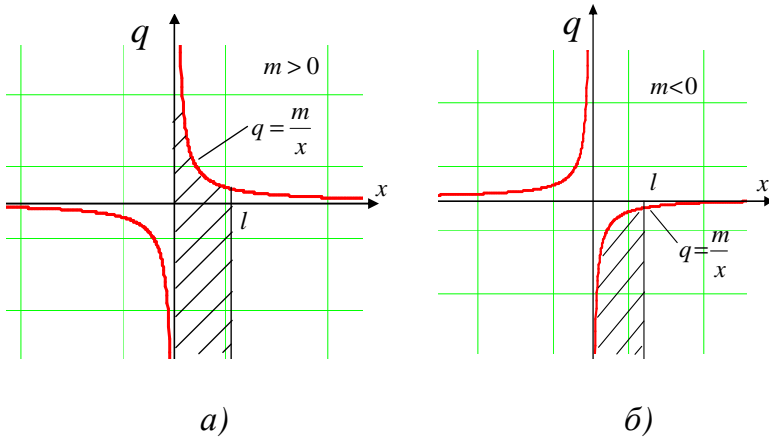


Рисунок 2.15

**Приклад 2.17.** Для стрижня (рис. 2.16) заданий гаусів закон розподілу навантаження  $Q$ :

$$p_1(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (-\infty \leq q \leq \infty) \quad \text{і} \quad \text{рівномірний}$$

розподіл площі  $S$  поперечного перерізу

$$p_2(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 \leq s \leq 12 \text{ см}^2, \\ 0, & s < 8, s > 12 \text{ см}^2, \end{cases}$$

причому  $Q$ ,  $S$  – незалежні випадкові величини.

Визначити щільність імовірності нормального напруження  $\Sigma = \frac{Q}{S}$  у стрижні.

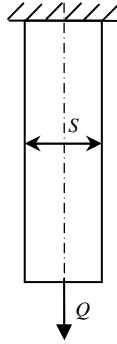


Рисунок 2.16

*Розв'язання.* Оскільки випадкове навантаження  $Q$  і площа перерізу стрижня  $S$  є стохастично незалежними, їх сумісна щільність імовірності дорівнює

$$p(q, s) = p_1(q) p_2(s).$$

Функція  $Q = g(\Sigma, S) = \Sigma S$  – однозначна функція аргументів  $\Sigma$  і  $S$  (рис. 2.17), причому  $\frac{\partial Q}{\partial \Sigma} = S$  (або

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = s).$$

Згідно з формулою (2.86):

$$p(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} p[\sigma s, s] \left| \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right| ds = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\sigma s) p_2(s) s ds.$$

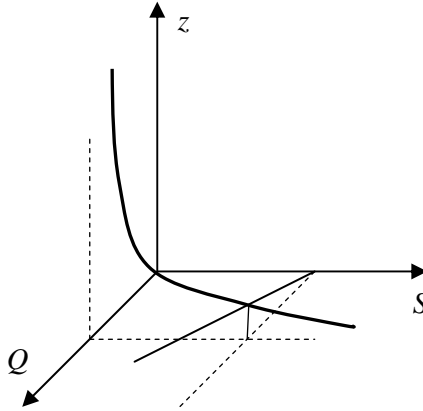


Рисунок 2.17

У результаті підстановки заданих характеристик розподілу  $p_1(q)$  і  $p_2(s)$  маємо

$$\begin{aligned}
 p(\sigma) &= \int_8^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \frac{1}{4} s ds = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_8^{12} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} s ds = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_8^{12} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \frac{ds^2}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{2}{z^2} \right) \frac{1}{2} \int_8^{12} e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} d \left( -\frac{\sigma^2 s^2}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \Big|_{s=8}^{s=12} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left( e^{-\frac{64\sigma^2}{2}} - e^{-\frac{144\sigma^2}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left( e^{-32\sigma^2} - e^{-72\sigma^2} \right).
 \end{aligned}$$

Остаточно

$$p(\sigma) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left( e^{-32\sigma^2} - e^{-72\sigma^2} \right), \quad -\infty \leq z \leq \infty.$$

Наведемо інший спосіб розв'язування задачі, який, на наш погляд, є більш раціональним. За визначенням функція розподілу напружень у стрижні дорівнює

$$F(\sigma) = \iint_{\frac{q}{s} < \sigma} p(s, q) dq ds$$

і для її визначення необхідно знайти область інтегрування на площині  $q, s$ , що задовольняє умову

$\frac{q}{s} < \sigma$ . З розгляду рис. 2.18 випливає, що нерівності

$\frac{q}{s} < \sigma$  відповідає заштрихована область  $\frac{q}{s} < \sigma$

(область інтегрування): 
$$\begin{cases} q < \sigma s & (\sigma > 0), \\ q > \sigma s & (\sigma < 0). \end{cases}$$



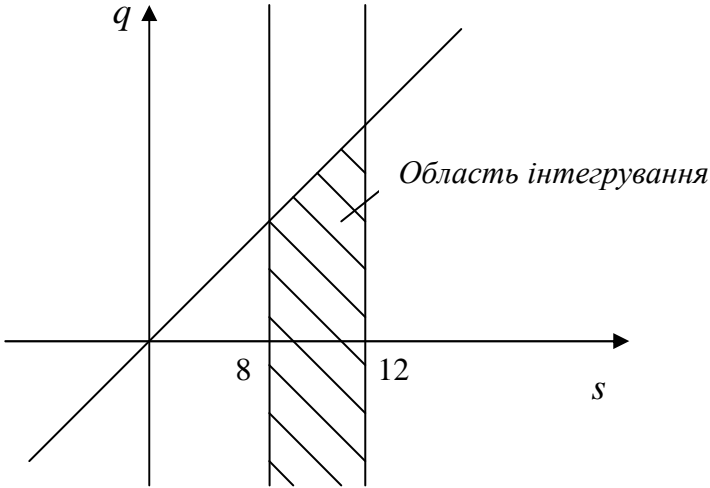


Рисунок 2.18

Таким чином,

$$F(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} \int_8^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{2}} \frac{1}{4} s d\sigma ds.$$

Диференціюючи за  $\sigma$  цю функцію розподілу, маємо

$$\begin{aligned} p(\sigma) &= \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{4} \int_8^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\sigma)^2}{2}} s ds = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_8^{12} s e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} ds = \frac{1}{4\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \left( e^{-32\sigma^2} - e^{-72\sigma^2} \right), \quad -\infty \leq \sigma \leq \infty. \end{aligned}$$

### 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

#### 3.1 Методи опису випадкових функцій (процесів)

Теорія випадкових функцій є природним продовженням теорії ймовірностей подібно тому, як математичний аналіз є подальшим розвитком алгебри.

Теорія випадкових функцій була заснована та отримала свій розвиток завдяки видатним математикам А. А. Маркову, О. Я. Хінчину, Н. Вінеру, А. М. Колмогорову<sup>11)</sup> та ін. [1, 3, 4].

*Випадковою функцією*  $U(x)$  називається спосіб, за допомогою якого кожному значенню не випадкового аргументу  $x$  ставиться у відповідність випадкова величина  $U$ . Якщо аргументом є час, то  $U(t)$  прийнято називати *випадковим процесом*, якщо аргументи – просторові координати, то  $U(\vec{r}(x_i))$  – *випадкове поле*, якщо просторово-часові аргументи, то  $U(\vec{r}, t)$  – *просторово-часове випадкове поле*.

---

<sup>11)</sup> Андрій Андрійович Марков (1856–1922) – учень П. Л. Чебишева, засновник абсолютно нової гілки теорії ймовірностей – теорії випадкових, або «стохастичних», процесів.

Олександр Якович Хінчин (1894–1959) – один із засновників радянської школи теорії ймовірностей (ним отримані важливі результати у сфері граничних теорем, дано визначення випадкового стаціонарного процесу і закладені основи теорії таких процесів).

Норберт Вінер (1894–1964) – американський вчений-математик, відомий своїми працями з теорії потенціалу, гармонійних функцій, рядів і перетворень Фур'є та ін. Велике значення в теорії випадкових процесів (вінерівських процесів) отримала введена Вінером міра у просторі неперервних функцій ("вінерівська міра").

Андрій Миколайович Колмогоров (1903–1987) – вчений-математик, автор фундаментальних праць у галузі теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.

Так само, як і випадкові величини, *випадкові функції можуть бути описані з використанням двох основних способів:*

- *за допомогою законів розподілу;*
- *за допомогою числових характеристик (моментних функцій).*

### **3.1.1. Характеристики розподілу випадкових функцій**

Значення, яких набуває випадковий процес  $U(t)$  у послідовні моменти часу, називаються *реалізаціями*. При багатократному відтворенні випадковий процес (функція) являє собою *множину реалізацій*.

Ймовірнісні характеристики випадкового процесу можуть бути визначені у результаті аналізу його реалізацій для послідовності відтворюваних дослідів.

При фіксованому значенні аргументу  $t$  маємо випадкову величину  $U$ , для якої може бути визначена щільність імовірності  $p(u;t)$ , що залежить від  $t$  як від параметра (рис. 3.1). Ця функція називається *одноточковою (у розумінні для однієї часової точки) щільністю ймовірності*.

За визначенням, одноточкову щільність імовірності можна розглядати як питому ймовірність для моменту часу  $t$ , яка, якщо її помножити на елемент  $du$  простору  $U$ , дає ймовірність події, що полягає у тому, що  $u(t) < U(t) < u(t) + du$ , тобто

$$p(u,t)du \stackrel{def}{=} P[u(t) < U(t) < u(t) + du]. \quad (3.1)$$

Очевидно, знання тільки одноточкової щільності ймовірності не дає вичерпного опису випадкового процесу.

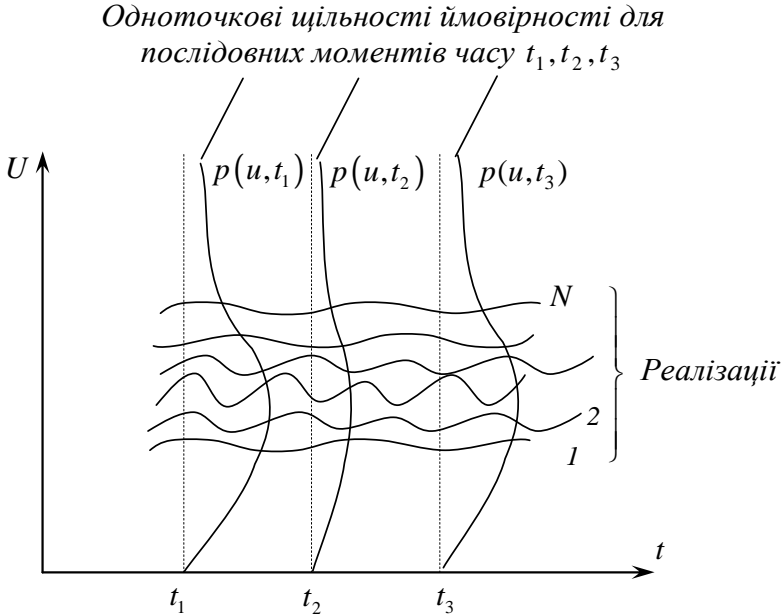


Рисунок 3.1

Для двох значень часового аргументу  $t_1$  і  $t_2$  випадковий процес  $U(t)$  характеризується вже двома взаємообумовленими випадковими величинами  $U_1$  і  $U_2$ , які можуть бути описані з використанням **двоточкової сумісної щільності ймовірності**  $p(u_1, u_2; t_1, t_2)$ , де аргумент  $u_1$  – можливе значення випадкового процесу  $U(t)$  при фіксованому  $t_1$ , а  $u_2$  – можливе значення  $U(t)$  при фіксованому  $t_2$  (рис. 3.2).  
За визначенням:

$$\begin{aligned}
 & p(u_1, u_2; t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \\
 & = P \left[ \begin{array}{l} u_1(t_1) < U(t_1) < u_1(t_1) + du_1 \\ u_2(t_2) < U(t_2) < u_2(t_2) + du_2 \end{array} \right]. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Двоточкова сумісна щільність імовірності, яка є більш інформативною порівняно з одноточною, також не дає вичерпного опису випадкового процесу  $U(t)$ .

За аналогією з (3.1) і (3.2) можна ввести у розгляд **треточкову, чотириточкову і т. д. сумісні щільності ймовірності.**

**Сумісна  $n$ -точкова функція розподілу** характеризує ймовірність того, що випадковий процес для будь-яких можливих аргументів  $t_1, \dots, t_n$  не перевищує відповідних значень  $u_1, \dots, u_n$ :

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} P \left[ \begin{array}{l} U(t_1) < u_1 \\ U(t_2) < u_2 \\ \dots \\ U(t_n) < u_n \end{array} \right]. \quad (3.3)$$

Сумісна щільність імовірності, що відповідає безперервній функції розподілу (3.3), визначається як

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\stackrel{\text{def}}{\partial^n} F(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}. \quad (3.4)$$

**Багатоточкові сумісні функції розподілу та щільності ймовірності випадкових процесів мають ті самі властивості, що й функції розподілу випадкових величин** (п. 2.2.1). При цьому багатоточкові характеристики, що задаються за

*більшою кількістю точок, які аналізуються, містять усю інформацію для меншої кількості точок (умова узгодженості).* Для того щоб вичерпно охарактеризувати властивості випадкового процесу  $U(t)$  у межах досліджуваного інтервалу зміни часового аргументу  $t$ , необхідно мати, взагалі кажучи, багатоточкові сумісні щільності ймовірностей для *якомога більшого числа точок аналізу.* На практиці кількість часових шарів (точок), що аналізуються, як правило, *обмежують двома (іноді трьома).*

### 3.1.2. Числові характеристики випадкових функцій

*В основі другого способу опису лежить визначення моментних функцій,* що виходять як результат осереднення за множиною реалізацій випадкових процесів для послідовності часових аргументів (точок аналізу) (рис. 3.2).

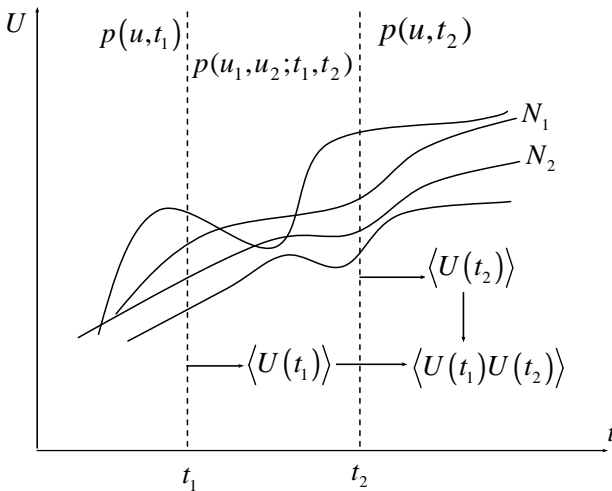


Рисунок 3.2

Моментна функція першого порядку (математичне сподівання (рис. 3.3)) визначається як

$$\langle U(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} up(u,t)du$$

або з використанням умови узгодженості за аргументами  $u_2, u_3, \dots, u_n$  при багатоточковому описі

$$\langle U(t_1) \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n u_1 p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) du_1 du_2 \dots du_n. \quad (3.5)$$

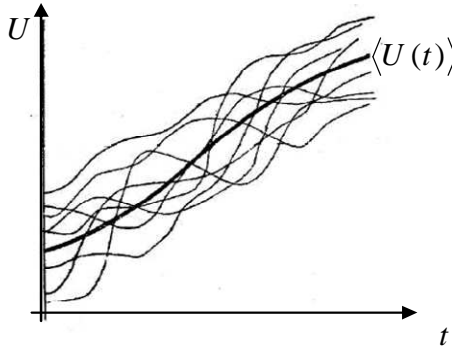


Рисунок 3.3.

Моментна функція другого порядку дорівнює (рис. 3.2):

$$\begin{aligned} \langle U(t_1)U(t_2) \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 p(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n u_1 u_2 p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) du_1 du_2 \dots du_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

і т. д.

Так само, як і для випадкових величин, при описі випадкових функцій найбільш інформативними, що відображають основні ймовірнісні властивості, є моментні функції 1-го та 2-го порядків, а також центральні другі моменти (кореляційні функції).

Введемо до розгляду *центрований випадковий процес (флуктуацію)*:

$$\tilde{U}(t) \stackrel{\text{def}}{=} U(t) - \langle U(t) \rangle.$$

*Кореляційною функцією* називається моментна функція (другого порядку) від добутку центрованих процесів для часових точок  $t_1$  і  $t_2$ :

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 - \langle U(t_1) \rangle) (u_2 - \langle U(t_2) \rangle) p(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2 = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n (u_1 - \langle U(t_1) \rangle) (u_2 - \langle U(t_2) \rangle) \times \\ &\quad \times p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) du_1 du_2 \dots du_n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Кореляційна функція та математичне сподівання містять основну інформацію про випадкові процеси, а для нормальних (гаусових) процесів перший початковий та другий центральний моменти є вичерпними характеристиками.

Відмітимо, що випадкові властивості механічних, радіотехнічних, біологічних та інших систем за певних умов прийнято розглядати у рамках так званої *кореляційної теорії*, аналізуючи першу та другу моментні функції, оскільки встановлено, що внесок



третьої та більш високого порядку моментних функцій у опис випадкових процесів здебільшого виявляється незначним.

**Кореляційна функція випадкового процесу має такі властивості:**

1. **Парність**

$$K_U(t_1, t_2) = K_U(t_2, t_1) \quad (3.8)$$

2. **Невід'ємність**

$$K_U(t, t) = D_U \geq 0, \quad (3.9)$$

де  $D_U$  – центральний момент другого порядку або дисперсія, що характеризує розкид відносно математичного сподівання у момент часу  $t$  (тобто у точці  $t_1 = t_2 = t$ ), а рівність нулю справа має місце для детерміністичної функції  $U(t)$ .

3. Властивість, що випливає з нерівності Коші-Буняковського:

$$K_U^2(t_1, t_2) \leq K_U(t_1, t_1)K_U(t_2, t_2). \quad (3.10)$$

4. При  $n$ -точковому аналізі випадкового процесу кореляційна матриця

$$\mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} K_U(t_1, t_1) & K_U(t_1, t_2) & \dots & K_U(t_1, t_n) \\ K_U(t_2, t_1) & K_U(t_2, t_2) & \dots & K_U(t_2, t_n) \\ & & \dots & \\ K_U(t_n, t_1) & K_U(t_n, t_2) & \dots & K_U(t_n, t_n) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

має властивості кореляційної матриці компонент  $n$ -вимірного випадкового вектора (2.74)–(2.77).

Матриця (3.11) є **додатно визначеною**, її визначник

$$\det \mathbf{K} \neq 0,$$

і, отже, існує обернена матриця  $\mathbf{K}^{-1}$ .

Проілюструємо вищевикладене для нормального (гаусового) випадкового процесу. За визначенням, випадковий процес називається гаусовим, якщо усі його багатоточкові розподіли – гаусові, тобто описуються нормальним законом [8]

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sqrt{\det \mathbf{K}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_{jk} [u_j - \langle U(t_j) \rangle] [u_k - \langle U(t_k) \rangle] \right\}, \quad (3.12)$$

де  $\mathbf{L} = \mathbf{K}^{-1}$ . Як бачимо з (3.12), нормальний випадковий процес повністю визначається моментними функціями першого  $\langle U(t) \rangle$  та другого  $K_U(t_1, t_2)$  порядків.

**Приклад 3.1.** Визначити математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу  $U(t) = Ae^{-ct}$ , де  $A$  і  $C$  – незалежні випадкові величини, для яких  $P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\langle A \rangle)^2}{2}}$ ,

$$P(c) = e^{-c}, \quad c > 0, \quad \langle c \rangle = 1, \quad D_c = 1.$$

*Розв'язання.* З умови стохастичної незалежності випадкових величин  $A$  і  $C$  їх сумісна щільність імовірності

$$p(a, c) = p(a)p(c).$$

Математичне сподівання, або моментна функція 1-го порядку, випадкового процесу  $U(t)$  визначається як

$$\begin{aligned}\langle U(t) \rangle &= \langle Ae^{-Ct} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} ae^{-ct} p(a, c) da dc = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ap(a) da \int_0^{\infty} e^{-ct} e^{-c} dc = \langle A \rangle \int_0^{\infty} e^{-c(t+1)} dc = \langle A \rangle \frac{e^{-c(t+1)}}{-(t+1)} \Big|_0^{\infty} = \frac{\langle A \rangle}{t+1}.\end{aligned}$$

Кореляційна функція процесу

$$\begin{aligned}K_U(t_1, t_2) &= \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \left\langle \left( Ae^{-Ct_1} - \frac{\langle A \rangle}{t_1 + 1} \right) \left( Ae^{-Ct_2} - \frac{\langle A \rangle}{t_2 + 1} \right) \right\rangle = \\ &= \langle A^2 e^{-Ct_1} e^{-Ct_2} \rangle - \frac{\langle Ae^{-Ct_1} \langle A \rangle \rangle}{t_2 + 1} - \frac{\langle Ae^{-Ct_2} \langle A \rangle \rangle}{t_1 + 1} + \frac{\langle A \rangle^2}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)} = \\ &= \langle A^2 e^{-Ct_1} e^{-Ct_2} \rangle - \frac{\langle A \rangle^2}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)}.\end{aligned}$$

Другий початковий момент, що входить до виразу кореляційної функції, дорівнює

$$\begin{aligned}\langle U(t_1)U(t_2) \rangle &= \langle A^2 e^{-C(t_1+t_2)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} a^2 e^{-c(t_1+t_2)} e^{-ct} p(a)p(c) da dc = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 p(a) da \int_0^{\infty} e^{-c(t_1+t_2)} e^{-c} dc = \frac{\langle A^2 \rangle}{t_1 + t_2 + 1}.\end{aligned}$$

За визначенням (2.37), дисперсія випадкової величини  $D_A = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ , звідки

$$\langle A^2 \rangle = D_A + \langle A \rangle^2.$$

Згідно з умовою задачі  $D_A = \sigma^2 = 1$ , тоді вираз для кореляційної функції випадкового процесу  $U(t)$  має вигляд

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \frac{1 + \langle A \rangle^2}{t_1 + t_2 + 1} - \frac{\langle A \rangle^2}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)} = \\ &= \frac{(t_1 + 1)(t_2 + 1) + \langle A \rangle^2 t_1 t_2}{(t_1 + t_2 + 1)(t_1 + 1)(t_2 + 1)}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.2.** Задано випадковий процес  $X(t) = A \sin t$ , де  $A$  – випадкова величина, що описується нормальним законом розподілу з параметрами  $\langle A \rangle, \sigma$ . Визначити одноточкову щільність імовірності та функцію розподілу процесу при  $t \neq k\pi$  ( $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ).

*Розв'язання.* Визначимо числові характеристики випадкового процесу  $X(t)$ .

Математичне сподівання

$$\langle X(t) \rangle = \langle A \sin t \rangle = \langle A \rangle \sin t.$$

Кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_X(t, t') &= \langle \tilde{X}(t) \tilde{X}(t') \rangle = \langle (A - \langle A \rangle) \sin t (A - \langle A \rangle) \sin t' \rangle = \\ &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \sin t \sin t' = D_A \sin t \sin t' = \sigma^2 \sin t \sin t'. \end{aligned}$$

Тоді дисперсія та середнє квадратичне відхилення процесу відповідно дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} D_X &= K_X(t = t') = \sigma^2 \sin^2 t, \\ \sigma_X &= \sqrt{D_X} = \sigma |\sin t|. \end{aligned}$$

Таким чином, випадковий процес  $X(t) = A \sin t$ , розподілений за нормальним законом з параметрами  $\langle A \rangle \sin t$ ,  $\sigma |\sin t|$ , при цьому щільність імовірності має вигляд

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma|\sin t|}} e^{-\frac{(x - \langle A \rangle \sin t)^2}{2\sigma^2 \sin^2 t}},$$

а функція розподілу ймовірності

$$F(x, t) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \langle A \rangle \sin t}{\sigma |\sin t|}\right),$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – інтеграл (функція) Лапласа [2].

**Приклад 3.3.** Відомі числові характеристики двовимірного скалярного випадкового вектора  $\vec{X} = \{X_1, X_2\}^T$ : математичні сподівання  $\langle X_1 \rangle = -0,5$ ,  $\langle X_2 \rangle = 1$  і дисперсії його компонент  $D_{X_1} = 3$ ,  $D_{X_2} = 2$ , а також взаємна кореляційна функція  $K_{X_1 X_2} = -2$ .

Визначити математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію випадкового процесу

$$Y(t) = X_1 \cos t + X_2 \sin t + t.$$

*Розв'язання.* За визначенням математичного сподівання випадкового процесу маємо

$$\begin{aligned}\langle Y(t) \rangle &= \langle X_1 \cos t + X_2 \sin t + t \rangle = \\ &= \langle X_1 \rangle \cos t + \langle X_2 \rangle \sin t + \langle t \rangle = -0,5 \cos t + \sin t + t.\end{aligned}$$

Знайдемо кореляційну функцію

$$\begin{aligned}K_Y(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Y}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \\ &= \langle [(X_1 - \langle X_1 \rangle) \cos t_1 + (X_2 - \langle X_2 \rangle) \sin t_1] \times \\ &\times [(X_1 - \langle X_1 \rangle) \cos t_2 + (X_2 - \langle X_2 \rangle) \sin t_2] \rangle = \\ &= \langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)^2 \rangle \cos t_1 \cos t_2 + \langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)(X_2 - \langle X_2 \rangle) \rangle \cos t_1 \sin t_2 + \\ &+ \langle (X_2 - \langle X_2 \rangle)(X_1 - \langle X_1 \rangle) \rangle \sin t_1 \cos t_2 + \langle (X_2 - \langle X_2 \rangle)^2 \rangle \sin t_1 \sin t_2 = \\ &= D_{X_1} \cos t_1 \cos t_2 + 2K_{X_1 X_2} (\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2) + D_{X_2} \sin t_1 \sin t_2 = \\ &= 3 \cos t_1 \cos t_2 - 4 \sin(t_1 + t_2) + 2 \sin t_1 \sin t_2.\end{aligned}$$

Для визначення дисперсії скористаємося властивістю кореляційної функції

$$D_Y = K_Y(t_1 = t_2) = 3 \cos^2 t - 4 \sin 2t + 2 \sin^2 t.$$

### 3.2. Стаціонарні випадкові процеси

Серед випадкових процесів виділяють клас **стаціонарних**, який, у свою чергу, містить підклас **ергодичних** (рис. 3.4).

Випадковий процес  $U(t)$  називається **стаціонарним**, якщо його **ймовірнісні характеристики інваріантні відносно вибору початку відліку за часовим аргументом  $t$** .

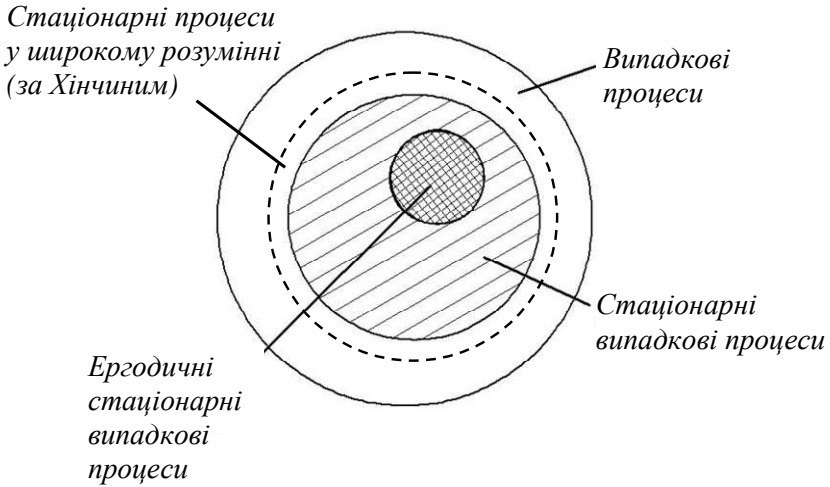


Рисунок 3.4.

Для стаціонарних випадкових процесів **одноточкова щільність імовірності** не залежить від  $t$ :

$$p(u, t) \equiv p(u). \quad (3.13)$$

**Двоточкова сумісна щільність імовірності**  $p(u_1, u_2; t_1, t_2)$  залежить не від моментів часу  $t_1$  і  $t_2$ , а від різниці часових аргументів:

$$p(u_1, u_2; t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} p\left(u_1, u_2; \underbrace{t_2 - t_1}_{\tau}\right) = p(u_1, u_2; \tau), \quad (3.14)$$

де  $\tau = t_2 - t_1$  (рис. 3.5).

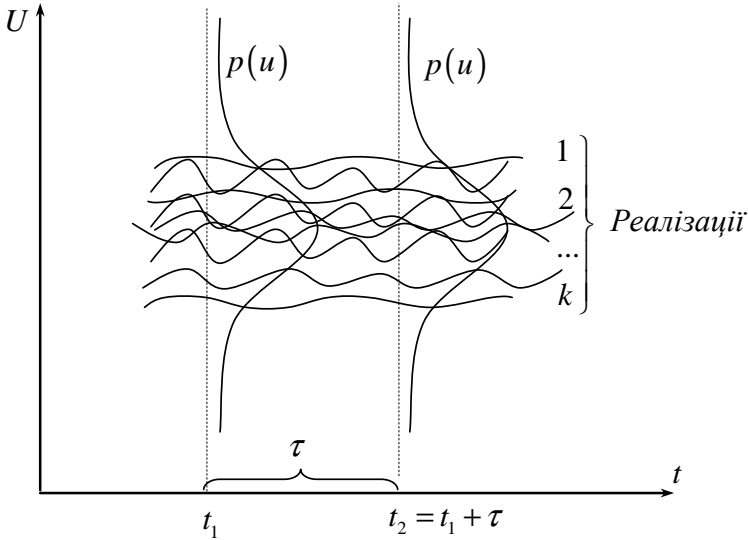


Рисунок 3.5.

**Триточкова сумісна щільність імовірності** з урахуванням того, що  $t_2 - t_1 = \tau_1$ ,  $t_3 - t_2 = \tau_2$ ,  $t_3 - t_1 = \tau_3$ , визначається як

$$\begin{aligned} p(u_1, u_2, u_3; t_1, t_2, t_3) &= p(u_1, u_2, u_3; \tau_1, \tau_2) = \\ &= p(u_1, u_2, u_3; \tau_2, \tau_3) = p(u_1, u_2, u_3; \tau_3, \tau_1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

У свою чергу, ***n*-точкові ймовірнісні характеристики стаціонарних випадкових процесів визначаються *n*-1 часовими параметрами, що характеризують різниці часових аргументів (точок).**

Очевидно, що щільності ймовірності стаціонарних випадкових процесів задовольняють усі властивості щільностей імовірностей випадкових процесів загального вигляду (п. 3.1) При цьому з умови узгодженості випливає, що ***багаточкові ймовірнісні***



**характеристики містять у собі усю інформацію про відповідні характеристики більш низького рівня.**

При другому способі опис стаціонарних випадкових процесів реалізується за допомогою моментних функцій.

**Перший момент, або математичне сподівання,** стаціонарного випадкового процесу визначається як

$$\langle U(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du = \text{const}. \quad (3.16)$$

**Другий початковий момент** є функцією  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\langle U(t_1)U(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 p(u_1, u_2, \tau) du_1 du_2 = f(\tau). \quad (3.17)$$

**Кореляційна функція** стаціонарного випадкового процесу також залежить не від аргументів  $t_1$  і  $t_2$ , а від їх різниці  $\tau$ :

$$K_U(t_1, t_2) = \langle (U(t_1) - \langle U(t_1) \rangle)(U(t_2) - \langle U(t_2) \rangle) \rangle = K_U(\tau). \quad (3.18)$$

Для стаціонарних випадкових процесів кореляційна функція зберігає **основні властивості** (п. 3.1):

1. **Парність** (або симетричність за  $\tau$ )  
 $K_U(\tau) = K_U(-\tau)$ .
2. **Невід'ємність**  $K_U(0) = D_U \geq 0$ .
3. Є спадною функцією:

$$|K_U(\tau)| \leq K_U(0), \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} K_U(\tau) = 0.$$

Випадковий процес називається **стаціонарним у широкому розумінні** (за Хінциним) (рис. 3.4), якщо умови стаціонарності виконуються тільки для його

*перших двох моментних функцій.* Очевидно, що підклас стаціонарних процесів за Хінчином ширший від підкласу стаціонарних процесів загального вигляду (рис. 3.4) через менш жорсткі обмеження для моментних функцій.

Проілюструємо вищевикладене, розглядаючи стаціонарний випадковий процес, значення якого на кожному інтервалі  $\Delta t$  не корелюють між собою, а математичне сподівання дорівнює нулю:  $\langle U(t) \rangle = 0$  (рис. 3.6 а). Спрямуємо усі  $\Delta t$  до нуля, зберігаючи при цьому скінченною величину заштрихованої площі. При граничному переході отримаємо **стаціонарний випадковий процес, що називається «білий шум»** (рис. 3.6 б), який являє собою суміш флуктуацій з різними частотами, причому **енергія на кожній частоті переноситься одна й та сама.**

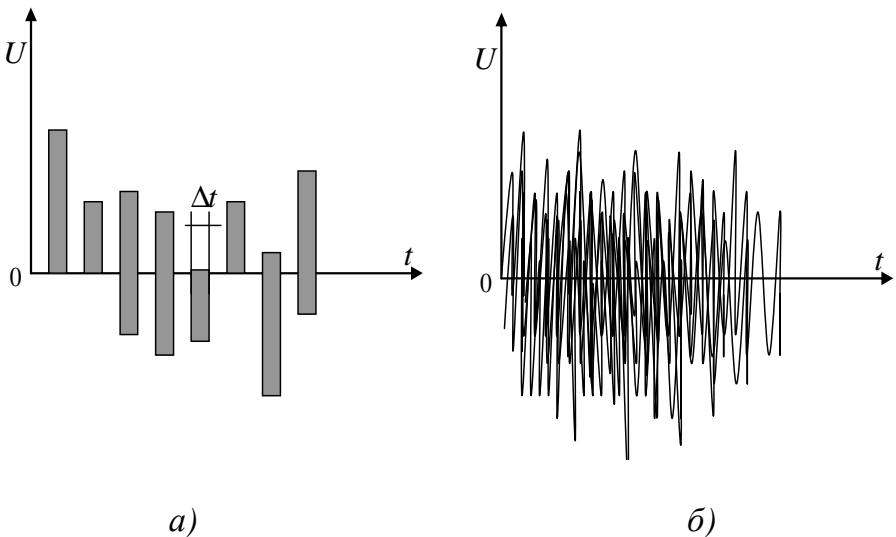


Рисунок 3.6

Кореляційна функція процесу «білий шум» дорівнює нулю для будь-якого  $\tau$ , крім  $\tau = 0$  (рис. 3.7), і математично її можна описати за допомогою дельта-функції Дірака [8]:

$$K_U(\tau) = K_0 \delta(\tau).$$

У зв'язку з цим "білий шум" також називають  $\delta$ -корельованим процесом.

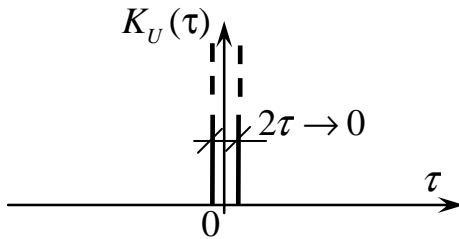


Рисунок 3.7

Очевидно, дисперсія процесу

$$D_U = K_U(0) \rightarrow \infty,$$

тобто "білий шум" має нескінченну характеристику розсіювання.

Для **експоненціально-корельованого стаціонарного випадкового процесу** [3; 4]

$K_U(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ , а  $D_U = K_U(0) = \sigma^2$ . Такого вигляду кореляційна функція може бути використана для апроксимації багатьох реальних фізичних явищ. При  $\alpha \rightarrow \infty$  кореляційна функція  $K_U(\tau) \rightarrow \sigma^2 \delta(\tau)$ , тобто сусідні значення  $U(t)$  не зв'язані, й експоненціально-корельований випадковий процес переходить у "білий шум".

**Приклад 3.4.** Визначити, чи є стаціонарним випадковий процес  $X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , де  $A, \omega$  – постійні;  $\varphi$  – випадкова величина, розподілена рівномірно на відрізку  $[0; 2\pi]$ .

*Розв'язання.* Для рівномірно розподіленої випадкової величини  $\varphi$  (рис. 3.8) з умови нормування

$$\int_0^{2\pi} C d\varphi = 1 \text{ знайдемо } C = \frac{1}{2\pi}.$$

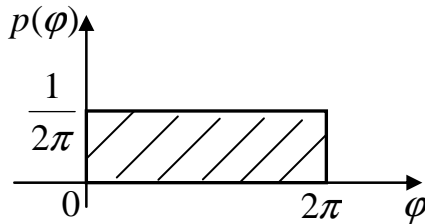


Рисунок 3.8

Таким чином, щільність імовірності

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0, & 2\pi < \varphi < 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкового процесу  $X(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \langle A \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

тобто процес, що розглядається, є центрованим ( $X = \tilde{X}$ ). Тоді за формулою (3.7) знаходимо кореляційну функцію:

$$\begin{aligned} K_X(t, t') &= \langle \tilde{X}(t) \tilde{X}(t') \rangle = A^2 \langle \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t' + \varphi) \rangle = \\ &= \frac{A^2}{2} \langle \cos(\omega(t - t')) - \cos(2\varphi + \omega(t + t')) \rangle = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t')) - \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi + \omega(t + t')) = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t')) - \frac{A^2}{8} \sin(2\varphi + \omega(t + t')) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t')) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

Таким чином, перші дві моментні функції задовольняють умови стаціонарності (3.16) та (3.18), і можна стверджувати, що випадковий процес  $X(t)$  є стаціонарним процесом у широкому розумінні (за Хінчином).

**Приклад 3.5.** Визначити, чи є стаціонарним випадковий процес  $U(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , де  $\omega$  – детерміністичний параметр;  $A$  і  $B$  – некорельовані випадкові величини з математичними сподіваннями, що дорівнюють нулю, та рівними дисперсіями:  $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ ,  $D_A = D_B = D$ .

*Розв'язання.* Математичне сподівання випадкового процесу

$$\begin{aligned}\langle U(t) \rangle &= \langle A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \rangle = \langle A \cos(\omega t) \rangle + \langle B \sin(\omega t) \rangle = \\ &= \langle A \rangle \cos(\omega t) + \langle B \rangle \sin(\omega t) = 0.\end{aligned}$$

Процес є центрованим, відповідно кореляційна функція

$$\begin{aligned}K_U(t_1, t_2) &= \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \\ &= \langle (A \cos(\omega t_1) + B \sin(\omega t_1))(A \cos(\omega t_2) + B \sin(\omega t_2)) \rangle = \\ &= \langle A^2 \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + AB \cos(\omega t_1) \sin(\omega t_2) + \\ &\quad + BA \sin(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + B^2 \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2) \rangle = \\ &= \langle A^2 \rangle \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \langle AB \rangle \cos(\omega t_1) \sin(\omega t_2) + \\ &\quad + \langle BA \rangle \sin(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \langle B^2 \rangle \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2).\end{aligned}$$

Унаслідок відсутності кореляції між випадковими величинами  $A$  і  $B$  ( $\langle AB \rangle = \langle BA \rangle = 0$ ) і враховуючи, що  $\langle A^2 \rangle = D_A$ ,  $\langle B^2 \rangle = D_B$  та  $D_A = D_B = D$ , отримаємо

$$\begin{aligned}K_U(t_1, t_2) &= D_A \cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + D_B \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2) = \\ &= D(\cos(\omega t_1) \cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1) \sin(\omega t_2)) = \\ &= D \cos \omega(t_1 - t_2) = D \cos \omega \tau.\end{aligned}$$

Оскільки  $\langle U(t) \rangle = 0$ , а кореляційна функція залежить тільки від  $\tau = t_2 - t_1$ , можна стверджувати, що заданий випадковий процес є стаціонарним (за Хінчиним).

### 3.3. Ергодичні стаціонарні випадкові процеси

Стаціонарний випадковий процес прийнято називати *ергодичним*, якщо його єдина реалізація  $u(t)$  містить усю інформацію про процес. Таким чином, властивості ергодичного процесу повністю розгортаються у часі. Для *ергодичних процесів при визначенні моментних функцій операцію усереднення за множиною реалізацій можна замінити операцією усереднення за часовим аргументом*.

Розглянемо реалізацію  $u(t)$  на часовому інтервалі  $[t, t+T]$  і проаналізуємо характер зміни відповідних числових характеристик у межах обраного інтервалу, спрямовуючи його до нескінченності (рис. 3.9).

Перший початковий момент ергодичного процесу дорівнює

$$\langle U(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t') dt' = \text{const}. \quad (3.19)$$

Кореляційна функція (другий центрований момент) визначається як

$$K_U(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{u}(t') \tilde{u}(t' + \tau) dt', \quad (3.20)$$

де  $\tilde{u}(t) = u(t) - \langle U(t) \rangle$ .

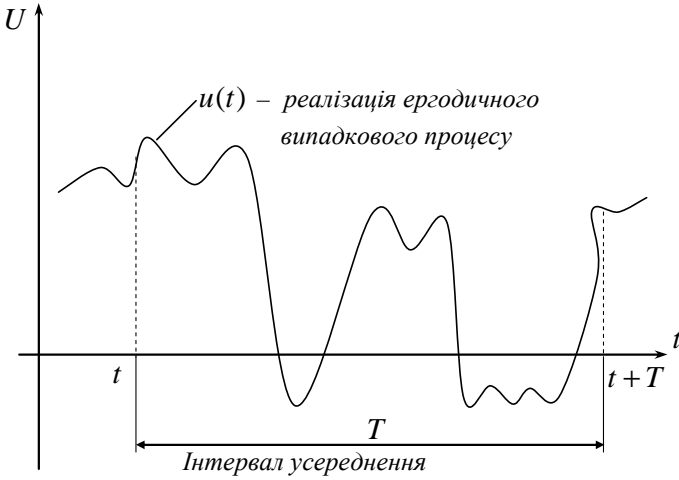


Рисунок 3.9

Не всі стаціонарні процеси можна розглядати як ергодичні (рис. 3.4). Теорема Калмана-Пугачова<sup>12)</sup> [14] стверджує, що для гаусового процесу умова абсолютної інтегровності його кореляційної функції є необхідною та достатньою, щоб вважати процес ергодичним. Інакше кажучи, якщо  $U(t)$  – гаусовий процес, кореляційна функція якого задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_U(\tau)| d\tau < \infty,$$

<sup>12)</sup> Рудольф Эмиль Калман (1930) – інженер та дослідник у галузі теорії керування. Вніс суттєвий вклад у сучасну теорію керування (вважається одним із її засновників), найбільш відомий як творець фільтра Калмана. Володимир Семенович Пугачов (1911–1998) – вчений-механік, основні праці якого присвячені статистичній теорії процесів керування, інформатиці, авіаційній балістиці, динаміці польоту, теорії канонічних розкладань випадкових функцій, статистичній теорії систем, що описуються стохастичними диференціальними та різницевиими рівняннями та ін.



то такий процес є ергодичним. Відмітимо, що *абсолютна інтегровність кореляційної функції автоматично припускає скінченність дисперсії.*

### 3.4. Спектральне подання випадкових функцій (процесів)

У подальшому під  $U(t)$  будемо розуміти випадкову функцію, в якій як детерміністичний аргумент може бути як час  $t$ , так і просторова координата  $x$ .

Нехай випадкова функція  $U(t)$  може бути подана у вигляді *дискретного розкладання*:

$$U(t) = \sum_k \mathcal{U}_k \varphi_k(t), \quad (3.21)$$

де  $\varphi_k(t)$  – детерміністичні базисні функції;  $\mathcal{U}_k$  – випадкові числа (спектр розкладання).

Відмітимо, що не будь-яку випадкову функцію  $U(t)$  можна розвинути у ряд (3.21) – система базисних функцій  $\varphi_k(t)$  і система випадкових коефіцієнтів  $\mathcal{U}_k$  повинні мати певну повноту [1; 4].

Розвинення випадкової функції вигляду (3.21) називається узагальненим *стохастичним рядом Фур'є*. Випадкова функція  $U(t)$  тут вважається повністю заданою, якщо відома сумісна щільність імовірності  $p(u_1, u_2, \dots, u_n)$  коефіцієнтів ряду (3.21) (при першому способі опису випадкових функцій) або повна система моментів цих коефіцієнтів (при другому способі опису). Таким чином, замість задання сумісних багатоточкових ймовірнісних характеристик випадкової функції  $U(t)$  або її моментних функцій

приходимо до опису випадкових амплітуд  $\mathcal{U}_k$ , які містять усю необхідну інформацію про ймовірнісні властивості процесу  $U(t)$ .

Серед усіх спектральних розкладань (3.21) найбільш широко використовуються **стохастичні ортогональні, або канонічні, розкладання**.

Якщо в (3.21) виділити математичне сподівання

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \sum_k \mathcal{U}_k \varphi_k(t), \quad (3.22)$$

а коефіцієнти ряду Фур'є  $\mathcal{U}_k$  прийняти стохастично незалежними

$$\langle \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \rangle = 0 \quad (j \neq k), \quad (3.23)$$

то таке спектральне подання називається **стохастично ортогональним, або канонічним дискретним розкладанням** (за В. С. Пугачовим) [14].

Визначимо кореляційну функцію, що відповідає даному розкладанню:

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) & \stackrel{def}{=} \langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle = \left\langle \sum_j \mathcal{U}_j \varphi_j(t_1) \sum_k \mathcal{U}_k \varphi_k(t_2) \right\rangle = \\ & = \sum_j \sum_k \langle \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \rangle \varphi_j(t_1) \varphi_k(t_2) \end{aligned}$$

або, враховуючи умови ортогональності спектра (3.23):

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_k \langle \mathcal{U}_k^2 \rangle \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2) = \sum_k D_{\mathcal{U}_k} \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2). \quad (3.24)$$

Як буде показано у п. 3.5, **спектральне розкладання стаціонарних випадкових процесів є стохастично ортогональним (та навпаки)**.

Поряд із дискретною формою (3.21) може бути введене **безперервне спектральне розкладання** з використанням **узагальненого стохастичного інтеграла Фур'є**:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega) \varphi(t/\omega) d\omega, \quad (3.25)$$

де  $\varphi(t/\omega)$  – детерміністична базисна функція часу  $t$  та дійсного невинуватого параметра перетворення  $\omega$  (частоти);  $\mathcal{U}(\omega)$  – випадкова функція, або, інакше, **спектр** процесу  $U(t)$ . Функцію  $\mathcal{U}(\omega)$  іноді називають Фур'є-трансформантою.

З математичного аналізу відомо, що для подання **детерміністичної** функції  $f(x)$  у вигляді інтеграла Фур'є необхідно виконання умов її абсолютної інтегровності (умови Діріхле):  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  [8].

Для подання **випадкової** функції  $U(t)$  у вигляді інтеграла Фур'є (3.25) необхідне виконання **умови Вінера–Хінчина** [4]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |U(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.26)$$

*Для лінійних систем незалежно від їх фізичної природи інтеграл  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |U(t)|^2 dt$  характеризує*

*потужність, що переноситься у системах, яка згідно з (3.26) повинна бути скінченною.*

*Канонічне безперервне спектральне розкладання випадкового процесу має вигляд*

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega) \varphi(t/\omega) d\omega, \quad (3.27)$$

де випадковий спектр розкладання  $\mathcal{U}(\omega)$  задовольняє умову **стохастичної ортогональності**:

$$\langle \mathcal{U}(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle = S_U(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (3.28)$$

Тут  $S_U(\omega)$  – детерміністична функція, що називається **спектральною щільністю**;  $\delta(\omega)$  – дельта-функція Дірака.

Подання (3.27), що задовольняє умову (3.28), уперше було виведено Н. Вінером у 1930 році та широко цитувалося А. Я. Хінчиним із 1934 року. Фізичний зміст даного спектрального подання полягає у **переході з простору часового аргумента  $t$  у простір частоти  $\omega$** .

Функція спектральної щільності  $S_U(\omega)$ , яка є аналогом кореляційної функції у просторі частоти (а у польових задачах – у просторі хвильових чисел (п. 6.1.3)), складає основу спектрального аналізу у статистичній механіці, радіофізиці, теорії рівноважних теплових флуктуацій та ін.

Необхідно відмітити, що **стохастичні інтеграли Фур'є (3.27) не є визначеними у загальному математичному розумінні, оскільки випадковий спектр  $\mathcal{U}(\omega)$  набуває значень у допустимій області тільки з деякою ймовірністю**.

**Приклад 3.6.** Побудувати дискретне спектральне розкладання для прогинань  $W$  балки, що перебуває під дією розподіленого по всій довжині балки навантаження.

*Розв'язання.* У випадку шарнірного обпирання балки по кінцях функція прогинань  $W(x)$  може бути подана у вигляді ряду:

$$W(x) = W_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

де  $W_0(x) = \langle W(x) \rangle$ , а числові характеристики випадкового спектра  $W_k$  відповідно дорівнюють

$$\langle W_k \rangle = 0, \quad \langle W_j W_k \rangle = K_{W_j W_k}.$$

Кореляційна функція прогинань балки визначається як

$$\begin{aligned} K_W(x, x') &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle W_j W_k \rangle \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x'}{l} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{W_j W_k} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x'}{l}. \end{aligned}$$

При задовільних граничних умовах дискретне спектральне подання прогинань має вигляд

$$W(x) = W_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k X_k(x),$$

де  $X_k(x)$  – балкові функції [11].

**Приклад 3.7.** Випадковий процес  $U(t)$  допускає дискретне спектральне розкладання вигляду

$$U(t) = a(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (X_k \sin \omega_k t + V_k \cos \omega_k t),$$

де  $\omega_k$  – детерміністичні параметри;  $X_k$  і  $V_k$  – випадкові амплітуди, причому  $\langle X_k \rangle = \langle V_k \rangle = 0$ .

Визначити математичне сподівання  $\langle U(t) \rangle$  і кореляційну функцію  $K_U(t_1, t_2)$ .

*Розв'язання.* Математичне сподівання

$$\langle U(t) \rangle = a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle X_k \rangle \sin \omega_k t + \langle V_k \rangle \cos \omega_k t] = a(t).$$

Кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \langle (U(t_1) - \langle U(t_1) \rangle)(U(t_2) - \langle U(t_2) \rangle) \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} (X_k \sin \omega_k t_1 + V_k \cos \omega_k t_1) \sum_{j=0}^{\infty} (X_j \sin \omega_j t_2 + V_j \cos \omega_j t_2) \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\langle X_k X_j \rangle \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \langle V_k X_j \rangle \cos \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \\ &\quad + \langle X_k V_j \rangle \sin \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2 + \langle V_k V_j \rangle \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2). \end{aligned}$$

У разі, якщо  $X_k$  і  $V_k$  – некорельовані випадкові величини, тобто  $\langle X_k V_j \rangle = \langle V_k X_j \rangle = 0$ , кореляційна функція вихідного випадкового процесу дорівнює

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\langle X_k X_j \rangle \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \langle V_k V_j \rangle \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2). \end{aligned}$$

Позначимо  $K_{X_k X_j} = \langle X_k X_j \rangle$ ,  $K_{V_k V_j} = \langle V_k V_j \rangle$ , тоді

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (K_{X_k X_j} \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + K_{V_k V_j} \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2), \end{aligned}$$

або

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle Y_k Y_j \rangle \varphi_k(t_1) \varphi_j(t_2),$$

де  $Y_k = \{X_1, V_1, X_2, V_2, \dots\}$ ,  $\varphi_k = \{\sin \omega_1 t, \cos \omega_1 t, \dots\}$ .

Розкладання є канонічним, якщо

$$\langle Y_j Y_k \rangle = 0, \quad j \neq k, \quad \langle Y_j \rangle = 0.$$

У даному випадку амплітудами розкладання кореляційної функції є дисперсії коефіцієнтів розкладання процесу:

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\infty} D_{Y_j} \varphi_j(t_1) \varphi_j(t_2).$$

Таким чином, для канонічного розкладання маємо

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ D_{X_j} \sin \omega_j t_1 \sin \omega_j t_2 + D_{V_j} \cos \omega_j t_1 \cos \omega_j t_2 \right].$$

Якщо  $D_{X_j} = D_{V_j} = D_j$ , то

$$K_U(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \cos(t_2 - t_1) = K_U(\tau), \quad \text{однак процес}$$

$U(t)$  не є стаціонарним випадковим процесом, оскільки його математичне сподівання  $\langle U(t) \rangle = a(t)$  – функція часу ( $\neq const$ ).

### 3.5. Спектральне подання стаціонарних випадкових процесів

#### 3.5.1. Дискретне розкладання

Оскільки для стаціонарних випадкових процесів імовірнісні характеристики інваріантні відносно вибору початку відліку за  $t$ , то як базис тут зручно взяти систему тригонометричних функцій  $\sin$ ,  $\cos$ , що за визначенням є стаціонарними.

Розглянемо стаціонарну випадкову функцію  $U(t)$ , перший початковий момент якої для спрощення візьмемо таким, що дорівнює нулю:  $\langle U(t) \rangle = 0$ .

Подамо  $U(t)$  у вигляді ряду Фур'є :

$$U(t) = A_0 + \sum_k (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t), \quad (3.29)$$

де  $\omega_k$  – детерміністичні частоти;  $A_0, A_k, B_k$  – випадкові коефіцієнти розкладання. Даному розкладанню відповідає дискретний комплексний аналог:

$$U(t) = \sum_k U_k e^{i\omega_k t}, \quad (3.30)$$

де  $e^{i\omega_k t} = \cos \omega_k t + i \sin \omega_k t$  – формула Ейлера<sup>13)</sup> [8].  
Комплексно-спряжена форма до (3.30) має вигляд

$$U^*(t) = \sum_k U_k^* e^{-i\omega_k t}. \quad (3.31)$$

---

<sup>13)</sup> Леонард Ейлер (1707–1783) – видатний математик, фізик, механік. Зробив істотний внесок у становлення і розвиток математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики, кораблебудування, теорії музики та ін.



Для **комплексних випадкових процесів** **кореляційна функція** визначається як [1]:

$$K_U(t_1, t_2) \stackrel{def}{=} \langle \tilde{U}^*(t_1) \tilde{U}(t_2) \rangle, \quad (3.32)$$

де  $\tilde{U}^*(t)$  – комплексно спряжений з  $\tilde{U}(t)$  центрований процес.

Кореляційній функції (3.32) **відповідає кореляційна матриця коефіцієнтів розкладання** (3.30), (3.31):

$$K_{U_j U_k} \stackrel{def}{=} \langle \tilde{U}_j^* \tilde{U}_k \rangle, \quad (3.33)$$

що задовольняє **умову ермітовості**  $K_{U_j U_k} = K_{U_k U_j}^*$ .

Діагональні елементи матриці (3.33) дорівнюють

$$K_{U_j U_j} = \langle |\tilde{U}_j|^2 \rangle.$$

Відомо, що квадратична форма з ермітовою матрицею буде дійсною [8]. Таким чином, дисперсія випадкової комплекснозначної функції є

$$\text{дійсною величиною, оскільки } D_{U_j} = \langle |\tilde{U}_j|^2 \rangle \geq 0.$$

Визначимо, які обмеження необхідно накласти на коефіцієнти розкладання  $U(t) = \sum_k \mathcal{U}_k \varphi_k(t)$ , де  $\varphi_k(t)$  у

загальному випадку узагальнений тригонометричний базис, щоб це подання описувало **стаціонарний випадковий процес у широкому розумінні** (за Хінчином):

$$\langle U(t) \rangle = const, \langle |\tilde{U}(t)|^2 \rangle = const, K_U(t_1, t_2) = K_U(\tau), \quad (3.34)$$

$$\tau = t_2 - t_1.$$

Умова  $\langle U(t) \rangle = 0$  означає, що вихідний процес є центрованим:  $U(t) = \tilde{U}(t)$ , при цьому математичні сподівання спектра  $\langle \mathcal{U}_k \rangle = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Використовуючи визначення кореляційної функції для комплекснозначних випадкових процесів (3.32), маємо

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \langle U^*(t_1)U(t_2) \rangle = \left\langle \sum_j \mathcal{U}_j^* e^{-i\omega_j t_1} \sum_k \mathcal{U}_k e^{i\omega_k t_2} \right\rangle = \\ &= \sum_j \sum_k \langle \mathcal{U}_j^* \mathcal{U}_k \rangle e^{i\omega_k t_2 - i\omega_j t_1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Додамо під знаком експоненти доданки  $i\omega_k t_1 - i\omega_k t_1$ , що роблять внесок, який дорівнює нулю, та виконаємо групування, виділивши  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\begin{aligned} K_U(t_1, t_2) &= \sum_j \sum_k \langle \mathcal{U}_j^* \mathcal{U}_k \rangle e^{i\omega_k t_2 - i\omega_j t_1 + i\omega_k t_1 - i\omega_k t_1} = \\ &= \sum_j \sum_k \langle \mathcal{U}_j^* \mathcal{U}_k \rangle e^{i(\omega_k - \omega_j)t_1} e^{i\omega_k \tau}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для того щоб кореляційна функція задовольняла умови стаціонарності (3.34), у (3.36) **необхідно виключити вплив співмножника**  $e^{i(\omega_k - \omega_j)t_1}$ , **який містить часовий аргумент**  $t_1$ . Це можна зробити, тільки якщо вимагати виконання умов стохастичної ортогональності для коефіцієнтів розкладання (для спектра):

$$\langle \mathcal{U}_j^* \mathcal{U}_k \rangle = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \langle |\mathcal{U}_k|^2 \rangle \neq 0, & j = k. \end{cases} \quad (3.37)$$

З урахуванням (3.37) кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу може бути подана у вигляді

$$K_U(\tau) = \sum_k \langle |\mathcal{U}_k|^2 \rangle e^{i\omega_k \tau}. \quad (3.38)$$

З вищевикладеного випливає, що **спектральне розкладання стаціонарного (у широкому розумінні) випадкового процесу є стохастично ортогональним. І навпаки: стохастично ортогональному спектральному розкладанню відповідає стаціонарний випадковий процес.**

### 3.5.2. Неперервне розкладання

Сформульовані у п. 3.5.1 положення можна узагальнити на випадок **неперервних спектральних розкладань.**

Нехай для випадкового процесу існує розкладання у вигляді **стохастичного інтеграла Фур'є:**

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.39)$$

Як і у дискретному варіанті (3.34), для спрощення візьмемо, що  $\langle U(t) \rangle = 0$ , тобто вважаємо процес центрованим.

Згідно з визначенням кореляційної функції комплексного випадкового процесу (3.32) можемо записати

$$K_U(t_1, t_2) = \langle U^*(t_1) U(t_2) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^*(\omega) e^{-i\omega t_1} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega') e^{i\omega' t_2} d\omega' \right\rangle. \quad (3.40)$$

Ураховуючи лінійність операторів математичного сподівання та інтегрування, маємо

$$K_U(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle e^{-i\omega t_1 + i\omega' t_2} d\omega d\omega'. \quad (3.41)$$

За аналогією з (3.36) виділимо у підінтегральному виразі (3.41) множник з  $\tau$ , додаючи та віднімаючи  $i\omega' t_1$  під знаком експоненти та групуючи доданки:

$$K_U(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle e^{i(\omega' - \omega)t_1} e^{i\omega' \tau} d\omega d\omega'. \quad (3.42)$$

Для того щоб кореляційна функція (3.42) відповідала визначенню стаціонарності, необхідно виключити вплив експоненціального співмножника  $e^{i(\omega' - \omega)t_1}$  під знаком інтеграла, тобто **поставити вимогу виконання умов стохастичної ортогональності спектрів:**

$$\langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle = S_U(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (3.43)$$

де  $\delta(\omega - \omega')$  – дельта функція Дірака;  $S_U(\omega)$  – спектральна щільність (функція) [1].

Таким чином, можна стверджувати, що **безперервне фур'є-розкладання стаціонарного (за Хінчином) випадкового процесу є стохастично ортогональним і навпаки.**

Із формули (3.42) з урахуванням (3.43) отримуємо формулу **Вінера-Хінчина (пряме перетворення):**

$$K_U(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (3.44)$$

Згідно із (3.44) *кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є дійсним перетворенням Фур'є від спектральної щільності*. Інакше кажучи, будь-яка функція  $K(\tau)$ , яка є прямим перетворенням Фур'є від невід'ємної дійсної функції  $S(\omega)$ , є кореляційною функцією деякого стаціонарного випадкового процесу (*теорема Вінера-Хінчина*).

*Обернене до (3.44) перетворення* має вигляд

$$S_U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.45)$$

Тут множник  $\frac{1}{2\pi}$  – масштабний коефіцієнт (якобіан перетворення), що зв'язує метрики просторів часу  $t$  та частоти  $\omega$ .

Типовий графік функції спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу показаний на рис. 3.10.

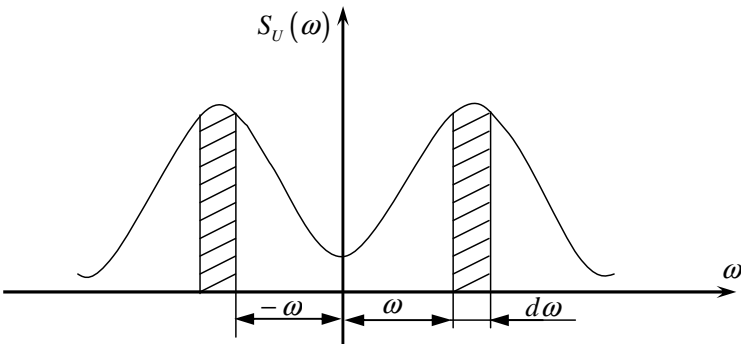


Рисунок 3.10

Запишемо *дійсну форму співвідношень Вінера-Хінчина*, користуючись перетворенням Ейлера для комплексної експоненти  $e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau$  у (3.44):

$$\begin{aligned} K_U(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) \cos \omega\tau d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) \sin \omega\tau d\omega = \\ &= K_U^{\text{Re}}(\tau) + iK_U^{\text{Im}}(\tau). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Другий інтеграл у (3.46) на симетричному інтервалі  $[-\infty; \infty]$  містить добуток парної функції  $S_U(\omega)$  на непарну  $\sin \omega\tau$ , тому він дорівнює нулю [8]. Таким чином, дійсні аналоги (3.44) і (3.45) мають такий вигляд:

$$K_U(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_U(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (3.47)$$

$$S_U(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_U(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

**Функція спектральної щільності**  $S_U(\omega)$  неперервного фур'є розкладання стаціонарного випадкового процесу має такі **властивості**:

1) із (3.45), урахувавши властивості кореляційної функції (п. 3.1), впливає  $S_U(\omega) \geq 0$ ;

2) якщо  $U(t)$  – дійсний випадковий стаціонарний процес, то згідно із (3.45), урахувавши властивості кореляційної функції,  $S_U(\omega)$  є **парною**, тобто  $S_U(\omega) = S_U(-\omega)$ ;

3) якщо  $U(t)$  – процес із скінченною дисперсією (скінченною потужністю), то його **спектральна щільність – інтегровна функція**. Це випливає з прямого перетворення Вінера-Хінчина (3.44):

$$D_U = K_U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) d\omega \quad (3.48)$$

і є його окремим випадком.

Для лінійних систем середня потужність, що переноситься у системі, пропорційна  $\langle |U(t)|^2 \rangle$ , і

відповідно пропорційна інтегралу  $\int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) d\omega$ . У

зв'язку з цим функцію  $S_U(\omega)$  також іноді називають спектральною щільністю потужності;  $S_U(\omega) d\omega$  характеризує ту частку середньої потужності (рис. 3.10), яка припадає на частотний діапазон  $\omega, \omega + d\omega$ .

Прикладом функції, що має необмежену потужність, є «білий шум» – стаціонарний випадковий  $\delta$ -корельований процес (п. 3.2), для якого

$$K_U(\tau) = K_0 \delta(\tau).$$

Як впливає із (3.43), у просторі частоти  $\omega$  спектр  $\mathcal{U}(\omega)$  стаціонарного випадкового процесу є випадковою функцією типу «білий шум».

Згідно із (3.47) спектральна щільність "білого шуму" є сталою (рис. 3.11)

$$S_U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{K_0}{2\pi} = \text{const.}$$

Це дозволяє зробити висновок, що у випадкових процесів типу «білий шум» енергія, яка переноситься на кожній частоті, є однією й тією самою. Для реальних фізичних систем завжди має місце обмеження частотного діапазону. Тому для них, як правило, використовують моделі зрізаного "білого шуму" (рис. 3.12).

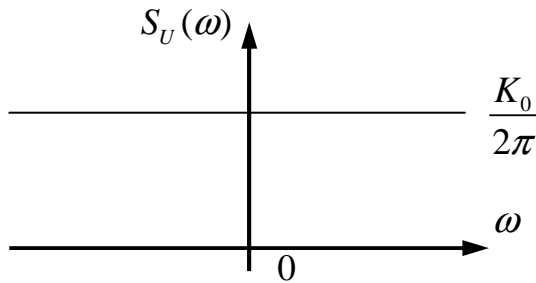


Рисунок 3.11

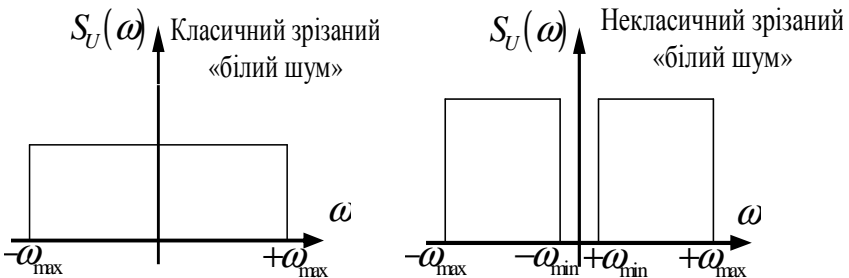


Рисунок 3.12



**Приклад 3.8.** Для експоненціально корельованого стаціонарного випадкового процесу  $U(t)$  кореляційна функція має вигляд [16]:

$$K_U(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Визначити спектральну щільність  $S_U(\omega)$ .

*Розв'язання.* Skorиставшись оберненою формулою Вінера-Хінчина (3.45), можемо записати

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau} d\tau.$$

Виділимо під знаком експоненти у підінтегральному виразі повний квадрат:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \tau^2 - i\omega\tau &= -\alpha^2 \left[ \tau^2 + \frac{i\omega}{\alpha^2} \tau - \left( \frac{\omega}{2\alpha^2} \right)^2 \right] - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} = \\ &= -\alpha^2 \left( \tau + \frac{i\omega}{2\alpha^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2}, \end{aligned}$$

тоді

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \left( \tau + \frac{i\omega}{2\alpha^2} \right)^2} d \frac{\left( \tau + \frac{i\omega}{2\alpha^2} \right) \alpha}{\alpha}.$$

Беручи до уваги значення визначного інтеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$  [6], остаточно отримаємо

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2 e^{-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^4}\right)} \sqrt{\pi}}{2\pi\alpha} = \frac{\sigma^2 e^{-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha^4}\right)}}{2\sqrt{\pi}\alpha}.$$

Проілюструємо отриманий результат (рис. 3.13).

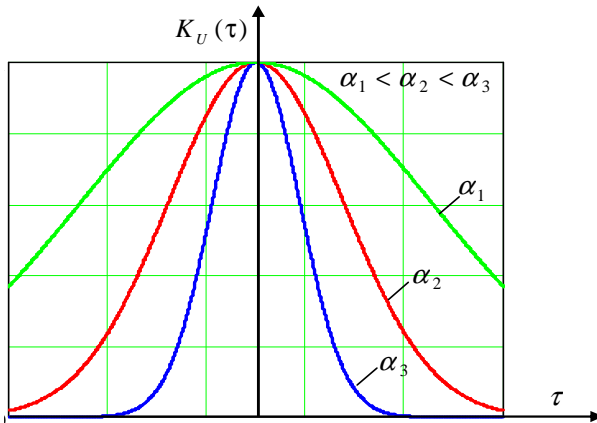


Рисунок 3.13

При  $\alpha \rightarrow \infty$  кореляційна функція  $K_U(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ , а спектральна щільність

$$S_U(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} = const.$$

Таким чином, при  $\alpha \rightarrow \infty$  експоненціально корельований стаціонарний випадковий процес при переході до границі дає «білий шум».

#### 4. МЕТОДИ ОПИСУ БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Під багатовимірним випадковим процесом розуміють векторний процес  $\vec{U}(t)$ , кожна компонента якого є випадковим процесом (рис. 4.1). Багатовимірний випадковий процес, як правило, подають у векторній формі:

$$\vec{U}(t) = \begin{Bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_n(t) \end{Bmatrix} = \{U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)\}^T. \quad (4.1)$$

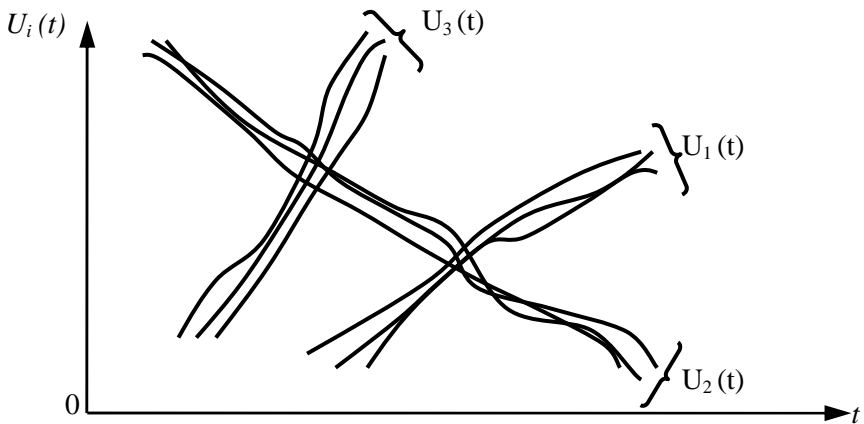


Рисунок 4.1

Необхідно зазначити, що компоненти багатовимірною випадкового процесу можуть

характеризувати зміни у часі різних фізичних величин: переміщень, швидкостей, температур, електричних напружень і т. д.

Як і у скалярному варіанті (розділ 3), для багатовимірних випадкових процесів існує **два способи описання:**

- за допомогою сумісних характеристик розподілу;
- за допомогою моментних функцій.

#### **4.1. Сумісні характеристики розподілу компонент багатовимірного випадкового процесу**

У *першому способі* описання векторного випадкового процесу до розгляду вводяться сумісні одно-, дво-, триточкові і т. д. функції розподілу та щільності ймовірності компонент процесу. **Сумісність** розуміють відносно взаємовпливу відповідних компонент, **точковість** – відносно числа часових точок, що розглядаються (шарів).

Найменш інформативною з імовірнісної точки зору є **одноточкова сумісна щільність імовірності** компонент випадкового векторного процесу  $p(u_1, u_2, \dots, u_n; t)$ . За визначенням, добуток щільності ймовірності на елемент об'єму у просторі компонент характеризує ймовірність такої випадкової події, яка полягає у тому, що у момент часу  $t$  перша компонента процесу знаходитиметься в інтервалі  $u_1 \leq U_1(t) < u_1 + du_1$ , друга – в інтервалі  $u_2 \leq U_2(t) < u_2 + du_2$  і т. д. для інших компонент, тобто

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n; t) du_1 du_2 \dots du_n \stackrel{def}{=} P \left( \begin{array}{l} u_1 \leq U_1(t) < u_1 + du_1 \\ u_2 \leq U_2(t) < u_2 + du_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n \leq U_n(t) < u_n + du_n \end{array} \right). \quad (4.2)$$

Праву частину (4.2) можна умовно записати у згорненому вигляді:

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n; t) du_1 du_2 \dots du_n \stackrel{def}{=} P(\vec{u} \leq \vec{U}(t) < \vec{u} + d\vec{u}). \quad (4.3)$$

Рівності (4.2) і (4.3) визначають ймовірність такої випадкової події, яка полягає у тому, що кінець багатовимірного випадкового вектора  $\vec{U}(t)$  у момент часу  $t$  належить до малого околу  $d\vec{u}$  точки  $\vec{u}$  (рис. 4.2).

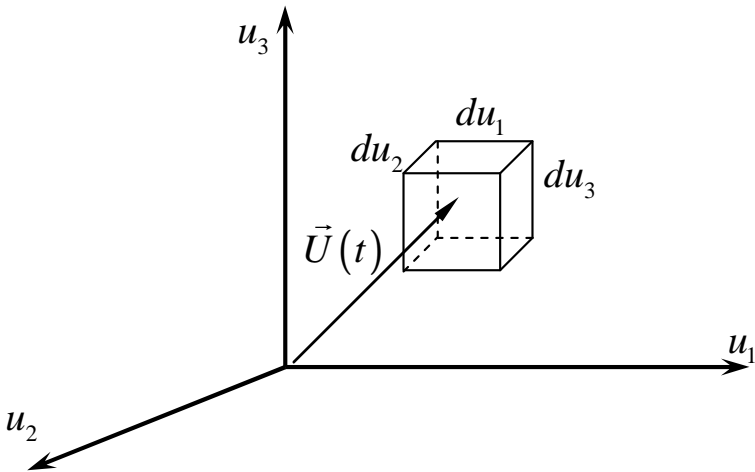


Рисунок 4.2

Сумісна одноточкова щільність імовірності векторного випадкового процесу задовольняє *умови нормування*

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n p(u_1, u_2, \dots, u_n; t) du_1 du_2 \dots du_n = 1 \quad (4.4)$$

та *узгодженості за будь-якою компонентою (співвідпорядкованості):*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u_1, u_2, \dots, u_n; t) du_k = p(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n; t).$$

Інтегруючи  $n - 1$  разів, отримаємо

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} p(u_1, u_2, \dots, u_n; t) du_2 du_3 \dots du_n = p(u_1; t). \quad (4.5)$$

*Одноточкова сумісна функція розподілу  $F(u_1, u_2, \dots, u_n; t)$  компонент  $n$ -вимірного випадкового векторного процесу є первісною відповідної щільності ймовірності цього процесу.*

Двоточкова сумісна щільність імовірності компонент  $n$ -вимірного випадкового векторного процесу є більш інформативною порівняно з одноточковою. Її добуток на елементарні об'єми у просторі значень компонент визначає ймовірність поєднаних випадкових подій у моменти часу  $t_1$  і  $t_2$  (перші індекси у відповідних компонент):

$$\begin{aligned}
 & p(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}; t_1, t_2) du_1 du_2 \stackrel{def}{=} \\
 = P & \left[ \begin{array}{c|c}
 u_{11} \leq U_1(t_1) < u_{11} + du_{11} & u_{21} \leq U_1(t_2) < u_{21} + du_{21} \\
 u_{12} \leq U_2(t_1) < u_{12} + du_{12} & u_{22} \leq U_2(t_2) < u_{22} + du_{22} \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 u_{1n} \leq U_n(t_1) < u_{1n} + du_{1n} & u_{2n} \leq U_n(t_2) < u_{2n} + du_{2n}
 \end{array} \right] \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Для двоточкової сумісної щільності ймовірності компонент випадкового векторного процесу зберігаються ті самі властивості, що й для одноточкової сумісної щільності ймовірності (умови нормування та узгодженості). Знаючи двоточкову щільність імовірності на основі умови узгодженості можна визначити одноточкову щільність імовірності. Триточкова, чотириточкова і т. д. сумісні щільності ймовірності і відповідно функції розподілу можуть бути введені аналогічно тому, як це розглянуто вище.

Очевидно, що **чим більша кількість часових точок використовується при сумісному аналізі, тим більш інформативним з імовірнісної точки зору є опис векторного випадкового процесу.**

#### **4.2. Числові характеристики компонент багатовимірною випадкового процесу**

Опис випадкових багатовимірних процесів на основі послідовності скінченновимірних розподілів є вичерпним з математичної точки зору, але для практичного використання у більшості випадків зручно використовувати числові характеристики відповідних компонент (моментні функції).

За визначенням, перший момент багатовимірною випадкового процесу  $\vec{U}(t)$  є детерміністичною векторною функцією аргументу  $t$  (вектором математичних сподівань):

$$\langle \vec{U}(t) \rangle = \left\{ \begin{array}{c} \langle U_1(t) \rangle \\ \langle U_2(t) \rangle \\ \dots \\ \langle U_n(t) \rangle \end{array} \right\}, \quad (4.7)$$

де  $\langle U_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_k p(u_k, t) du_k$  – математичне сподівання  $k$ -ї компоненти  $n$ -вимірною випадкового процесу,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Другий змішаний початковий момент  $j$ -ї та  $k$ -ї компонент визначається таким виразом:

$$\langle U_j(t_1) U_k(t_2) \rangle \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{j1} u_{k2} p(u_{j1}, u_{k2}; t_1, t_2) du_{j1} du_{k2}. \quad (4.8)$$

Як відмічалось раніше, зі збільшенням порядку відповідних моментних функцій їх інформативність з імовірнісної точки зору знижується.

У практичних розрахунках зручно використовувати центровані компоненти випадкового векторного процесу  $\tilde{U}_j(t) = U_j(t) - \langle U_j(t) \rangle$ , для яких перший момент дорівнює нулю:

$$\langle \tilde{U}_j(t) \rangle = 0, \quad (4.9)$$

а змішаний другий **кореляційний момент** визначається як



$$\begin{aligned}
K_{jk}^U(t_1, t_2) &= \langle \tilde{U}_j(t_1) \tilde{U}_k(t_2) \rangle = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_j(t_1) - \langle U_j(t_1) \rangle \right) \left( u_k(t_2) - \langle U_k(t_2) \rangle \right) \times \\
&\quad \times p(u_{j_1}, u_{k_2}; t_1, t_2) du_{j_1} du_{k_2}.
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Використовуючи властивість узгодженості для сумісної щільності ймовірності, останнє співвідношення також може бути зведене до форми інтегрування у  $2n$ -вимірному просторі:

$$\begin{aligned}
K_{jk}^U(t_1, t_2) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2n} \left( u_j(t_1) - \langle U_j(t_1) \rangle \right) \left( u_k(t_2) - \langle U_k(t_2) \rangle \right) \times \\
&\quad \times p(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}; t_1, t_2) \times \\
&\quad \times du_{11} du_{12} \dots du_{1n} du_{21} du_{22} \dots du_{2n}.
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Моменти 3-го, 4-го і т. д. порядків визначаються аналогічно.

**Моментні функції 2-го порядку, у тому числі й моментні функції центрованих компонент, утворюють квадратну матрицю розмірністю  $n \times n$ .**

У випадку центрованих компонент ця матриця, що залежить від аргументів  $t_1$  і  $t_2$ , має назву **кореляційної матриці компонент багатовимірного (векторного) випадкового процесу:**

$$\mathbf{K}_{\bar{U}} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{U}_1(t_1) \tilde{U}_1(t_2) \rangle & \dots & \langle \tilde{U}_1(t_1) \tilde{U}_n(t_2) \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \tilde{U}_n(t_1) \tilde{U}_1(t_2) \rangle & \dots & \langle \tilde{U}_n(t_1) \tilde{U}_n(t_2) \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Моментним функціям третього порядку відповідає кубічна матриця розміром  $n \times n \times n$  і т. д.

*Кореляційна матриця, що утворена другими моментними функціями центрованих компонент випадкового векторного процесу, для фіксованих  $t_1$  і  $t_2$  має усі властивості кореляційної матриці  $n$ -вимірнього випадкового вектора (п. 2.3.4).*

*Як і для випадкових величин, знаючи сумісні функції розподілу компонент багатовимірнього випадкового процесу, можна визначити усі його числові характеристики, але не навпаки.*

Повнота описання ймовірнісних властивостей випадкових багатовимірних процесів зв'язана зі збільшенням *точковості* функцій розподілу. Багатоточковість, у свою чергу, призводить до збільшення рангу відповідних матриць, що містять моментні функції.

Необхідно зазначити, що *для стаціонарних випадкових векторних процесів двоточкова схема описання, як правило, є достатньою для подання ймовірнісних властивостей у інженерному наближенні.*

#### 4.3. Багатовимірні стаціонарні випадкові процеси

Багатовимірний випадковий процес є *стаціонарним у вузькому (або строгому) розумінні*, якщо сумісні скінченновимірні функції розподілу ймовірностей будь-якого порядку усіх його компонент є інваріантними відносно зсуву початку відліку за часовим аргументом. У цьому випадку двоточкова щільність імовірності визначається не часовими аргументами  $t_1, t_2$ , а залежить

від їх різниці  $\tau = t_2 - t_1$ . При розв'язуванні практичних задач у рамках кореляційної теорії [2; 17] розгляд сумісних характеристик розподілу опускають і, що є більш зручним, оперують з постійним вектором математичних сподівань та кореляційною матрицею, що залежить від аргументу  $\tau$ . У подальшому будемо розглядати також **стаціонарність у широкому розумінні** (за Хінчином). Як уже відмічалось, **випадковий процес зі скінченною дисперсією називається стаціонарним у широкому розумінні, якщо умови стаціонарності задовольняються тільки для перших двох моментних функцій, а для моментів більш високого порядку ці умови можуть, взагалі кажучи, не виконуватися.**

Для стаціонарних за Хінчином векторних випадкових процесів математичні сподівання є векторами постійних:

$$\langle \vec{U}(t) \rangle = \begin{Bmatrix} \langle U_1 \rangle \\ \langle U_2 \rangle \\ \dots \\ \langle U_n \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{Bmatrix}. \quad (4.13)$$

Другі початкові моментні функції, що утворюють квадратичну матрицю, є функціями одного аргументу  $\tau$ :

$$\langle U_j(t_1)U_k(t_2) \rangle = f_{jk}(t_2 - t_1) = f_{jk}(\tau), \\ (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

За визначенням, два стаціонарних випадкових процеси  $U_j(t)$  і  $U_k(t)$  називають **стаціонарно зв'язаними у широкому розумінні**, якщо їх взаємна

кореляційна функція є інваріантною відносно зсуву за часом:

$$K_{jk}^U(t_1, t_2) = \langle \tilde{U}_j(t_1) \tilde{U}_k(t_2) \rangle = K_{jk}^U(t_2 - t_1) = K_{jk}^U(\tau). \quad (4.14)$$

Багатовимірний випадковий процес називається *стаціонарно зв'язаним у вузькому розумінні*, якщо *всі його взаємні ймовірнісні характеристики є інваріантними відносно вибору початку відліку часу* (зсуву часового аргументу).

Можлива ситуація, коли кожна з компонент багатовимірного випадкового процесу окремо задовольняє умови стаціонарності за Хінчином (математичне сподівання є сталою, а кореляційна функція залежить від одного аргументу), але їх змішаний другий момент не задовольняє ці умови. Це так званий *випадок стаціонарно не зв'язаних компонент - процесів*.

*Кореляційні функції багатовимірного стаціонарного випадкового процесу (4.14) утворюють кореляційну матрицю, кожна компонента якої має властивості кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу.*

Якщо  $U_j(t)$  являє собою *дійсний процес*, то його кореляційна функція є *парною*:

$$K_{jj}^U(\tau) = K_{jj}^U(-\tau).$$

Для *комплексних векторних випадкових процесів* кореляційна функція компонент визначається аналогічно (3.32):

$$K_{jk}^U(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{U}_j^*(t_1) \tilde{U}_k(t_2) \rangle,$$

де  $\tilde{U}_j^*$  – комплексно спряжена з  $\tilde{U}_j$  центрована функція.

На відміну від умов парності кореляційної функції дійсного випадкового процесу кореляційна функція компонент комплексного випадкового векторного процесу має **властивості ермітовості** [9]:

$$K_{jk}^U(t_1, t_2) = K_{jk}^{U^*}(t_2, t_1).$$

У випадку стаціонарності комплексного векторного випадкового процесу ця властивість має вигляд

$$K_{jk}^U(-\tau) = K_{kj}^{U^*}(\tau).$$

#### 4.4. Спектральні подання векторних випадкових процесів

Для векторних випадкових процесів можливі дві форми спектральних розкладань: дискретні та безперервні.

У варіанті **дискретного спектрального розкладання** кожен компоненту випадкового векторного процесу подають у вигляді ряду

$$U_j(t) = \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{j\alpha} \varphi_{j\alpha}(t), \quad (4.15)$$

де  $\mathcal{U}_{j\alpha}$  – випадкові числа (спектр);  $\varphi_{j\alpha}(t)$  – детерміністичний функціональний базис.

Іноді вдається записати дискретну форму спектрального розкладання з використанням **єдиного базису** для всіх компонент:

$$U_j(t) = \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{j\alpha} \varphi_{\alpha}(t). \quad (4.16)$$

Як і у варіанті дискретного розкладання скалярного випадкового процесу (п. 3.4), подання (4.15) і (4.16) можливі, якщо базисні функції  $\varphi_\alpha$  або  $\varphi_{\alpha j}$  мають властивість повноти (у певному розумінні) [1].

**Ряди** дискретних спектральних розкладань  $\epsilon$  **стохастичними**, оскільки **спектри** – **випадкові величини** [4].

**Неперервні спектральні розкладання** отримують у результаті граничного переходу під знаком суми ряду (4.15):

$$U_j(t) = \langle U_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_j(\omega) \varphi_j(t / \omega) d\omega. \quad (4.17)$$

Тут  $\varphi_j(t / \omega)$  – **детерміністичний базис**, а випадкові властивості має **векторний випадковий спектр**  $\mathcal{U}_j(\omega)$ .

Як і у дискретному варіанті (4.16), також може бути використане неперервне спектральне розкладання на основі **єдиного базису**:

$$U_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_j(\omega) \varphi(t / \omega) d\omega. \quad (4.18)$$

У формулах (4.17) і (4.18) не випадковий параметр  $\omega$  (частота) є аналогом індексу  $\alpha$  для дискретної форми розкладання (4.15), (4.16).

Для неперервних спектральних розкладань на базисні функції також накладаються додаткові обмеження у вигляді умов збіжності та повноти [1].

У загальному випадку як базисні функції, так і випадковий спектр у розкладаннях (4.16), (4.17) є комплекснозначними.

На практиці зручно використовувати *стохастично ортогональні або канонічні розкладання*.

Для *дискретних спектральних розкладань умова стохастичної ортогональності* має вигляд

$$\langle \mathcal{U}_{j\alpha}^* \mathcal{U}_{k\beta} \rangle = S_{jk}^{\alpha\beta} \delta_{jk}^{\alpha\beta}, \quad (4.19)$$

де  $\delta_{jk}^{\alpha\beta}$  – символ Кронекера;  $\delta_{jk}^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k; \end{cases}$  за індексами  $\alpha, \beta$  не підсумовувати.

Для *неперервних спектральних розкладань умова стохастичної ортогональності* може бути записана як

$$\langle \mathcal{U}_j^*(\omega) \mathcal{U}_k(\omega') \rangle = S_{jk}^U(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (4.20)$$

У (4.19) і (4.20)  $S_{jk}^{\alpha\beta}$  та  $S_{jk}^U(\omega)$  – компоненти *матриць взаємних спектральних щільностей* відповідно дискретного та неперервного розкладань.

Для стаціонарних та стаціонарно зв'язаних векторних випадкових процесів взаємні спектральні щільності  $S_{jk}^U(\omega)$  – дійсні функції при  $j = k$ .

За аналогією зі скалярним варіантом (п. 3.5) можна показати, що *векторний випадковий процес є стаціонарним за Хінчином, якщо його спектральне розкладання є стохастично ортогональним та навпаки*.

Функції  $S_{jk}^U(\omega)$  у (4.20) мають такі *властивості*:

- 1)  $S_{jk}^U(\omega) \geq 0$ ;
- 2) якщо  $U_j(t)$  – дійсний випадковий стаціонарний процес, то діагональні елементи матриці  $\mathbf{S}$  мають

властивість парності:  $S_{jj}^U(\omega) = S_{jj}^U(-\omega)$ ;  
 3) недіагональні елементи у загальному випадку задовольняють умову ермітовості  $S_{jk}^U(\omega) = S_{kj}^{U*}(\omega)$ .

Таким чином, матриця взаємних спектральних щільностей є ермітовою, причому для дійсних випадкових процесів  $S_{jk}^U(\omega)$  виявляються симетричними.

#### 4.5. Спектральне подання векторних стаціонарних випадкових процесів

Через те що тригонометричні функції  $\sin x, \cos x$  є стаціонарними за визначенням, *для спектральних розкладань багатовимірних стаціонарних процесів зручно використовувати тригонометричний базис.*

Техніка спектральних розкладань як у дискретному, так і у неперервному випадках виявляється тотожною, тому у подальшому будуть розглянуті тільки *неперервні розкладання*. Усі отримані висновки будуть справедливими, очевидно, і для відповідних дискретних аналогів.

Для стаціонарних або стаціонарно зв'язаних багатовимірних випадкових процесів використаємо єдині базисні функції – комплексні експоненти:

$$\varphi_j(t/\omega) = e^{i\omega t},$$

при цьому розкладання всіх компонент подамо у вигляді

$$U_j(t) = \langle U_j(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.21)$$



Визначимо елементи кореляційної матриці

$$\begin{aligned}
 K_{jk}^U(t_1, t_2) &= \stackrel{\text{def}}{\langle \tilde{U}_j^*(t_1) \tilde{U}_k(t_2) \rangle} = \\
 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_j^*(\omega) e^{-i\omega t_1} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_k(\omega') e^{i\omega' t_2} d\omega' \right\rangle = \quad (4.22) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}_j^*(\omega) \mathcal{U}_k(\omega') \rangle e^{-i\omega t_1 + i\omega' t_2} d\omega d\omega'.
 \end{aligned}$$

За аналогією з (п. 3.5.1) додамо в (4.22) під знаком експоненти складові, що дають нульовий внесок:  $i\omega' t_1, -i\omega' t_1$  та виконаємо групування членів, виділивши  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\begin{aligned}
 K_{jk}^U(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}_j^*(\omega) \mathcal{U}_k(\omega') \rangle e^{-i\omega t_1 + i\omega' t_2 \pm i\omega' t_1} d\omega d\omega' = \\
 & \quad (4.23) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}_j^*(\omega) \mathcal{U}_k(\omega') \rangle e^{i(\omega' - \omega) t_1} e^{i\omega' \tau} d\omega d\omega'.
 \end{aligned}$$

Для того щоб векторний випадковий процес був стаціонарним у широкому розумінні необхідно, щоб його кореляційна функція (4.23) залежала тільки від аргументу  $\tau$ . У зв'язку з цим необхідно виключити вплив необмежено зростаючого з часом експоненціального множника  $e^{i(\omega' - \omega) t_1}$ , вимагаючи виконання умов стохастичної ортогональності спектрів:

$$\langle \mathcal{U}_j^*(\omega) \mathcal{U}_k(\omega') \rangle = S_{jk}^U(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (4.24)$$

Таким чином, *умови стаціонарності у просторі частоти  $\omega$  є еквівалентними стохастичній ортогональності спектрів розкладання компонент випадкового векторного процесу.*

За аналогією з одновимірним випадком із формули (4.23), з урахуванням умови (4.24), для векторного стаціонарного випадкового процесу отримаємо *багатовимірний аналог формул Вінера-Хінчина* (3.47):

$$K_{jk}^U(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{jk}^U(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

$$S_{jk}^U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}^U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.25)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, n.$$

При переході до дійсної форми співвідношень Вінера-Хінчина скористаємося формулою Ейлера  $e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau$ . Тоді

$$S_{jk}^U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}^U(\tau) \cos \omega\tau d\tau + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}^U(\tau) \sin \omega\tau d\tau =$$

$$= \operatorname{Re} S_{jk}^U(\omega) + \operatorname{Im} S_{jk}^U(\omega).$$

Оскільки компоненти кореляційної матриці  $K_{jk}^U(\tau)$  є парними за  $\tau$ , то другий інтеграл в останньому виразі через непарність функції  $\sin \omega\tau$  буде дорівнювати нулю, і дійсна форма співвідношень Вінера-Хінчина може бути подана у вигляді

$$K_{jk}^U(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_{jk}^U(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$
$$S_{jk}^U(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{jk}^U(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$
(4.26)

## 5. МАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

### 5.1. Основні відомості та поняття

Особливе місце серед випадкових процесів займають так звані марковські процеси, що вперше були описані А. А. Марковим у 1907 р. Випадковий процес називається *марковським*, якщо закон розподілу процесу у будь-який наступний момент часу  $t_j$  залежить тільки від значення процесу у момент часу  $t_{j-1}$  і не залежить від того, яких значень процес набував у минулому. Інакше кажучи, для марковських випадкових процесів вплив (дія) усієї передісторії процесу на його майбутнє повністю зосереджений у поточному стані процесу. Така властивість має назву *властивості відсутності післядії*, або, застосовуючи до випадкових процесів, *марковської властивості*.

Марковські процеси, безумовно, є певною ідеалізацією реальних процесів. Однак дуже багато реальних процесів можуть наближено трактуватися як марковські або, в усякому разі, можуть розглядатися як компоненти деяких багатовимірних марковських процесів.

У подальшому обмежимося найбільш важливим для статистичної динаміки випадком процесів із безперервним часом і безперервною множиною станів.

Розглянемо скалярний випадковий процес  $U(t)$ , що набуває у послідовні моменти часу  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  можливих значень  $u_0, u_1, \dots, u_n$ . Уведемо умовну щільність імовірності:

$$p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} P \left( \begin{array}{c} u_0 \leq U(t_0) \leq u_0 + du_0; \\ u_1 \leq U(t_1) \leq u_1 + du_1; \\ \dots \\ u_n \leq U(t_n) \leq u_n + du_n \\ u_{n-1} \leq U(t_{n-1}) \leq u_{n-1} + du_{n-1} \end{array} \right). \quad (5.1)$$

Для того щоб випадковий процес був марковським, необхідно виконання умови [1]:

$$\begin{aligned} p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) = \\ = p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Як випливає з (5.2), *марковський процес повністю характеризується початковою одновимірною (одноточковою) щільністю ймовірності  $p(u_0, t_0)$  та умовною щільністю ймовірності  $p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1})$ .*

Дійсно,

$$\begin{aligned} p(u_0, t_0; u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) \times \\ \times p(u_{n-1}, t_{n-1} | u_{n-2}, t_{n-2}; \dots; u_1, t_1; u_0, t_0) \dots p(u_1, t_1 | u_0, t_0) p(u_0, t_0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ураховуючи (5.2), отримаємо

$$\begin{aligned} p(u_0, t_0; u_1, t_1; \dots; u_n, t_n) = \\ = p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}) p(u_{n-1}, t_{n-1} | u_{n-2}, t_{n-2}) \dots \times \\ \times p(u_1, t_1 | u_0, t_0) p(u_0, t_0). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким чином, особливістю марковських процесів є те, що *будь-які багатовимірні (багатоточкові) закони*

*розподілу можуть бути виражені через двовимірні (двоточкові).*

Умовна щільність імовірності  $p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1})$ , що описує перехід зі стану  $u_{n-1}, t_{n-1}$  у стан  $u_n, t_n$ , називається *перехідною щільністю ймовірності*. Вона має всі властивості функції щільності ймовірності (п. 2.2.1), зокрема, задовольняє умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}) du_n = \int_{-\infty}^{\infty} p(u_n, t_n | u_{n-1}, t_{n-1}) du_{n-1} = 1.$$

Розглянемо три послідовні моменти часу  $t_2 > t_1 > t_0$ . На підставі умови узгодженості маємо

$$p(u_0, t_0; u_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u_0, t_0; u_1, t_1; u_2, t_2) du_1. \quad (5.5)$$

Використовуючи для дво- та тривимірних щільностей імовірності формулу (5.4), отримаємо інтегральне рівняння Смолюховського<sup>14)</sup>:

$$p(u_2, t_2 | u_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u_2, t_2 | u_1, t_1) p(u_1, t_1 | u_0, t_0) du_1. \quad (5.6)$$

Відзначимо, що (5.6) можна отримати інакше: розглядаючи зв'язок між станами процесу у моменти часу  $t_0$  і  $t_2$  через стани у проміжний момент часу  $t_0 < t_1 < t_2$  й використовуючи формулу повної ймовірності, як це зроблено у [16].

<sup>14)</sup> Маріан Смолюховський (1872– 917) – польський фізик-теоретик. Основні наукові праці присвячені молекулярній фізиці, термодинаміці, статистичній механіці, зокрема кінетичній теорії газів та рідин, теорії броунівського руху, молекулярній статистиці.

## 5.2. Диференціальне рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова

Виведемо диференціальне рівняння, якому задовольняє перехідна щільність імовірності  $p(u_1, t_1 | u_0, t_0)$  для неперервного випадкового марковського процесу.

Запишемо рівняння (5.6) для трьох моментів часу  $t_0 < t - \Delta t < t$ :

$$p(u, t | u_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0) du_1, \quad (5.7)$$

де  $u_1$  – значення випадкового процесу  $U(t)$  у момент часу  $t - \Delta t$ .

Помножимо далі (5.7) на довільну функцію  $Q(u)$ , яка разом із усіма своїми похідними дорівнює нулю на межі області зміни  $u$  (тобто при  $\pm \infty$ ), і аналітичну в околі  $u_1$ . Проінтегрувавши отримане рівняння, маємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_0, t_0) Q(u) du = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) Q(u) du \right\} du_1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Розвинемо функцію  $Q(u)$  у ряд Тейлора в околі значення  $u_1$ :

$$Q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q^{(k)}(u_1) (u - u_1)^k. \quad (5.9)$$

Підставляючи розвинення (5.9) у (5.8), змінюючи порядок інтегрування та підсумовування, а також ураховуючи умову нормування перехідної щільності ймовірності, отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [p(u, t | u_0, t_0) - p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0)] Q(u) du = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p(u_1, t - \Delta t | u_0, t_0) Q^{(k)}(u_1) \times \right. \\ & \quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) (u - u_1)^k du \right\} du_1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Поділимо отримане рівняння на  $\Delta t$  і, переходячи до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $u_1 \rightarrow u$ ), можемо записати

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(u, t | u_0, t_0)}{\partial t} Q(u) du = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_0, t_0) Q^{(k)}(u) \chi_k(u, t) du, \end{aligned} \quad (5.11)$$

де

$$\chi_k(u, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t | u_1, t - \Delta t) (u - u_1)^k du. \quad (5.12)$$

Функції  $\chi_k(u, t)$  прийнято називати інтенсивностями марковського процесу порядку  $k$  [1]. Оскільки  $u - u_1 = \Delta u$ , формулу для інтенсивностей можна переписати у вигляді



$$\chi_k(u, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u^k \rangle}{\Delta t}. \quad (5.13)$$

Під час визначення границь (5.12), (5.13) величина  $u_1$  вважається заданою.

Використовуючи у правій частині (5.11) інтегрування за частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(u, t | u_0, t_0)}{\partial t} Q(u) du &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right)^k \chi_k(u, t) p(u, t | u_0, t_0) Q(u) du. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Оскільки функція  $Q(u)$  була обрана довільно, то для виконання рівності (5.14) необхідно виконання співвідношення:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right)^k (\chi_k p), \quad (5.15)$$

де  $p = p(u, t | u_0, t)$  – перехідна щільність імовірності.

Розв'язок рівняння (5.15) повинен задовольняти умови невід'ємності, нормування, а також початкові умови.

Можливі два випадки початкових умов для  $p$  при  $t = t_0$ :

1) значення випадкового процесу  $u = u_0$  є випадковими величинами з відомою щільністю ймовірності  $p(u_0, t_0)$ ;

2) значення випадкового процесу  $u_0$  є заданим (детерміністичним).

У першому випадку повинна мати місце очевидна рівність:

$$p(u, t | u_0, t_0) \Big|_{t=t_0} = p(u_0, t_0).$$

У другому випадку, коли задано  $u_0$ :

$$p(u, t | u_0, t) = \delta(u - u_0), \quad t = t_0. \quad (5.16)$$

Для неперервного випадкового процесу  $U(t)$  природи, які він буде отримувати впродовж малих інтервалів часу  $\Delta t$ , також будуть малими. Тому у виразі для інтенсивностей (5.13) моментами порядку вище за другий можна знехтувати. У зв'язку з цим (5.15) набере вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}(\chi_1 p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\chi_2 p). \quad (5.17)$$

Рівняння (5.17), що описує зміни перехідної щільності ймовірності безперервного марковського процесу, називається **рівнянням Фоккера–Планка–Колмогорова** (іноді **рівнянням Колмогорова**), або **прямим рівнянням** [1], оскільки у ньому не фігурує похідна за скінченим моментом часу  $t > t_0$ . Функція  $\chi_1(u, t)$  характеризує середню швидкість зміни випадкового процесу  $U(t)$  у точці  $i$  називається коефіцієнтом зносу. Функція  $\chi_2(u, t)$ , що називається коефіцієнтом дифузії, характеризує швидкість зміни умовної дисперсії випадкового процесу.

Відмітимо, що перехідна щільність імовірності  $p = p(u, t | u_0, t_0)$ , яка розглядається як функція початкового стану процесу  $u_0, t_0$ , задовольняє умову

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} = -\chi_1 \frac{\partial p}{\partial u_0} - \chi_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u_0^2}, \quad (5.18)$$

яка є спряженою з (5.17).

Рівняння (5.18) називають *зворотним рівнянням Колмогорова* (оскільки до нього входить похідна за початковим моментом часу  $t_0 < t$ ) [1; 16].

Рівняння (5.17) задовольняє не тільки перехідна щільність імовірності  $p(u, t | u_0, t_0)$ , але й одновимірна (одноточкова) щільність імовірності  $p(u, t)$ . Тобто визначення перехідної щільності ймовірності можна розглядати як окремий випадок визначення одновимірної щільності ймовірності за початкової умови, що задана у формі (5.16).

Рівняння (5.17), (5.18) належать до параболічного типу і для того, щоб відшукати їх розв'язки, можна застосовувати традиційні методи розв'язання задачі Коші для параболічних рівнянь [8].

### 5.3. Багатовимірні марковські процеси

Під багатовимірним марковським процесом розуміють векторний процес  $\vec{U}(t)$ , кожна компонента якого є марковським випадковим процесом:

$$\vec{U}(t) = \{U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)\}.$$

Компонентами випадкового процесу  $\vec{U}(t)$  можуть бути координати системи або ж частина з них є узагальненими координатами системи (змінні стану), а інші – узагальнені швидкості.

Багатовимірний марковський процес визначається аналогічно до одновимірного (п. 5.1) шляхом формальної заміни скалярної випадкової функції  $U(t)$  на векторну  $\vec{U}(t)$ .

У багатовимірному випадку перехідна щільність імовірності  $p(\vec{u}, t; \vec{u}_0, t_0)$  задовольняє інтегральне рівняння типу (5.6):

$$p(\vec{u}_2, t_2; \vec{u}_0, t_0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n p(\vec{u}_2, t_2 | \vec{u}_1, t_1) p(\vec{u}_1, t_1 | \vec{u}_0, t_0) d\vec{u}_1, \quad (5.19)$$

де  $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2$  – реалізації процесу  $\vec{U}(t)$  у моменти часу  $t_0, t_1, t_2$ ;  $d\vec{u}_1$  – елемент об'єму у  $n$ -вимірному просторі станів на часовому шарі  $t_1$ . Позначимо прирости компонент вектора  $\vec{U}(t)$  через  $\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n$ . Уведемо до розгляду інтенсивності багатовимірного марковського процесу:

$$\begin{cases} \chi_j(\vec{u}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u_j \rangle}{\Delta t}; \\ \chi_{jk}(\vec{u}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta u_j \Delta u_k \rangle}{\Delta t}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Для неперервно розподілених векторних випадкових процесів інтенсивності більш високого рангу будуть такими, що дорівнюють нулю.

Проводячи перетворення, аналогічні тим, що були зроблені при виведенні рівняння (5.17), отримаємо рівняння Колмогорова для багатовимірного марковського процесу:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} (\chi_j p) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} (\chi_{jk} p). \quad (5.21)$$

Як і у скалярному випадку, перехідна щільність імовірності  $p(\vec{u}, t | \vec{u}_0, t_0)$  повинна задовольняти рівняння Колмогорова (5.21), а також умови додатності, нормування та початкові умови вигляду (5.16).

**Приклад 5.1.** На рис. 5.1 показаний рідинний демпфер. На шток поршня діє випадкова сила  $Q(t)$ . Визначити умовну щільність імовірності зміщення штока  $p(x, t | x_0, 0)$  у довільний момент часу  $t$ , якщо задані числові характеристики випадкового стаціонарного впливу:  $\langle Q(t) \rangle = 0$ ,  $K_Q = K_0 \delta(\tau)$  [16].

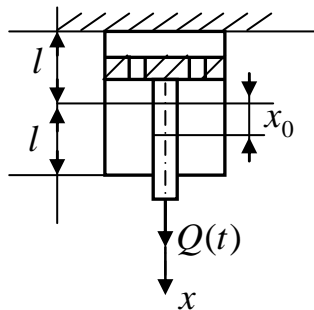


Рисунок 5.1

*Розв'язання.* Вважаючи шток і поршень безінерційними, рівняння руху поршня можемо записати у вигляді

$$\alpha \dot{X} = Q(t),$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт в'язкого тертя.

За визначенням умовної щільності ймовірності вона повинна при  $t = 0$  задовольняти умову (5.16):

$$p(x, 0 | x_0, 0) = \delta(x - x_0), \quad (5.22)$$

а у довільний момент часу – умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t | x_0, 0) dx = 1. \quad (5.23)$$

Межі зміни зміщення поршня є обмеженими:  $-l \leq x \leq l$ .

Коефіцієнти прямого рівняння Колмогорова (5.17) для даної задачі будуть відповідно дорівнювати:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 0, \\ \chi_2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta Q \rangle}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{K_q(t_2 - t_1)}{\alpha^2} dt_1 dt_2 = \frac{K_0}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Тоді рівняння Колмогорова для визначення умовної щільності ймовірності матиме вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_0}{2\alpha^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (5.25)$$

Розв'язок цього рівняння параболічного типу, що задовольняє умови (5.22) і (5.23), має вигляд [16]:

$$p(x, t|x_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi_2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\chi_2 t}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi K_0 t}} e^{-\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{2K_0 t}}. \quad (5.26)$$

Розглянемо стаціонарний режим роботи поршня, при якому умовна щільність імовірності  $p(x, t|x_0, 0)$  та коефіцієнти рівняння Колмогорова (5.17) не залежать від часу. Тоді (5.17) можна записати як

$$-\frac{d}{dx}(\chi_1 p) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}(\chi_2 p) = 0. \quad (5.27)$$

Проінтегруємо (5.27) за  $x$

$$\frac{d}{dx}(\chi_2 p) - 2\chi_1 p = C, \quad (5.28)$$

де  $C$  – стала інтегрування. Якщо природно припустити, що при  $x \rightarrow \infty$  умовна щільність імовірності та її перша похідна прямують до нуля, тоді  $C = 0$ . Відповідно рівняння (5.28) є однорідним, і його розв'язок може бути поданий у вигляді [8]:

$$p(x) = \frac{C_1}{\chi_2} e^{2 \int_0^x \left( \frac{\chi_1}{\chi_2} \right) dx}.$$

Довільну сталу  $C_1$  визначимо з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-l}^l \frac{C_1}{\chi_2} e^{2 \int_0^x \left( \frac{\chi_1}{\chi_2} \right) dx} dx = 1,$$

звідки з урахуванням значень інтенсивностей (5.24):

$$C_1 = \frac{K_0}{2l\alpha^2}.$$

## 6. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

### 6.1. Поняття похідних випадкових функцій

У математичному аналізі використовують визначення *похідної за Лейбніцем*, згідно з яким у випадку часового аргументу  $t$  похідна функції  $U(t)$  дорівнює [8]:

$$V(t) = \dot{U}(t) = \frac{dU(t)}{dt} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t}. \quad (6.1)$$

У свою чергу, *під межею послідовності* величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , розуміють [8]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*, \quad |x_* - x_n| \leq \varepsilon, \quad (6.2)$$

де  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число.

***Безпосередньо застосовувати наведені граничні співвідношення математичного аналізу до випадкових величин та функцій не можна.***

***При визначенні похідної випадкової функції керуються двома поняттями збіжності:***

- 1) *за ймовірністю;*
- 2) *за середнім квадратом (або у середньоквадратичному розумінні).*

Розглянемо ці поняття для послідовності випадкових величин.

У першому випадку ***послідовність вважають такою, що збігається за ймовірністю***, якщо для будь-якої пари скільки завгодно малих додатних чисел  $\varepsilon$  і  $\delta$  можна знайти таке  $n$ , при якому виконується умова



$$P(|x_n - x| < \varepsilon) > 1 - \delta, \quad (6.3)$$

або

$$P(|x_n - x| < \varepsilon) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

У другому випадку *збіжність послідовності за середнім квадратом* визначається як

$$\langle (x_n - x)^2 \rangle < \varepsilon, \quad (6.4)$$

де  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число. Тоді при  $n \rightarrow \infty$  отримуємо

$$\langle (x_n - x)^2 \rangle \rightarrow 0.$$

Визначення межі у середньоквадратичному розумінні є найбільш зручним і добре узгоджується з практичним розумінням межі, оскільки на основі теореми Чебишева [14] можна стверджувати, що великі відхилення ординат випадкової функції від її межі, є як завгодно малоймовірними.

Н. Вінером і у подальшому А. Я. Хінчиним на підставі нерівності Чебишева [3]

$$P(|x_n - x| \geq \varepsilon) \leq \frac{\langle (x_n - x)^2 \rangle}{\varepsilon^2}$$

було показано, що *зі збіжності у середньоквадратичному розумінні випливає збіжність за ймовірністю, але не навпаки.*

Застосуємо введені вище поняття збіжності випадкової послідовності до визначення похідної випадкової функції (процесу).

**Похідною випадкової функції  $U(t)$  за ймовірністю** називається така випадкова функція  $V(t)$ , яка задовольняє для будь-якого як завгодно малого  $\varepsilon > 0$  умову

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P\left(\left|\frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} - V(t)\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (6.5)$$

У визначенні **похідної випадкової функції у середньоквадратичному розумінні** під межею послідовності випадкових величин (функцій) будемо розуміти випадкову величину (функцію), другий початковий момент різниці між якою та елементами послідовності за певних умов прямує до нуля. У зв'язку з цим випадковий процес  $U(t)$  вважається таким, що можна диференціювати у точці  $t$ , якщо для будь-якої послідовності додатних чисел  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), яка прямує до нуля, послідовність, утворена з різниці значень випадкової функції  $\frac{U(t + \varepsilon_j) - U(t)}{\varepsilon_j}$ , збігається за середнім квадратом до однієї й тієї самої випадкової функції  $\frac{dU(t)}{dt}$  ( $\dot{U}(t)$ ), яку будемо називати похідною випадкового процесу  $U(t)$ .

Таким чином, **похідною у середньоквадратичному розумінні випадкової функції  $U(t)$**  називається така випадкова функція  $V(t)$ , яка задовольняє умову

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left( \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t} - V(t) \right)^2 \right\rangle = 0. \quad (6.6)$$

Для визначення того, чи є випадкова функція такою, що можна диференціювати, розглянемо також **умову неперервності випадкової функції**. Випадкова функція  $U(t)$  є **неперервною у середньоквадратичному розумінні**, якщо виконується граничне співвідношення

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \langle |U(t + \Delta) - U(t)|^2 \rangle = 0. \quad (6.7)$$

На підставі (6.7) можемо стверджувати, що **для неперервності випадкової функції  $U(t)$  достатньо, щоб її кореляційна функція була неперервною відносно своїх аргументів**. У цьому легко переконатися, використовуючи визначення кореляційної функції:

$$\begin{aligned} & \langle |U(t + \Delta) - U(t)|^2 \rangle = \\ & = K_U(t + \Delta, t + \Delta) + K_U(t, t) - K_U(t + \Delta, t) - K_U(t, t + \Delta). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Бачимо, що з неперервності  $K_U(t_1, t_2)$  випливає виконання умови (6.7).

У той самий час **умов неперервності випадкової функції недостатньо для існування її похідної**, оскільки необхідне ще виконання граничної умови (6.5).

Розглянемо відношення  $\frac{U(t + \Delta_1) - U(t)}{\Delta_1}$  і  $\frac{U(t + \Delta_2) - U(t)}{\Delta_2}$ . Відповідно до умови, за якою

випадкову функцію можна диференціювати, для незалежних  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  ці відношення повинні мати однакові границі, тому

$$\lim_{\substack{\Delta_1 \rightarrow 0 \\ \Delta_2 \rightarrow 0}} \left\langle \left( \frac{U(t + \Delta_1) - U(t)}{\Delta_1} - \frac{U(t + \Delta_2) - U(t)}{\Delta_2} \right)^2 \right\rangle = 0. \quad (6.9)$$

Використовуючи властивості математичного сподівання, із (6.9) отримаємо

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \frac{U(t + \Delta_1) - U(t)}{\Delta_1} - \frac{U(t + \Delta_2) - U(t)}{\Delta_2} \right)^2 \right\rangle = \\ & = \frac{1}{\Delta_1^2} (K_U(t + \Delta_1, t + \Delta_1) + K_U(t, t) - K_U(t + \Delta_1, t) - K_U(t, t + \Delta_1)) + \\ & + \frac{1}{\Delta_2^2} (K_U(t + \Delta_2, t + \Delta_2) + K_U(t, t) - K_U(t + \Delta_2, t) - K_U(t, t + \Delta_2)) + \\ & + \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} (K_U(t + \Delta_1, t + \Delta_2) + K_U(t, t) - K_U(t + \Delta_1, t) - K_U(t, t + \Delta_2)). \end{aligned} \quad (6.10)$$

До правої частини (6.10) не входять випадкові функції чи величини, тому при граничному переході при  $\Delta_1 \rightarrow 0$  і  $\Delta_2 \rightarrow 0$  можна використовувати методи математичного аналізу.

Якщо частинні похідні від кореляційної функції  $\frac{\partial K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1}$ ,  $\frac{\partial K_U(t_1, t_2)}{\partial t_2}$  і  $\frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$  існують, то після відповідних перетворень матимемо

$$\lim_{\substack{\Delta_1 \rightarrow 0 \\ \Delta_2 \rightarrow 0}} \left\langle \left( \frac{U(t + \Delta_1) - U(t)}{\Delta_1} - \frac{U(t + \Delta_2) - U(t)}{\Delta_2} \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} - 2 \frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{t_1=t_2=t} = 0.$$

Тобто можна стверджувати, що, *для того щоб випадковий процес (функція) був таким, що можна диференціювати, необхідно і достатньо існування другої змішаної частинної похідної від кореляційної функції процесу.*

**Теорема.** *Випадкова функція  $U(t)$  є неперервною, якщо її кореляційна функція є неперервною відносно своїх аргументів [5; 2].*

Для стаціонарних випадкових процесів кореляційна функція залежить не від двох аргументів  $t_1, t_2$ , а від їх різниці:  $K_U(t_1, t_2) = K_U(t_1 - t_2) = K_U(\tau)$ , причому

$$\left. \frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t} = - \left. \frac{d^2 K_U(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

Тобто, для того щоб *стаціонарна випадкова функція  $U(t)$  була такою, що можна диференціювати, необхідно і достатньо існування другої похідної від її кореляційної функції у нулі.*

Відмітимо, що збіжність у середньоквадратичному розумінні оперує з числовими характеристиками (моментними функціями) випадкових величин та функцій. У свою чергу, збіжність за ймовірністю припускає розгляд характеристик розподілу (щільність імовірності, функція розподілу). Таким чином, відповідні визначення похідної відповідають 1-му та 2-му способам описання випадкових функцій.

Існують неперервні функції, які не мають першої похідної. Наприклад, розглянемо випадкову функцію, що отримує у деякі моменти часу незалежні випадкові прирости  $A_j$ , причому  $\langle A_j \rangle = 0$  і  $\langle A_j^2 \rangle = \sigma^2$ . Якщо прирости функції відбуваються через однакові інтервали часу з частотою  $\nu$  і навіть для дуже малих  $\Delta t$  число стрибків  $n = \nu \Delta t$  можна вважати цілим, то приріст функції  $U(t)$  за час  $\Delta t$  дорівнюватиме

$$\Delta U(t) = \sum_{j=1}^n A_j.$$

Збільшуючи частоту приростів  $\nu$  з одночасним зменшенням дисперсії кожної складової в останній формулі, у межі отримаємо безперервну функцію, приріст якої не буде пропорційним  $\Delta t$ . Дійсно, оскільки дисперсія випадкової функції може бути визначена як дисперсія приросту функції за приріст часового аргументу матимемо

$$D_U = \langle |\Delta U(t)|^2 \rangle = n\sigma^2 = \nu\sigma^2 \Delta t. \quad (6.11)$$

Згідно з відомою теоремою з курсу математичного аналізу [8] функція  $U(t)$  є неперервною у точці  $t_*$  тоді і тільки тоді, коли нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції у цій точці. З виразу (6.11) випливає, що для випадкової функції, яка розглядається, першому степеню  $\Delta t$  пропорційний (у середньому) квадрат приросту функції, а не сам приріст, як було б у випадку, якщо б функція  $U(t)$  мала похідну.

На практиці поряд із вищенаведеним визначенням похідної випадкової функції широко використовується визначення **«не строгого» диференціювання**, в основу якого покладена **аналогія з операцією диференціювання реалізацій випадкових функцій**.

Розглянемо  $j$ -ту реалізацію  $u_j(t)$  випадкового процесу  $U(t)$ . За визначенням, кожна реалізація випадкової функції є детерміністичною функцією, для якої можна застосовувати поняття похідної у класичному розумінні (за Лейбніцем):

$$V_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_j(t + \Delta t) - u_j(t)}{\Delta t}.$$

Визначимо статистичне середнє значення похідної реалізацій як

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_j(t + \Delta t) - u_j(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_j \frac{du_j(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \sum_j u_j(t) \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

де сума реалізацій випадкового процесу  $\frac{1}{n} \sum_j u_j(t) = \bar{U}(t)$  являє собою статистичне середнє значення (2.29) цього процесу.

У формулі (6.12) перетавлення операцій диференціювання та підсумовування є допустимим через їх лінійність, тому можемо записати

$$\bar{V}(t) = \frac{d}{dt} \bar{U}(t). \quad (6.13)$$

Останній вираз відповідає поняттю *похідної випадкової функції (процесу) за множиною реалізацій*. Це дозволяє формально підходити до визначення похідної випадкової функції у рамках її класичного визначення за Лейбніцем.

Використовуючи лінійність операцій диференціювання (інтегрування) під час визначення моментів, отримаємо *середнє статистичне похідної випадкової функції* у вигляді похідної від відповідних моментів. Для математичного сподівання похідної, наприклад, маємо

$$\left\langle \frac{dU(t)}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle.$$

Незважаючи на "нестрогість", цей спосіб диференціювання набув великого поширення у практичних застосуваннях. У більшості практичних робіт цей спосіб застосовується без аналізу можливості (чи неможливості) його використання. Однак для ергодичних процесів такий підхід є строгим, тому і для стаціонарних випадкових процесів слід очікувати відносно невеликої похибки «нестрогого» розрахунку похідних.

У світлі викладеного визначимо *кореляційну функцію похідної випадкової функції (процесу)* як

$$\begin{aligned} K_V(t_1, t_2) &= \left\langle \overset{\text{def}}{\tilde{U}}(t_1) \tilde{U}(t_2) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \tilde{U}(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \tilde{U}(t_2)}{\partial t_2} \right\rangle = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left\langle \tilde{U}(t_1) \tilde{U}(t_2) \right\rangle = \frac{\partial^2 K_U(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$



Якщо  $U(t)$  – стаціонарний випадковий процес, то  $K_U(t_1, t_2) = K_U(t_2 - t_1) = K_U(\tau)$ . Відповідно

$$\frac{\partial K_U(t_2 - t_1)}{\partial t_1} = -\frac{dK_U(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{\partial K_U(t_2 - t_1)}{\partial t_2} = \frac{dK_U(\tau)}{d\tau}. \quad (6.15)$$

Тут  $\tau = t_2 - t_1$ , тому  $\frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -1$ ,  $\frac{\partial \tau}{\partial t_2} = 1$ .

Таким чином, для стаціонарної випадкової функції кореляційна функція її похідної дорівнює

$$K_V(\tau) = -\frac{d^2 K_U(\tau)}{d\tau^2}.$$

**Теорема.** Для існування кореляційної функції похідної стаціонарного випадкового процесу необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція вихідного процесу була двічі диференційованою за часовим аргументом

При визначенні моментних функцій похідних випадкових процесів прийнято обмежуватися розглядом тільки перших двох, оскільки, як це було відмічено вище, для технічних застосувань ці моментні функції є найбільш інформативними, а для стаціонарних за Хінчином процесів інформація про перші два моменти є вичерпною.

Проілюструємо викладене на прикладі стаціонарного випадкового процесу  $U(t)$  з гаусовою кореляцією:

$$K_U(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha \tau^2} \quad (\text{рис. 6.1 а}).$$

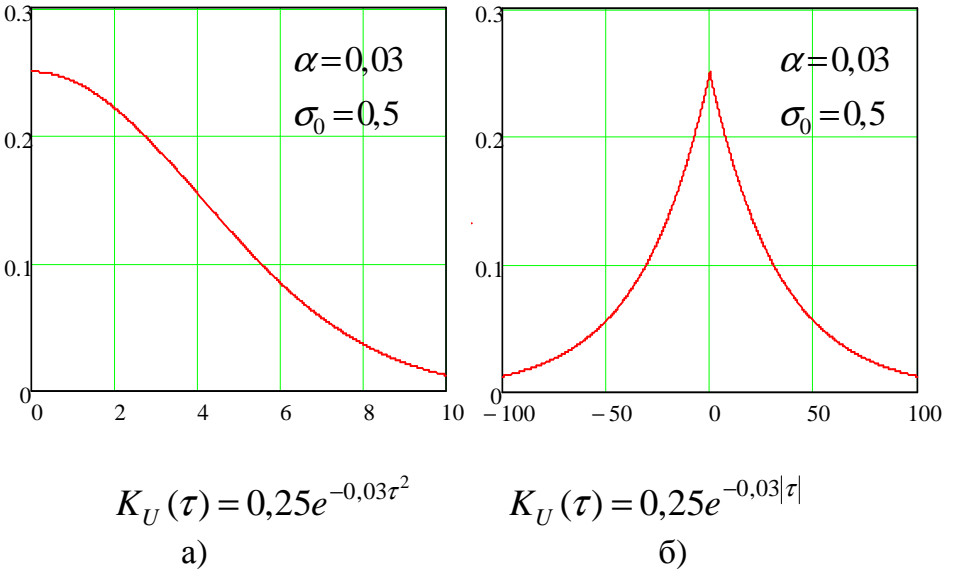


Рисунок 6.1

Згідно з формулами (6.14) і (6.15) маємо

$$\begin{aligned} K_V(t, t') &= \frac{\partial^2 K_U(t, t')}{\partial t \partial t'} = -\frac{d^2 K_U(\tau)}{d\tau^2} \\ &= -\frac{d}{d\tau} \left( \sigma^2 (-2\tau\alpha^2) e^{-\alpha^2\tau^2} \right) = 2\alpha^2 \sigma^2 \left[ (1 - 2\tau^2\alpha^2) \right] e^{-\alpha^2\tau^2}. \end{aligned}$$

Таким чином, можна стверджувати, що розглядуваний випадковий процес є таким, що можна диференціювати. Більше того, очевидно, що кореляційна функція  $K_U(\tau)$  процесу є диференційовною необмежену кількість разів, тому і сам процес є багаторазово диференційовним.

Розглянемо далі стаціонарний експоненціально корельований випадковий процес, для якого

$K_U(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$  (рис. 6.1 б). Як перша, так і друга похідна від  $K_U(\tau)$  не існують у нулі, тому можна стверджувати, що цей процес не є диференційовним.

**Приклад 6.1.** Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкового процесу  $Y(t) = t \frac{dX(t)}{dt} + C$ , де

$$X(t) = t^2 + 4t + 2, \quad K_X(t, t') = D_X e^{-\alpha(t-t')^2}, \quad D_X = \text{const}.$$

*Розв'язання.* Математичне сподівання випадкового процесу  $Y(t)$  знайдемо, використовуючи визначення нестрогого диференціювання:

$$\begin{aligned} \langle Y(t) \rangle &= \left\langle t \frac{dX(t)}{dt} \right\rangle + \langle C \rangle = \\ &= t \frac{d\langle X(t) \rangle}{dt} + C = t(2t + 4) + C = 2t^2 + 4t + C. \end{aligned}$$

Тоді кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_Y(t, t') &= \left\langle (Y(t) - \langle Y(t) \rangle)(Y(t') - \langle Y(t') \rangle) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left( t \frac{\partial X(t)}{\partial t} + C - \left\langle t \frac{\partial X(t)}{\partial t} \right\rangle - C \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( t' \frac{\partial X(t')}{\partial t'} + C - \left\langle t' \frac{\partial X(t')}{\partial t'} \right\rangle - C \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Якщо позначити  $V(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial t}$ , то вираз для кореляційної функції можна записати так:

$$K_Y(t, t') = t \cdot t' K_V(t, t').$$

Згідно з формулою (6.14)

$$K_V(t, t') = \frac{\partial^2 K_X(t, t')}{\partial t \partial t'},$$

і відповідно

$$K_Y(t, t') = t \cdot t' \frac{\partial^2 K_X(t, t')}{\partial t \partial t'} = t \cdot t' \frac{\partial}{\partial t} \left( -2\alpha D_X (t - t') e^{-\alpha(t-t')^2} \right).$$

Тоді дисперсія випадкового процесу  $Y(t)$ :

$$\begin{aligned} D_Y &= K_Y(t = t') = \\ &= -2\alpha D_X e^{-\alpha(t-t')^2} \left( 2\alpha(t-t')^2 - 1 \right) t'^2 = 2\alpha D_X t'^2. \end{aligned}$$

## 6.2. Спектральне подання випадкових процесів та їх похідних

Для *дискретної форми* спектрального розкладання випадковий процес може бути поданий у вигляді ряду (3.21):

$$U(t) = \sum_k \mathcal{U}_k \varphi_k(t), \quad (6.16)$$

де  $\varphi_k(t)$  – детерміністичний базис;  $\mathcal{U}_k$  – випадковий спектр розкладання.

Обчислюючи похідну процесу, маємо

$$V(t) = \frac{dU(t)}{dt} = \sum_k \mathcal{U}_k \frac{d\varphi_k(t)}{dt}. \quad (6.17)$$

Через рівність коефіцієнтів розкладання (6.16) і (6.17) можна стверджувати, що *для дискретної форми спектрального розкладання випадкового процесу ймовірнісні характеристики спектра похідної є*

**тотожними ймовірнісним характеристикам спектра процесу.**

Якщо для описання випадкового спектра  $\mathcal{U}_k$  використовується **сумісна щільність імовірності**  $p(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , то, очевидно, вона ж **характеризує ймовірнісні властивості похідних випадкового процесу будь-якого порядку.**

При другому способі описання перша і друга моментні функції похідної відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} \langle V(t) \rangle &= \sum_k \langle \mathcal{U}_k \rangle \frac{d\varphi_k(t)}{dt}, \\ \langle V(t_1)V(t_2) \rangle &= \sum_j \sum_k \langle \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \rangle \frac{\partial \varphi_j(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_k(t_2)}{\partial t_2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Очевидно там, де це можливо, зручно застосовувати дискретні форми спектральних розкладань зі стохастично ортогональним спектром:

$$\langle \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \rangle = \langle |\mathcal{U}_j|^2 \rangle \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

де  $\delta_{jk}$  – символ (дельта) Кронекера [8].

При цьому подвійний ряд у (6.18) перетворюється в одинарний, і розкладання зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \langle V(t_1)V(t_2) \rangle &= \sum_k \langle |\mathcal{U}_k|^2 \rangle \frac{\partial \varphi_k(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_k(t_2)}{\partial t_2} = \\ &= \sum_k D_{\mathcal{U}_k} \frac{\partial \varphi_k(t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_k(t_2)}{\partial t_2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

**Неперервну форму** спектрального розкладання похідних розглянемо на прикладі **стаціонарного** випадкового процесу. Як було зазначено у п. 3.5, для стаціонарних процесів як базисна функція  $\varphi(t/\omega)$  спектрального розкладання може бути використана комплексна експонента, при цьому

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.20)$$

Оскільки у випадку стаціонарності процесу його математичне сподівання не залежить від часу ( $\epsilon$  постійним), то похідна від першого моменту буде дорівнювати нулю, при цьому

$$\tilde{V}(t) = V(t) = \frac{dU(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega) (i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.21)$$

Таким чином, у випадку **неперервного спектрального розкладання стаціонарного випадкового процесу спектр похідної визначається множенням на  $(i\omega)$  спектра процесу:**

$$\mathcal{U}_V(\omega) = i\omega \mathcal{U}(\omega). \quad (6.22)$$

Для комплексно спряженого варіанта першої похідної процесу маємо

$$V^*(t) = \frac{dU^*(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}^*(\omega) (-i\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (6.23)$$

Знайдемо спектральну щільність похідної, керуючись узагальненим визначенням кореляційної функції (3.32):

$$\begin{aligned}
 K_V(t, t') & \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{V}^*(t) \tilde{V}(t') \rangle = \langle \tilde{U}^*(t) \tilde{U}(t') \rangle = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle \omega \omega' e^{-i\omega t} e^{i\omega' t'} d\omega d\omega'.
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

За аналогією з п. 3.5.1 додамо під знаком експоненти складові  $\pm \omega' t$ , які дають нульовий внесок. Виділимо у підінтегральному виразі множник, що містить  $\tau = t' - t$ :

$$\begin{aligned}
 K_V(t, t') & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle \omega \omega' e^{-i\omega t + i\omega' t' \pm i\omega' t} d\omega d\omega' = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle \omega \omega' e^{i\omega' \tau} e^{i(\omega' - \omega)t} d\omega d\omega'.
 \end{aligned}$$

З урахуванням того, що для стаціонарних випадкових процесів має місце стохастична ортогональність спектрів (3.43):

$$\langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle = S_U(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

для похідних стаціонарних випадкових процесів також буде виконуватись умова стохастичної ортогональності спектрів вигляду:

$$\langle \mathcal{U}_V^*(\omega) \mathcal{U}_V(\omega') \rangle = S_V(\omega) \delta(\omega - \omega'), \tag{6.25}$$

де

$$S_V(\omega) = \omega^2 S_U(\omega). \tag{6.26}$$

Із (6.24) з урахуванням (6.25) отримаємо пряме перетворення Вінера-Хінчина для похідної стаціонарного випадкового процесу:

$$K_V(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_V(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_U(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.27)$$

*Під дією на випадковий стаціонарний процес лінійного диференціального оператора у вигляді суперпозиції похідних різного порядку у просторі частоти матимемо образ цього оператора у вигляді алгебраїчної поліноміальної форми відповідних степенів  $\omega$ .*

Використовуючи висновок прямого перетворення Вінера–Хінчина та встановлений зв'язок між спектральними функціями самого процесу і його похідної (6.27), отримуємо вираз для дисперсії першої похідної стаціонарного випадкового процесу

$$D_V = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_U(\omega) d\omega. \quad (6.28)$$

Таким чином, можна зробити висновок: для того *щоб стаціонарний випадковий процес  $U(t)$  був таким, що можна диференціювати, необхідно, щоб дисперсія його похідної була скінченною. При цьому необхідне існування інтеграла від спектральної щільності процесу з вагою  $\omega^2$*  (6.28). Це твердження еквівалентне вимозі 2-кратної диференційовності кореляційної функції  $K_U(\tau)$ .

Аналогічно для похідних  $k$ -го порядку умова диференційовності стаціонарного процесу має вигляд

$$D_V^k = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2k} S_U(\omega) d\omega < \infty. \quad (6.29)$$



Якщо нерівність (6.29) не виконується, то випадковий процес є таким, що не може бути диференційованим у розумінні  $k$ -ї похідної.

**Приклад 6.2.** Розглянемо експоненціально корельований стаціонарний випадковий процес, для якого  $K_U(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$ . Перевіримо можливість диференціювання цього випадкового процесу, виходячи з умови обмеженості дисперсії його похідної.

*Розв'язання.* Використовуючи формулу Вінера-Хінчина, визначимо спектральну щільність процесу:

$$\begin{aligned} S_U(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_U(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0^2 e^{-(i\omega+\alpha)\tau} d\tau = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо інтеграл (6.28):

$$D_V(\tau) = \frac{\sigma_0^2 \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega \rightarrow \infty.$$

Таким чином, можна стверджувати, що розглядуваний випадковий процес, не є таким, що можна диференціювати.

### 6.3. Сумісний розподіл стаціонарного випадкового процесу та його похідних

Обмежимося розглядом центрованих ( $\langle U(t) \rangle = 0$ ) стаціонарних випадкових процесів, для яких канонічна форма неперервного спектрального розкладання має вигляд

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.30)$$

при виконанні умови стохастичної ортогональності спектрів

$$\langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle = S_U(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (6.31)$$

Ця умова є необхідною та достатньою для процесів стаціонарних за Хінчином.

Похідна  $\mu$ -го порядку процесу  $U(t)$  запишеться як

$$U^\mu(t) = \frac{d^\mu U(t)}{dt^\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^\mu \mathcal{U}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.32)$$

Визначимо взаємні кореляційні функції похідних процесу (6.32) порядків  $\mu$  і  $\nu$ :

$$\begin{aligned} K_V^{\mu\nu}(\tau) &= \langle \tilde{U}^{(\mu)*}(t_1) \tilde{U}^{(\nu)}(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{U}^*(\omega) \mathcal{U}(\omega') \rangle (-i\omega)^\mu (i\omega')^\nu e^{-i\omega t_1} e^{i\omega' t_2} d\omega d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) \delta(\omega - \omega') (-i\omega)^\mu (i\omega')^\nu e^{-i\omega t_1} e^{i\omega' t_2} d\omega d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^\mu (i\omega)^\nu S_U(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Визначимо дисперсію як кореляційну функцію (6.33) у нулі:

$$D_V^{\mu\nu} = K_V^{\mu\nu}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^\mu (i\omega)^\nu S_U(\omega) d\omega. \quad (6.34)$$

Для дійсного випадкового процесу спектральна щільність  $S_U(\omega)$  є парною функцією. Якщо порядки похідних  $\mu$  і  $\nu$  мають однакову парність, то  $\omega^{\mu+\nu}$  є парною функцією. Якщо сума степенів  $\mu+\nu$  непарна, то  $\omega^{\mu+\nu}$  є непарною функцією. Інтеграл на симетричному інтервалі від добутку функцій дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^\mu (i\omega)^\nu S_U(\omega) d\omega = \begin{cases} 0, & \mu + \nu = 2k + 1, \\ \neq 0, & \mu + \nu = 2k, \end{cases} \quad (6.35)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що *для стаціонарних процесів похідні, сума порядків яких є непарною, в однакові моменти часу не корелюють між собою, при цьому дисперсія їх добутку дорівнює нулю. Навпаки, якщо сума порядків похідних є парною, то дисперсія добутку похідних є ненульовою. Тобто для стаціонарного випадкового процесу з відсутності кореляції парних та непарних похідних впливає їх повна стохастична незалежність.*

Узагальнюючи цей висновок та переходячи до розгляду щільності ймовірності стаціонарного випадкового процесу та його похідних, можемо стверджувати, що

$$p(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots; t) = p(\underbrace{u, \ddot{u}, u, \dots}_{\text{парні}}; t) p(\underbrace{\dot{u}, \ddot{u}, \dots}_{\text{непарні}}; t). \quad (6.36)$$

У свою чергу, кореляційна матриця добутків похідних порядків від 0 до  $(2k)$  стаціонарного випадкового процесу для збіжних моментів часу матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} \langle |U|^2 \rangle & 0 & \langle U^* U'' \rangle & 0 & \dots & \langle U^* U^{(2k)} \rangle \\ 0 & \langle |U'|^2 \rangle & 0 & \langle U''^* U'' \rangle \dots & 0 & \\ & & \dots & & & \\ \langle U^{(2k)*} U \rangle & 0 & \langle U^{(2k)*} U'' \rangle & 0 & \dots & \langle |U^{(2k)}|^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Як ілюстрацію вищевикладеного розглянемо стаціонарний гаусів процес зі щільністю ймовірності

$$p_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U} \exp\left(-\left(\frac{u - \langle U(t) \rangle}{2\sigma_U^2}\right)^2\right). \quad (6.38)$$

Із умови стаціонарності процесу випливає  $\langle U(t) \rangle = C = \text{const}$ , при цьому  $\langle \dot{U}(t) \rangle = \frac{d\langle U(t) \rangle}{dt} = 0$ .

Відповідні дисперсії процесу та його першої похідної визначаються як

$$\sigma_U^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) d\omega, \quad \sigma_{\dot{U}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_U(\omega) d\omega,$$

де  $S_U(\omega)$  – спектральна щільність процесу.

Вираз для щільності ймовірності похідної процесу (6.38) має вигляд

$$p_2(\dot{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{u}}} \exp\left(-\left(\frac{\dot{u}}{2\sigma_{\dot{u}}^2}\right)^2\right). \quad (6.39)$$

Згідно з (6.36) сумісна щільність імовірності процесу та його першої похідної дорівнює

$$\begin{aligned} p(u, \dot{u}) &= p_1(u)p_2(\dot{u}) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_U\sigma_{\dot{U}}} \exp\left(-\left(\frac{u - \langle C \rangle}{2\sigma_U^2}\right)^2 - \left(\frac{\dot{u}}{2\sigma_{\dot{U}}^2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

#### 6.4. Інтегрування випадкових процесів

Розглянемо інтегрування випадкового процесу  $X(t)$ :

$$Y(t) = \int_0^t \eta(t')X(t')dt', \quad (6.40)$$

де  $\eta(t)$  – не випадкова функція.

Під детерміністичним інтегралом вигляду (6.40), як і в звичайному аналізі, будемо розуміти границю відповідної інтегральної суми [8]:

$$\int_0^t \eta(t')X(t')dt' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \eta(t_i)X(t_i)(t_i - t_{i-1}), \quad (6.41)$$

причому при  $n \rightarrow \infty$  довжина кожного інтервалу  $\Delta t = t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$ .

Як було показано в (п. 6.1), для випадкового процесу  $X(t)$  межа в (6.41) може визначатися за ймовірністю й у середньоквадратичному розумінні. Оскільки зі збіжності у середньоквадратичному розумінні випливає збіжність за ймовірністю (але не навпаки), у подальшому будемо керуватися поняттям інтеграла як межі суми ряду у середньоквадратичному розумінні.

Інтеграл від випадкового процесу у середньоквадратичному розумінні будемо визначати як випадкову функцію (величину), другий початковий момент різниці між якою та межею суми ряду (6.41) прямує до нуля (6.4).

Визначимо зв'язок між числовими характеристиками випадкових процесів  $Y(t)$  та  $X(t)$ .

Знайдемо зв'язок математичних сподівань. Внаслідок лінійності оператора математичного сподівання та інтегрування отримаємо

$$\langle Y(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \eta(t') X(t') dt' \right\rangle = \int_0^t \eta(t') \langle X(t') \rangle dt'.$$

Виразимо дисперсію  $D_Y$  через відповідну кореляційну функцію  $K_X(t_1, t_2)$  випадкового процесу  $X(t)$ .

Відповідно до (2.37) і (6.41) можемо записати

$$\begin{aligned}
K_Y(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Y}^*(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \\
&= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \eta^*(t_i) \tilde{X}^*(t_i) (t_i - t_{i-1}) \sum_{j=1}^n \eta(t_j) \tilde{X}(t_j) (t_j - t_{j-1}) \right\rangle = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \eta^*(t_i) \eta(t_j) (t_i - t_{i-1}) (t_j - t_{j-1}) \langle \tilde{X}^*(t_i) \tilde{X}(t_j) \rangle = \\
&= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \eta^*(t') \eta(t'') K_X(t', t'') dt' dt''.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Таким чином, для існування інтеграла від випадкового процесу його кореляційна функція повинна бути двічі інтегровною, а дисперсія, як наслідок, скінченною.

Окремим випадком інтегрального перетворення (6.40) є інтеграл від випадкового процесу  $X(t)$  вигляду

$$J = \int_a^b \eta(t) X(t) dt,$$

де  $a, b$  – детерміністичні сталі;  $J$  – випадкова величина.

Відзначимо, що якщо випадкові процеси  $X(t)$  і  $Y(t)$  зв'язані лінійним співвідношенням вигляду

$$Y(t) = L_t X(t), \tag{6.43}$$

де  $L_t$  – лінійний детерміністичний (або диференціальний) оператор, то

$$\begin{aligned}
\langle Y(t) \rangle &= L_t \langle X(t) \rangle, \\
K_Y(t_1, t_2) &= L_{t_1} L_{t_2} K_X(t_1, t_2).
\end{aligned} \tag{6.44}$$

**Приклад 6.3.** Нехай випадковий процес  $X(t)$  із відомими числовими характеристиками  $\langle X(t) \rangle = a$  і  $K_X(t_1, t_2)$  підлягає неоднорідному лінійному перетворенню:

$$Y(t) = L_t X(t) + \varphi(t),$$

де  $L_t$  – детерміністичний лінійний диференціальний оператор;  $\varphi(t)$  – детерміністична функція. Визначити  $K_{XY}(t_1, t_2), K_Y(t_1, t_2)$ .

*Розв'язання.* Використовуючи властивості математичного сподівання, а також (через лінійність) можливість перестановки операторів математичного сподівання та інтегрування, отримаємо

$$\langle Y(t) \rangle = \langle L_t X(t) + \varphi(t) \rangle = L_t \langle X(t) \rangle + \varphi(t).$$

Тоді для центрованих  $\tilde{Y}(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= Y(t) - \langle Y(t) \rangle = \\ &= L_t [X(t) - \langle X(t) \rangle] + \varphi(t) - \varphi(t) = L_t \tilde{X}(t). \end{aligned}$$

Взаємна кореляційна функція випадкових процесів  $X(t)$  і  $Y(t)$  визначається як

$$\begin{aligned} K_{XY}(t_1, t_2) &= \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \langle \tilde{X}(t_1) L_{t_2} \tilde{X}(t_2) \rangle = \\ &= L_{t_2} \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{X}(t_2) \rangle = L_{t_2} K_X(t_1, t_2). \end{aligned}$$

У свою чергу, кореляційна функція випадкового процесу  $Y(t)$  дорівнює



$$\begin{aligned}
 K_Y(t_1, t_2) &= \langle \tilde{Y}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \left\langle L \tilde{X}(t_1) L \tilde{X}(t_2) \right\rangle = \\
 &= L L \left\langle \tilde{X}(t_1) \tilde{X}(t_2) \right\rangle = L L K_X(t_1, t_2).
 \end{aligned}$$

**Приклад 6.4.** Визначити взаємну кореляційну функцію  $K_{XY}(t_1, t_2)$  при  $t_1 = 0, t_2 = 1$  випадкових процесів  $Y(t) = -t \frac{dX(t)}{dt} + \int_0^t \tau X(\tau) d\tau + \sin \omega t$  і  $X(t)$ , якщо відомі числові характеристики  $\langle X(t) \rangle = a(t), K_X(t_1, t_2) = \sigma_X^2 e^{-(t_1+t_2)}$ .

*Розв'язання.* Подамо випадковий процес  $Y(t)$  у вигляді неоднорідного лінійного перетворення:

$$Y(t) = L_t X(t) + \varphi(t),$$

де  $L_t$  – лінійний інтегродиференціальний оператор;  $\varphi(t)$  – детерміністична функція. Тоді математичне сподівання

$$\langle Y(t) \rangle = L_t \langle X(t) \rangle + \varphi(t).$$

Для центрованих значень процесу  $Y(t)$ :

$$\tilde{Y}(t) = L_t (X(t) - \langle X(t) \rangle) = L_t \tilde{X}(t).$$

Взаємна кореляційна функція визначається як

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \langle \tilde{X}(t_1) \tilde{Y}(t_2) \rangle = \left\langle \tilde{X}(t_1) L_{t_2} \tilde{X}(t_2) \right\rangle = L_{t_2} K_X(t_1, t_2),$$

$$\begin{aligned}
L_{t_2} K_X(t_1, t_2) &= -t_2 \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \int_0^{t_2} t' K_X(t_1, \tau) dt' = \\
&= t_2 \sigma_X^2 e^{-(t_1+t_2)} + \sigma_X^2 \int_0^{t_2} t' e^{-(t_1+t')} dt' = \\
&= t_2 \sigma_X^2 e^{-(t_1+t_2)} + \sigma_X^2 e^{-t_1} \left( -t_2 e^{-t_2} - e^{-t_2} + 1 \right) = \\
&= \sigma_X^2 e^{-t_1} \left( 1 - e^{-t_2} \right).
\end{aligned}$$

При  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  маємо

$$K_{XY}(0, 1) = \sigma_X^2 \left( 1 - e^{-1} \right) \approx 0,63 \sigma_X^2.$$

## 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

### 7.1. Методи опису випадкових полів

*Випадковим полем називається випадкова функція у загальному випадку декількох просторових або просторово-часових детерміністичних аргументів. Випадкові поля можуть бути скалярними (одновимірними) та векторними ( $n$ -вимірними).*

Польові величини, з якими оперує статистична механіка, є скалярами, векторами або тензорами. Наприклад, температура  $T$  тіла, вектори об'ємних  $X_j$  та поверхневих  $q_j$  сил, вектори переміщень  $u_j$ , тензори напружень  $\sigma_{jk}$  і деформацій  $\varepsilon_{jk}$ . У подальшому припустимо, що зазначені величини залежать від часу  $t$  та радіуса-вектора  $\vec{r}$ . При цьому будемо використовувати такі позначення польових величин:  $W(\vec{r})$  – скалярне просторове випадкове поле;  $W(\vec{r}, t)$  – просторово-часове скалярне випадкове поле;  $W_j(\vec{r})$  – векторне просторове випадкове поле;  $W_{jk}(\vec{r})$  – тензорне просторове випадкове поле 2-го рангу;  $W_{jk}(\vec{r}, t)$  – тензорне просторово-часове випадкове поле 2-го рангу.

*Описання випадкових полів є тотожним описанню випадкових величин та випадкових процесів: за допомогою характеристик розподілу, за допомогою моментних функцій та, як зручний апарат аналізу на основі цих способів, – за допомогою спектральних розкладань.*

### 7.1.1. Сумісні характеристики розподілу випадкових полів

Згідно з першим способом описання ймовірнісні характеристики випадкового поля можуть бути задані сукупністю багатоточкових сумісних розподілів. Для простоти викладення обмежимося розглядом *скалярного просторового поля*  $W(\vec{r})$ . Число вимірів узагальненого простору  $\vec{r}$  може дорівнювати 1, 2, ...,  $n$ .

Для описання випадкових властивостей скалярного поля  $W(\vec{r})$  необхідно задати повну систему сумісних функцій розподілу ймовірності або відповідних щільностей імовірності. Так, одноточкова щільність імовірності  $p(w, \vec{r})$ , помножена на елемент  $dw$ , визначає ймовірність такої випадкової події, яка полягає у тому, що значення скалярного поля  $W(\vec{r})$  знаходяться в інтервалі  $(w(\vec{r}), w(\vec{r}) + dw)$  для відповідної точки  $\vec{r}$  (рис. 7.1):

$$p(w, \vec{r})dw \stackrel{\text{def}}{=} P(w(\vec{r}) < W(\vec{r}) < w(\vec{r}) + dw). \quad (7.1)$$

Аналогічно, для двоточкової сумісної щільності ймовірності

$$p(w, w'; \vec{r}, \vec{r}')dw dw' \stackrel{\text{def}}{=} P \left[ \begin{array}{l} w(\vec{r}) < W(\vec{r}) < w(\vec{r}) + dw \\ w(\vec{r}') < W(\vec{r}') < w(\vec{r}') + dw' \end{array} \right], \quad (7.2)$$

відповідно для триточкової

$$\begin{aligned}
 & p(w, w', w''; \vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') dw dw' dw'' \stackrel{\text{def}}{=} \\
 & = P \left[ \begin{array}{l} w(\vec{r}) < W(\vec{r}) < w(\vec{r}) + dw \\ w(\vec{r}') < W(\vec{r}') < w(\vec{r}') + dw' \\ w(\vec{r}'') < W(\vec{r}'') < w(\vec{r}'') + dw'' \end{array} \right]. \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

і т. д. Тут  $w = w(\vec{r})$ ,  $w' = w(\vec{r}')$ ,  $w'' = w(\vec{r}'')$ .

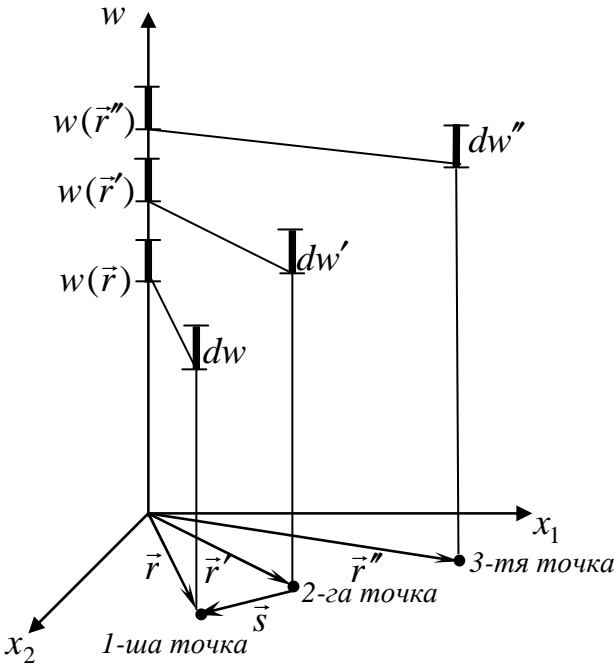


Рисунок 7.1

Для вичерпного опису випадкового поля необхідно розглядати сукупність щільностей імовірності у якомога більшій кількості точок області визначення. Разом із тим

точність описання зі збільшенням числа точок, починаючи з 2 і вище, зростає несуттєво. Для практичних застосувань здебільшого достатньо використовувати 2-точковий варіант, що відповідає описанню випадкового поля у рамках кореляційної теорії.

Функції щільності ймовірності випадкового поля задовольняють основні властивості щільностей ймовірності випадкових процесів (нормування, узгодженості і т. д., див. п. 3.1).

### 7.1.2. Числові характеристики випадкових полів

Згідно з другим способом описання випадкових полів, аналогічно випадковим процесам, до розгляду вводяться моменти першого

$$\begin{aligned} \langle W(\vec{r}) \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} wp(w; \vec{r}) dw = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} wp(w, w'; \vec{r}, \vec{r}') dw dw' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} wp(w, w', w''; \vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') dw dw' dw'', \end{aligned} \quad (7.4)$$

другого

$$\langle W(\vec{r})W(\vec{r}') \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ww' p(w, w'; \vec{r}, \vec{r}') dw dw', \quad (7.5)$$

третього

$$\begin{aligned} \langle W(\vec{r})W(\vec{r}')W(\vec{r}'') \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ww'w'' p(w, w', w''; \vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') dw dw' dw'' \end{aligned} \quad (7.6)$$

і т. д. порядків.

**Моменти першого порядку** просторового випадкового поля – математичні сподівання польової функції  $W$  у точках  $\vec{r}$  області визначення. Моменти більш високих порядків характеризують стохастичний зв'язок між значеннями польових функцій у двох та більше точках  $\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'', \dots$  (рис. 7.1).

Для просторово-часових випадкових полів моментні функції визначають стохастичний зв'язок значень польових величин у просторово-часових точках  $\vec{r}, t; \vec{r}', t'; \vec{r}'', t''$  і т. д.

**Перший та другий способи описання випадкових полів не є взаємообумовленими:** якщо відомі характеристики розподілу польових величин, то моментні функції можуть бути визначені згідно із (7.4)–(7.6). У той самий час знання моментних функцій не дозволяє точно відтворити характеристики розподілів (за винятком, наприклад, для нормально розподілених польових величин).

Як і для випадкових процесів, при побудові моментних функцій випадкових польових величин зручно використовувати центровані значення, наприклад, для скалярного просторового випадкового поля

$$\tilde{W}(\vec{r}) = W(\vec{r}) - \langle W(\vec{r}) \rangle. \quad (7.7)$$

Тоді кореляційна функція поля визначається як

$$\begin{aligned} K_W(\vec{r}, \vec{r}') &= \langle \tilde{W}(\vec{r}) \tilde{W}(\vec{r}') \rangle \stackrel{def}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (w - \langle W(\vec{r}) \rangle) (w' - \langle W(\vec{r}') \rangle) p(w, w'; \vec{r}, \vec{r}') dw dw'. \end{aligned} \quad (7.8)$$

*За аналогією зі скалярним варіантом для векторних та тензорних випадкових полів імовірнісні властивості описуються сумісними багатоточковими характеристиками розподілу (перший спосіб) або моментними функціями (другий спосіб).*

Так, наприклад, для векторного просторового випадкового поля  $\vec{V}(\vec{r})$  із компонентами  $V_j(\vec{r})$ ,  $j=1, 2, \dots, N$  може бути задана сумісна одноточкова щільність імовірності  $p(v_1, v_2, \dots, v_N; \vec{r})$ . При цьому момент  $m$ -го порядку  $j$ -ї компоненти польового вектора визначається як

$$\begin{aligned} \langle V(\vec{r})_j^m \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_N v_j^m p(v_1, v_2, \dots, v_N; \vec{r}) dv_1 dv_2 \dots dv_N = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_j^m p(v_j; \vec{r}) dv_j. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Перший момент випадкового векторного поля дорівнює вектору перших моментів (математичних сподівань) його компонент:

$$\langle \vec{V}(\vec{r}) \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle V_1(\vec{r}) \rangle \\ \langle V_2(\vec{r}) \rangle \\ \dots\dots\dots \\ \langle V_N(\vec{r}) \rangle \end{array} \right\}. \quad (7.10)$$

Другі початкові моменти компонент випадкового  $N$ -вимірного векторного поля утворюють квадратну



$(N \times N)$  матрицю з елементами, що залежать від аргументів  $\vec{r}$  і  $\vec{r}'$ :

$$\langle V_j(\vec{r})V_k(\vec{r}') \rangle \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_j v'_k p_{jk}(v_j, v'_k; \vec{r}, \vec{r}') dv_j dv'_k, \quad (7.11)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, N,$$

де  $p_{jk}(v_j, v'_k; \vec{r}, \vec{r}')$  – сумісна двоточкова щільність імовірності  $j$ -ї та  $k$ -ї компонент векторного поля.

Для центрованих польових компонент другі моменти утворюють кореляційну матрицю

$$\mathbf{K}_V = [K_{jk}^V(\vec{r}, \vec{r}')] \stackrel{def}{=} [\langle \tilde{V}_j(\vec{r})\tilde{V}_k(\vec{r}') \rangle], \quad j, k = 1, 2, \dots, N,$$

яка при фіксованих  $\vec{r}$  і  $\vec{r}'$  має усі властивості кореляційної матриці компонент  $N$ -вимірного випадкового вектора (п. 2.3.4).

Як і у випадку векторних процесів, під час визначення числових характеристик векторних і тензорних випадкових полів збільшення точковості описання поряд із зростанням порядку призводить до збільшення числа індексів (рангу) моментних функцій, які, у свою чергу, мають тензорні властивості, що суттєво ускладнює аналіз.

### 7.1.3. Спектральне подання випадкових полів

Через достатню наочність і разом із тим відносно простоту обмежимося розглядом спектрального розкладання скалярного просторово-часового випадкового поля  $W(\vec{r}; t)$ .

*Дискретна форма* спектрального розкладання  $W(\vec{r};t)$  має вигляд

$$W(\vec{r},t) = \sum_k \mathcal{W}'_k(t) \varphi_k(\vec{r}), \quad (7.12)$$

де  $\mathcal{W}'_k(t)$  – випадкові амплітуди-функції часового аргументу;  $\varphi_k(\vec{r})$  – невідповідні (базисні) функції координат.

Наочним прикладом подання (7.12) є розкладання випадкового поля нормальних переміщень плоскої пластини  $W(\vec{r},t)$  у ряд за формами власних коливань.

Усереднення за множиною реалізацій на підставі (7.12) дозволяє отримати відповідні моментні характеристики поля  $W(\vec{r};t)$ : моментну функцію 1-го порядку (математичне сподівання)

$$\langle W(\vec{r},t) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathcal{W}'_k(t) \rangle \varphi_k(\vec{r}); \quad (7.13)$$

другу початкову моментну функцію

$$\begin{aligned} \langle W(\vec{r},t)W(\vec{r}',t') \rangle = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle \mathcal{W}'_k(t)\mathcal{W}'_m(t') \rangle \varphi_k(\vec{r})\varphi_m(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (7.14)$$

і т. д.

З виразів (7.13) і (7.14) можемо зробити висновок, що *для стохастичного описання просторово-часового випадкового поля  $W(\vec{r},t)$  достатньо знати сумісні характеристики розподілів або повну систему моментних функцій для коефіцієнтів розвинення  $\mathcal{W}'_k(t)$  у ряд (7.12).* При цьому не потрібне проведення

*сумісного просторово-часового аналізу*, а достатньо тільки проаналізувати векторний випадковий процес із компонентами  $\mathcal{W}'_k(t)$ .

Як і для спектральних розкладань випадкових процесів (3.21), при поданні випадкового просторово-часового поля у вигляді ряду (7.12) необхідне виконання деяких умов збіжності та повноти [1].

**Неперервну форму** спектрального розкладання розглянемо на прикладі стаціонарного центрованого скалярного випадкового просторово-часового поля  $W(\vec{r}, t)$  ( $\langle W(\vec{r}, t) \rangle = 0$ ). Скориставшись інтегральним перетворенням Фур'є вигляду (4.21), маємо

$$W(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}'(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.15)$$

де  $\mathcal{W}'(\vec{r}, \omega)$  – випадкова функція координат та часовий спектр поля.

Необхідно зазначити, що у поданнях (7.15), на відміну від (7.12), детерміністичний базис розкладання характеризує зміну випадкового поля не за просторовим аргументом  $\vec{r}$ , а за часовим аргументом  $t$ .

Для **комплекснозначного скалярного просторово-часового випадкового поля**, аналогічно (3.32), кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_W(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') & \stackrel{def}{=} \langle \tilde{W}^*(\vec{r}, t) \tilde{W}(\vec{r}', t') \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{W}^*(\vec{r}, \omega) \mathcal{W}(\vec{r}', \omega') \rangle e^{-i\omega t} e^{i\omega' t'} d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Виходячи з визначення стаціонарності (п. 3.5), необхідно, щоб кореляційна функція поля залежала не від значень часових аргументів  $t$  і  $t'$ , а від їх різниці  $\tau = t' - t$ . Перетворимо у підінтегральному виразі (7.16) експоненціальний множник, додаючи та віднімаючи комплекс  $i\omega't$  під знаком експоненти:

$$e^{-i\omega t} e^{i\omega' t'} = e^{-i\omega t + i\omega' t' \pm i\omega' t} = e^{i\omega'(t'-t) + i(\omega' - \omega)t}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_W(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{W}^*(\vec{r}, \omega) \mathcal{W}(\vec{r}', \omega') \rangle e^{i\omega' \tau} e^{i(\omega' - \omega)t} d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Для виконання умови стаціонарності  $K_W(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = K_W(\vec{r}, \vec{r}'; \tau)$  спектр випадкового поля  $W(\vec{r}, t)$  повинен бути стохастично ортогональним у просторі частоти  $\omega$ :

$$\langle \mathcal{W}^*(\vec{r}, \omega) \mathcal{W}(\vec{r}', \omega') \rangle = S_W(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (7.18)$$

Тут  $S_W(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)$  є детерміністичною функцією, яка має властивості кореляційної функції за просторовими координатами  $\vec{r}$  і властивості спектральної щільності за  $\omega$ .

Із формули (7.17) з урахуванням умови стохастичної ортогональності спектра (7.18) для стаціонарного просторово-часового поля отримаємо *аналог формул Вінера – Хінчина* (3.44), (3.45).

Пряме перетворення:

$$K_W(\vec{r}, \vec{r}'; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_W(\vec{r}, \vec{r}', \omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (7.19)$$

Обернене перетворення:

$$S_w(\vec{r}, \vec{r}'; \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_w(\vec{r}, \vec{r}', \omega) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (7.20)$$

## 7.2. Однорідні й ізотропні випадкові поля

### 7.2.1. Поняття про однорідні випадкові поля

*Випадкове просторове поле  $W(\vec{r})$  називається однорідним, якщо його ймовірнісні характеристики не залежать від паралельного перенесення системи координат, тобто вони залежать тільки від різниці просторових векторів точок аналізу (рис. 7.2). Властивість однорідності просторового випадкового поля за просторовими координатами еквівалентна властивості стаціонарного випадкового процесу за часовим аргументом (п. 3.2).*

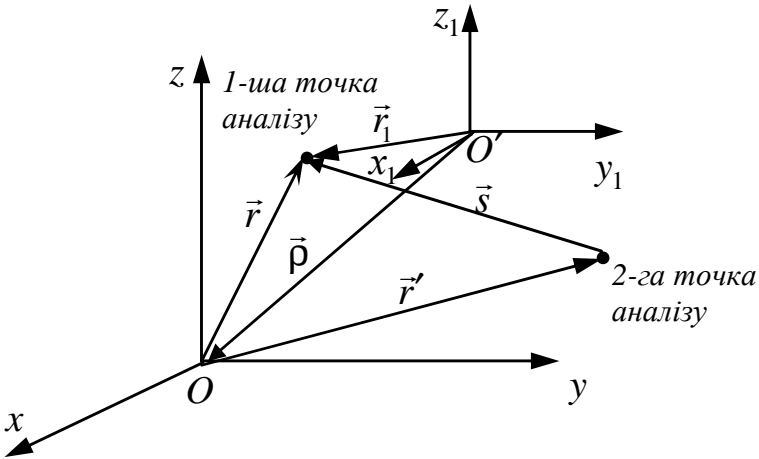


Рисунок 7.2

Для векторних просторово-часових полів у випадку їх однорідності відповідні щільності ймовірності задовольняють співвідношення:

$$\begin{aligned}
 p_j(w_j; \vec{r}, t) &= p_j(w_j; \vec{r} + \vec{\rho}, t), \\
 p_{jk}(w_j, w'_k; \vec{r}, t, \vec{r}', t') &= \\
 = p_{jk}(w_j, w'_k; \vec{r} + \vec{\rho}, t, \vec{r}' + \vec{\rho}, t') &= \\
 = p_{jk}(w_j, w'_k; \vec{s}, t, t') &
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

і т. д., де  $\vec{s} = \vec{r}' - \vec{r}$  – вектор різниці радіусів-векторів точок аналізу (рис. 7.2).

Очевидно,  $n$ -точкові щільності ймовірності однорідного випадкового просторово-часового поля визначаються  $n - 1$  параметрами: векторними різницями радіусів-векторів точок аналізу.

У свою чергу, моментні функції однорідного випадкового поля (крім першої, значення якої є постійним) залежать від різниць векторів координат точок аналізу:  $\vec{s} = \vec{r}' - \vec{r}$ ,  $\vec{s}' = \vec{r}'' - \vec{r}'$ , ...

Розглянемо спочатку **скалярне однорідне випадкове поле**  $W(\vec{r})$ , де  $\vec{r} = x_1, x_2, \dots, x_n$  можна трактувати як вектор узагальнених координат, що описують стан системи.

Якщо при другому способі описання скалярного однорідного випадкового поля умовам однорідності відповідають тільки перші дві моментні функції:

$$\begin{aligned}
 \langle W(\vec{r}) \rangle &= const, \\
 \langle W(\vec{r})W(\vec{r}') \rangle &= f(\vec{s}),
 \end{aligned}$$

то за аналогією з випадковими процесами це характеризує *однорідність поля у широкому розумінні* (інакше, за Хінчином).

З урахуванням однорідності властивостей узагальненого тригонометричного базису  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}$  за просторовим змінним  $\vec{r}$  введемо *неперервну форму* спектрального розкладання однорідної польової функції:

$$W(\vec{r}) = \langle W(\vec{r}) \rangle + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \mathcal{W}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} d\vec{k}. \quad (7.22)$$

Тут  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  – хвильовий вектор, що визначається як сукупність параметрів  $n$ -вимірного перетворення Фур'є;  $d\vec{k}$  – елемент об'єму у просторі хвильових чисел;  $(\vec{k} \cdot \vec{r}) = x_1 k_1 + x_2 k_2 + \dots + x_n k_n$  – скалярний добуток (за умови, що базис векторів просторів  $\vec{r}$  і  $\vec{k}$  одиничний та взаємоортогональний).

З фізичної точки зору (7.22) характеризує перехід із простору координат  $\vec{r}$  у простір хвильових чисел  $\vec{k}$ . Спектр  $\mathcal{W}(\vec{k})$  є випадковою функцією компонент хвильового вектора. Із першої умови однорідності поля  $\langle W(\vec{r}) \rangle = \text{const}$  впливає  $\langle \mathcal{W}(\vec{k}) \rangle = 0$ .

Кореляційна функція у загальному випадку комплекснозначного однорідного випадкового поля визначається як

$$\begin{aligned}
 K_W(\vec{r}, \vec{r}') &\stackrel{def}{=} \langle \tilde{W}^*(\vec{r}) \tilde{W}(\vec{r}') \rangle = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathcal{W}^*(\vec{k}) \mathcal{W}(\vec{k}') \rangle e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}'. \quad (7.23)
 \end{aligned}$$

За аналогією із (7.17) перетворимо у підінтегральному виразі експоненціальний множник, додаючи та віднімаючи комплекс  $i(\vec{k} \cdot \vec{r}')$  під знаком експоненти:

$$e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}')} = e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}) + i(\vec{k}' \cdot \vec{r}') \pm i(\vec{k} \cdot \vec{r}')} = e^{i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{k}} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}'}$$

Згідно з визначенням однорідності поля його кореляційна функція  $K_W(\vec{r}, \vec{r}')$  повинна залежати тільки від векторної різниці  $\vec{s} = \vec{r}' - \vec{r}$ . Це забезпечується виконанням умов стохастичної ортогональності спектрів розкладання (7.22) у просторі хвильових чисел:

$$\langle \mathcal{W}^*(\vec{k}) \mathcal{W}(\vec{k}') \rangle = S_W(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (7.24)$$

де  $S_W(\vec{k})$  – функція спектральної щільності однорідного випадкового поля, яка є аналогом спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу і має ті самі властивості (п. 3.5.2);  $\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \dots \delta(k_n - k'_n)$  – узагальнена дельта-функція.

Згідно із (7.24) можемо стверджувати, що спектр поля  $\mathcal{W}'_k$  у просторі хвильових чисел має властивість "білого шуму".

Із (7.23) за умови (7.24) отримуємо детерміністичний зв'язок між кореляційною функцією та спектральною



щільністю однорідного випадкового поля (аналог формул Вінера – Хінчина (3.44), (3.45)):

$$K_W(\vec{s}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n S_W(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{s})} d\vec{k},$$

$$S_W(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n K_W(\vec{s}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{s})} d\vec{s}. \quad (7.25)$$

Тут  $d\vec{k} = dk_1 dk_2 \dots dk_n$ ,  $d\vec{s} = ds_1 ds_2 \dots ds_n$ .

Відмітимо, що у випадку, коли спектр поля визначається у вигляді добутку

$$\mathcal{W}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \mathcal{W}(k_1) \mathcal{W}(k_2) \dots \mathcal{W}(k_n),$$

то, використовуючи властивість скалярного добутку  $(\vec{k} \cdot \vec{r})$ ,

$$e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \dots e^{ik_n x_n},$$

вихідний інтеграл у формулі (7.22) можна подати у вигляді послідовності інтегралів за відповідними аргументами.

Переходячи до **векторних однорідних за  $\vec{r}$  полів**, отримаємо аналогічні скалярному варіанту співвідношення, але вже у тензорній формі. Так, перша моментна функція є вектором постійних математичних сподівань польових компонент:

$$\vec{W}(\vec{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \langle W_1(\vec{r}) \rangle \\ \langle W_2(\vec{r}) \rangle \\ \dots \\ \langle W_N(\vec{r}) \rangle \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_N \end{array} \right\}. \quad (7.26)$$

Другі початкові моментні функції векторного однорідного випадкового поля утворюють квадратну матрицю ( $N \times N$ ) і є функціями одного аргументу  $\vec{s}$ :

$$\begin{aligned} \langle W_j^*(\vec{r}) W_k(\vec{r}') \rangle &= f_{jk}(\vec{r}' - \vec{r}) = f_{jk}(\vec{s}), \\ &(j, k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Для центрованих польових компонент другі моменти представлені кореляційною матрицею:

$$K_{jk}^W(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \tilde{W}_j^*(\vec{r}) \tilde{W}_k(\vec{r}') \rangle = K_{jk}^W(\vec{r}' - \vec{r}) = K_{jk}^W(\vec{s}). \quad (7.28)$$

Аналогічно (7.22) для кожної компоненти поля може бути введене неперервне спектральне розкладання:

$$W_j(\vec{r}) = \langle W_j(\vec{r}) \rangle + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \mathcal{W}_j(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d\vec{k}, \quad (7.29)$$

при цьому компоненти кореляційної матриці однорідного векторного поля

$$\begin{aligned} K_{jk}^W(\vec{r}, \vec{r}') &= \langle \tilde{W}_j^*(\vec{r}) \tilde{W}_k(\vec{r}') \rangle = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{2n} \langle \mathcal{W}_j^*(\vec{k}) \mathcal{W}_k(\vec{k}') \rangle e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}')} d\vec{k} d\vec{k}'. \end{aligned} \quad (7.30)$$

За аналогією з (7.17) перетворимо у підінтегральному виразі (7.30) експоненціальний множник, додаючи та віднімаючи комплекс  $i(\vec{k} \cdot \vec{r}')$  під знаком експоненти:

$$e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}')} = e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}) + i(\vec{k}' \cdot \vec{r}') \pm i(\vec{k}' \cdot \vec{r})} = e^{i(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{k}'} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}}.$$

Для однорідного векторного поля, згідно із (7.28), його кореляційна функція повинна залежати тільки від різниці радіусів-векторів точок аналізу  $\vec{s}$ . Таким чином, приходимо до необхідності виконання умов стохастичної ортогональності спектрів польових компонент:

$$\langle \mathcal{W}_j^*(\vec{k}) \mathcal{W}_k(\vec{k}') \rangle = S_{jk}^W(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (7.31)$$

де  $S_{jk}^W(\vec{k})$  – функція взаємних спектральних щільностей відповідних компонент поля.

Із (7.30) з урахуванням умов (7.31) отримуємо тензорні співвідношення (аналог формул Вінера – Хінчина):

$$K_{jk}^W(\vec{s}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n S_{jk}^W(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{s})} d\vec{k};$$

$$S_{jk}^W(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n K_{jk}^W(\vec{s}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{s})} d\vec{s}; \quad (7.32)$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, N).$$

### 7.2.2. Поняття про однорідні ізотропні випадкові поля

Однорідні ізотропні випадкові поля являють собою більш вузький клас порівняно з однорідними випадковими полями. Разом із тим ізотропні польові характеристики використовуються при описанні механічних властивостей матеріалів твердих тіл, що деформуються.

За визначенням, *ізотропним* називається таке випадкове поле, ймовірнісні характеристики якого є *інваріантними відносно поворотів та дзеркальних віддзеркалень системи координат*. Ймовірнісні властивості такого поля є однаковими у будь-якому напрямку у будь-якій точці визначення.

Властивість ізотропії може бути *локальною та загальною*. Прикладом локальної ізотропії є, наприклад, поле напружень у шарі, коли ймовірнісні характеристики поля залежать тільки від довжини вектора, що проведений із центра шару, і не залежать від напрямку цього вектора.

Для *однорідного ізотропного поля кореляційна функція* залежить від *модуля* різниці точок аналізу  $|\vec{s}| = |\vec{r}' - \vec{r}| = s$ :

$$K_W(\vec{r}, \vec{r}') = K_W(|\vec{s}|) = K_W(s),$$

оскільки модуль вектора  $|\vec{s}| = s$  є інваріантним відносно обертання системи координат.

Розглянемо *однорідне ізотропне скалярне поле на площині*.

Перейдемо до полярної системи у просторі координат (рис. 7.3 а)  $\zeta_1 = s \cos \theta, \zeta_2 = s \sin \theta$  і у просторі компонент хвильового вектора (рис. 7.3 б)  $k_1 = k \cos \psi, k_2 = k \sin \psi$ .

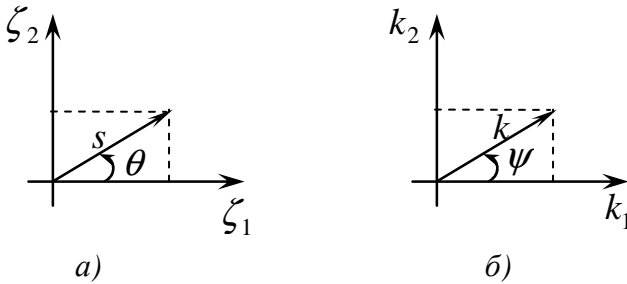


Рисунок 7.3

Тоді обернене перетворення Вінера – Хінчина (7.25) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 S_W(\vec{k}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_W(s) e^{-i(k_1 \zeta_1 + k_2 \zeta_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} K_W(s) e^{-iks(\cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi)} s ds d\theta = \quad (7.33) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} K_W(s) e^{-iks \cos(\theta - \psi)} s ds d\theta.
 \end{aligned}$$

На підставі формули Пуассона – Бесселя [8] маємо

$$\int_0^{2\pi} e^{-iks \cos(\theta - \psi)} d\theta = 2\pi J_0(ks), \quad (7.34)$$

де  $J_0(ks)$  – функція Бесселя нульового порядку. Звідси випливає, що  $S_W(\vec{k}) = S_W(k)$ .

Таким чином, бачимо, що *спектральна щільність двовимірного ізотропного скалярного випадкового поля є перетворенням Фур'є – Бесселя від відповідної кореляційної функції та навпаки*. При цьому для плоского випадку аналог формул Вінера – Хінчина (7.25) має вигляд

$$S_W(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty K_W(s) J_0(ks) s ds, \quad (7.35)$$

$$K_W(s) = \int_0^\infty S_W(k) J_0(ks) k dk.$$

До цього результату можна було дійти й інакше, спрямувавши вектор  $\vec{k}$  уздовж полярної радіальної осі, тобто припустивши, що  $\psi = 0$ .

При розгляді *тривимірного ізотропного скалярного поля* перейдемо від прямокутних координат до сферичних:  $s, \varphi, \theta$  [12]. Аналогічний перехід зробимо у просторі хвильових чисел. В оберненому перетворенні Вінера – Хінчина проведемо інтегрування частинами, використовуючи властивість ізотропії. Для спрощення викладення одразу сумістимо хвильовий вектор  $\vec{k}$  із полярною віссю, тобто у сферичних координатах візьмемо, що  $\vec{k} = (k, 0, 0)$ . Тоді

$$S_W(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty K_W(s) e^{-iks \cos \theta} \sin \theta s^2 ds d\varphi d\theta. \quad (7.36)$$

Використовуючи відоме співвідношення із теорії бesselевих функцій у сферичних координатах [8]:

$$\int_0^{\pi} e^{-iz \cos \theta} \sin^{2n} \theta d\theta = \sqrt{\pi} \left( \frac{2}{z} \right)^n \Gamma \left( n + \frac{1}{2} \right) J_n(z), \quad (7.37)$$

де  $\Gamma(x)$  – гамма-функція, і враховуючи, що для напівцілого аргументу циліндричні функції виражаються через елементарні

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \sin z, \quad (7.38)$$

визначимо значення внутрішнього в (7.30) інтеграла за  $\theta$ :

$$\int_0^{\pi} e^{-iks \cos \theta} \sin \theta d\theta = 2 \frac{\sin ks}{ks}.$$

З урахуванням очевидної рівності  $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$  для

тривимірного ізотропного випадкового поля аналог формул Вінера – Хінчина (у даному випадку пряме та обернене перетворення Фур'є – Бесселя) має вигляд:

$$S_W(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} K_W(s) \frac{\sin ks}{ks} s^2 ds, \quad (7.39)$$

$$K_W(s) = \int_0^{\infty} S_W(k) \frac{\sin ks}{ks} k^2 dk,$$

де функція  $\frac{\sin ks}{ks}$  - вироджений випадок циліндричної функції: функція Бесселя з напівцілим аргументом.

Як приклад ізотропного тривимірного поля можна навести експоненціально-корельоване скалярне випадкове поле, кореляційна функція та спектральна щільність якого мають вигляд [1]:

$$K_W(s) = K_0 e^{-\alpha s}, \quad S_W(k) = \frac{K_0 \alpha}{\pi^2 (\alpha^2 + k^2)^2}, \quad K_0 > 0, \alpha > 0.$$

Тут  $K_0$  і  $\alpha$  - додатні сталі. Як було показано у п. 6.2, експоненціально-корельований випадковий процес не є таким, що можна диференціювати. Відповідно можна стверджувати, що й експоненціально-корельоване ізотропне випадкове поле також є таким, що не можна диференціювати.

Прикладом тривимірного ізотропного випадкового поля, яке можна диференціювати, є поле з гаусовим законом кореляції, а саме:

$$K_W(s) = K_0 e^{-\alpha s^2}, \quad S_W(k) = \frac{K_0 \alpha}{8(\pi \alpha)^{3/2}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}, \quad K_0 > 0, \alpha > 0.$$

Однорідне ізотропне скалярне поле у просторі з довільним числом вимірів може бути описане за допомогою випадкової функції однієї змінної, яку прийнято називати *перетином поля*. Вона визначається як результат перетину поля прямою довільного напрямку. Кореляційна функція перетину поля збігається з кореляційною функцією самого поля, якщо останню розглядати як функцію модуля радіуса-вектора. При цьому спектральна щільність перетину поля  $S_s(k)$



зв'язана з кореляційною функцією залежністю у формі оберненого перетворення Вінера – Хінчина (3.45):

$$S_s(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(s) e^{-iks} ds. \quad (7.40)$$

Із порівняння (7.40) із (7.35) і (7.38) бачимо, що у загальному випадку спектральна щільність перетину поля не дорівнює спектральній щільності самого поля. Але між ними можна встановити певну залежність, наприклад, при  $n = 3$  [1]:

$$S(k) = -\frac{1}{2\pi k} \frac{dS_s(k)}{dk}. \quad (7.41)$$

**Таким чином, згідно із (7.41) будь-яка функція, що є спектральною щільністю одновимірного випадкового процесу, може бути характеристикою спектральної щільності ізотропного скалярного поля. Аналогічне твердження стосовно кореляційних функцій, взагалі кажучи, є несправедливим.**

### 7.2.3. Однорідні й ізотропні векторні та тензорні поля

Розглянемо **векторне поле**  $W_j(\vec{r})$ , наприклад, поле випадкових переміщень твердого тіла, що деформується.

Кореляційний момент однорідного векторного поля є тензором 2-го рангу:

$$\begin{aligned} K_{jk}^W(\vec{r}, \vec{r}') &= \left\langle \tilde{W}_j^*(\vec{r}) \tilde{W}_k(\vec{r}') \right\rangle = \\ &= K_{jk}^W(\vec{r}' - \vec{r}) = K_{jk}^W(\vec{s}). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Покажемо, яким умовам він повинен задовольняти, щоб описувати однорідне ізотропне векторне поле.

Якщо кореляційний момент буде виражатися через одиничні тензори відповідного рангу та через скалярні симетричні функції відстаней між точками поля  $s = |\vec{s}|$ , то його компоненти будуть інваріантними відносно зміщення та повороту системи координат. Таким чином, природно припустити, що для ізотропного векторного поля кореляційний момент можна подати у вигляді добутку

$$K_{jk}^W(s) = f(s)\delta_{jk}, \quad (7.43)$$

де  $\delta_{jk}$  – одиничний ізотропний тензор 2-го рангу;  $f(s)$  – скалярна симетрична функція.

За аналогією для однорідного ізотропного випадкового **тензорного поля**  $W_{jk}(\vec{r})$  другого рангу із симетричним за індексами тензором  $W_{jk} = W_{kj}$  кореляційний момент, що є тензором 4-го рангу, можна подати як

$$K_{jklm}^W(s) = f(s)\delta_{jk}\delta_{lm} + g(s)(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}), \quad (7.44)$$

де  $f(s), g(s)$  – симетричні скалярні функції;  $\delta_{jk}\delta_{lm}, \frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})$  – одиничні ізотропні тензори 4-го рангу [8].

Формули (7.43) і (7.44) не визначають кореляційних тензорів ізотропних полів у найбільш широкому вигляді, а описують підмножину так званих **сильно ізотропних полів** [1].

У загальному випадку випадкове векторне або тензорне поле має властивість ізотропії, якщо його кореляційний тензор залежить не тільки від модуля вектора  $s = |\vec{s}|$ , але й від його компонент  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  (напрямних косинусів). Причому ця залежність повинна бути інваріантною при ортогональних перетвореннях – після ортогонального перетворення компоненти кореляційного тензора повинні залежати від компонент перетворення вектора  $\vec{s}$  так само, як неперетворені компоненти кореляційного тензора залежать від вихідних компонент  $\vec{s}$ .

У загальному випадку кореляційний момент ізотропного однорідного векторного поля, будучи тензором 2-го порядку, може бути записаний у вигляді

$$K_{jk}^W(s) = f(s)\delta_{jk} + g(s)\xi_1\xi_2, \quad (7.45)$$

де  $f(s)$  та  $g(s)$  – скалярні симетричні функції відстаней між точками  $s = |\vec{s}|$ ;  $\delta_{jk}$  – одиничний ізотропний тензор 2-го рангу у декартових координатах. У випадку сильної ізотропії, очевидно,  $g(s) = 0$ .

Для ізотропного однорідного тензорного випадкового поля другого рангу із симетричним за індексами тензором  $W_{jk}(\vec{r})$  кореляційний момент, будучи тензором 4-го рангу, визначається як [1]:

$$\begin{aligned}
K_{jklm}^W(s) = & f_1(s)\delta_{jk}\delta_{lm} + f_2(s)(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}) + \\
& + f_3(s)(\delta_{jk}\xi_l\xi_m + \delta_{lm}\xi_j\xi_k) + \\
& + f_4(s)(\delta_{jl}\xi_k\xi_m + \delta_{jm}\xi_k\xi_l + \delta_{kl}\xi_j\xi_m + \delta_{km}\xi_j\xi_l) + \\
& + f_5(s)\xi_j\xi_k\xi_l\xi_m.
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Однорідні й однорідні ізотропні поля частіше всього використовуються для нескінченних областей. За допомогою таких полів описують, наприклад, розподіл пружних властивостей у квазіоднорідному і квазіізотропному полікристалічному матеріалі, розподіл пульсацій швидкості в однорідному турбулентному потоці тощо. У більшості практичних застосувань виявляється можливим використання скінченних реалізацій однорідних ізотропних полів (за аналогією з властивістю ергодичності стаціонарних випадкових процесів). Наприклад, турбулентні пульсації тиску на пластину скінченних розмірів можна апроксимувати у вигляді реалізації однорідного поля розподіленого навантаження, віднесеного до серединної поверхні пластини.

**Додаток А**  
**(обов'язковий)**

**Закони розподілу випадкових величин**

**А1. Закони розподілу дискретних випадкових величин**

Серед дискретних випадкових величин особливе місце займають величини, які набувають тільки цілих значень: 0, 1, 2, ... Такі випадкові величини називаються цілочисловими.

**А1.1. Біноміальний закон (розподіл Бернуллі)**

Розподіл Бернуллі відіграє фундаментальну роль у теорії ймовірностей та математичній статистиці як математична модель випробувань із двома наслідками. Наочною схемою таких випробувань є послідовний вибір шарів з урни, що містить  $m_1$  чорних і  $m_2$  білих шарів. Якщо ймовірність виявлення події  $A$  у кожному окремому випробуванні є постійною і такою, що дорівнює  $p$ , то ймовірність  $P_n(k)$  появи події  $k$  разів у  $n$  незалежних випробуваннях (відповідно, невиявлення події  $n-k$  разів із ймовірністю  $q = 1 - p$ ) визначається за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (\text{A.1.1})$$

де  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – число поєднань із  $n$  елементів  $k$ ;

$$q = 1 - p.$$

Назва цього розподілу пов'язана з тим, що ймовірність  $P_n(k)$  за формою являє собою члени розкладання бінома Ньютона [8]:

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (\text{A.1.2})$$

Основні числові характеристики біноміального розподілу:

- математичне сподівання  $\langle X \rangle = np$ ;
- дисперсія  $D_X = npq$ ;
- середньоквадратичне відхилення  $\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{npq}$ .

Графічна ілюстрація біноміального розподілу для  $p = 0,7$  при різних  $n$  показана на рис. А.1. У разі великої кількості дослідів ( $n > 30$ ) біноміальний розподіл можна апроксимувати нормальним законом (п. А.2.2).

Ймовірність того, що подія  $A$  у  $n$  незалежних випробуваннях настане:

- а) менше  $k$  разів;
- б) не менше  $k$  разів;
- в) більше  $k$  разів;
- г) не більше  $k$  разів

визначають, використовуючи теорему додавання ймовірностей для несумісних подій (п. 2.1.1) за формулами:

а)  $P_n(< k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$ ;

б)  $P_n(\geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$ ;

в)  $P_n(> k) = P(k+1) + P(k+2) + \dots + P_n(n)$ ;

г)  $P_n(\leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$ .

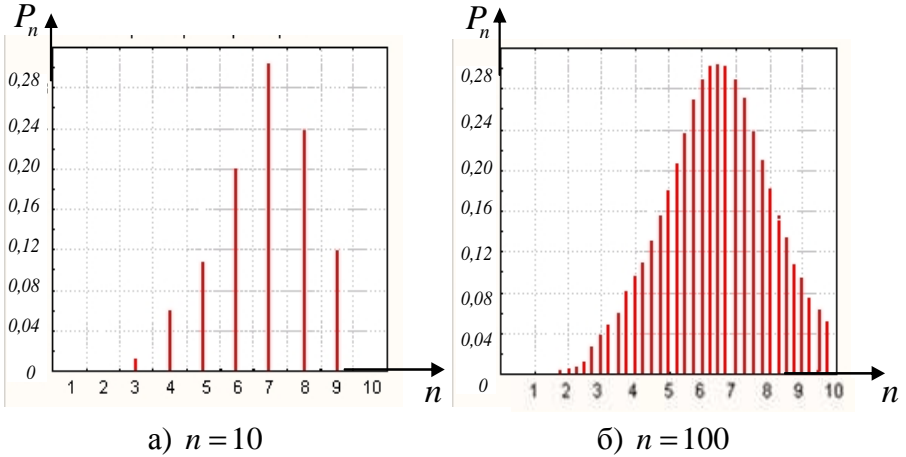


Рисунок А.1.1 Біноміальний розподіл значень випадкової величини у  $n$  дослідах: для ймовірності  $p = 0,7$  її появи у кожному

### А.1.2. Розподіл Пуассона

Розглянемо дискретну випадкову величину  $X$ , яка може набувати тільки цілих, невід'ємних значень. Ймовірність того, що вона набуде визначеного значення  $k$ , знаходять за формулою

$$P_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.1.3})$$

де  $\lambda$  – деяка додатна величина, що називається параметром закону Пуассона. Графічна ілюстрація розподілу Пуассона наведена на рис. А.1. 2.

Характерною особливістю розподілу Пуассона є збіг математичного очікування та дисперсії:

$$\langle X \rangle = D_X = \lambda. \quad (\text{A.1.4})$$

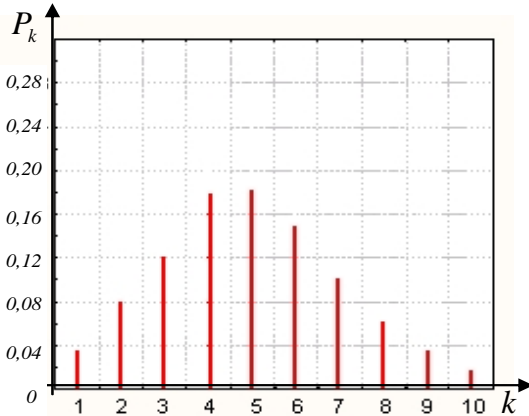


Рисунок А. 1. 2 Розподіл Пуассона з параметром  $\lambda = 5$

Розподіл Пуассона є граничним випадком біноміального розподілу, коли ймовірність  $p$  події є малою, а число випробувань  $n$  є великим (рідкісні виявлення), причому  $np = \lambda = const$ . Тому розподіл Пуассона часто називають також «законом рідкісних подій». На практиці формулу Пуассона (А.1.3) використовують як наближення замість точних біноміальних формул для ймовірностей  $k$  успіхів у  $n$  випробуваннях.

Необхідно відзначити, що розподіл Пуассона зв'язаний із експоненціальним розподілом: якщо число виявлення подій має розподіл Пуассона, то інтервали між подіями характеризуються експоненціальним розподілом [3].

### А.1.3. Геометричний закон розподілу

Геометричний закон характеризує розподіл імовірності дискретної випадкової величини у  $k$  незалежних випробуваннях до настання у експерименті деякої події А



(наприклад, спостереження першого «успіху»). Ймовірність виявлення події  $A$  у кожному випробуванні береться такою, що дорівнює  $p$ . Позначимо через  $X$  дискретну випадкову величину – число випробувань, які необхідно провести до першого настання події  $A$ . Очевидно, можливими значеннями  $X$  є натуральні числа:  $1, 2, 3, \dots$ . Нехай у перших  $k-1$  випробуваннях подія  $A$  не настала, а в  $k$ -му випробуванні настала. Ймовірність цієї «складної події» за теоремою множення ймовірностей незалежних подій

$$P\{X = k\} = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad q = 1 - p, \quad (\text{A.1.5})$$

де  $0 \leq p \leq 1$  – ймовірність «успіху», а  $q = 1 - p$  – ймовірність «невдачі». Функція розподілу випадкової величини у  $k$  незалежних випробуваннях має вигляд (рис. А.1.3)

$$F\{X = k\} = 1 - q^{k-1} \quad (\text{A.1.6})$$

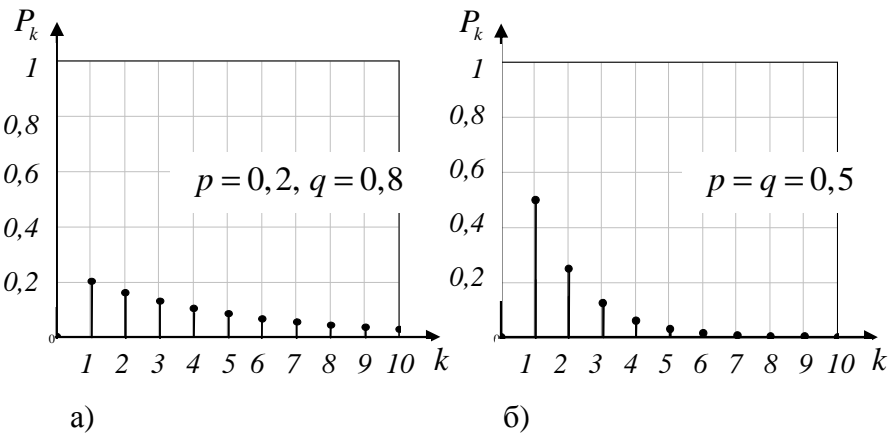


Рисунок А.1.3 - Геометричний закон розподілу

Основні числові характеристики геометричного закону розподілу:

- математичне сподівання  $\langle X \rangle = \frac{1}{p}$ ;

- дисперсія  $D_x = \frac{q}{p^2}$ .

Прикладом геометричного закону розподілу випадкової величини може бути стрілянина по деякій мішені до першого влучення, причому ймовірність влучення при кожному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і зберігає постійне значення  $p$ . Число  $X$  зроблених пострілів буде випадковою величиною, можливі значення якої є усі натуральні числа. Геометричний розподіл також має випадкова величина  $X$ , що набуває можливих значень, які дорівнюють загальному числу деталей до моменту виготовлення першої бракованої деталі, якщо ймовірність виготовлення кожної бракованої деталі є однаковою.

#### А.1.4. Гіпергеометричний закон розподілу

Випадкова величина  $X$  має гіпергеометричний розподіл із параметрами  $n_1, n_2$  та  $n \leq n_1 + n_2$  ( $n_1, n_2, n$  – натуральні числа), якщо вона набуває скінченної множини натуральних значень  $\{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$ , відповідно з ймовірностями

$$P\{X = k\} = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}, \quad k_1 \leq k \leq k_2, \quad (\text{A.1.7})$$

причому  $k_1 = \max\{0, n - n_2\}$ ;  $k_2 = \min\{n, n_1\}$ .

Числові характеристики гіпергеометричного розподілу:

- математичне сподівання  $\langle X \rangle = \frac{n n_1}{n_1 + n_2}$ ,

- дисперсія  $D_x = \frac{n n_1 n_2}{(n_1 + n_2)} \frac{n_1 + n_2 - n}{n_1 + n_2 - 1}$ .

Гіпергеометричний розподіл має місце при випробуваннях без повертання  $n$  шарів із урни, що містить  $n_1 + n_2$  шарів, із яких  $n_1$  білих і  $n_2$  чорних. Таким чином, цей розподіл описує здійснення ознаки у вибірці без повернення (на відміну від біноміального розподілу).

Необхідно зазначити, що якщо  $n_1 + n_2$  – дуже велике число порівняно з  $n$ , то немає суттєвого значення, повертаються шари назад чи ні, і формула (А.1.7) може бути наближено замінена формулою (А.1.1) біноміального розподілу.

На практиці до гіпергеометричного розподілу приводять задачі, де вироби з партії вибирають випадково (забезпечуючи для кожного виробу однакову можливість бути відібраним), але відбраковані вироби не повертаються до партії. Такий відбір особливо важливий у тих задачах, де перевірка виробу пов'язана з його руйнуванням (наприклад, перевірка виробу на термін служби).

## А2. Закони розподілу неперервних випадкових величин

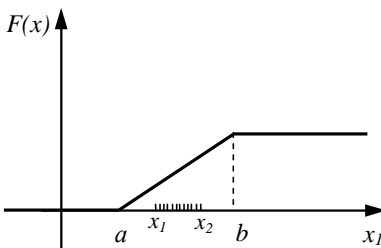
### А.2.1. Рівномірний закон розподілу

Для рівномірного закону розподілу щільність імовірності випадкової величини  $X$  в інтервалі  $[a, b]$  зберігає стале значення (рис. А.2.1)

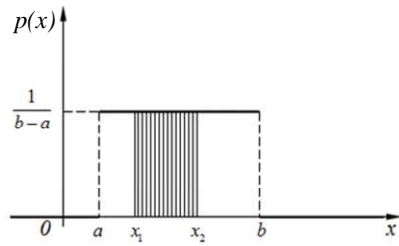
$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (\text{А.2.1})$$

Функція розподілу рівномірного розподіленої випадкової величини  $X$  (рис. А.2.1 б)

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (\text{А.2.2})$$



а)



б)

Рисунок А.2.1 – Графіки рівномірного закону розподілу: а) функція розподілу  $F(x)$ ; б) щільність імовірності  $p(x)$

Ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  на відрізок  $(x_1, x_2)$ , що лежить усередині інтервалу  $[a, b]$ , дорівнює

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \frac{x_2 - x_1}{b - a}. \quad (\text{A.2.3})$$

З геометричної точки зору ця ймовірність являє собою площу заштрихованого прямокутника (рис. А.2.1 б).

Основні числові характеристики рівномірного розподілу:

- математичне сподівання  $\langle X \rangle = \frac{a+b}{2}$  ;

- дисперсія  $D_X = \frac{(b-a)^2}{12}$  ;

- середньоквадратичне відхилення  $\sigma_X = \sqrt{D_X} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ .

Прикладом рівномірно розподілених випадкових величин є похибки округлення. Так, якщо всі табличні значення деякої функції округлені до одного й того самого розряду  $10^{-m}$ , то при виборі навмання табличного значення похибка округлення обраного числа виявляється випадковою величиною, що рівномірно розподілена в інтервалі  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ , де  $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-m}$ .

## А.2.2. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу (розподіл Гауса) займає центральне місце в теорії ймовірностей та теорії надійності. Це зумовлено тим, що цей закон виявляється завжди, коли випадкова величина є результатом дії великої кількості випадкових факторів.

Нормальний закон розподілу може бути заданий функцією щільності ймовірності

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{A.2.4})$$

де  $a = \langle X \rangle$  – математичне сподівання випадкової величини  $X$ ;  $\sigma^2 = D_x$  – дисперсія.

Функція розподілу нормального закону має вигляд

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^x p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (\text{A.2.5})$$

Нормальний розподіл випадкової величини  $X$ , у якого  $\langle X \rangle = 0$  і  $\sigma^2 = D_x = 1$  прийнято називати нормованим (нормалізованим).

Ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини на інтервал, що є симетричним відносно середнього значення, дорівнює

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = 2 \cdot \Phi(\delta / \sigma),$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функція Лапласа, значення якої є

табульованими та наводяться у довідниках. Між функціями  $F(x)$  і  $\Phi(x)$  існує така залежність:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \int_0^x p(x) dx = 0,5 + \Phi(x).$$

Графік нормалізованого розподілу (рис. А.2.2) показує, що область  $-\sigma < X < \sigma$  охоплює 68 % площі під графіком

щільності ймовірності, область  $-2\sigma < X < 2\sigma$  – 95,4 % площі, область  $-3\sigma < X < 3\sigma$  – 99,7 %. Тобто при  $\delta = 3\sigma$  ймовірність протилежної події  $P(|X - a| \geq 3\sigma) = 0,0027$ . Такою малою ймовірністю, як правило, нехтують. На цьому й ґрунтується важливе для практичного застосування **правило трьох сигм**. Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то **з імовірністю, що є близькою до достовірності, можна вважати, що практично усі її значення лежать в інтервалі**  $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$  (п. 2.2.2).

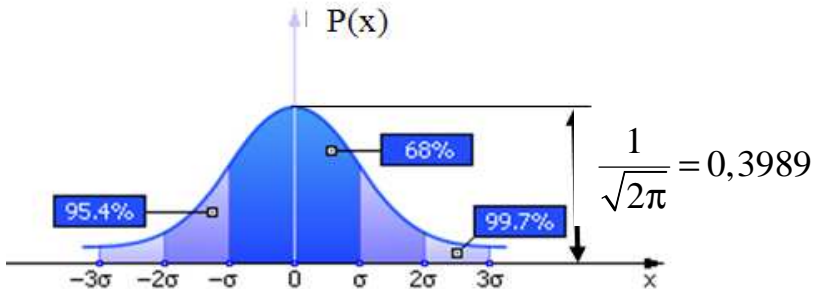


Рисунок А.2.2 – Графік нормального закону розподілу випадкової величини з параметрами  $m_x = 0$  і  $\sigma_x = 1$  (нормалізований розподіл)

Нормальний розподіл є двопараметричним і повністю визначається завданням математичного сподівання  $\langle X \rangle$  та середньоквадратичного відхилення  $\sigma_x$  (або дисперсії  $D_x$ ).

Ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини в інтервал  $(x_1, x_2)$  визначається за формулою

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \langle X \rangle}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \langle X \rangle}{\sigma}\right). \quad (\text{A.2.6})$$

Як впливає з центральної граничної теореми теорії ймовірностей (п. 2.2.4), нормальний розподіл є граничним випадком для будь-якого виду розподілів, – якщо випадкова величина  $X$  залежить від суми  $n$  незалежних випадкових величин зі скінченим початковим моментом та скінченною дисперсією, що не дорівнює нулю, то при  $n \rightarrow \infty$  її розподіл прямує до нормального закону розподілу:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha < \left( \sum_{i=1}^n x_i - n \langle X \rangle \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \right) < \beta = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta), \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

де  $a = \langle X \rangle$  – математичне сподівання випадкової величини  $X$ ;  $\sigma$  – її середньоквадратичне відхилення.

В основі практичних розрахунків показників надійності технічних виробів також лежить застосування нормального закону розподілу. Частіше за все при оцінці надійності об'єкта доводиться розв'язувати пряму задачу: визначення того чи іншого показник безвідмовності (наприклад, час безвідмовної роботи об'єкта) до значення напрацювання  $t$ , що цікавить, при заданих параметрах середнього напрацювання та дисперсії нормально розподіленої характеристики.

### А.2.3. Зрізаний нормальний розподіл

Зрізаним нормальним розподілом називається розподіл, отриманий із класичного нормального при обмеженні інтервалу можливих значень випадкової величини.

Операція зрізання (перехід до зрізаного розподілу) є досить поширеним технічним прийомом, що дозволяє



усунути похибки при практичному застосуванні нормального розподілу. Наприклад, у теорії надійності значення функції щільності ймовірності інтенсивності відмов  $p(t)$  при  $t < 0$  є малим і кривою розподілу при від'ємних значеннях  $t$  можна знехтувати. У загальному випадку зрізання інтервалу значень випадкової величини може бути лівим –  $(\alpha = 0, \beta = \infty)$ , правим –  $(\alpha = -\infty, \beta = 0)$ , двостороннім –  $(\alpha = x_1, \beta = x_2)$  або перетвореним для крайніх точок інтервалу  $(a)$  і  $(b)$ , при довільному виборі точки усередині інтервалу  $c \in [a, b]$ .

У загальному випадку функція розподілу зрізаної випадкової величини  $X$  на інтервалі  $[a, b]$  може бути подана як

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & a < x < b; \\ 1, & x > b \quad (a < b), \end{cases} \quad (\text{A.2.8})$$

де  $F(x)$  – функція вихідного розподілу випадкової величини  $X$ .

Для зрізаного нормального розподілу щільність імовірності визначається за формулою

$$\bar{p}(x) = c \cdot p(x), \quad (\text{A.2.9})$$

де  $p(x)$  визначається виразом (A.2.4). Нормувальний множник  $c$  визначають з умови нормування

$$\int_{\alpha}^{\beta} \bar{p}(x) dx = c \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx = 1. \quad (\text{A.2.10})$$

Із (A.2.10) випливає, що

$$c = \left( \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx \right)^{-1},$$

де

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx = P(\alpha < X < \beta) = F(\alpha) - F(\beta). \quad (\text{A.2.11})$$

Застосовуючи перехід від зрізаної випадкової величини  $X$  із математичним сподіванням  $\langle X \rangle$  і дисперсією, що дорівнює  $\sigma$ , до нормованої випадкової величини  $t = \frac{x - \langle X \rangle}{\sigma}$ , отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} p(x) dx = P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta), \quad (\text{A.2.12})$$

$$\text{де } t_1 = \frac{\alpha - \langle X \rangle}{\sigma}; \quad t_2 = \frac{\beta - \langle X \rangle}{\sigma}.$$

Таким чином, нормувальний множник  $c$  можна виразити через функцію Лапласа:

$$c = \left( \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \right)^{-1}.$$

Як показано на рис. А.2.3, крива щільності ймовірності зрізаного нормального розподілу  $\bar{p}(x)$  лежить вище від кривої нормального закону  $p(x)$ , оскільки площі під кривими  $\bar{p}(x)$  і  $p(x)$  у межах  $\pm 3\sigma$  однакові і є такими, що дорівнюють одиниці з точністю, що не перевищує 1% [3].

На практиці зрізаний нормальний розподіл використовується при визначенні показників надійності виробів, при поступових відмовах у період старіння, а також для розрахунків відхилень параметрів за допустимі межі.

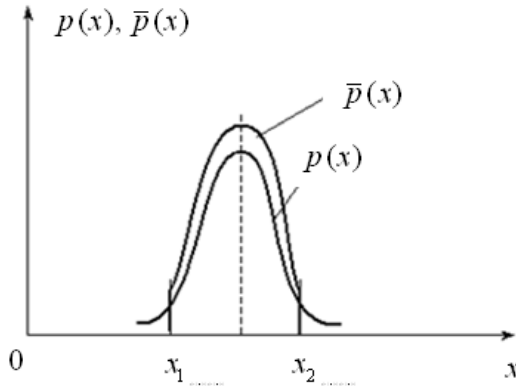


Рисунок А.2.3 – Графіки зрізаного та нормального законів розподілу випадкової величини  $X$

#### А.2.4. Логарифмічно нормальний розподіл

Під час дослідження питань довговічності у випадку тривалих статичних випробувань та на втому широко використовується **логарифмічно нормальний (логнормальний) закон розподілу**. При цьому нормальному закону розподілу підлягає не сама випадкова величина  $X$ , а її логарифм  $\lg X$ , причому  $X$  може набувати тільки додатних значень.

Щільність імовірності випадкової величини  $X$ , що підлягає логарифмічно нормальному закону розподілу, має вигляд (рис. А.2.4)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lg e}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (\text{А.2.13})$$

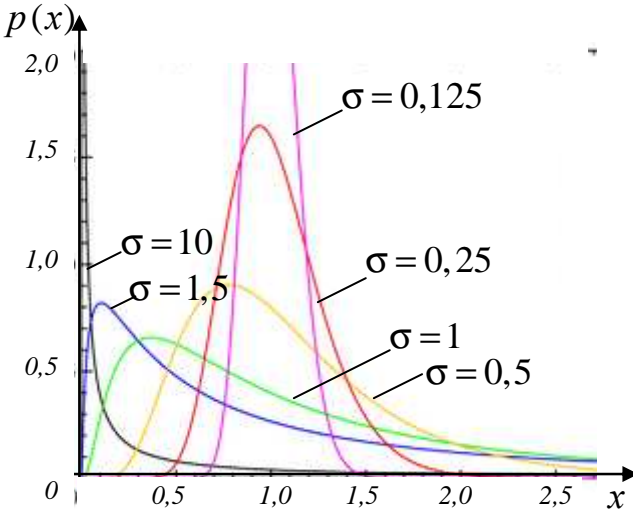


Рисунок А.2.4 – Функції щільності ймовірності логарифмічно нормального закону розподілу випадкової величини  $X$  для різних значень  $\sigma$

Відповідна функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lg x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.14})$$

де  $a, \sigma$  – відповідно математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення випадкової величини  $Y = \lg X$ .

Перші два моменти логарифмічно нормального розподілу визначаються за формулами:

$$\langle X \rangle = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad D_X = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Логарифмічно нормальний розподіл є одним із прикладів розподілів, що однозначно не визначаються своїми моментними характеристиками. Властивості логнормального розподілу залежать від властивостей відповідного нормального закону розподілу. Важливою властивістю логнормального розподілу є те, що добуток незалежних випадкових величин із логнормальним розподілом підлягає логнормальному розподілу. Тут має місце аналог центральної граничної теореми: розподіл добутку незалежних додатних випадкових величин за деяких загальних умов прямує до логнормального розподілу при  $n \rightarrow \infty$ .

### **A.2.5. Експоненціальний (показовий) закон розподілу**

Розподіл значень багатьох показників надійності підлягає експоненціальному закону розподілу.

Щільність імовірності експоненціального розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.15})$$

де  $\lambda$  – постійна невід’ємна величина.

Параметр  $\lambda$  являє собою середнє число подій за одиницю часу, а  $1/\lambda$  – відрізок часу між двома послідовними подіями (у теорії надійності  $\lambda$  має фізичний зміст інтенсивності відмов, а  $1/\lambda$  – середній час безвідмовної роботи, або середнього напрацювання до відмови).

Функція розподілу експоненціального закону випадкової величини  $X$  має вигляд

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^x p(x) dx = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.16})$$

Із (А.2.15), (А.2.16) бачимо, що експоненціальний розподіл є однопараметричним. Ця особливість експоненціального розподілу є його перевагою порівняно з розподілами, що залежать від більшої кількості параметрів. Графіки щільності ймовірності  $p(x)$  та функції розподілу  $F(x)$  експоненціального закону показані на рис. А.2.5.

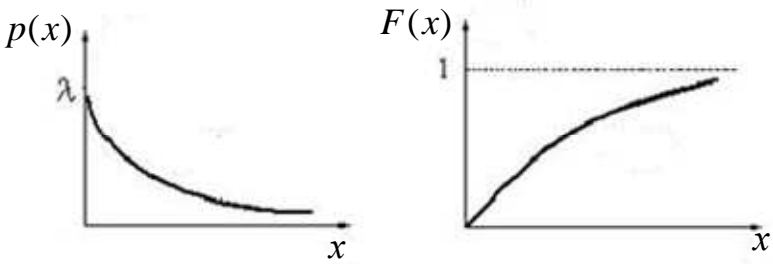


Рисунок А.2.5 – Графіки щільності ймовірності  $p(x)$  і функції розподілу  $F(x)$  експоненціального закону

Ймовірність потрапляння в інтервал  $(x_1, x_2)$  неперервної випадкової величини  $X$ , яка має експоненціальний розподіл, дорівнює

$$P(x_1 < x < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}. \quad (\text{А.2.17})$$

Основні числові характеристики експоненціального закону розподілу:

- математичне сподівання  $\langle X \rangle = \frac{1}{\lambda}$ ;

- дисперсія  $D_x = \frac{1}{\lambda^2}$ ;

- середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{1}{\lambda}$ .

Експоненціальний закон розподілу є аналогом геометричного закону розподілу для дискретно

розподілених випадкових величин, а також являє собою окремий випадок розподілу Вейбула.

У теорії надійності ймовірність безвідмовної роботи за час  $t$  визначається функцією надійності, що описується експоненціальним законом розподілу

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \quad (\text{A.2.18})$$

де  $T$  – довговічність.

Графіки, що характеризують ймовірність безвідмовної роботи  $P(t)$  та ймовірність відмови  $Q(t) = 1 - R(t)$  подані на рис. А.2.6.

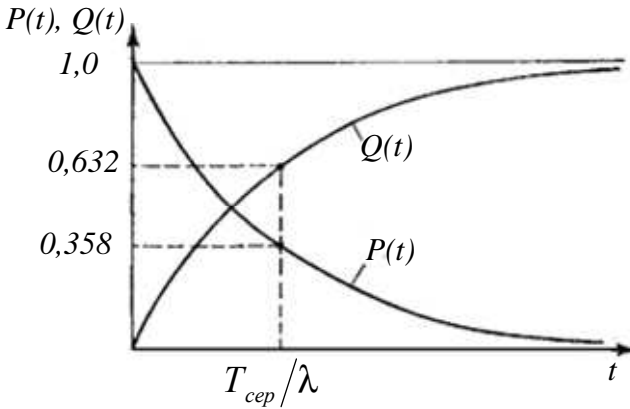


Рисунок А.2.6 – Ймовірність відмови  $Q(t)$  та безвідмовної роботи  $P(t)$  для експоненціального закону розподілу

Основною особливістю цього закону є те, що ймовірність безвідмовної роботи не залежить від попереднього функціонування об'єкта, а залежить тільки від розглядуваного часового інтервалу.

### А.2.6. Розподіл Вейбулла-Гнеденко

Експоненціальний розподіл – окремий випадок так званих розподілів Вейбулла-Гнеденко, що отримали свою назву за прізвищами інженерів В. Вейбулла, який увів ці розподіли у практику аналізу результатів випробувань на втому, та математика Б. В. Гнеденко, який отримав такі розподіли як граничні при дослідженні максимального з результатів випробувань.

Розглянемо випадкову величину  $X$ , що характеризує тривалість функціонування виробу, складної системи чи її елемента (тобто ресурс, напрацювання до граничного стану тощо). Уведемо поняття інтенсивності відмов:

$$\lambda(x) = \frac{p(x)}{1 - F(x)}, \quad (\text{A.2.19})$$

де  $F(x)$  і  $p(x)$  – функція розподілу та щільність імовірності випадкової величини  $X$ .

Типовий клас степеневих залежностей інтенсивностей відмови має вигляд

$$\lambda(x) = \lambda_0 b x^{b-1} \quad (\text{A.2.20})$$

де  $\lambda_0 > 0$  і  $b > 0$  – деякі числові параметри. Значення  $b < 1$ ,  $b = 0$  і  $b > 1$  відповідають виду інтенсивності відмов у періоди прироблення, нормальної експлуатації та старіння відповідно.

Співвідношення (А.2.19) при заданій інтенсивності відмови  $\lambda(x)$  являє собою диференціальне рівняння відносно функції  $F(x)$ , оскільки  $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Із теорії диференціальних рівнянь [8] випливає, що

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \lambda(t) dt \right\}. \quad (\text{A.2.21})$$



Підставляючи (А.2.20) у (А.2.21), отримуємо

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-\lambda_0 x^b], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (\text{А.2.22})$$

Розподіл, що задається формулою (А.2.22) називається розподілом Вейбулла-Гнеденко.

Оскільки

$$\lambda_0 x^b = (x/a)^b, \quad (\text{А.2.23})$$

де

$$a = \lambda_0^{-1/b}, \quad (\text{А.2.24})$$

то з формули (А.2.23) випливає, що величина  $a$ , яка задається формулою (А.2.24), є масштабним параметром. Іноді вводять так званий параметр зсуву, тобто функціями розподілу Вейбулла – Гнеденко називають  $F(x - c)$ , де  $F(x)$  задається формулою (А.2.23) при деяких  $\lambda_0$  і  $b$ .

Щільність імовірності Вейбулла – Гнеденко, що відповідає формулам (А.2.22), (А.2.23) має вигляд

$$p(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} \left( \frac{x-c}{a} \right)^{b-1} \exp \left[ - \left( \frac{x-c}{a} \right)^b \lambda_0 x^b \right], & x \geq c, \\ 0, & x < c. \end{cases} \quad (\text{А.2.25})$$

де  $a > 0$  – параметр масштабу;  $b > 0$  – параметр форми;  $c$  – параметр зсуву.

Експоненціальний розподіл – окремий випадок розподілу Вейбулла – Гнеденко, що відповідає значенню параметра форми  $b = 1$ .

Розподіл Вейбулла – Гнеденко застосовується при побудові ймовірнісних моделей ситуацій, у яких поведінка об'єкта визначається «найбільш слабким кільцем». Тут мається на увазі аналогія з ланцюгом, нормальне функціонування якого залежить від кільця, що має найменшу міцність.

### А.2.7. Гамма-розподіл

Сім'ї гамма-розподілів широко використовують в теорії та практиці надійності та випробувань, у різних галузях техніки, економіці та менеджменті. Зокрема, гамма-розподілу підлягають у багатьох ситуаціях такі величини, як загальний термін служби виробу, час досягнення виробом граничного стану при корозії, час напрацювання до  $k$ -ї відмови,  $k = 1, 2, \dots$ , і т. д. Цей розподіл є найбільш адекватним для описання попиту в економіко-математичних моделях управління запасами (логістики).

Щільність імовірності гамма-розподілу

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} (x-c)^{a-1} b^{-a} \exp\left[-\frac{x-c}{b}\right], & x \geq c, \\ 0, & x < c. \end{cases} \quad (\text{A.2.26})$$

визначається трьома параметрами:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , де  $a > 0$ ,  $b > 0$ . При цьому  $a$  є параметром форми,  $b$  – параметром масштабу і  $c$  – параметром зсуву.  $\Gamma(a)$  – одна з часто використовуваних у математиці спеціальних функцій, та звана "гамма-функція":

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

за якою названий і розподіл, що задається формулою (A.2.26).

Множник  $1/\Gamma(a)$  є нормувальним (визначається з умови нормування щільності ймовірності).

При фіксованих  $b = 1$  і  $c = 0$  формула (A.2.26) задає масштабно-зсувну сім'ю розподілів із щільністю ймовірності

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.27})$$

яка має назву стандартного гамма-розподілу.

Окремим випадком гамма-розподілів при  $a = 1$  є експоненціальні розподіли (з  $\lambda = 1/b$ ). При натуральному  $a$  і  $c = 0$  гамма-розподіл характеризує так звані розподіли Ерланга, які використовують у тих самих прикладних областях, де застосовують експоненціальні розподіли. Це ґрунтується на встановленому математичному факті: сума  $k$  незалежних випадкових величин, які мають експоненціальні розподіли з однаковими параметрами  $\lambda$  і  $c$ , описується гамма-розподілом із параметром форми  $a = k$ , параметром масштабу  $b = 1/\lambda$  та параметром зсуву  $kc$ .

Якщо випадкова величина  $X$  має гамма-розподіл із параметром форми  $a$  таким, що  $d = 2a$  – ціле число;  $b = 1$  і  $c = 0$ , то  $2X$  відповідає розподіл Пірсона або  $\chi^2$ -квадрат із  $d$  ступенями вільності.

Випадкова величина  $X$  із гамма-розподілом має такі числові характеристики:

- математичне сподівання  $\langle X \rangle = ab + c$ ;
- дисперсію  $D_X = \sigma^2 = ab^2$ ;
- коефіцієнт варіації  $\nu = \frac{b\sqrt{a}}{ab + c}$ .

Нормальний розподіл є граничним випадком гамма-розподілу. Дійсно, якщо  $Z$  – випадкова величина, що має стандартний гамма-розподіл, який задається формулою (A.2.26), то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{Z - a}{\sqrt{a}} < x \right\} = \Phi(x)$$

для будь-якого дійсного числа  $x$ , де  $\Phi(x)$  – функція нормалізованого нормального розподілу  $N(0,1)$ .

У прикладних дослідженнях використовуються й інші параметричні властивості сімей розподілів, з яких найбільш відомими є система кривих Пірсона, ряди Еджворта та Шарльє [8, 10].

### А.2.8. Розподіл Пірсона ( $\chi^2$ -квадрат)

Завдяки тісному зв'язку з нормальним розподілом, розподіл Пірсона відіграє важливу роль у теорії ймовірностей та математичній статистиці. Розподіл Пірсона так само, як і багато інших розподілів, що визначаються через розподіли Пірсона (наприклад, розподіл Стюдента), описують вибіркові розподіли різних функцій від нормально розподілених результатів спостереження й використовуються для побудови довірчих інтервалів та статистичних критеріїв.

Розподіл Пірсона має випадкова величина вигляду

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2, \quad (\text{A.2.28})$$

де  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – незалежні нормалізовані випадкові величини; число доданків  $n$  називається «числом ступенів вільності» розподілу  $\chi^2$ -квадрат.

Щільність імовірності розподілу Пірсона може бути подана у вигляді

$$p_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{x}{2}\right], & x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.2.29})$$

де  $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  – гамма-функція Ейлера [8], зокрема

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Розподіл Пірсона є однопараметричним (залежить тільки від параметра  $n$  – числа ступенів вільності).

Функція розподілу  $F_n(x) = \int_{-\infty}^x p_n(t) dt$  визначає ймовірність  $\alpha$  появи події  $\chi^2 < x$ , іншими словами, заданому числу  $x$  ставить у відповідність ймовірність  $\alpha$  за формулою  $\alpha = F_n(x)$ .

Функція щільності ймовірності  $p_n(x)$  є симетричною відносно точки  $x = 0$  і має єдиний максимум у цій точці (рис. А.2.7).

Числові характеристики  $\chi^2(n)$ -квадрат розподілу:

- математичне сподівання  $\langle \chi^2 \rangle = n$ ;

- дисперсія  $D_x = 2n$ ;

- середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2n}$ .

Цей розподіл для великих  $n$  ( $n > 30$ ) можна апроксимувати нормальним законом розподілу з математичним сподіванням  $n$  та дисперсією  $2n$ .

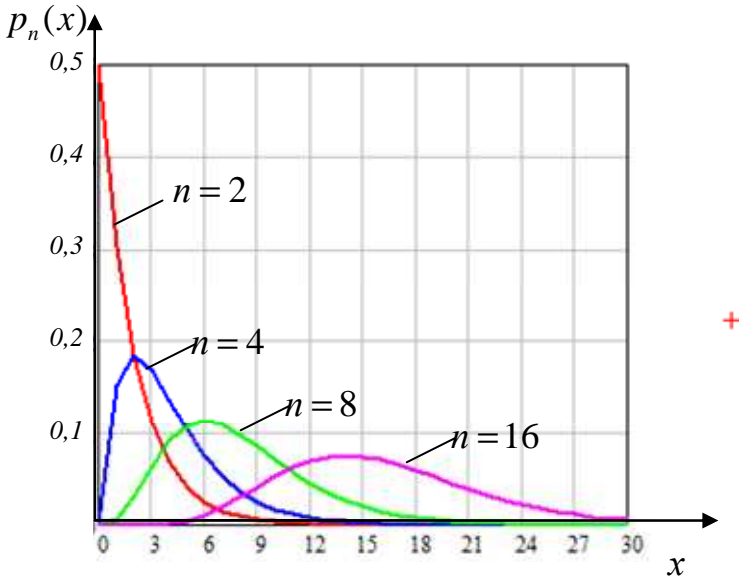


Рисунок А.2.7 – Щільність імовірності розподілу Пірсона для різних значень  $n$

Розподіл  $\chi^2$ -квадрат використовують при оцінюванні дисперсії (за допомогою довірчого інтервалу), при перевірці гіпотез узгодження, однорідності, незалежності, перш за все для змінних, що набувають скінченну кількість значень, а також у багатьох інших задачах статистичного аналізу даних [2, 3; 5; 13; 15].

## Список використаної літератури

1. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Стройиздат, / В. В. Болотин, 1982. – 352 с.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов./ А. Д Вентцель. – М. : Наука, 1975. – 320 с.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учеб. для вузов./ Е. С. Вентцель. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
4. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения./Н. Винер – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 257 с.
5. Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов/ И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1977 – 568 с.
6. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы./ Г. Б. Двайт. – М. : Наука; Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1966. – 228 с.
7. Ильин В. А. Линейная алгебра/ В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, физматлит, 1999. – 297 с.
8. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
9. Курант Л. Методы математической физики/ Л. Курант, Д. Гильберт. – М.; Л.: ГТТИ, 1945. – Т.1. – 620 с.
10. Лозв М. Теория вероятностей. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1962. – 720 с.
11. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка. – К. : Вища школа, 1993. – 655 с.

12. Павловський М. А. Теоретична механіка: підручник/ М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 510 с.
13. Прохоров Ю. В. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: – 2-е изд., – М. : Наука, 1967. – 496 с.
14. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления/ В. С. Пугачев. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 884 с.
15. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Т. 1. Случайные процессы/ С. М. Рытов. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1976. – 495 с.
16. Светлицкий В. А. Статистическая механика и теория надежности/ В. А. Светлицкий. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 504 с.
17. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций/ А. А. Свешников. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1968. – 464 с.