

О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ:
КОЛИВАННЯ, ХВИЛІ, ОПТИКА**

Навчальний посібник

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський

**Розв'язування задач із фізики:
коливання, хвилі, оптика**

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою
Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2014

УДК 53(076.2)

ББК 22.3

Л60

Рецензенти:

С. П. Рошупкін – заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу квантової електродинаміки сильних полів Інституту прикладної фізики НАН України;

А. С. Опанасюк – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри електроніки і комп'ютерної техніки Сумського державного університету

*Рекомендовано до друку вченою радою
Сумського державного університету як навчальний посібник
(протокол № 4 від 21.11.2013 р.)*

Лисенко О. В.

Л60 Розв'язування задач із фізики: коливання, хвилі, оптика : навчальний посібник / О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський. – Суми : Сумський державний університет, 2014. – 183 с.

ISBN 978-966-657-502-2

Посібник містить приклади розв'язування задач із фізики за темами: коливання, хвилі, оптика. Кожному розділу передують короткі теоретичні відомості, подані задачі для самостійного розв'язування.

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей навчальних закладів III–IV рівнів акредитації.

УДК 53(076.2)

ББК 22.3

© Лисенко О. В., Коваль В. В.,
Ромбовський М. Ю., 2014

© Сумський державний
університет, 2014

ISBN 978-966-657-502-2

ЗМІСТ

	С.
ВСТУП.....	4
ТЕМА 1 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ	5
1.1 Приклади розв'язування задач	6
1.2 Задачі для самостійного розв'язання	19
ТЕМА 2 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ	40
2.1 Приклади розв'язування задач	41
2.2 Задачі для самостійного розв'язання	59
ТЕМА 3 ХВИЛІ.....	66
3.1 Приклади розв'язування задач	67
3.2 Задачі для самостійного розв'язання	81
ТЕМА 4 ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА	99
4.1 Приклади розв'язування задач	100
4.2 Задачі для самостійного розв'язання	110
ТЕМА 5 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА	119
5.1 Приклади розв'язування задач	120
5.2 Задачі для самостійного розв'язання	132
ТЕМА 6 ПОЛЯРИЗАЦІЯ, ДИСПЕРСІЯ СВІТЛА.....	140
6.1 Приклади розв'язування задач	141
6.2 Задачі для самостійного розв'язання	152
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ	158
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	182

ВСТУП

У навчальному посібнику подані приклади розв'язування найбільш типових задач із розділів «Коливання», «Хвилі», «Оптика», а також наведені задачі для самостійного розв'язання. Автори мають на меті сформувати у студентів методологію розв'язування задач, допомогти засвоїти фізичні закони, навчити деяких математичних прийомів, що широко використовуються у фізиці. Під час роботи над кожною темою потрібно дотримуватися таких рекомендацій:

- 1 Детально **опрацювати** теоретичний матеріал за підручником з курсу фізики (наприклад, [1–2]).
- 2 Уважно **вивчити** розв'язування розібраних задач із зазначеної теми. З'ясувати всі не зрозумілі для себе моменти у розв'язанні задач. За необхідності ще раз повернутися до посібника для більш глибокого опрацювання теоретичного матеріалу або ж звернутися за консультацією до викладача. **Пам'ятайте**, необхідно домогтися повного розуміння розв'язування наведених задач.
- 3 Перейти до самостійного розв'язування задач зазначеної теми. При цьому потрібно **керуватися** загальною методологією розв'язування, що подана в розібраних задачах, а саме: а) зробити рисунок до задачі, якщо це необхідно; б) з'ясувати сутність процесів, про які йде мова в задачі; в) встановити закони, які потрібно використати для розв'язання задачі, записати відповідні рівняння; г) провести математичні перетворення, отримати розв'язок у загальному вигляді, у якому шукана величина повинна бути виражена через величини, що наведені в умові задачі; д) виконати аналіз отриманого розв'язку щодо його відповідності фізичному змісту.

ТЕМА 1 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Основні формули

Рівняння гармонічних коливань та його розв'язок:

$$m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1a)$$

де ω_0 – власна частота коливань.

Періоди гармонічних коливань:
пружинного маятника масою m , коефіцієнтом пружності пружини k

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad (1b)$$

математичного маятника з довжиною l

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (1b)$$

фізичного маятника з моментом інерції J відносно осі коливань і відстанню a від центра інерції тіла до точки підвісу

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mga)}. \quad (1g)$$

Рівняння загасальних коливань та його розв'язок:

$$m\ddot{x} + 2\beta m\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (1d)$$

де β – коефіцієнт загасання, $A(t)$ – амплітуда, ω – частота загасальних коливань:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1e)$$

Логарифмічний декремент загасання λ і добротність Q :

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \pi/\lambda, \quad (1e)$$

де $T = 2\pi/\omega$ – період загасальних коливань.

Рівняння вимушених коливань і його усталений розв'язок:

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 / m) \cos \Omega t, \quad x = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (1\text{ж})$$

де

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1\text{з})$$

Максимум амплітуди зміщення досягається за умови

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1\text{и})$$

1.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1

Точка, що здійснює гармонічні коливання, в деякий момент часу має зміщення $x = 4,0$ см, швидкість $v_x = 5,0$ см/с і прискорення $a_x = -0,80$ м/с². Визначити: 1) амплітуду A і період T коливань точки; 2) фазу φ коливань у момент часу, що розглядається; 3) максимальну швидкість v_m та прискорення a_m точки.

Розв'язання

$A - ? \quad T - ? \quad \varphi - ?$ $v_m - ? \quad a_m - ?$	Аналізуючи відомі та шукані величини, робимо висновок, що для розв'язання задачі потрібно використати кінематичне рівняння гармонічних коливань (1а) та визначення швидкості, прискорення, фази.
--	--

Як відомо, зміщення за умови гармонічних коливань описується співвідношенням (1а):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1)$$

де

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha \quad (2)$$

є фазою коливань.

Швидкість та прискорення знайдемо, використовуючи визначення цих величин та (1):

$$v_x = dx/dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3)$$

$$a_x = dv_x/dt = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4)$$

Із цих формул випливає, що максимальні значення швидкості та прискорення дорівнюють

$$v_m = A\omega_0, \quad a_m = A\omega_0^2. \quad (5)$$

Знайшовши амплітуду A і частоту ω_0 , можемо визначити за допомогою (5) v_m та a_m . Також беремо до уваги, що частота ω_0 та період коливань T пов'язані між собою як

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (6)$$

Як випливає з умови задачі та (1) – (4), для деякого моменту часу відомі зміщення, швидкість та прискорення точки:

$$x = A \cos \varphi, \quad v_x = -A\omega_0 \sin \varphi, \quad a_x = -A\omega_0^2 \cos \varphi. \quad (7)$$

Із цих трьох рівнянь знаходимо три невідомі величини: амплітуду A , частоту ω_0 та фазу коливань φ :

$$\frac{a_x}{x} = \frac{-A\omega_0^2 \cos \varphi}{A \cos \varphi} = \omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{-\frac{a_x}{x}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a_x}}; \quad (8)$$

$$\cos \varphi = x/A, \quad \sin \varphi = -v_x/(A\omega_0), \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$(x/a_x)^2 + (v_x/(A\omega_0))^2 = 1,$$

$$A = \sqrt{(x)^2 + (v_x/\omega_0)^2} = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}; \quad (9)$$

$$\varphi = \arccos(x/A) = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}). \quad (10)$$

Для знаходження максимальних значень швидкості та прискорення використаємо (5), (8) та (9):

$$v_m = A\omega_0 = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} \cdot \sqrt{-a_x/x} = \sqrt{v_x^2 - xa_x}, \quad (11)$$

$$a_m = A\omega_0^2 = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} \cdot (-a_x/x) = \sqrt{a_x^2 - a_x v_x^2/x}. \quad (12)$$

Таким чином, шукані величини A , T , φ , v_m та a_m визначаються формулами (8) – (12). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (8) – (12), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $T = 1,4$ с; $A = 4,2$ см; $\varphi = \pi/12$; $v_m = 0,19$ м/с; $a_m = 0,83$ м/с².

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничному випадку, коли фаза коливання дорівнює нулю $\varphi = 0$. Тоді, як випливає з (1) – (3), $x = A$, $v_x = 0$. З розрахункових формул (9) та (10) випливає такий самий результат:

$$A = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} = \sqrt{(x)^2 - 0^2 x/a_x} = x,$$

$$\begin{aligned} \varphi = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}) &= \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - 0^2 x/a_x}) = \\ &= \arccos(1) = 0. \end{aligned}$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\varphi = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}) = \pi/12$;

$$T = 2\pi\sqrt{-x/a_x} = 1,4 \text{ с}; \quad A = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} = 4,2 \text{ см};$$

$$v_m = \sqrt{v_x^2 - xa_x} = 0,19 \text{ м/с}; \quad a_m = \sqrt{a_x^2 - a_x v_x^2/x} = 0,83 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 1.2

Знайти період малих поперечних коливань кульки масою $m = 40$ г, яка закріплена на середині натягнутої струни довжиною $l = 1,0$ м. Силу натягу струни вважати сталою і такою, що дорівнює $F = 10$ Н. Масою струни і силами тяжіння знехтувати.

Розв'язання

T - ?	Для розв'язання задачі використаємо рівняння руху кульки (другий закон Ньютона), перетворимо його до вигляду диференціального рівняння гармонічних коливань. Порівняння отриманого рівняння зі стандартним (1а) дозволить знайти частоту власних коливань ω_0 , отже, і період коливань.
$m = 40$ г;	
$l = 1,0$ м;	
$F = 10$ Н.	

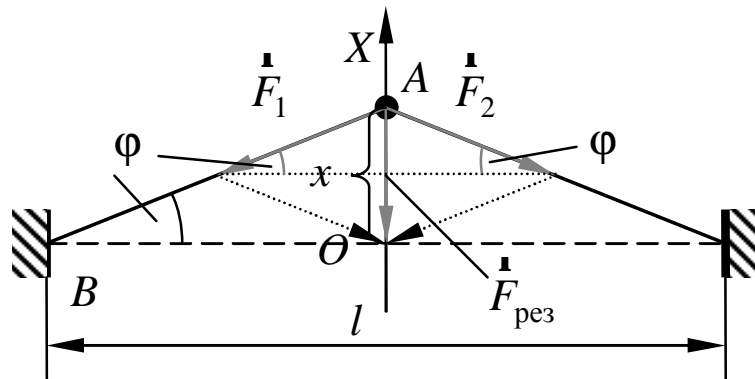


Рисунок 1.1

Розглянемо кульку, що розміщена у точці A на відстані x відносно положення рівноваги O (рис. 1.1). На неї діють сили натягу струни F_1 та F_2 , модулі яких дорівнюють за умовою задачі F . Результируюча цих сил, як впливає з рис. 1.1, напрямлена протилежно осі X . Її проекцію на вісь X знайдемо з відповідних прямокутних трикутників (рис. 1.1):

$$F_{рез,x} = -2F \sin \phi. \quad (1)$$

Знак «-» у цій формулі означає, що проекція результуючої сили напрямлена протилежно осі X , протилежно зміщенню кульки, $\varphi = \angle ABO$.

Кут φ знайдемо з прямокутного трикутника ΔAOB :

$$\operatorname{tg}\varphi = x/(l/2) = 2x/l. \quad (2)$$

Для малих коливань кульки її зміщення x набагато менші за довжину струни l . Тому умова $x/l \ll 1$ є правильною. Це означає, що кут $\varphi \ll 1$. Тому

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg}\varphi. \quad (3)$$

Тоді проекцію результуючої сили можемо записати у вигляді

$$F_{\text{рез},x} = -2F \cdot 2x/l = -x(4F/l). \quad (4)$$

Підставимо у другий закон Ньютона

$$m\ddot{x} = F_{\text{рез},x}$$

вираз для результуючої сили (4) і отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань:

$$m\ddot{x} = -x(4F/l) \text{ або } \ddot{x} + x \cdot (4F/(ml)) = 0. \quad (5)$$

Порівнюючи отримане рівняння (5) із стандартним (1а), знаходимо циклічну частоту гармонічних коливань ω_0 , а також і шуканий період коливань кульки T :

$$\omega_0^2 = 4F/(ml), \quad T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{ml/(4F)} = \pi\sqrt{ml/F}. \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $T = 0,20$ с.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) у граничному випадку, коли маса кульки прямує до нескінченності $m \rightarrow \infty$. У цьому випадку, як впливає із фізичних міркувань, кулька рухатися не буде. Це означає,

що період коливань (найменший час між моментами, коли фази коливань приймають одного і того самого значення) можна вважати таким, що дорівнює нескінченності. З розрахункової формули (6) випливає такий самий результат:

$$T = \pi\sqrt{ml/F} = \pi\sqrt{\infty \cdot l/F} = \infty.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $T = \pi\sqrt{ml/F} = 0,20$ с.

Приклад 1.3

За час $t_1 = 100$ с система встигає зробити $N_1 = 100$ коливань. За цей самий час амплітуда коливань зменшується в e разів. Чому дорівнюють: а) коефіцієнт загасання коливань β ; б) логарифмічний декремент загасання λ ; в) відносне зменшення енергії системи за період коливань?

Розв'язання

$\beta - ? \lambda - ?$

$\Delta E/E_0 - ?$

$t_1 = 100$ с;

$N_1 = 100$;

$A_0/A_1 = \eta = e$.

Для розв'язання задачі використаємо залежність амплітуди загасального коливання від часу (1e), формули для логарифмічного декременту загасання (1e). Відносне зменшення енергії системи $\Delta E/E_0$ за період коливань знайдемо, встановивши зв'язок між повною енергією системи та амплітудою.

Як відомо, амплітуда загасального коливання визначається співвідношенням (1e):

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1)$$

де β – коефіцієнт загасання. Використовуючи умову задачі, що $A_0/A_1 = \eta$ та формулу (1), знаходимо коефіцієнт загасання β :

$$A(0) = A_0 e^{-\beta \cdot 0} = A_0, \quad A(t_1) = A_0 e^{-\beta \cdot t_1} = A_1,$$

$$A_0 / A_1 = A_0 / (A_0 e^{-\beta \cdot t_1}) = e^{\beta \cdot t_1} = \eta, \quad \beta \cdot t_1 = \ln \eta, \quad \beta = \ln \eta / t_1. \quad (2)$$

Логарифмічний декремент загасання знаходимо, використовуючи співвідношення (1ε):

$$\lambda = \beta T, \quad (3)$$

де T – період коливань. Період коливань або час, за який відбувається одне коливання, знаходимо, розділивши час t_1 на кількість коливань N_1 , які відбулися протягом цього часу:

$$T = t_1 / N_1. \quad (4)$$

Тоді з (2) – (4) знаходимо декремент загасання:

$$\lambda = \beta T = (\ln \eta / t_1) \cdot (t_1 / N_1) = \ln \eta / N_1. \quad (5)$$

Знайдемо залежність від часу повної енергії системи, в якій відбуваються загасальні коливання. Як відомо, повна енергія E механічної системи дорівнює сумі кінетичної E_k та потенціальної E_p енергій. У свою чергу, ці енергії пов'язані зі швидкістю v та зміщенням x :

$$E = E_k + E_p, \quad E_k = m v^2 / 2, \quad E_p = k x^2 / 2, \quad (6)$$

де m – маса тіла, k – коефіцієнт пружності системи. Зміщення за умови загасальних коливань змінюється з часом за законом (1д):

$$x = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

де амплітуда загасальних коливань визначається формулою (1). Швидкість знайдемо, використовуючи її визначення:

$$\begin{aligned} v = dx / dt &= -A(t) \omega \sin(\omega t + \alpha) + (dA(t) / dt) \cos(\omega t + \alpha) \approx \\ &\approx -A(t) \omega \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Тут використали той факт, що швидкість зміни амплітуди набагато менша за швидкість зміни фази. Тоді з (6) – (8) випливає

$$E = m(A(t)\omega\sin(\omega t + \alpha))^2 / 2 + k(A(t)\cos(\omega t + \alpha))^2 / 2 = \\ = k(A(t))^2 / 2 = kA_0^2 e^{-2\beta t} / 2. \quad (9)$$

Тут використали, що

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Використовуючи (2), (4) та (9), знаходимо відносне зменшення енергії системи за період коливань:

$$\Delta E / E_0 = (E(T) - E_0) / E_0 = \\ = [(kA_0^2 e^{-2\beta T} / 2) - (kA_0^2 e^{-2\beta \cdot 0} / 2)] / (kA_0^2 e^{-2\beta \cdot 0} / 2) = e^{-2\beta T} - 1 = \\ = e^{-2(\ln \eta / t_1)(t_1 / N_1)} - 1 = e^{-2 \ln \eta / N_1} - 1. \quad (10)$$

Таким чином, шукані величини β , λ та $\Delta E/E_0$ визначаються формулами (2), (5) та (10). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул, в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо: $\beta = 0,01 \text{ с}^{-1}$; $\lambda = 0,01$; $\Delta E / E_0 = -0,02$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (2), (5) та (10) у граничному випадку, коли зменшення амплітуди не відбувається, тобто $\eta = 1$. У цій ситуації, як випливає із фізичних міркувань, загасання буде відсутнім, тобто $\beta = 0$, $\lambda = 0$, $\Delta E/E_0 = 0$. З розрахункових формул (2), (5) та (10) випливає такий самий результат:

$$\beta = \ln \eta / t_1 = \ln 1 / t_1 = 0 / t_1 = 0, \quad \lambda = \ln \eta / N_1 = \ln 1 / N_1 = 0 / N_1,$$

$$\Delta E / E_0 = e^{-2 \ln \eta / N_1} - 1 = e^{-2 \ln 1 / N_1} - 1 = e^{-0} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Отже, розрахункові формули (2), (5) та (10) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\beta = \ln \eta / t_1 = 0,01 \text{ с}^{-1}$; $\lambda = \ln \eta / N_1 = 0,01$;

$$\Delta E / E_0 = e^{-2 \ln \eta / N_1} - 1 = -0,02.$$

Приклад 1.4

Математичний маятник виконує коливання у середовищі, для якого логарифмічний декремент загасання $\lambda_1 = 1,50$. Яким буде значення λ_2 , коли опір середовища збільшити у $\eta = 2,00$ разів?

Розв'язання

$\lambda_2 = ?$ $\lambda_1 = 1,50;$ $r_2/r_1 = \eta = 2,00$ $.$	Для розв'язання задачі використаємо зв'язок між опором середовища r та коефіцієнтом загасання
	$\beta = r/(2J), \quad (1)$

де J – момент інерції маятника відносно осі обертання. Також застосуємо співвідношення між коефіцієнтом загасання β та логарифмічним декрементом загасання λ (1є), формулу для частоти загасальних коливань ω (1є).

Як випливає з (1), коефіцієнт загасання залежить від опору середовища прямо пропорційно. Це означає, що за умови збільшення опору в η разів коефіцієнт загасання збільшується також у η разів:

$$\beta_2 / \beta_1 = r_2 / r_1 = \eta. \quad (2)$$

Логарифмічний декремент загасання λ , у свою чергу, пов'язаний з коефіцієнтом загасання співвідношенням (1є):

$$\lambda = \beta T = \beta \cdot 2\pi / \omega = \beta \cdot 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 / \beta^2 - 1}$$

або

$$(\omega_0 / \beta)^2 = (2\pi / \lambda)^2 + 1. \quad (3)$$

Тут ω_0 – власна частота коливань (не залежить від опору середовища). У вищезаписаному виразі використали зв'язок між періодом T та частотою ω загасальних коливань, а також формулу для частоти загасальних коливань ω (1e).

Далі запишемо зв'язок (3) для початкового (індекс «1») та кінцевого (індекс «2») станів:

$$(\omega_0 / \beta_1)^2 = (2\pi / \lambda_1)^2 + 1, \quad (\omega_0 / \beta_2)^2 = (2\pi / \lambda_2)^2 + 1. \quad (4)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4), (2) відносно шуканого λ_2 , знаходимо

$$\frac{(2\pi / \lambda_2)^2 + 1}{(2\pi / \lambda_1)^2 + 1} = \frac{(\omega_0 / \beta_2)^2}{(\omega_0 / \beta_1)^2} = \frac{1}{\eta^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\eta \lambda_1}{\sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - \eta^2)}}. \quad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули, в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $\lambda = 3,29$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (5) у граничному випадку, коли зміни опору середовища не відбувається, тобто коли $\eta = 1$. У цій ситуації, як впливає із фізичних міркувань, логарифмічний декремент загасання змінюватися не буде, тобто $\lambda_2 = \lambda_1$. З розрахункової формули (5) впливає такий самий результат:

$$\lambda_2 = \eta \lambda_1 / \sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - \eta^2)} =$$

$$= 1 \cdot \lambda_1 / \sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - 1^2)} = \lambda_1.$$

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\lambda_2 = \eta\lambda_1 / \sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - \eta^2)} = 3,29$.

Приклад 1.5

Вантаж масою $m = 0,5$ кг підвішений на пружині, коефіцієнт пружності якої $k = 0,49$ Н/см, і поміщений у масло. Коефіцієнт опору у маслі $r = 0,5$ кг/с. На верхній кінець пружини діє змушувальна сила, що змінюється за законом $F = 0,98 \sin(\Omega t)$ (Н). Знайти частоту змушувальної сили, коли амплітуда вимушених коливань буде максимальною. Чому дорівнює ця амплітуда коливань?

Розв'язання

$\Omega_{\text{res}} - ?$ $A_{\text{res}} - ?$
$m = 0,5$ кг;
$k = 0,49$ Н/см;
$r = 0,5$ кг/с;
$F = 0,98 \sin(\Omega t)$ (Н).

Для розв'язання задачі використаємо формули для амплітуди вимушених коливань (13) та частоти резонансу зміщення (1и).

Як відомо, амплітуда вимушених коливань стає максимальною, коли частота вимушених коливань дорівнює резонансній (1и):

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (1)$$

де власна частота ω_0 визначається масою m та коефіцієнтом пружності k :

$$\omega_0^2 = k / m, \quad (2)$$

а коефіцієнт загасання пов'язаний з коефіцієнтом опору r та масою m співвідношенням

$$\beta = r / (2m). \quad (3)$$

Підставляючи формули (2) та (3) в (1), знаходимо шукану резонансну частоту:

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{(k/m) - r^2/(2m^2)}. \quad (4)$$

Резонансну амплітуду A_{res} знайдемо за допомогою формули для амплітуди вимушених коливань (13):

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (5)$$

у якій амплітуда змушувальної сили, як впливає з умови задачі, дорівнює $F_0 = 0,98 \text{ Н}$, а частота – резонансній $\Omega = \Omega_{\text{res}}$. Використовуючи також (1) – (4), знаходимо шукану резонансну амплітуду:

$$\begin{aligned} A_{\text{res}} &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_{\text{res}}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_{\text{res}}^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(2\beta)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} =, \\ &= \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{(k/m) - (r^2/4m^2)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (4) та (6), в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо: $\Omega_{\text{res}} = 9,9 \text{ с}^{-1}$; $A_{\text{res}} = 0,20 \text{ м}$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (4) та (6) у граничному випадку, коли опір середовища відсутній, тобто $r = 0$. У цій ситуації, як впливає із фізичних міркувань, максимальна амплітуда спостерігається, коли зовнішня частота дорівнює власній частоті коливань $\Omega_{\text{res}} = \omega_0 = \sqrt{k/m}$. Амплітуда при цьому, якщо опір відсутній, буде прямувати до нескінченності $A_{\text{res}} \rightarrow \infty$. З розрахункових формул (4) та (6) випливає такий самий результат:

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{(k/m) - r^2/(2m^2)} = \sqrt{(k/m) - 0^2/(2m^2)} = \sqrt{(k/m)},$$

$$A_{\text{res}} = \frac{F_0}{r\sqrt{(k/m) - (r^2/4m^2)}} = \frac{F_0}{0\sqrt{(k/m) - (0^2/4m^2)}} = \infty.$$

Отже, розрахункові формули (4) та (6) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Omega_{\text{res}} = \sqrt{(k/m) - r^2/(2m^2)} = 9,9 \text{ с}^{-1};$

$$A_{\text{res}} = F_0 / \left[r\sqrt{(k/m) - (r^2/4m^2)} \right] = 0,20 \text{ м.}$$

Приклад 1.6

Осцилятор масою m рухається за законом $x = A \sin(\Omega t)$ під дією зовнішньої сили $F_x = F_0 \cos(\Omega t)$. Знайти коефіцієнт загасання β осцилятора.

$\beta - ?$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $m;$ $x = A \sin(\Omega t);$ $F_x = F_0 \cos(\Omega t)$ $.$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Для розв'язання задачі використаємо формули для амплітуди A та початкової фази φ усталених вимушених коливань (13):</p> $F_x = F_0 \cos(\Omega t), \quad x = A \cos(\Omega t - \varphi),$ <p style="text-align: center;">(1)</p>
--	---

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \text{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (2)$$

Визначимо початкову фазу вимушених коливань. Для цього закон руху осцилятора запишемо у стандартному вигляді (1):

$$x = A \sin(\Omega t) = A \cos(\Omega t - \pi/2). \quad (3)$$

Звідси випливає, що початкова фаза φ дорівнює $\pi/2$. Це означає (див. формулу (2)), що

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{ або } \omega_0^2 - \Omega^2 = 0. \quad (4)$$

Підставляємо отриманий вираз у формулу для амплітуди (2) і знаходимо

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0 / m}{\sqrt{0^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{2\beta\Omega m}. \quad (5)$$

Звідси можна визначити шуканий коефіцієнт загасання

$$\beta = \frac{F_0}{2A\Omega m}. \quad (6)$$

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) у граничному випадку, коли коефіцієнт загасання дорівнює нескінченності $\beta = \infty$. В цьому випадку, як впливає з фізичних міркувань, амплітуда усталених вимушених коливань буде дорівнювати нулю $A = 0$. З розрахункової формули (6) впливає такий самий результат:

$$\beta = F_0 / (2mA\Omega) = F_0 / (2 \cdot m \cdot 0 \cdot \Omega) = \infty.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\beta = F_0 / (2mA\Omega)$.

1.2 Задачі для самостійного розв'язання

1.1 Рівняння коливань точки має вигляд $x = A \cos \omega(t + \tau)$, де $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 0.2 \text{ с}$. Визначити період T і початкову фазу ϕ коливань.

1.2 Визначити період T , частоту ν і початкову фазу ϕ коливань, які задані рівнянням $x = A \sin \omega(t + \tau)$, де $\omega = 2,5\pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 0,4 \text{ с}$.

1.3 Точка виконує коливання за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, де $A = 2$ м, $\omega = \pi$ с⁻¹, $\tau = \pi/4$ рад. Побудувати графіки залежностей від часу: 1) зміщення $x(t)$; 2) швидкості $v(t)$; 3) прискорення $a(t)$.

1.4 Точка виконує коливання з амплітудою $A = 4$ см і періодом $T = 2$ с. Написати рівняння коливань, беручи до уваги, що в момент $t = 0$ зміщення $x(0) = 0$ і $\dot{x}(0) < 0$. Визначити фазу $(\omega t + \varphi)$ для двох моментів часу: 1) коли зміщення $x = 1$ см і $\dot{x} > 0$; 2) коли швидкість $\dot{x} = -6$ см/с і $x < 0$.

1.5 Точка рівномірно рухається по колу проти годинникової стрілки з періодом $T = 6$ с. Діаметр d кола дорівнює 20 см. Записати рівняння руху проекції точки на вісь x , що проходить через центр кола, якщо в момент часу, який прийнятий за початок відліку, проекція на вісь x дорівнювала нулю. Знайти зміщення x , швидкість v та прискорення a проекції точки в момент $t = 1$ с.

1.6 Визначити максимальне значення швидкості v_{\max} та прискорення a_{\max} точки, яка бере участь у гармонічних коливаннях з амплітудою $A = 3$ см і циклічною частотою $\omega = \pi/2$ с⁻¹.

1.7 Точка здійснює коливання за законом $x = A \cos \omega t$, де $A = 5$ см; $\omega = 2$ с⁻¹. Визначити прискорення $|a|$ точки в момент часу, коли її швидкість $v = 8$ см/с.

1.8 Точка здійснює гармонічні коливання. Найбільше зміщення точки дорівнює $x_{\max} = 10$ см, найбільша швидкість $v_{\max} = 20$ см/с. Знайти циклічну частоту ω коливань і максимальне прискорення a_{\max} точки.

1.9 Максимальна швидкість точки, що виконує гармонічні коливання, дорівнює $v_{\max} = 10$ см/с,

максимальне прискорення $a_{\max} = 100 \text{ см/с}^2$. Знайти циклічну частоту ω коливань, їх період T та амплітуду A . Записати рівняння коливань, взявши початкову фазу коливань такою, що дорівнює нулю.

1.10 Точка виконує коливання за законом $x = A \sin \omega t$. У деякий момент часу зміщення x_1 точки дорівнює 5 см. Коли фаза коливань збільшилася удвічі, зміщення x_2 стало дорівнювати 8 см. Знайти амплітуду A коливань.

1.11 Точка виконує коливання за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. У деякий момент часу зміщення x точки дорівнює 5 см, її швидкість $v = 20 \text{ см/с}$, а прискорення $a = -80 \text{ см/с}^2$. Знайти амплітуду A , циклічну частоту ω , період T коливань, максимальну швидкість v_{\max} , прискорення a_{\max} точки та фазу $(\omega t + \varphi)$ у момент часу, що розглядається.

1.12 Точка виконує гармонічні коливання, амплітуда яких дорівнює $A = 5 \text{ см}$, циклічна частота $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$, початкова фаза дорівнює нулю. Визначити прискорення a точки у момент часу, коли її швидкість дорівнює $v = 8 \text{ см/с}$.

1.13 Точка виконує коливання вздовж осі x за законом $x = A \cos(\omega t - \pi/4)$. Побудувати приблизні графіки: 1) зміщення x , проекції швидкості v_x і проекції прискорення a_x як функції часу t ; 2) проекції швидкості v_x і проекції прискорення a_x як функції координати x .

1.14 Деяка точка рухається вздовж осі x за законом $x = a \sin^2(\omega t - \pi/4)$. Знайти: 1) амплітуду A і період T коливань; побудувати графік $x(t)$; 2) проекції швидкості v_x як функцію координати x ; побудувати графік $v_x(x)$.

1.15 Знайти циклічну частоту ω та амплітуду A гармонічних коливань частинки, якщо на відстані x_1 і x_2 від положення рівноваги її швидкість дорівнювала v_1 і v_2 відповідно.

1.16 Точка виконує гармонічні коливання вздовж деякої прямої з періодом $T = 0,60$ с та амплітудою $A = 10,0$ см. Знайти середню швидкість $\langle v \rangle$ точки за час, протягом якого вона проходить шлях $A/2$: 1) із крайнього положення; 2) із положення рівноваги.

1.17 У момент $t = 0$ точка починає виконувати коливання вздовж осі x за законом $x = A \sin \omega t$. Знайти за перші $3/8$ періоду після початку руху: 1) середнє значення проекції вектора швидкості $\langle v_x \rangle$; 2) модуль середнього вектора швидкості $|\langle \vec{v} \rangle|$; 3) середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$.

1.18 Два однаково напрямлених гармонічних коливання, з однаковими періодами коливань, з амплітудами $A_1 = 10$ см і $A_2 = 6$ см додаються в одне коливання з амплітудою $A = 14$ см. Знайти різницю фаз $\Delta\phi$ коливань, що додаються.

1.19 Два гармонічних коливання, спрямованих вздовж однієї прямої, мають однакові амплітуди та періоди, додаються в одне коливання тієї самої амплітуди. Знайти різницю фаз $\Delta\phi$ коливань, що додаються.

1.20 Визначити амплітуду A і початкову фазу ϕ результуючого коливання, що виникає при додаванні двох коливань однакових напрямків та періодів: $x_1 = \sin(\pi t)$ см і $x_2 = \sin \pi(t + 0,5)$ см. Знайти рівняння результуючого коливання.

1.21 Точка бере участь у двох однаково спрямованих коливаннях: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ і $x_2 = A_2 \cos \omega t$, де $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$. Визначити амплітуду A результуючого коливання, його частоту ν і початкову фазу ϕ . Знайти рівняння цього руху.

1.22 Додаються два гармонічні коливання одного напрямку з однаковими періодами $T_1 = T_2 = 1,5$ с і амплітудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Початкові фази коливань $\phi_1 = \pi/2$ і $\phi_2 = \pi/3$. Визначити амплітуду A і початкову фазу ϕ результуючого коливання. Знайти його рівняння і побудувати з дотриманням масштабу векторну діаграму складання амплітуд.

1.23 Складаються три гармонічні коливання одного напрямку з однаковими періодами $T_1 = T_2 = T_3 = 2$ с і амплітудами $A_1 = A_2 = A_3 = 3$ см. Початкові фази коливань $\phi_1 = 0$; $\phi_2 = \pi/3$; $\phi_3 = 2\pi/3$. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд. Визначити за допомогою діаграми амплітуду A і початкову фазу ϕ результуючого коливання. Знайти його рівняння.

1.24 Два камертони звучать одночасно. Частоти ν_1 і ν_2 їх коливань відповідно дорівнюють 440 і 440,5 Гц. Визначити період T биття.

1.25 Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що описуються рівняннями: $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 2$ см; $A_2 = 1$ см; $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$; $\tau = 0,5$ с. Знайти рівняння траєкторії і побудувати її. Показати напрям руху точки.

1.26 Точка здійснює одночасно два гармонічні коливання, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках й описуються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 4$ см; $A_2 = 8$ см; $\omega = \pi$ с⁻¹; $\tau = 1$ с. Знайти рівняння траєкторії точки і побудувати графік її руху.

1.27 Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, які описуються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \sin \omega t$, де $A_1 = 2$ см і $A_2 = 1$ см. Знайти рівняння траєкторії точки і побудувати її, вказавши напрямок руху.

1.28 Рух точки задано рівняннями $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \sin \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 10$ см; $A_2 = 5$ см; $\omega = 2$ с⁻¹; $\tau = \pi/4$ с. Знайти рівняння траєкторії і швидкості точки в момент часу $t = 0,5$ с.

1.29 Матеріальна точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що описуються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = -A_2 \cos 2\omega t$, де $A_1 = 2$ см; $A_2 = 1$ см. Знайти рівняння траєкторії і побудувати її.

1.30 Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що описуються рівняннями $x = A_1 \cos \omega t$ і $y = A_2 \sin 0,5\omega t$, де $A_1 = 2$ см; $A_2 = 3$. Знайти рівняння траєкторії руху точки і побудувати її, вказавши напрям руху.

1.31 Точка бере участь у двох однаково спрямованих коливаннях, що відбуваються за законами: $x_1 = A \cos \omega t$ і $x_2 = A \cos 2\omega t$. Знайти максимальну швидкість точки.

1.32 При додаванні двох коливань в одному напрямку результуюче коливання має вигляд $x = A \cos 2,1t \cdot \cos 50,0t$, де t в секундах. Знайти циклічні частоти коливань, що додаються, та період биття результуючого коливання.

1.33 Точка рухається в площині xu за законом $x = A \sin \omega t$, $y = B \cos \omega t$, де A , B , ω – додатні сталі. Знайти: 1) рівняння траєкторії руху точки $y(x)$ та напрям її руху по цій траєкторії; 2) прискорення точки \bar{a} залежно від її радіуса-вектора \bar{r} відносно початку координат.

1.34 Матеріальна точка масою $m = 50$ г робить коливання, рівняння яких має вигляд $x = A \cos \omega t$, де $A = 10$ см, $\omega = 5$ с⁻¹. Знайти силу F , що діє на точку, у двох випадках: 1) у момент, коли фаза коливань $\omega t = \pi/3$; 2) у положенні, коли зміщення точки максимальне.

1.35 Коливання матеріальної точки масою $m = 0,1$ г відбуваються згідно з рівнянням $x = A \cos \omega t$, де $A = 5$ см; $\omega = 20$ с⁻¹. Визначити максимальне значення сили F_{\max} і кінетичної енергії T_{\max} .

1.36 Знайти силу F у момент $t = 1$ с і повну енергію E матеріальної точки, що здійснює коливання за законом $x = A \cos \omega t$, де $A = 20$ см; $\omega = 2\pi/3$ с⁻¹. Маса m матеріальної точки дорівнює 10 г.

1.37 Коливання матеріальної точки відбуваються згідно з рівнянням $x = A \cos \omega t$, де $A = 8$ см, $\omega = \pi/6$ с⁻¹. У момент, коли сила F в перший раз досягла значення -5 мН, потенціальна енергія Π точки стала дорівнювати 100 мкДж. Знайти цей момент часу t і відповідну йому фазу ωt .

1.38 Вантаж масою $m = 250$ г, підвішений до пружини, виконує коливання вздовж вертикалі з періодом $T = 1$ с. Визначити коефіцієнт жорсткості k пружини.

1.39 До спіральної пружини підвісили вантаж, унаслідок чого пружина розтягнулася на $x = 9$ см. Який буде період T коливань вантажу, якщо його дещо відтягнути вниз і потім відпустити?

1.40 Гиря, підвішена до пружини, виконує коливання вздовж вертикальної осі з амплітудою $A = 4$ см. Визначити повну енергію E коливань гирі, якщо коефіцієнт жорсткості k пружини дорівнює 1 кН/м.

1.41 Знайти відношення довжин двох математичних маятників, якщо відношення періодів їх коливань дорівнює $1,5$.

1.42 Математичний маятник довжиною $l = 1$ м встановлений у ліфті. Ліфт піднімається з прискоренням $a = 2,5$ м/с². Визначити період T коливань маятника.

1.43 На кінцях тонкого стрижня довжиною $l = 30$ см закріплені однакові тягарці по одному на кожному кінці. Стрижень із тягарцями коливається біля горизонтальної осі, що проходить через точку, віддалену на $d = 10$ см від одного з кінців стрижня. Визначити зведену довжину L і період T коливань такого фізичного маятника. Масою стрижня знехтувати.

1.44 На стрижні довжиною $l = 30$ см закріплені два однакових тягарці: один – посередині стрижня, інший – на одному з його кінців. Стрижень із тягарцями коливається біля горизонтальної осі, що проходить через вільний кінець стрижня. Визначити зведену довжину L і період T коливань такої системи. Масою стрижня знехтувати.

1.45 Система із трьох вантажів, з'єднаних стрижнями довжиною $l = 30$ см (рис. 1.2), коливається відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини

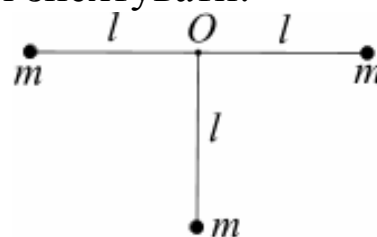


Рисунок 1.2

рисунка. Знайти період T коливань системи. Масами стрижнів знехтувати, вантажі розглядати як матеріальні точки.

1.46 Тонкий обруч, повішений на цвях, вбитий горизонтально в стіну, коливається в площині, паралельній стіні. Радіус R обруча дорівнює 30 см. Знайти період T коливань обруча.

1.47 Однорідний диск радіусом $R = 30$ см коливається біля горизонтальної осі, що проходить через одну з циліндричних поверхонь, які утворюють диск. Знайти період T коливань диска.

1.48 Диск радіусом $R = 24$ см коливається біля горизонтальної осі, яка перпендикулярна площини диска і проходить через середину одного з радіусів. Визначити зведену довжину L і період T коливань такого маятника.

1.49 З тонкого однорідного диска радіусом $R = 20$ см вирізана частина, що має вигляд кола радіусом $r = 10$ см, так, як це показано на рис. 1.3. Частина диска, що залишилася, коливається відносно горизонтальної осі O , що збігається з однією з утворювальних циліндричних поверхонь диска. Знайти період T коливань такого маятника.

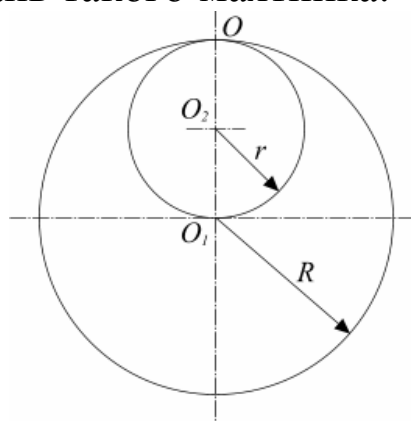


Рисунок 1.3

1.50 Математичний маятник довжиною $l_1 = 40$ см і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною $l_2 = 60$ см синхронно коливаються навколо однієї горизонтальної осі. Визначити відстань a між центром мас стрижня та віссю коливань.

1.51 Фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня, довжина якого $l = 120$ см, коливається навколо

горизонтальної осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через точку, яка віддалена на деяку відстань a від центра маси стрижня. При якому значенні a період T коливань має найменше значення?

1.52 Тіло масою $m = 4$ кг, закріплене на горизонтальній осі, виконує коливання з періодом $T_1 = 0,8$ с. Коли на цю вісь був насаджений диск так, що його вісь збігається з віссю коливань тіла, період T_2 коливань став дорівнювати $1,2$ с. Радіус R диска дорівнює 20 см, маса його дорівнює масі тіла. Знайти момент інерції J тіла відносно осі коливань.

1.53 Ареометр масою $m = 50$ г, що має трубку діаметром $d = 1$ см, плаває у воді. Ареометр трішки занурили у воду і відпустили, внаслідок чого він став здійснювати гармонійні коливання. Знайти період T цих коливань.

1.54 Набряклу колоду, у якої переріз однаковий по всій довжині, занурили вертикально у воду так, що над водою залишилася лише мала (порівняно з довжиною) її частина. Період T коливань колоди дорівнює 5 с. Визначити довжину l колоди.

1.55 Кульку підвішено на нитці завдовжки $l = 2$ м. Її відхиляють на кут $\alpha = 4^\circ$ і спостерігають коливання. Знайти швидкість кульки при проходженні нею положення рівноваги, вважаючи коливання незгасальними гармонічними. Перевірити розв'язок, знайшовши швидкість кульки з рівнянь механіки.

1.56 У салоні автомобіля, що рухається вгору з прискоренням $a = 2$ м/с², коливається маленька іграшка на нитці. Визначити період малих коливань іграшки, якщо кут нахилу $\alpha = 0,1$. Довжина нитки $l = 0,3$ м.

1.57 Кулька масою $m = 20$ г, що підвішена на нитці, яка не проводить струм, на висоті $h = 15$ см від великої горизонтальної провідної площини, здійснює малі коливання. Після того як кульці надали деякий заряд q , період коливань змінився у $\eta = 3$ рази. Знайти заряд q .

1.58 Знайти закон, згідно з яким змінюється з часом натяг F нитки математичного маятника. Маятник коливається за законом $\varphi = \varphi_m \cos \omega t$, маса його дорівнює m , довжина l .

1.59 Кусок глини масою $m = 1$ кг впав на шальку пружинних терезів з висоти $h = 10$ см і прилип до неї. Визначити амплітуду і період коливань шальки, якщо маса її і пружини незначна, а жорсткість пружини $k = 10$ Н/м.

1.60 Знайти період малих коливань кулі масою m на стрижні, що обертається з кутовою швидкістю ω у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець (рис. 1.4). Куля з'єднана з кінцем стрижня пружиною із жорсткістю k . В якому випадку коливання неможливі?

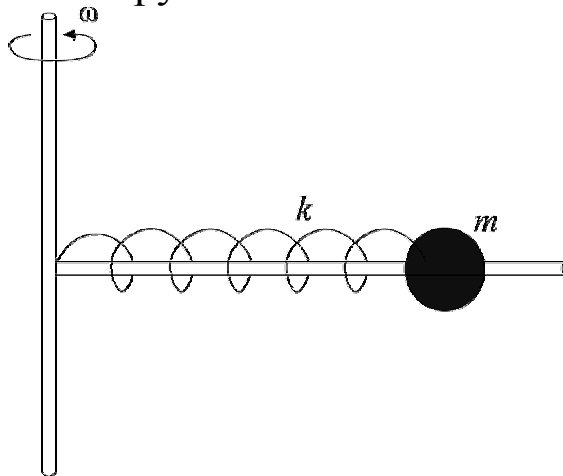


Рисунок 1.4

1.61 Визначити період T коливань ртуті масою $m = 121$ г, що знаходиться в U -подібній трубці (рис. 1.5). Поперечний переріз трубки $S = 0,3$ см².

1.62 Айсберг у вигляді прямої призми коливається вздовж вертикальної осі. Визначити період малих коливань айсберга, якщо висота його надводної частини $h = 100$ м.

1.63 Горизонтальна платформа робить у вертикальному напрямку гармонічне коливання за законом $x = A \cos \omega t$. На платформі лежить шайба з абсолютно непружного матеріалу. За якої умови шайба відділятиметься від платформи?

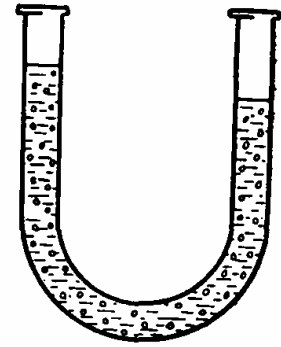


Рисунок 1.5

1.64 Точковий диполь з електричним моментом $p_e = 100$ пКл·м

вільно установився в однорідному електричному полі напруженістю $E = 9$ МВ/м. Диполь був повернений на малий кут і вільно відпущений. Визначити частоту власних коливань диполя в електричному полі. Момент інерції I диполя відносно осі, що проходить через центр диполя, дорівнює $4 \cdot 10^{-12}$ кг·м².

1.65 Кругла рамка зі струмом силою $i = 2$ А здійснює малі крутильні коливання відносно вертикальної осі в однорідному магнітному полі. Площа рамки $S = 2$ см², момент інерції $I = 1,2 \cdot 10^{-7}$ кг·м², період коливань $T = 1,2$ с. Визначити магнітну індукцію поля B .

1.66 Частинка масою m знаходиться в одновимірному потенціальному полі, де її потенціальна енергія залежить від координати x як $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, U_0 та a – деякі сталі. Знайти період малих коливань частинки біля положення рівноваги.

1.67 Те саме питання, що і в попередній задачі, але потенціальна енергія має вид $U(x) = (a/x^2) - (b/x)$, a та b – деякі сталі.

1.68 Визначити період малих коливань математичного маятника – кульки, яка на нитці завдовжки $l = 20$ см знаходиться в рідині. Густина рідини у $\eta = 3$ рази менша густини кульки. Опір рідини вважати дуже малим.

1.69 Є недеформована пружина з коефіцієнтом жорсткості $\chi = 13 \text{ Н/м}$, кінці якої закріплені. В точці, що знаходиться на відстані $\eta = 1/3$ довжини пружини від одного з її кінців, закріплена невелика кулька масою $m = 25 \text{ г}$. Вважаючи масу пружини досить малою, знайти період малих поздовжніх коливань кульки. Сили тяжіння відсутні.

1.70 Визначити період малих поздовжніх коливань тіла масою m у системі (рис. 1.6), якщо коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють χ_1 і χ_2 , а їх масами та тертям можна знехтувати.

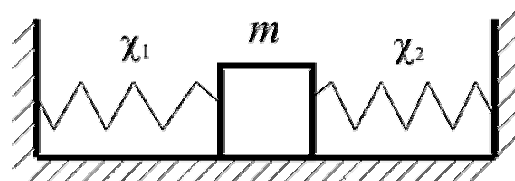


Рисунок 1. 6.

1.71 Визначити період малих вертикальних коливань тіла масою m у системі (рис. 1.7). Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють χ_1 і χ_2 , а їх масами можна знехтувати.

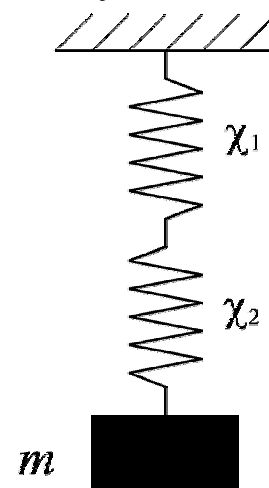


Рисунок 1.7

1.72 Вздовж осі обертання в Землі зроблена шахта. Вважаючи Землю однорідною кулею і нехтуючи опором повітря, визначити: 1) закон руху тіла, що впаде в шахту; 2) за який час тіло, що впало в шахту, досягне протилежного кінця шахти; 3) швидкість тіла в центрі Землі.

1.73 Дошка, на якій лежить брусок, виконує горизонтальні гармонічні коливання з амплітудою $a = 10 \text{ см}$. Знайти коефіцієнт тертя між дошкою та бруском, якщо брусок починає ковзати по дошці, коли період її коливань менше $T = 1,0 \text{ с}$.

1.74 Як змінюються з часом кут відхилення математичного маятника довжиною $l = 80 \text{ см}$, якщо в

початковий момент маятник: 1) відхилили на кут $3,0^\circ$ і без початкового поштовху відпустили; 2) знаходився у стані рівноваги і його нижньому кінцю надали горизонтальну швидкість $0,22$ м/с; 3) відхилили на кут $3,0^\circ$ і його нижньому кінцю надали швидкість $0,22$ м/с, напрямлену в бік рівноваги.

1.75 Частинка масою m рухається під дією сили $\vec{F} = -\alpha m \vec{r}$, де α – стала, \vec{r} – радіус-вектор частинки відносно початку координат. Знайти траєкторію її руху, якщо в початковий момент $\vec{r} = r_0 \vec{i}$ і швидкість $\vec{v} = v_0 \vec{j}$, де \vec{i} та \vec{j} – орти осей x і y відповідно.

1.76 Тіло масою $m = 0,50$ кг висить на гумовому шнурі, коефіцієнт жорсткості якого $k = 50$ Н/м. Знайти максимальну відстань, на яку можна відтягнути тіло вниз, щоб коливання були ще гармонічними. Чому при цьому дорівнює енергія коливання?

1.77 Тіло масою m впало з висоти h на чашу пружних терезів (рис. 1.8). Масою чаші та пружини можна знехтувати, коефіцієнт жорсткості пружини χ . Прилипнувши до чаші терезів, тіло починає виконувати гармонічні коливання у вертикальному напрямку. Знайти амплітуду коливань та їх енергію.

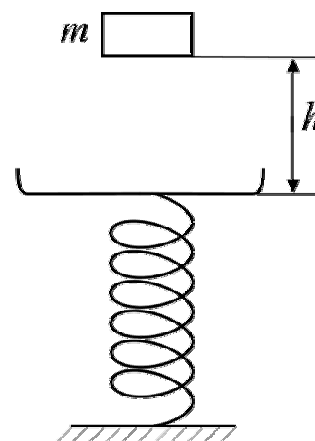


Рисунок 1.8

1.78 В умові попередньої задачі маса чаші дорівнює M . Знайти амплітуду коливань.

1.79 Фізичний маятник встановили так, що його центр мас знаходиться над точкою підвісу. З цього положення маятник почав рухатися до стану стійкої рівноваги, яке він пройшов з кутовою швидкістю ω . Знайти період малих коливань цього маятника.

1.80 Фізичний маятник виконує малі коливання навколо горизонтальної осі з частотою $\omega_1 = 15,0$ рад/с. Якщо до нього прикріпити невелике тіло масою $m = 50$ г на відстані $l = 20$ см нижче осі, то частота коливань стане $\omega_2 = 10,0$ рад/с. Визначити момент інерції цього маятника відносно осі коливання.

1.81 Два фізичні маятники виконують малі коливання навколо однієї горизонтальної осі з частотами ω_1 і ω_2 . Їх моменти інерції відносно даної осі дорівнюють відповідно I_1 і I_2 . Маятники у стані стійкої рівноваги з'єднали жорстко між собою. Визначте, яка буде частота коливань ω нового фізичного маятника.

1.82 Невелика магнітна стрілка виконує малі коливання навколо осі, що розміщена перпендикулярно до вектора індукції магнітного поля. При зміні індукції магнітного поля період коливань магнітної стрілки зменшився у $\eta = 5,0$ разів. У скільки разів змінилась індукція магнітного поля?

1.83 Амплітуда загасальних коливань маятника за час $t_1 = 5$ хв зменшилась удвічі. За який час t_2 амплітуда зменшиться у вісім разів?

1.84 За час $t = 8$ хв амплітуда загасальних коливань маятника зменшилась втричі. Визначити коефіцієнт загасання β .

1.85 Амплітуда коливань маятника довжиною $l = 1$ м за час $t = 10$ хв зменшилась удвічі. Визначити логарифмічний декремент загасання λ .

1.86 Логарифмічний декремент загасання λ коливань маятника дорівнює $0,003$. Визначити число N повних коливань, які повинен зробити маятник, щоб амплітуда зменшилась удвічі.

1.87 Гиря масою $m = 500$ г підвішена до спіральної пружини з коефіцієнтом жорсткості $k = 20$ Н/м і здійснює пружні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент загасання коливань $\lambda = 0,004$. Визначити число N повних коливань, які повинна зробити гиря, щоб амплітуда коливань зменшилася в $n = 2$ рази. За який час t відбудеться це зменшення?

1.88 Тіло масою $m = 5$ г здійснює загасальні коливання. За час $t = 50$ с тіло втратило 60 % своєї енергії. Визначити коефіцієнт опору r .

1.89 Визначити період T загасальних коливань, якщо період T_0 власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент загасання коливань $\lambda = 0,628$.

1.90 Визначити число N повних коливань системи, за які енергія системи зменшилася в $n = 2$ рази. Логарифмічний декремент загасання коливань $\lambda = 0,01$.

1.91 Тіло масою $m = 1$ кг знаходиться у в'язкому середовищі з коефіцієнтом опору $r = 0,05$ кг/с. За допомогою двох однакових пружин з коефіцієнтом жорсткості

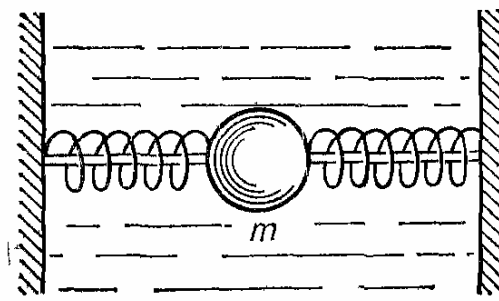


Рисунок 1.9

кожної $k = 50$ Н/м тіло утримується в стані рівноваги, пружини при цьому не деформовані (рис. 1.9). Тіло змістили від стану рівноваги і відпустили. Визначити: 1) коефіцієнт загасання β ; 2) частоту ν коливань; 3) логарифмічний декремент загасання коливань λ ; 4) число N коливань, по закінченні яких амплітуда зменшиться в e разів.

1.92 Амплітуда загасальних коливань за час $t_1 = 20$ с зменшилась удвічі. У скільки разів вона зменшиться за $t_2 = \text{хв}$?

1.93 Знайти добротність осцилятора, у якого власна частота коливань $\nu_0 = 1$ кГц, а час релаксації, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів, $\tau = 60$ с.

1.94 Вантаж масою $m = 1$ кг, підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $k = 0,1$ Н/м, занурений у середовище з коефіцієнтом опору $r = 0,05$ кг/с. Визначити добротність коливальної системи.

1.95 Після $N = 10$ повних коливань точки її амплітуда коливань зменшилася від $A_0 = 10$ см до $A = 6$ см. Коефіцієнт загасання коливань β дорівнює $0,2$. Записати закон руху точки.

1.96 Добротність коливальної системи $Q = 3$, частота вільних коливань $\omega = 150$ с⁻¹. Визначити власну частоту коливань системи ω_0 .

1.97 Загасальні коливання точки описуються законом $x = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$. Знайти: 1) амплітуду коливань і швидкість у момент часу $t = 0$; 2) моменти часу, коли точка досягає крайніх положень.

1.98 Тіло виконує крутильні коливання за законом $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. Знайти: 1) кутову швидкість $\dot{\varphi}$ і кутове прискорення $\ddot{\varphi}$ тіла в момент часу $t = 0$; 2) моменти часу, коли кутова швидкість має максимальне значення.

1.99 Деяка точка виконує загасальні коливання з частотою $\omega = 25$ рад/с. Знайти коефіцієнт загасання β , якщо в початковий момент часу швидкість точки

дорівнювала нулю, а її зміщення від положення рівноваги у $\eta = 1,020$ рази менше за амплітуду в цей момент.

1.100 Точка здійснює загасальні коливання. Частота коливань ω , коефіцієнт загасання β . Визначити амплітуду швидкості точки як функції часу t , якщо в момент $t = 0$: 1) амплітуда її зміщення дорівнює a_0 ; 2) зміщення точки $x(0) = 0$ і проекція її швидкості $v_x(0) = v_0$.

1.101 Є два загасальні коливання з відомими періодами T та коефіцієнтами загасання β : $T_1 = 0,10$ мс, $\beta_1 = 100 \text{ с}^{-1}$ і $T_2 = 10$ мс, $\beta_2 = 10 \text{ с}^{-1}$. Яке з коливань загасає швидше?

1.102 До невагомої пружини прикріпили вантаж, унаслідок чого пружина розтягнулася на $\Delta x = 9,8$ см. Яким буде період коливання вантажу, якщо йому надати невеликий поштовх у вертикальному напрямку? Логарифмічний декремент загасання $\lambda = 3,1$.

1.103 Визначити добротність математичного маятника, довжина якого $l = 50$ см, якщо за проміжок часу $\tau = 5,2$ хв його повна механічна енергія зменшилась у $\eta = 4,0 \cdot 10^4$ разів.

1.104 Провідник, який має форму квадратної рамки зі стороною a , підвішений на пружній нитці, знаходиться в однорідному горизонтальному магнітному полі з індукцією B . У стані рівноваги площина рамки паралельна вектору \vec{B} (рис. 1.10). Якщо рамку вивести зі стану рівноваги, вона починає виконувати малі коливання навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Момент інерції рамки відносно

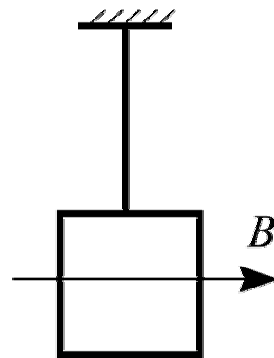


Рисунок 1.10.

цієї осі I , її електричний опір R . Нехтуючи індуктивністю рамки, знайти час, через який амплітуда її кутового повороту зменшиться в e разів.

1.105 На горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя $k = 0,10$ лежить брусок масою $m = 0,50$ кг, який з'єднаний недеформованою пружиною зі стіною. Коефіцієнт жорсткості пружини $\chi = 2,45$ Н/см, а її маса дуже мала. Брусок змістили в бік так, що пружина розтягнулася на $x_0 = 3,0$ см, а потім відпустили. Знайти: 1) період коливання бруска; 2) кількість коливань, які виконає брусок до зупинення.

1.106 Під дією сили тяжіння електродвигуна консольна балка, на якій він установлений, прогнулася на $h = 1$ мм. При якій частоті обертання n якоря електродвигуна може виникнути небезпека резонансу?

1.107 Вагон масою $m = 80$ т має чотири ресори. Коефіцієнт жорсткості k пружин кожної ресори дорівнює 500 кН/м. При якій швидкості v вагон почне сильно розгойдуватися внаслідок поштовхів на стиках рейок, якщо довжина l рейки дорівнює 12,8 м?

1.108 Коливальна система здійснює загасальні коливання з частотою $\nu = 1000$ Гц. Визначити частоту ν_0 власних коливань, якщо резонансна частота $\nu_{рез} = 998$ Гц.

1.109 Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти $\nu_0 = 1$ кГц власних коливань системи, якщо система також характеризується коефіцієнтом загасання $\beta = 400$ с⁻¹.

1.110 Визначити логарифмічний декремент загасання коливань β коливальної системи, для якої резонанс спостерігається при частоті, яка менша за власну частоту $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц.

1.111 Період T_0 власних коливань пружинного маятника дорівнює 0,55 с. У в'язкому середовищі період T того самого маятника став дорівнювати 0,56 с. Визначити резонансну частоту $\nu_{рез}$ коливань.

1.112 Пружинний маятник (коефіцієнт жорсткості k пружини дорівнює 10 Н/м, маса m вантажу дорівнює 100 г) здійснює вимушені коливання у в'язкому середовищі з коефіцієнтом опору $r = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Визначити коефіцієнт загасання β і резонансну амплітуду $A_{рез}$, якщо амплітудне значення зовнішньої сили $F_0 = 10$ мН.

1.113 Тіло здійснює вимушені коливання в середовищі з коефіцієнтом опору $r = 1$ г/с. Вважаючи загасання малим, визначити амплітудне значення зовнішньої сили, якщо резонансна амплітуда $A_{рез} = 0,5$ см і частота ν_0 власних коливань дорівнює 10 Гц.

1.114 Амплітуди вимушених гармонічних коливань при частоті $\nu_1 = 400$ Гц і $\nu_2 = 600$ Гц рівні між собою. Визначити резонансну частоту $\nu_{рез}$. Загасанням знехтувати.

1.115 До спіральної пружини, коефіцієнт жорсткості якої $k = 10$ Н/м, підвісили гирку масою $m = 10$ г і помістили всю систему у в'язке середовище. Взявши коефіцієнт опору $r = 0,1$ кг/с, визначити: 1) частоту ν_0 власних коливань; 2) резонансну частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансну амплітуду $A_{рез}$, якщо зовнішня сила змінюється за гармонічним законом і її амплітудне

значення $F_0 = 0,02$ Н; 4) відношення резонансної амплітуди до статичного зміщення під дією сили F_0 .

1.116 У скільки разів амплітуда вимушених коливань буде менша за резонансну амплітуду, якщо частота зміни зовнішньої сили буде більшою від резонансної частоти: 1) на 10 %? 2) удвічі? Коефіцієнт загасання β в обох випадках взяти рівним $0,1\omega_0$ (ω_0 – циклічна частота власних коливань).

1.117 Кулька масою m може виконувати незагасаючі гармонічні коливання біля точки $x=0$ із власною частотою ω_0 . У момент $t=0$, коли кулька перебувала у стані рівноваги, до неї приклали зовнішню силу $F = F_0 \cos\omega t$, що збігається за напрямком з віссю x . Знайти рівняння вимушених коливань кульки $x(t)$.

1.118 При частотах зовнішньої гармонічної сили ω_1 і ω_2 амплітуда швидкості частинки дорівнює половині максимального значення. Знайти: 1) частоту, що відповідає резонансній швидкості; 2) коефіцієнт загасання β і частоту загасальних коливань ω частинки.

1.119 Під дією зовнішньої вертикальної сили $F = F_0 \cos\omega t$ тіло, підвішене на пружині, здійснює вимушені коливання за законом $x = a \cos(\omega t - \varphi)$. Знайти роботу сили F за період коливання.

ТЕМА 2 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

Основні формули

Загасальні коливання контуру:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (2a)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \beta = R/(2L). \quad (2б)$$

Логарифмічний декремент загасання λ і добротність Q контуру визначаються формулами (1є). При слабкому загасанні

$$\lambda = \pi R \sqrt{C/L}, \quad Q = (1/R) \sqrt{L/C}. \quad (2в)$$

Сталі вимушені коливання при послідовному ввімкненні у контур напруги $U = U_m \cos \Omega t$

$$I = I_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (2г)$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}. \quad (2д)$$

Відповідна векторна діаграма напруг подана на рис. 2.1.

Повний опір (імпеданс)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (2е)$$

де $X = X_L - X_C$ – реактивний опір.

Потужність, що виділяється у колі змінного струму:

$$P = UI \cos \psi, \quad (2є)$$

де U і I – діючі (ефективні) значення напруги й струму:

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad I = I_m / \sqrt{2}. \quad (2ж)$$

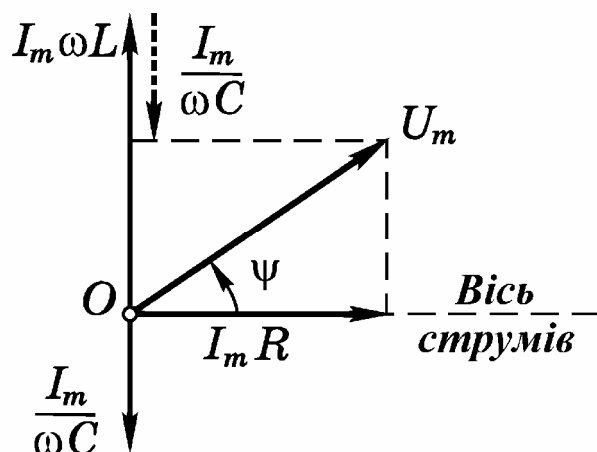


Рисунок 2.1

2.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1

Знайти максимальний струм у колі (рис. 2.2) і максимальну напругу на конденсаторі після того, як ключ K було замкнено. Активним опором кола знехтувати.

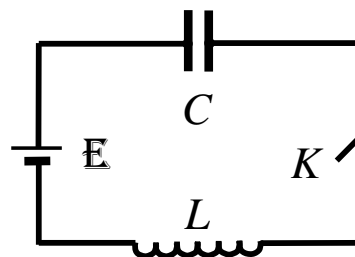


Рисунок 2.2

Розв'язання

$U_m - ?$	$I_m - ?$
C	E ; L .

Для розв'язання задачі

запишемо диференціальне рівняння для заряду на конденсаторі, використовуючи закон Ома для ділянки кола. Отримавши розв'язок цього диференціального рівняння, знайдемо максимальну напругу на конденсаторі та максимальний струм у колі.

Застосуємо закон Ома для ділянки кола 1-3-2 (див. рис. 2.3) після того, як ключ K було замкнено:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + E + E_s. \quad (1)$$

У цьому рівнянні

$$\mathcal{E}_s = -L dI / dt \quad (2)$$

є ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці індуктивності,

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1}{C} = -\frac{q}{C} \quad (3)$$

є напругою на конденсаторі, q – заряд на пластині 2 конденсатора (див. рис. 2.3).

Сила струму I є додатною, коли напрям струму збігається з напрямом обходу ділянки кола 1-3-2,

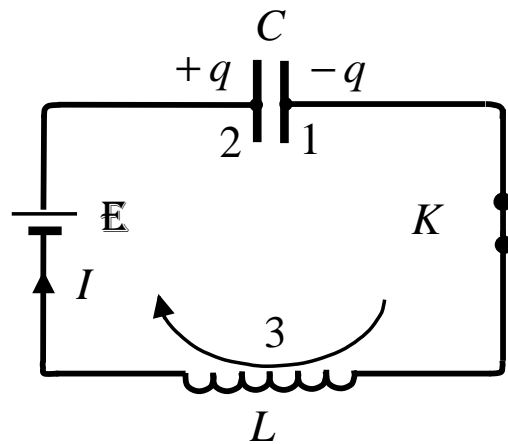


Рисунок 2.3

тобто за годинниковою стрілкою. В цьому разі (рис. 2.3) заряд на пластині 2 конденсатора q пов'язаний із силою струму в ділянці кола 1-3-2 таким співвідношенням:

$$I = +dq / dt = +\dot{q} \quad (4)$$

Знак «+» обумовлений тим, що, коли струм I є додатним, заряд q збільшується ($\dot{q} > 0$).

Підставимо в (1) співвідношення (2) – (4), візьмемо до уваги, що активний опір контуру дорівнює нулю $R = 0$, й отримаємо

$$0 = -q / C + \mathcal{E} - L\dot{\dot{q}}$$

або

$$\dot{\dot{q}} + \omega_0^2 q = \mathcal{E} / L, \quad (5)$$

де $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$. Для того щоб рівняння (5) набрало форми стандартного рівняння гармонічних коливань, перейдемо від змінної q до змінної Q :

$$q = Q + \mathcal{E} / (L\omega_0^2). \quad (6)$$

Тоді рівняння (5) набере вигляду

$$L\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Q = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Використаємо (6) й отримаємо залежність заряду на конденсаторі від часу:

$$q = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + \mathcal{E} / (L\omega_0^2). \quad (7)$$

У цьому рівнянні A та α є сталими, що визначаються початковими умовами. Знайдемо їх. Візьмемо до уваги, що в початковий момент часу (момент замикання ключа K , $t = 0$) струм у контурі та напруга на конденсаторі дорівнювали нулю, тобто

$$U|_{t=0} = q|_{t=0} / C = (A/C) \cos(\omega_0 \cdot 0 + \alpha) + \mathcal{E} / (LC\omega_0^2) = 0, \quad (8)$$

$$I|_{t=0} = \dot{q}|_{t=0} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \alpha) = 0. \quad (9)$$

Звідси знаходимо, що

$$A = \mathcal{E} / (L\omega_0^2), \quad \alpha = \pi. \quad (10)$$

Підставимо (10) в (7), використаємо (4) й отримаємо закони зміни напруги на конденсаторі та сили струму у контурі

$$U = \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}}{LC\omega_0^2} (1 + \cos(\omega_0 t + \pi)) = \mathcal{E} (1 - \cos(\omega_0 t)), \quad (11)$$

$$I = \dot{q} = -\frac{\mathcal{E} \omega_0}{L\omega_0^2} \sin(\omega_0 t + \pi) = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t). \quad (12)$$

У цих співвідношеннях використали, що $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

З (11) – (12) випливає, що максимальне значення напруги на конденсаторі дорівнює

$$U_{\max} = 2\mathcal{E}, \quad (13)$$

а максимальне значення сили струму у контурі –

$$I_{\max} = \mathcal{E}\sqrt{C/L}. \quad (14)$$

Співвідношення (11), (12) є розв'язками задачі.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (13) та (14) у граничному випадку, коли ЕРС джерела дорівнює нулю $\mathcal{E} = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому випадку після замикання ключа K у контурі електричні коливання не виникнуть. Це означає, що максимальна напруга на конденсаторі дорівнюватиме нулю, максимальний струм у контурі також дорівнюватиме нулю. З розрахункових формул (13) та (14) випливає такий самий результат:

$$U_{\max} = 2\mathcal{E} = 2 \cdot 0 = 0, \quad I_{\max} = \mathcal{E}\sqrt{C/L} = 0 \cdot \sqrt{C/L} = 0.$$

Отже, розрахункові формули (13) та (14) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $I_{\max} = \mathcal{E}\sqrt{C/L}$; $U_{\max} = 2\mathcal{E}$.

Приклад 2.2

В електричному коливальному контурі відбуваються вільні незгасальні коливання. Електричний струм контуру залежить від часу як $I = I_m \sin(\omega_0 t)$, де $I_m = 9,0$ мА, $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^4$ с⁻¹. Ємність конденсатора $C = 0,50$ мкФ. Знайти індуктивність контуру та напругу на конденсаторі в момент часу $t = 0$.

Розв'язання

$$\begin{array}{l} L - ? \quad U(t=0) - ? \\ I = I_m \sin(\omega_0 t); \\ I_m = 9,0 \text{ мА}; \\ \omega_0 = 4,5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}; \\ C = 0,50 \text{ мкФ}. \end{array}$$

Для розв'язання задачі використаємо формулу для власної частоти коливального контуру (2б):

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (1)$$

зв'язок між напругою та електричним зарядом на конденсаторі

$$U = q/C, \quad (2)$$

зв'язок між електричним струмом контуру та зарядом на конденсаторі

$$I = dq/dt, \quad (3)$$

який випливає з визначення електричного струму та закону збереження електричного заряду.

Зі співвідношення (1) за відомою частотою та ємністю знаходимо шукану індуктивність контуру:

$$L = 1/(\omega_0^2 C). \quad (4)$$

Використовуючи формулу (3) та відому залежність струму від часу, знайдемо залежність заряду на конденсаторі від часу:

$$q = \int I dt = \int I_m \sin(\omega_0 t) dt = -(I_m / \omega_0) \cos(\omega_0 t) + const. \quad (5)$$

В електричному коливальному контурі, що складається тільки з котушки індуктивності та конденсатора, стала складова електричного заряду на конденсаторі відсутня. Тому константу інтегрування в (5) беремо такою, що дорівнює нулю. Таким чином,

$$q(t) = -(I_m / \omega_0) \cos(\omega_0 t),$$

$$U(t) = q(t)/C = -(I_m / (C\omega_0)) \cos(\omega_0 t),$$

$$U(t=0) = -(I_m / (C\omega_0)) \cos(\omega_0 \cdot 0) = -I_m / (C\omega_0). \quad (6)$$

Отже, шукані величини C та $U(t=0)$ визначаються формулами (4), (6). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (4) та (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $L = 0,99$ мГн; $U(t=0) = -0,40$ В.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) у граничному випадку, коли струм у контурі дорівнює нулю $I_m = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому випадку в контурі електричні коливання відсутні. Це означає, що напруга на конденсаторі дорівнює нулю. З розрахункової формули (6) випливає такий самий результат:

$$U(t = 0) = -I_m / (C\omega_0) = -0 \cdot / (C\omega_0) = 0.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $L = 1/(\omega_0^2 C) = 0,99$ мГн;

$U(t = 0) = -I_m / (C\omega_0) = -0,40$ В.

Приклад 2.3

Коливальний контур має ємність $C = 10$ мкФ, індуктивність $L = 25$ мкГн та активний опір $R = 1,0$ Ом. Через скільки коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться втричі?

Розв’язання

$N - ?$
$C = 10$ мкФ;
$L = 25$ мкГн;
$R = 1,0$ Ом;
$\eta = 3.$

У контурі відбуваються загасальні коливання, амплітуда яких (у тому числі й струму) зменшується у часі за законом (1е), (2а)

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \tag{1}$$

де коефіцієнт загасання дорівнює (2б):

$$\beta = R / (2L). \tag{2}$$

Позначимо час, за який амплітуда зменшується в $\eta = 3$ рази через τ . Цей час знайдемо з (1)

$$\eta^{-1} = \frac{A(\tau)}{A_0} = e^{-\beta\tau}, \quad \ln(\eta) = \beta\tau, \quad \tau = \ln(\eta)/\beta. \quad (3)$$

Кількість коливань N , які відбуваються за цей час, знайдемо, розділивши час τ на час одного коливання, тобто на період коливання. Як відомо, період загасальних коливань дорівнює

$$T = 2\pi/\omega, \quad (3)$$

де (див. формули (2б))

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} N &= \frac{\tau}{T} = \frac{\ln(\eta)\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta \cdot 2\pi} = \frac{\ln(\eta)\sqrt{(\omega_0^2/\beta^2) - 1}}{2\pi} = \\ &= \frac{\ln(\eta)\sqrt{(\omega_0^2/\beta^2) - 1}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln(\eta) \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут використали формули (2) та (4).

Таким чином, шукана величина N визначається формулою (5). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $N = 16$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (5) у граничному випадку, коли опір коливального контуру прямує до нуля $R \rightarrow 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому випадку в контурі будуть здійснюватися коливання з практично сталою у часі амплітудою. Тобто амплітуда струму зменшуватися не буде. Час, за який буде спостерігатися зменшення амплітуди утричі, прямуватиме

до нескінченності. Отже, і кількість коливань за цей час також буде прямувати до нескінченності. З розрахункової формули (5) випливає такий самий результат:

$$N = \frac{1}{2\pi} \ln(\eta) \sqrt{\frac{4L}{C \cdot R^2} - 1} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \ln(\eta) \sqrt{\frac{4L}{C \cdot 0^2} - 1} = \infty.$$

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $N = \frac{1}{2\pi} \ln(\eta) \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1} = 16.$

Приклад 2.4

Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 1,2$ нФ, котушки з індуктивністю $L = 6,0$ мкГн та активного опору $R = 0,50$ Ом. Яку середню потужність потрібно підводити до контуру, щоб підтримувати в ньому незгасальні гармонічні коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_m = 10$ В?

Розв'язання

$\langle P \rangle$ -?

$C = 1,2$ нФ;
 $L = 6,0$ мкГн;
 $R = 0,50$ Ом;
 $U_m = 10$ В.

Для розв'язання задачі знайдемо, як зменшується енергія коливального контуру залежно від часу dW/dt . Щоб у контурі підтримувати незгасальні гармонічні коливання, потрібно компенсувати ці втрати. Це означає, що

шукана середня потужність $\langle P \rangle$, яку потрібно підводити до контуру, повинна дорівнювати втратам енергії, тобто $|dW/dt|$:

$$\langle P \rangle = |dW / dt|. \quad (1)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження втрат енергії dW/dt у контурі, у якому відбуваються загасальні

коливання в момент часу, коли амплітуда коливань на конденсаторі дорівнює U_m .

Енергія коливального контуру складається з енергії електричного поля конденсатора та енергії магнітного поля котушки:

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}. \quad (2)$$

У цій формулі

$$U = q/C = (q_m/C)e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

напруга на конденсаторі, q – заряд на конденсаторі (див. формулу (2а)), β – коефіцієнт загасання, ω – частота загасальних коливань,

$$\begin{aligned} I &= \dot{q} = -q_m \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) - q_m \beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \approx \\ &\approx -q_m \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут використали, що $\omega \gg \beta$.

Підставимо (4) та (3) в (2) й отримаємо

$$\begin{aligned} W &= \frac{q_m^2 e^{-2\beta t} \cos^2(\omega t + \alpha)}{2C} + \frac{Lq_m^2 \omega^2 e^{-2\beta t} \sin^2(\omega t + \alpha)}{2} = \\ &= \frac{q_m^2 e^{-2\beta t}}{2C} [\cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha)] = \frac{q_m^2 e^{-2\beta t}}{2C} = \frac{CU_m^2 e^{-2\beta t}}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

У цьому виразі використали, що $q_m/C = U_m$, $L\omega^2 \approx L\omega_0^2 = L/(LC) = 1/C$.

Зміна повної енергії контуру з часом буде визначатися співвідношенням

$$\frac{dW}{dt} = \frac{CU_m^2}{2} \frac{d(e^{-2\beta t})}{dt} = -\beta CU_m^2 e^{-2\beta t}. \quad (6)$$

З умови задачі випливає, що нам потрібно знайти середню потужність, яку потрібно підводити до контуру, щоб підтримувати незгасальні гармонічні коливання з **амплітудою коливань на конденсаторі** U_m . Відомо (див. (1e), (2a), (3)), амплітуда загасальних коливань зменшується за законом $U_m \cdot e^{-\beta t}$. Це означає, що амплітуда загасальних коливань напруги на конденсаторі дорівнює U_m у момент часу $t = 0$. Тому середня потужність $\langle P \rangle$, що потрібно підводити до контуру, повинна дорівнювати втратам енергії $|dW/dt|$, яку потрібно обчислювати в момент часу $t = 0$. Таким чином,

$$\langle P \rangle = \left| \frac{dW}{dt} \right|_{t=0} = \beta C U_m^2 = R C U_m^2 / (2L). \quad (7)$$

У цій формулі використали співвідношенням (2б) $\beta = R / (2L)$.

Таким чином, шукана потужність $\langle P \rangle$ визначається формулою (7). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $\langle P \rangle = 5,0$ мВт.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (7) у граничному випадку, коли опір коливального контуру дорівнює нулю $R = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому випадку загасання коливань буде відсутнім, у контурі здійснюватимуться гармонічні коливання зі сталою у часі амплітудою без додаткової зовнішньої потужності. Тобто потужність $\langle P \rangle$, яку потрібно підводити до контуру, щоб амплітуда була сталою, дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули (7) випливає такий самий результат:

$$\langle P \rangle = R C U_m^2 / (2L) = 0 \cdot C U_m^2 / (2L) = 0.$$

Отже, розрахункова формула (7) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\langle P \rangle = RCU_m^2 / (2L) = 5,0$ мВт.

Приклад 2.5

Коло, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємності $C = 22$ мкФ і котушки з індуктивністю $L = 0,35$ Гн та активним опором $R = 20$ Ом, підключено до мережі змінної напруги з амплітудою $U_m = 180$ В та частотою $\Omega = 314$ с⁻¹. Знайти: 1) амплітуду струму у колі; 2) різницю фаз між струмом та зовнішньою напругою; 3) амплітуду напруги на конденсаторі та котушці.

Розв'язання

$I_m - ?$	$\psi - ?$
$U_C - ?$	$U_k - ?$
<hr/>	
$C = 22$ мкФ;	
$L = 0,35$ Гн;	
$R = 20$ Ом;	
$U_m = 180$ В;	
$\Omega = 314$ с ⁻¹ .	

Для розв'язання задачі використаємо закон Ома для змінних струмів (2д).

Згідно із законом Ома для повного струму (2д) сила струму в колі дорівнює

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}. \quad (1)$$

Відповідно до формули (2д) різниця фаз між струмом та зовнішньою напругою визначається співвідношенням

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}. \quad (2)$$

Амплітуда напруги U_C та амплітуда сили струму I_m на конденсаторі також пов'язані законом Ома для змінних струмів (2д):

$$U_C = Z_C \cdot I_m, \quad (3)$$

де

$$Z_C = X_C = 1/(\Omega C) \quad (4)$$

є повним опором конденсатора.

Підставимо в (3) формули (1) та (4) й отримаємо

$$U_C = \frac{1}{\Omega C} \cdot I_m = \frac{1}{\Omega C} \cdot \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}. \quad (5)$$

Амплітуда напруги U_k та амплітуда сили струму I_m на котушці також пов'язані законом Ома для змінних струмів (2д). Тут потрібно врахувати, що повний опір котушки Z_k з індуктивністю L та активним опором R визначається співвідношенням

$$Z_k = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2}. \quad (6)$$

Тоді відповідно до (2д)

$$U_k = Z_k \cdot I_m. \quad (7)$$

Підставимо в (7) формули (1) та (6) й отримаємо

$$U_k = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} \cdot I_m = \frac{U_m \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}. \quad (8)$$

Таким чином, шукані величини I_m , ψ , U_C та U_k визначаються формулами (1), (2), (5), (8). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул, в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $I_m = 4,5$ А; $\text{tg}\psi = -60^\circ$; $U_C = 650$ В; $U_k = 500$ В.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (1), (5), (8) у граничному випадку, коли напруга зовнішньої мережі дорівнює нулю $U_m = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому разі амплітуда сили струму в контурі, напруга на конденсаторі та котушці будуть дорівнювати нулю. З розрахункових формул (1), (5), (8) впливає такий самий результат:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}} = \frac{0}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}} = 0,$$

$$U_C = I_m / (\Omega C) = 0 / (\Omega C) = 0,$$

$$U_k = I_m \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} = 0 \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} = 0.$$

Отже, розрахункові формули (1), (5), (8) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} = 4,5 \text{ А};$

$\text{tg}\psi = [\Omega L - 1/(\Omega C)] / R$; $\text{tg}\psi = -60^\circ$ (струм випереджає напругу); $U_C = I_m / (\Omega C) = 650 \text{ В};$

$$U_k = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2} \cdot I_m = 500 \text{ В}.$$

Приклад 2.6

Котушка з індуктивністю $L = 0,70 \text{ Гн}$ та опором $r = 20 \text{ Ом}$ з'єднана послідовно з активним опором R . До кінців цього кола прикладена змінна напруга з діючою напругою $U = 220 \text{ В}$ та частотою $\Omega = 314 \text{ с}^{-1}$. При якому значенні опору R у колі буде виділятися максимальна теплова потужність? Чому вона дорівнює?

Розв'язання

$R_1 - ?$ $P_{\max} - ?$ $L = 0,70 \text{ Гн};$ $r = 20 \text{ Ом};$ $U = 220 \text{ В};$ $\Omega = 314 \text{ с}^{-1}.$	Для розв'язання задачі використаємо закон Ома для змінних струмів (2г)–(2д) та співвідношення для середньої потужності, що виділяється у колі змінного струму (2є):
--	---

$$P = UI \cos \psi, \quad (1)$$

де U та I є діючими значеннями напруги й струму, ψ є різницею фаз між струмом та зовнішньою напругою. За допомогою вищезазначених законів отримуємо залежність

потужності P від опору R . Досліджуємо отриману формулу на екстремум і знаходимо значення R_1 , коли потужність набуває максимального значення. Підставляємо отримане значення R_1 в (1) і знаходимо максимальну потужність.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. Як відомо, сила струму та кут між напругою та силою струму визначаються співвідношеннями (2д):

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (\Omega L)^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\Omega L}{R+r}, \quad (2)$$

де враховано, що у досліджуваному колі відсутній конденсатор, а сумарний активний опір дорівнює $R+r$. Амплітудні та діючі значення напруги та струму пов'язані між собою співвідношеннями (2ж):

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad I = I_m / \sqrt{2}. \quad (3)$$

Також візьмемо до уваги, що $\cos\psi$ та $\operatorname{tg}\psi$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\cos\psi = \sqrt{1/(1+\operatorname{tg}^2\psi)}.$$

Підставимо в цю формулу друге співвідношення з (2) і знаходимо

$$\cos\psi = (R+r) / \sqrt{(R+r)^2 + (\Omega L)^2}. \quad (4)$$

Далі підставляємо (4), (3) та (2) в (1) й отримуємо

$$P = \frac{U^2(R+r)}{(R+r)^2 + (\Omega L)^2}. \quad (5)$$

Досліджуємо отриману залежність (5) потужності P від опору R на екстремум:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{[(R+r)^2 + (\Omega L)^2]^2} \cdot \{(\Omega L)^2 - (R+r)^2\} = 0. \quad (6)$$

Звідси знаходимо точку екстремуму

$$R_1 = \Omega L - r. \quad (7)$$

Неважко переконатися, що за умови $R < R_1$ похідна (6) має додатне значення, а за умови $R > R_1$ – від’ємне. Це означає, що умова (7) є умовою максимуму потужності.

Підставимо значення $R = R_1$ в (5) і знайдемо максимальну потужність, що виділяється у колі:

$$P_{\max} = \frac{U^2(R_1 + r)}{(R_1 + r)^2 + (\Omega L)^2} = \frac{U^2}{2\Omega L}. \quad (8)$$

Таким чином, шукані у задачі величини визначаються формулами (7) та (8). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (7) та (8) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо: $R_1 = 0,20$ кОм; $P_{\max} = 0,11$ кВт.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (8) у граничному випадку, коли індуктивність котушки прямує до нескінченності $L \rightarrow \infty$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому разі індуктивний опір дорівнюватиме нескінченності $X_L = \Omega L = \infty$; амплітуда струму у колі буде дорівнювати нулю; потужність, що виділяється у колі, теж дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули (8) випливає такий самий результат:

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2\Omega L} = \frac{U^2}{2\Omega \cdot \infty} = 0.$$

Отже, розрахункова формула (8) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $R_1 = \Omega L - r = 0,20$ кОм;

$$P_{\max} = U^2 / (2\Omega L) = 0,11 \text{ кВт.}$$

Приклад 2.7

Знайти повний опір ділянки кола, яке складається з паралельно ввімкненого конденсатора ємністю $C = 73 \text{ мкФ}$ та активного опору $R = 100 \text{ Ом}$, для змінного струму частотою $\Omega = 314 \text{ с}^{-1}$.

Розв'язання

$Z - ?$
$C = 73 \text{ мкФ};$
$R = 100 \text{ Ом};$
$\Omega = 314 \text{ с}^{-1}.$

Для розв'язання задачі використаємо закон Ома для змінних струмів (2г)–(2д) та метод векторних діаграм.

На рис. 2.4 зображено контур, який складається з паралельно ввімкненого конденсатора ємністю C та активного опору R . Зрозуміло, що у випадку паралельного ввімкненого опору та конденсатора на цих елементах кола є однаковою, а сумарний електричний струм дорівнює сумі струмів через кожний з елементів контуру:

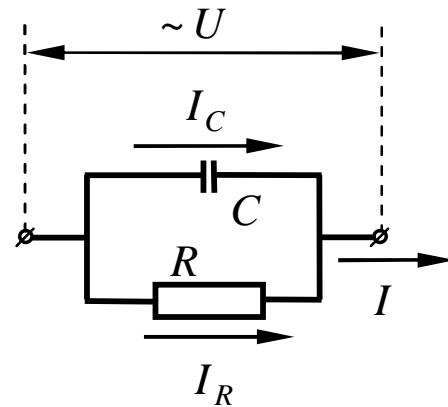


Рисунок 2.4

$$I_R + I_C = I. \quad (1)$$

Використовуючи закон Ома для змінних електричних струмів (2д) для ділянки, в яку входить лише один конденсатор, знаходимо, що амплітуда струму через конденсатор пов'язана з амплітудою напруги таким співвідношенням:

$$I_{C,m} = \frac{U_m}{\sqrt{(1/(\Omega C))^2}} = U_m \Omega C, \quad (2)$$

а відставання струму за фазою від напруги дорівнює

$$\operatorname{tg}\psi_C = \frac{-1/(\Omega C)}{0} = -\infty, \text{ тобто } \psi_C = -\pi/2. \quad (3)$$

Аналогічно для ділянки кола, в яку входить лише один активний опір R , знаходимо, що амплітуда струму через опір пов'язана з амплітудою напруги формулою

$$I_{R,m} = U_m / R, \quad (4)$$

а відставання струму за фазою від напруги дорівнює

$$\operatorname{tg}\psi_R = \frac{0}{R} = 0, \text{ тобто } \psi_R = 0. \quad (5)$$

Щоб знайти сумарний струм через контур, використаємо метод векторних діаграм (див. рис. 2.5)

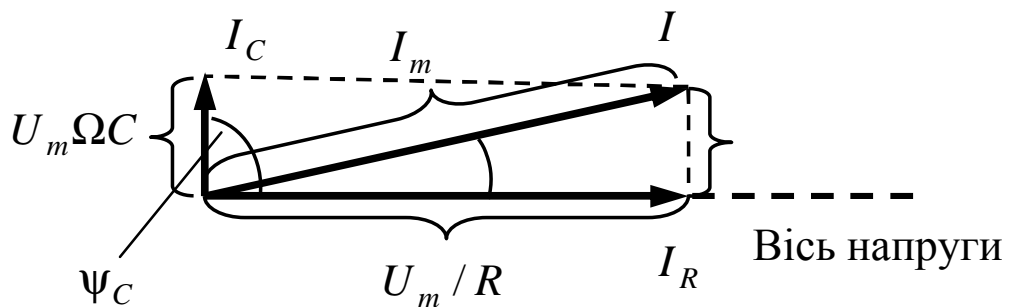


Рисунок 2.5

Нагадаємо, що гармонічне коливання можна задати за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрям вектора утворює із деякою віссю кут, що дорівнює початковій фазі коливання. Візьмемо за пряму, від якої відлічується початкова фаза, вісь напруги, тому що напруга для кожної ділянки кола є однаковою.

Відкладемо вектори, що пов'язані з гармонічними коливаннями I_R , I_C , з урахуванням вищезазначених властивостей (див. рис. 2.5). Згідно з (1) сума двох струмів I_R й I_C повинна дорівнювати загальному струму I .

Відповідно до цього загальний струм I зображується на діаграмі вектором, що дорівнює сумі векторів I_R та I_C .

Із прямокутного трикутника, утвореного на діаграмі векторами I , I_R й I_C , за допомогою теореми Піфагора знаходимо

$$I^2 = I_{C,m}^2 + I_R^2$$

або

$$I_m = \sqrt{(U_m \Omega C)^2 + (U_m / R)^2} = U_m \sqrt{(\Omega C)^2 + (1/R)^2}. \quad (6)$$

Звідси знаходимо повний опір

$$Z = U_m / I_m = 1 / \sqrt{(\Omega C)^2 + (1/R)^2} = R / \sqrt{(\Omega RC)^2 + 1}. \quad (7)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $Z = 40$ Ом.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (7) у граничному випадку, коли частота змінного струму дорівнює нулю $\Omega = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому разі постійний струм через конденсатор проходити не буде, повний струм визначатиме лише струм через активний опір. Тому повний опір дорівнюватиме активному опорі R . З розрахункової формули (7) випливає такий самий результат:

$$Z = R / \sqrt{(\Omega RC)^2 + 1} = R / \sqrt{(0 \cdot RC)^2 + 1} = R.$$

Отже, розрахункова формула (7) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $Z = R / \sqrt{(\Omega RC)^2 + 1} = 40$ Ом.

2.2 Задачі для самостійного розв'язання

2.1 Конденсатор із площею пластин $S = 100 \text{ см}^2$ кожна, які розділені шаром слюди завтовшки $d = 1 \text{ мм}$, і котушка без магнітного осердя завдовжки $l = 35 \text{ см}$, площею перерізу $S_1 = 5 \text{ см}^2$ та кількістю витків $N = 150$ з'єднані паралельно. Визначити частоту коливань цього коливального контуру.

2.2 Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 0,01 \text{ мкФ}$ і котушки індуктивністю $L = 4 \text{ мГн}$, опір його дуже малий. Конденсатор зарядили до $U_0 = 300 \text{ В}$. Через який проміжок часу після замикання ключа сила струму в контурі досягне найбільшого значення? Чому дорівнює це значення?

2.3 У коливальному контурі, що складається з конденсатора ємністю C і котушки індуктивністю L , відбуваються вільні незгасальні коливання. Амплітуда напруги на конденсаторі при цьому дорівнює U_m . Знайти для довільного моменту часу зв'язок між струмом I в контурі та напругою U на конденсаторі. Вирішити це питання як за допомогою закону Ома, так і енергетично.

2.4 Коливальний контур складається з конденсатора ємністю C , котушки індуктивністю L , з дуже малим опором, і ключа. При розімкненому ключі конденсатор зарядили до напруги U_m , а потім у момент $t = 0$ замкнули ключ. Знайти: 1) струм у контурі як функцію часу $I(t)$; 2) ЕРС самоіндукції в котушці в моменти, коли електрична енергія конденсатора дорівнює енергії струму в котушці.

2.5 У коливальному контурі, що складається з плоского конденсатора і котушки індуктивності, з дуже малим активним опором, відбуваються коливання з енергією W . Пластини конденсатора повільно розсунули

так, що частота коливань збільшилася в η разів. Яку роботу виконали при цьому?

2.6 У коливальному контурі (рис. 2.6) індуктивність котушки $L = 2,5$ мГ, а ємність конденсаторів $C_1 = 2,0$ мкФ і $C_2 = 3,0$ мкФ. Конденсатори зарядили до напруги

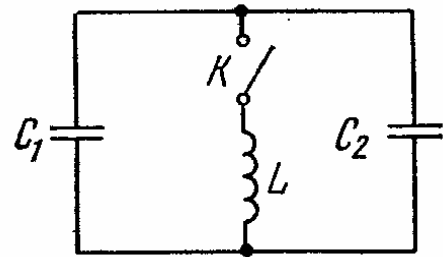


Рисунок 2.6

$U = 180$ В і замкнули ключ K . Знайти: 1) період власних коливань; 2) амплітудне значення струму через котушку.

2.7 Електричне коло (рис. 2.7) має дуже малий активний опір. Лівий конденсатор зарядили до напруги U_0 . У момент $t = 0$ замкнули ключ K . Знайти залежність напруги на лівому і правому конденсаторах від часу t .

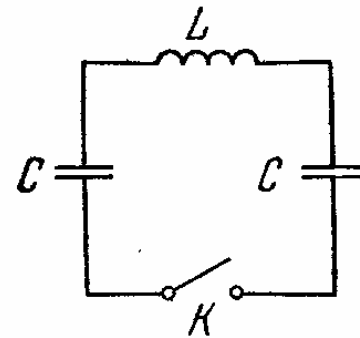


Рисунок 2.7

2.8 Коливальний контур містить котушку індуктивністю L і конденсатор ємністю C . Вважати опір котушки і провідників дуже малим. Котушка знаходиться в постійному магнітному полі, так що магнітний потік, що пронизує котушку, дорівнює Φ . У момент $t = 0$ магнітне поле вимкнули. Вважаючи час вимкнення магнітного поля малим порівняно з періодом власних коливань контуру, знайти струм у контурі як функцію часу t .

2.9 Коливальний контур містить котушку індуктивністю $L = 25$ мГн, конденсатор ємністю $C = 10$ мкФ і резистор опором $R = 1$ Ом. Конденсатор заряджений кількістю електрики $Q_m = 1$ мКл. Визначити: 1) період коливань контуру; 2) логарифмічний декремент

загасання коливань; 3) закон залежності напруги на обкладках конденсатора від часу.

2.10 Коливальний контур має ємність $C = 0,2$ мкФ, індуктивність $L = 15$ мГн та активний опір $R = 7$ Ом. Через яку кількість коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться у $\eta = 5$ разів?

2.11 Як зміниться логарифмічний декремент загасання, якщо, не змінюючи довжини котушки в коливальному контурі, збільшити число витків на ній у n разів (вважати, що діаметр витків не змінюється).

2.12 Яку енергію втрачає за період коливальний контур ємністю $C = 0,05$ мкФ, індуктивністю $L = 2$ нГн та опором $R = 1$ мОм, якщо максимальна напруга на конденсаторі $U_0 = 200$ В.

2.13 Власна частота коливань контуру, в якому збуджують загасальні коливання, $\nu_0 = 8$ кГц, добротність $Q = 72$. Знайти закон, за яким зменшується енергія W контуру з часом t . Яка частина початкової енергії W_0 збережеться в контурі за час $\tau = 1$ мс?

2.14 У контурі, добротність якого $Q = 50$ і власна частота коливань $\nu_0 = 5,5$ кГц, збуджують загасальні коливання. Через який час початкова енергія, збережена в контурі, зменшиться у $\eta = 2,0$ разів?

2.15 У контурі відбуваються вільні загасальні коливання, при яких напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом $U = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t)$. Знайти моменти часу, коли модуль напруги на конденсаторі досягає: 1) амплітудних значень; 2) максимальних (екстремальних) значень.

2.16 Коливальний контур містить конденсатор ємності C , котушку індуктивністю L та активним опором R , а також ключ. При розімкненому ключі конденсатор зарядили, після чого ключ замкнули, і почалися коливання. Знайти відношення напруги на конденсаторі до його амплітудного значення у момент безпосередньо після замикання ключа.

2.17 Параметри коливального контуру мають значення: $C = 1$ нФ, $L = 6$ мкГн. Для підтримання в ньому незгасальних коливань з амплітудою напруги на конденсаторі $U_m = 10$ В потрібно підводити середню потужність $P = 0,1$ мВт. Визначити добротність контуру, вважаючи загасання коливань достатньо малим.

2.18 Яку середню потужність повинен споживати коливальний контур з активним опором $R = 0,45$ Ом, щоб у ньому підтримувалися незгасальні гармонічні коливання з амплітудою струму $I_m = 30$ мА?

2.19 У контурі ємністю C та індуктивністю L відбуваються вільні загасальні коливання, при яких струм змінюється з часом за законом $I = I_m e^{-\beta t} \sin(\omega t)$. Знайти напругу на конденсаторі залежно від часу t , зокрема в момент $t = 0$.

2.20 Коливальний контур складається з конденсатора ємності $C = 4,0$ мкФ, котушки з індуктивністю $L = 2,0$ мГн та активного опору $R = 10$ Ом. Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимуму струму.

2.21 Знайти час, за який амплітуда коливань струму в контурі з добротністю $Q = 5000$ зменшиться в $\eta = 2,0$ раз, якщо частота коливань $\nu = 2,2$ МГц.

2.22 Коливальний контур має ємність $C = 10$ мкФ, індуктивність $L = 25$ мГн та активний опір $R = 1,0$ Ом.

Через скільки коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться в e разів?

2.23 На скільки відсотків відрізняється частота ω вільних коливань контуру з добротністю $Q = 5,0$ від власної частоти ω_0 коливань цього контуру?

2.24 Коливальний контур містить неідеальний конденсатор. Ємність конденсатора C , його активний опір R . Індуктивність котушки L . Опором котушки і провідників можна знехтувати. Знайти: 1) частоту згасальних коливань цього контуру; 2) добротність контуру.

2.25 До кінців кола, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора і резистора з активним опором $R = 100$ Ом, підключено змінну напругу з амплітудою $U_0 = 100$ В. При цьому амплітуда струму, що установився в колі, $I_0 = 0,7$ А. Знайти різницю фаз між струмом і загальною напругою на ділянці кола.

2.26 Коло складається з конденсатора ємністю $C = 35$ мкФ, паралельно з яким з'єднано резистор з омичним опором $R = 80$ Ом. Знайти повний опір кола змінного струму з частотою $\nu = 50$ Гц і зсув фаз між напругою та струмом.

2.27 Котушку з активним опором R та індуктивністю L підключили в момент $t = 0$ до джерела змінної напруги $U = U_m \cos(\omega t)$. Знайти, як із часом змінюється струм у котушці.

2.28 Електричне коло, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємності C та опору R , підключили до змінної напруги $U = U_m \cos(\omega t)$ у момент $t = 0$. Знайти, як із часом змінюється струм в колі.

2.29 Коло складається з паралельно з'єднаних

конденсатора ємністю $C = 0,3$ мкФ і котушки з активним опором $R = 45$ Ом та індуктивністю $L = 15$ мГн. 1) Чому дорівнює повний опір кола змінного струму частотою $\nu = 0,5$ кГц? 2) При якій частоті ω змінної напруги, прикладеної до кінців кола, реактивний опір кола перетворюється в нуль (резонанс струмів)? 3) Яким буде повний опір кола при резонансі?

2.30 Коло з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю $C = 30$ мкФ, резистора опором $R = 35$ Ом і котушки індуктивністю $L = 0,26$ Гн підключене до генератора синусоїдної напруги, частоту якого можна змінювати при сталій амплітуді. Знайти частоту, при якій спостерігається максимум амплітуди напруги: 1) на конденсаторі; 2) на котушці.

2.31 По котушці з індуктивним опором $X_L = 30$ Ом і $Z = 50$ Ом проходить струм, діюче значення якого $I = 2$ А. Знайти різницю фаз між струмом і напругою, а також теплову потужність, що виділяється у котушці.

2.32 Резистор з активним опором $R = 25$ Ом, котушка індуктивністю $L = 0,37$ Гн і конденсатор ємністю $C = 42$ мкФ з'єднані паралельно і підключені до джерела змінної напруги $U = 150 \sin 314t$. Знайти амплітудне значення повного струму I_0 та зсув фаз ϕ між повним струмом і напругою.

2.33 Коефіцієнт потужності у колі з послідовно з'єднаними конденсатором і резистором $\cos \phi_1 = 0,6$. Визначити коефіцієнт потужності $\cos \phi_2$, якщо резистор з'єднати з конденсатором паралельно.

2.34 Котушка індуктивністю $L = 90$ мГн та активним опором $R = 40$ Ом підключена спочатку до джерела постійної напруги U_0 , а потім до генератора синусоїдної

напруги з діючим значенням напруги $U = U_0$. Частота генератора $\nu = 50$ Гц. У скільки разів η потужність, яка споживається котушкою, стане меншою?

2.35 Знайти добротність коливального контуру, в який послідовно включене джерело змінної ЕРС, якщо при резонансі напруга на конденсаторі в n разів перевищує напругу на джерелі.

2.36 Конденсатор зі слюдою як діелектриком увімкнено у коло змінного струму з частотою $\nu = 50$ Гц. Перебуваючи під напругою, конденсатор поглинає деяку потужність, причому коефіцієнт потужності $\cos \varphi = 0,1$. Визначити питомий опір діелектрика.

2.37 У коливальному контурі за допомогою механічного пристрою періодично стрибкоподібно зсувають і розсувають пластини плоского конденсатора, змінюючи його ємність. При частоті зміни ємності $\omega = 2\omega_0$, де ω_0 – власна частота коливань контуру, настає параметричний резонанс. Показати побудовою на фазовій площині $(q, \dot{\varphi} / \omega_0)$, де q – заряд, що амплітуда коливань у контурі необмежено збільшується.

2.38 Конденсатор ємністю $C = 1,0$ мкФ та котушку з активним опором $R = 0,10$ Ом і індуктивністю $L = 1,0$ мГн підключили паралельно до джерела синусоїдної напруги з діючим значенням $U = 31$ В. Знайти: 1) частоту ω , при якій настає резонанс; 2) діюче значення струму при резонансі в джерелі, а також відповідні струми через котушку та конденсатор.

2.39 Ділянка кола складається з паралельно з'єднаних конденсатора ємності C і котушки з активним опором R та індуктивністю L . Знайти повний опір цієї ділянки для змінної напруги з частотою ω .

ТЕМА 3 ХВИЛІ

Основні формули

Рівняння плоскої та сферичної хвиль

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad \xi = (A_0 / r) \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (3a)$$

Для однорідного середовища з поглинанням до цих формул входить множник відповідно $\exp(-\gamma \cdot x)$ та $\exp(-\gamma \cdot r)$, де γ – коефіцієнт загасання хвилі.

Хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (3б)$$

Фазова швидкість позовжніх хвиль у пружному середовищі

$$v = \sqrt{E / \rho}, \quad (3в)$$

де E – модуль Юнга, ρ – густина середовища.

Швидкість звуку в газі

$$v = \sqrt{\gamma RT / \mu}. \quad (3г)$$

Об'ємна густина енергії пружної хвилі

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha), \quad \langle w \rangle = (1/2) \rho A^2 \omega^2. \quad (3д)$$

Вектор густини потоку енергії (вектор Умова)

$$\vec{j} = w \vec{v}. \quad (3е)$$

Зв'язок між інтенсивністю I звукової хвилі та амплітудою коливань тиску $(\Delta p)_m$

$$I = (\Delta p)_m^2 / (2\rho v). \quad (3ж)$$

Акустичний ефект Доплера

$$v = v_0 (v + v_{np}) / (v - v_{дж}). \quad (3з)$$

Рівень гучності звуку (в белах)

$$L = \lg(I / I_0). \quad (3i)$$

Фазова швидкість електромагнітної хвилі

$$v = c / \sqrt{\epsilon\mu}, \text{ де } c = 1 / \sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \quad (3ii)$$

У біжучій електромагнітній хвилі

$$E\sqrt{\epsilon_0\epsilon} = H\sqrt{\mu_0\mu}. \quad (3к)$$

Густина потоку енергії електромагнітної хвилі
(вектор Пойнтінга)

$$\dot{S} = [\dot{E} \times \dot{H}]. \quad (3л)$$

3.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1

Плоска хвиля $\xi(x, t) = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$ поширюється в однорідному середовищі. Знайти різницю фаз коливань у точках, для яких відношення амплітуд зміщення частинок середовища $\eta = 1,02$, якщо коефіцієнт загасання $\gamma = 0,25 \text{ м}^{-1}$, довжина хвилі $\lambda = 75 \text{ см}$.

Розв'язання

$\Delta\varphi - ?$	Для розв'язання задачі
$A_1/A_2 = \eta = 1,02;$	використаємо визначення для фази
$\gamma = 0,25 \text{ м}^{-1};$	$\varphi = \omega t - kx \quad (1)$
$\lambda = 75 \text{ см}.$	та вираз для амплітуди хвилі

$$A = A_0 e^{-\gamma x}. \quad (2)$$

Шукана різниця фаз визначається в точках x_1 та x_2 в один і той самий момент часу і дорівнює, як випливає з (1),

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = -k(x_2 - x_1). \quad (3)$$

Для знаходження різниці відстаней $(x_2 - x_1)$ використаємо умову задачі, що для цих точок відношення амплітуд зміщення частинок середовища дорівнює η . Використовуючи (2), знаходимо

$$\eta = A_1 / A_2 = (A_0 \exp(-\gamma x_1)) / (A_0 \exp(-\gamma x_2)) = \exp(\gamma(x_2 - x_1)).$$

Звідси отримуємо, що

$$\ln \eta = \gamma(x_2 - x_1) \text{ або } (x_2 - x_1) = (\ln \eta) / \gamma. \quad (3)$$

Далі підставляємо вираз для $(x_2 - x_1)$ в (3), використаємо зв'язок між хвильовим числом і довжиною хвилі $k = 2\pi/\lambda$ та знаходимо шукану різницю фаз:

$$\Delta\varphi = -2\pi \ln \eta / (\lambda \cdot \gamma). \quad (4)$$

Отже, шукана різниця фаз визначається формулою (4). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (4), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $\Delta\varphi = -0,66$ рад.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (4) у граничному випадку, коли відношення амплітуд зміщення частинок середовища дорівнюватиме одиниці, тобто $\eta = 1,00$. З фізичних міркувань зрозуміло, що за такої ситуації координати точок x_2 та x_1 , у яких визначаються амплітуди, повинні збігатися. Отже, і фази в цих точках повинні мати однакові значення, а їх різниця повинна дорівнювати нулю. З розрахункової формули (6) випливає такий самий результат:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi \ln \eta}{\lambda \cdot \gamma} = -\frac{2\pi \ln(1)}{\lambda \cdot \gamma} = 0.$$

Таким чином, розрахункова формула (4) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta\varphi = -2\pi \ln \eta / (\lambda \cdot \gamma) = -0,66$ рад.

Приклад 3.2

Знайти амплітуду незгасальної сферичної хвилі на відстані $r_2 = 15$ м від точкового джерела в ізотропному середовищі, якщо на відстані $r_1 = 3$ м від нього середня густина потоку енергії $I = 5$ ГДж/(м²·с). Густина середовища $\rho = 4 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга $E = 100$ ГПа, частота коливань джерела $\nu = 15$ кГц.

Розв'язання

$A_2 - ?$	Для розв'язання задачі
$r_2 = 15$ м;	використаємо залежність амплітуди
$r_1 = 3$ м;	незгасальної сферичної хвилі від
$I = 5$ ГДж/(м ² ·с);	радіуса (3а)
$\rho = 4 \cdot 10^3$ кг/м ³ ;	$A = A_0 / r$, (1)
$E = 100$ ГПа;	формули для середньої густини енергії
$\nu = 15$ кГц.	та потоку енергії (3д), (3е)

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle \nu = \frac{1}{2} \rho A_1^2 \omega^2 \nu. \quad (2)$$

У співвідношенні (2) враховано, що середня густина потоку енергії I за умовою задачі визначена на відстані r_1 від джерела, де хвиля має амплітуду відповідно до (1):

$$A_1 = A_0 / r_1. \quad (3)$$

Також візьмемо до уваги, що фазова швидкість хвилі визначається формулою (3в):

$$\nu = \sqrt{E / \rho}, \quad (4)$$

а циклічна частота

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (5)$$

Далі, використовуючи співвідношення (2) – (5), знаходимо сталу

$$A_0 = r_1 \sqrt{\frac{2I}{\rho(2\pi\nu)^2}} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (6)$$

підставляємо в (1) і знаходимо амплітуду незгасальної сферичної хвилі на відстані r_2 від джерела:

$$A_2 = \frac{A_0}{r_2} = \frac{r_1}{2\pi\nu r_2} \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{\rho E}}}. \quad (7)$$

Таким чином, шукана амплітуда A_2 визначається формулою (7). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $A_2 = 47$ мкм.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (7) у граничному випадку: знайдемо амплітуду незгасальної сферичної хвилі на нескінченній відстані від точкового джерела $r_2 = +\infty$. З фізичних міркувань зрозуміло, що на такій відстані від джерела амплітуда дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули (7) випливає такий самий результат:

$$A_2 = \frac{A_0}{r_2} = \frac{r_1}{2\pi\nu r_2} \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{\rho E}}} = \frac{r_1}{2\pi\nu \infty} \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{\rho E}}} = 0.$$

Отже, розрахункова формула (7) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $A_2 = \frac{A_0}{r_2} = \frac{r_1}{2\pi\nu r_2} \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{\rho E}}} = 47$ мкм.

Приклад 3.3

Спостерігач на залізничній платформі чує сигнал поїзда, що проходить біля нього. Якщо поїзд наближається, частота звукових коливань сигналу

$v_1 = 1100$ Гц, а якщо поїзд віддаляється, – $v_2 = 900$ Гц. Визначити швидкість поїзда і власну частоту коливань сигналу. Взяти, що швидкість поширення звуку дорівнює $v = 330$ м/с.

Розв'язання

$v_n - ?$ $v_0 - ?$	Для розв'язання задачі використаємо формулу для акустичного ефекту Доплера (3з):
$v_1 = 1100$ Гц;	
$v_2 = 900$ Гц;	
$v = 330$ м/с.	

$$v = v_0(v + v_{np}) / (v - v_{дж}). \quad (1)$$

Зазначимо, що спостерігач (приймач звуку) в обох випадках відносно платформи не рухається, тобто

$$v_{np} = 0. \quad (2)$$

Візьмемо до уваги також те, що у формулі (1) v_{np} та $v_{дж}$ беруться **додатними**, коли приймач або джерело рухаються **назустріч** одне одному, і від'ємними – в протилежному разі. Тоді, коли поїзд наближається до спостерігача, швидкість поїзда (джерела звуку) в (1) потрібно брати зі знаком «+»:

$$v_1 = v_0(v + 0) / (v - (+v_n)), \quad (3)$$

а коли віддаляється, – зі знаком «-»:

$$v_2 = v_0(v + 0) / (v - (-v_n)). \quad (4)$$

У (3) та (4) врахували (2). Далі розв'язуємо систему двох рівнянь (3), (4) відносно двох невідомих v_n , v_0 і знаходимо

$$v_n = v \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}, \quad (5)$$

$$v_0 = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}. \quad (6)$$

Таким чином, шукані величини визначаються формулами (5) та (6). Виконаємо обчислення й отримаємо: $v_n = 33$ м/с; $v_0 = 990$ Гц.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (5), (6) у граничному випадку, коли частоти звукових коливань сигналу v_1 та v_2 є однаковими: $v_1 = v_2$. Тобто ефект Доплера не спостерігається. Відомо, що ефект Доплера не спостерігається, коли швидкість джерела та приймача набагато менші за швидкість звукового сигналу. З цього випливає, що швидкість поїзда наближається до нуля. За цієї ситуації власна частота коливань сигналу змінюватися не буде, вона дорівнюватиме частотам v_1 та v_2 : $v_0 = v_1 = v_2$. З розрахункових формул (5), (6) випливає такий самий результат:

$$v_n = v \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = v \frac{v_1 - v_1}{v_1 + v_1} = 0, \quad v_0 = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2v_1v_1}{v_1 + v_1} = v_1.$$

Отже, розрахункові формули (5) та (6) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $v_n = v \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = 33$ м/с; $v_0 = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 990$ Гц.

Приклад 3.4

У струні масою $M = 9$ г, що закріплена з обох кінців, збудили третю гармоніку. Частота основного тону $v_1 = 440$ Гц. Амплітуда зміщення у пучностях струни $A = 2$ мм. Знайти максимальну кінетичну енергію струни.

$E_{k \max} - ?$

$M = 9 \text{ г};$

$v_1 = 440 \text{ Гц};$

$N = 3;$

$A = 2 \text{ мм.}$

Розв'язання

Для розв'язання задачі використаємо рівняння стоячої хвилі

$$\xi = A \cos(kx + \alpha_1) \cos(\omega t + \alpha_2), \quad (1)$$

де ω та k – частота та хвильове число, відношення яких дорівнює фазовій швидкості

$$\omega/k = v_\phi, \quad (2)$$

α_1 та α_2 є константами, що визначаються граничними та початковими умовами. Залежність ξ як функцію координати x для певного моменту часу для перших трьох просторових гармонік зображено на рис. 3.1. Щоб визначити кінетичну енергію струни, розіб'ємо її на елементарні ділянки dx , визначимо елементарну кінетичну енергію такої ділянки. Повну кінетичну енергію знайдемо, провівши підсумовування (інтегрування) за всіма елементарними кінетичними енергіями струни.

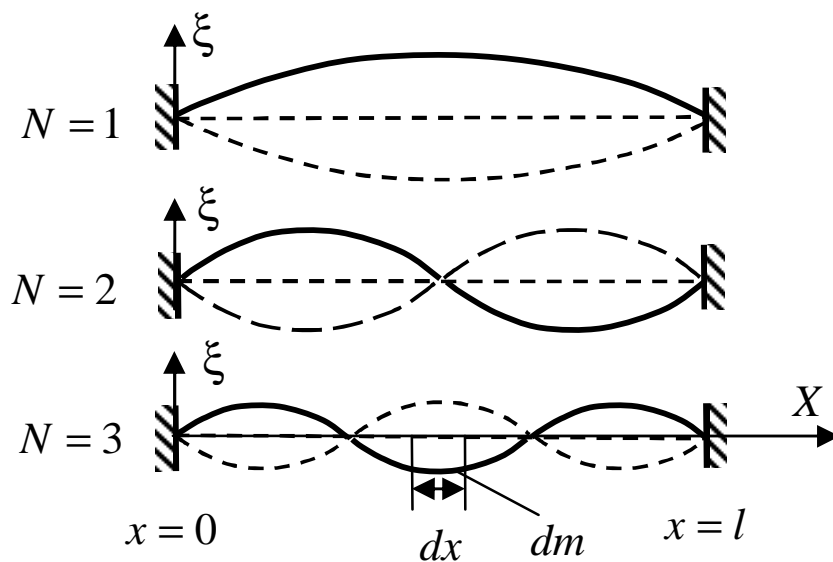


Рисунок 3.1

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. Конкретизуємо вигляд рівняння стоячої хвилі (1). Відповідно до рис. 3.1 струна закріплена в точках з координатами (вузли стоячої хвилі): $x_1 = 0$; $x_1 = l$, де l – довжина струни. Визначимо хвильове число k . Для цього підставимо координати вузлів в (1) й отримаємо

$$\cos(k \cdot 0 + \alpha_1) = 0, \cos(k \cdot l + \alpha_1) = 0. \quad (2)$$

З першого рівняння (2) знаходимо, що $\alpha_1 = -\pi/2$, а з другого –

$$\cos(k \cdot l - \pi/2) = 0, \sin(k \cdot l) = 0, k \cdot l = \pi \cdot n, k = \pi \cdot n / l. \quad (3)$$

У формулі (3) $n = 1, 2, 3, \dots$. Зрозуміло, що для третьої просторової гармоніки $n = N = 3$. Тоді хвильове число та частота будуть дорівнювати

$$k = \pi \cdot N / l, \omega = v_\phi \cdot k = v_\phi \pi N / l = N \cdot (2\pi v_1). \quad (4)$$

Тут врахували, що частота третьої гармоніки втричі більша за частоту першої гармоніки. З урахуванням зазначеного вище формула (1) набирає вигляду

$$\xi = A \sin(\pi N x / l) \cos(N \cdot (2\pi v_1) t + \alpha_2). \quad (5)$$

Швидкість точок струни знайдемо шляхом диференціювання (5) за часом

$$\dot{\xi} = -A \cdot N \cdot (2\pi v_1) \sin(\pi N x / l) \sin(N \cdot (2\pi v_1) t + \alpha_2). \quad (6)$$

Розіб'ємо струну на елементарні ділянки dx (рис. 3.1), масу такої ділянки визначимо як добуток її довжини на її лінійну густину:

$$dm = dx \cdot (M / l). \quad (7)$$

Тоді кінетичну енергію цієї ділянки можна записати у вигляді

$$dE_k = \frac{dm(\dot{\xi})^2}{2} =$$

$$= \frac{Mdx}{2l} [A \cdot N \cdot (2\pi v_1) \sin(\pi Nx/l) \sin(N \cdot (2\pi v_1)t + \alpha_2)]^2. \quad (8)$$

Щоб знайти кінетичну енергію всієї струни, потрібно додати кінетичні енергії всіх ділянок струни, або проінтегрувати вираз (8) за змінною x від 0 до l :

$$\begin{aligned} E_k &= \int dE_k = \\ &= \int_0^l \frac{M}{2l} A^2 N^2 (2\pi v_1)^2 \sin^2(\pi Nx/l) \sin^2(N \cdot (2\pi v_1)t + \alpha_2) dx = \\ &= \frac{M}{2l} A^2 N^2 (2\pi v_1)^2 \sin^2(N \cdot (2\pi v_1)t + \alpha_2) \int_0^l \frac{1 - \cos(2\pi Nx/l)}{2} dx = \\ &= \frac{M}{2l} A^2 N^2 (2\pi v_1)^2 \sin^2(N \cdot (2\pi v_1)t + \alpha_2) \frac{l}{2} = \\ &= \frac{M}{4} A^2 N^2 (2\pi v_1)^2 \sin^2(N \cdot (2\pi v_1)t + \alpha_2). \quad (9) \end{aligned}$$

Кінетична енергія набуває максимального значення, яке потрібно знайти в задачі, у момент часу, коли квадрат синуса у виразі (9) набуває максимального значення, тобто коли він дорівнює одиниці. Тоді максимальна кінетична енергія струни дорівнюватиме

$$E_{k \max} = MA^2 N^2 \pi^2 v_1^2. \quad (10)$$

Отже, шукана кінетична енергія визначається формулою (10). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (10), в одиницях СІ й виконаємо обчислення $E_{k \max} = 0,62$ Дж.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (10) у граничному випадку, коли маса струни прямує до нуля $M = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому разі

максимальна кінетична енергія струни дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули (10) випливає такий самий результат:

$$E_{k \max} = MA^2 N^2 \pi^2 v_1^2 = 0 \cdot A^2 N^2 \pi^2 v_1^2 = 0.$$

Отже, розрахункова формула (10) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $E_{k \max} = MA^2 N^2 \pi^2 v_1^2 = 0,62$ Дж.

Приклад 3.5

Плоска електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі у напрямку осі X . Амплітуда напруженості електричного поля $E_m = 30$ В/м. Визначити інтенсивність I хвилі.

Розв'язання

$I - ?$	Для розв'язання задачі використаємо
$E_m = 30$ В/м.	формулу для вектора Пойнтінга (3л), та зв'язок (3к) між напруженостями електричного та магнітного поля в електромагнітній хвилі.

Інтенсивністю хвилі називають середнє значення густини потоку енергії хвилі. Для електромагнітної хвилі густину потоку енергії визначає вектор Пойнтінга (3л)

$$\dot{S} = [\dot{E} \times \dot{H}]. \quad (1)$$

Отже,

$$I = \langle S \rangle = \langle |[\dot{E} \times \dot{H}]| \rangle. \quad (2)$$

Відомо, що в електромагнітній хвилі вектори напруженості електричного та магнітного полів взаємно перпендикулярні, а їх модулі пов'язані між собою співвідношенням (3к):

$$E \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H \sqrt{\mu_0 \mu}. \quad (3)$$

Візьмемо до уваги, що у вакуумі $\epsilon = 1$, $\mu = 1$. Підставимо (3) в (2) й отримаємо

$$I = \langle E^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \rangle. \quad (4)$$

В електромагнітній хвилі напруженість електричного поля змінюється за законом

$$E = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (5)$$

Підставляємо (5) в (4), усереднюємо за часом (беремо інтеграл за часом) і знаходимо

$$\begin{aligned} I &= \langle (E_m \cos(\omega t - kx + \alpha))^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \rangle = \\ &= E_m^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \frac{1}{2\pi / \omega} \int_0^{2\pi / \omega} \cos^2(\omega t - kx + \alpha) dt = \\ &= E_m^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \frac{1}{2\pi / \omega} \int_0^{2\pi / \omega} \frac{1 + \cos 2(\omega t - kx + \alpha)}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} E_m^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}. \quad (6) \end{aligned}$$

Виконаємо обчислення за допомогою (6) й отримаємо $I = 1,2 \text{ Вт/м}^2$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) у граничному випадку, коли амплітуда напруженості електричного поля прямує до нуля $E_m = 0$. У цьому разі, як впливає із фізичних міркувань, інтенсивність електромагнітної хвилі також прямуватиме до нуля. З розрахункової формули (6) впливає такий самий результат:

$$I = \frac{1}{2} E_m^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = 0.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $I = \frac{1}{2} E_m^2 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = 1,2 \text{ Вт/м}^2.$

Приклад 3.6

По прямому провіднику круглого перерізу проходить постійний електричний струм I . Знайти потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню цього провідника, що має опір R .

Розв'язання

$\Phi_{II} - ?$ $I; R.$	Для розв'язання задачі визначимо напруженість магнітного та електричного полів біля поверхні провідника. Далі, використовуючи формулу (3л), знайдемо вектор Пойнтінга:
----------------------------	--

$$\dot{\Pi} = [\dot{E} \times \dot{H}]. \quad (1)$$

Потік вектора \dot{S} через бічну поверхню знайдемо за допомогою співвідношення

$$\Phi_{II} = \int_S \dot{\Pi} d\dot{S}. \quad (2)$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. Визначимо напруженість електричного поля у провіднику, використовуючи закон Ома в диференціальному вигляді:

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (3)$$

У цьому рівнянні ρ – питомий опір провідника, густина електричного струму визначається як

$$j = I / S_{\perp}, \quad (4)$$

S_{\perp} – площа поперечного перерізу (див. рис. 3.2). З формул (3), (4) знаходимо

$$E = \rho I / S_{\perp}. \quad (5)$$

Напруженість магнітного поля біля поверхні провідника знаходимо, використовуючи формулу для індукції магнітного поля нескінченного прямого провідника зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (6)$$

де r – радіус провідника (рис. 3.2), та зв'язок між індукцією і напруженістю магнітного поля

$$B = \mu_0 \mu H. \quad (7)$$

Звідси ($\mu = 1$)

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (8)$$

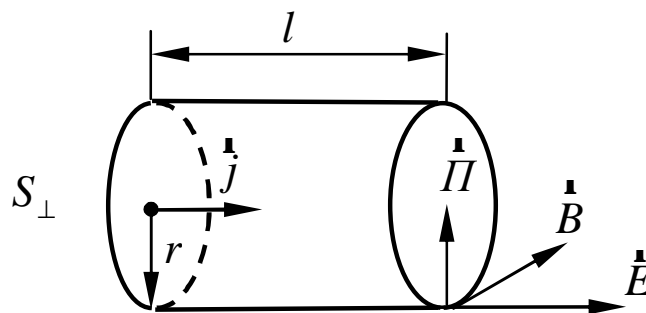


Рисунок 3.2

Вектори напруженості електричного та магнітного полів біля поверхні провідника взаємно перпендикулярні (рис. 3.2). Напрямок (рис. 3.2) і модуль вектора Пойнтінга знаходимо за допомогою (1), (5), (8):

$$\Pi = \frac{\rho I}{S_{\perp}} \frac{I}{2\pi r}. \quad (9)$$

Бачимо, що модуль вектора Пойнтінга біля будь-яких точок поверхні провідника має **однакові значення** та напрямлений уздовж нормалі до бічної поверхні. Тому потік вектора Пойнтінга через бічну поверхні буде дорівнювати

$$\begin{aligned}\Phi_{\Pi} &= \int_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = \int_S P dS \cos(0) = P \int_S dS = P \cdot S_{\text{бічн}} = \\ &= P \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\rho l}{S_{\perp}} \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\rho l}{S_{\perp}} I^2 = RI^2.\end{aligned}\quad (10)$$

У формулі (10) використали, що площа бічної поверхні циліндричного провідника $S_{\text{бічн}} = 2\pi r l$ (l – довжина провідника (рис. 3.2)) та опір цього провідника $R = \rho l / S_{\perp}$.

Отже, шуканий потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню провідника визначається формулою (10).

Аналіз отриманого результату

Потік вектора Пойнтінга Φ_{Π} визначає кількість енергії електромагнітного поля, що проходить через бічну поверхню **всередину** провідника (зверніть увагу на напрямок вектора Пойнтінга на рис. 3.2) за одиницю часу. Із закону Джоуля-Ленца відомо, що у провіднику відбувається перетворення енергії електромагнітного поля в теплову енергію, і кількість тепла, що виділяється за одиницю часу в провіднику, дорівнює

$$dQ / dt = RI^2.$$

Виходячи із закону збереження енергії, робимо висновок, що енергія електромагнітного поля, що входить у провідник за одиницю часу, повинна дорівнювати кількості тепла, що виділяється за цей самий час, тобто

$$\Phi_{\Pi} = RI^2.\quad (11)$$

Порівнюємо (11) з (10) і бачимо, що ці формули збігаються. Отже, розрахункова формула (10) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Phi_{II} = RI^2$.

3.2 Задачі для самостійного розв'язання

3.1 Задано рівняння плоскої хвилі $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, де $A = 0,5$ см; $\omega = 628$ с⁻¹; $k = 2$ м⁻¹. Визначити: 1) частоту коливань ν і довжину хвилі λ ; 2) фазову швидкість v ; 3) максимальні значення швидкості v_{\max} і прискорення a_{\max} коливань частинок середовища.

3.2 Довести, що вираз $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ задовольняє умову хвильового рівняння $\partial^2 \xi / \partial x^2 = (\partial^2 \xi / \partial t^2) / v^2$ за умови, що $\omega = kv$.

3.3 Які з наведених нижче функцій задовольняють умову хвильового рівняння?

1) $\xi(x, t) = at + bx$; 6) $\xi(x, t) = \ln(at - bx)$;

2) $\xi(x, t) = at^2 - bx$; 7) $\xi(x, t) = (at + bx)^2$;

3) $E(x, t) = E_m \cos(\omega t - kx)$; 8) $\xi(x, t) = \exp(at - bx)$;

4) $\xi(x, t) = \cos(at + bx^2)$ 9) $\xi(x, t) = A \exp i(\omega t - kx)$;

5) $\xi(x, t) = \sqrt{at + bx}$; 10) $\psi(x, t) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right)$.

3.4 Показати, що будь-яка функція $f(t + \alpha x)$, де α – стала, яку можна продиференціювати, є розв'язком хвильового рівняння. Який фізичний зміст сталої α ?

3.5 Плоска звукова хвиля збуджується джерелом, частота коливань якого $\nu = 200$ Гц. Амплітуда A коливань

джерела дорівнює 4 мм. 1) Написати рівняння коливань джерела $\xi(0, t)$, якщо в початковий момент зміщення точок джерела максимальне; 2) знайти зміщення $\xi(x, t)$ точок середовища, що знаходяться на відстані $x = 100$ см від джерела, у момент $t = 0,1$ с. Швидкість v звукової хвилі взяти такою, що дорівнює 300 м/с. Загасаннями знехтувати.

3.6 Звукові коливання частота ν коливань яких 0,5 кГц та амплітуда $A = 0,25$ мм, поширюються в пружному середовищі. Довжина хвилі $\lambda = 70$ см. Визначити: 1) швидкість v поширення хвиль; 2) максимальну швидкість ξ_{\max} частинок середовища.

3.7 Плоска звукова хвиля має період $T = 3$ мс, амплітуду $A = 0,2$ мм і довжину хвилі $\lambda = 1,2$ м. Для точок середовища, віддалених від джерела коливань на відстань $x = 2$ м, знайти: 1) зміщення $\xi(x, t)$ у момент $t = 7$ мс; 2) швидкість ξ і прискорення $\ddot{\xi}$ для того ж моменту часу. Початкову фазу коливань прийняти взяти такою, що дорівнює нулю.

3.8 Від джерела коливань поширюється хвиля вздовж прямої лінії. Амплітуда A коливань дорівнює 10 см. Чому дорівнює зміщення точки, яка віддалена від джерела на $x = 3/4\lambda$, у момент, коли від початку коливань пройшов час $t = 0,9T$.

3.9 Хвиля з періодом $T = 1,2$ с і амплітудою коливань $A = 2$ см поширюється зі швидкістю $v = 15$ м/с. Чому дорівнює зміщення $\xi(x, t)$ точки, що знаходиться на відстані $x = 45$ м від джерела хвиль, у той момент, коли від початку коливань джерела пройшов час $t = 4$ с.

3.10 Дві точки знаходяться на відстані $x = 50$ см одна від одної на прямій, уздовж якої поширюється хвиля зі

швидкістю $v = 50$ м/с. Період T коливань дорівнює $0,05$ с. Знайти різницю фаз $\Delta\phi$ коливань у цих точках.

3.11 Визначити різницю фаз $\Delta\phi$ коливань джерела хвиль, що знаходиться в пружному середовищі, і точки цього середовища, віддаленої на $x = 2$ м від джерела. Частота ν коливань дорівнює 5 Гц. Хвилі поширюються зі швидкістю $v = 40$ м/с.

3.12 Хвиля поширюється в пружному середовищі зі швидкістю $v = 100$ м/с. Найменша відстань Δx між точками середовища, фази коливань яких протилежні, дорівнює 1 м. Визначити частоту ν коливань.

3.13 Визначити швидкість v поширення хвилі в пружному середовищі, якщо різниця фаз $\Delta\phi$ двох точок середовища, віддалених одна від одної на $\Delta x = 10$ см, дорівнює $\pi/3$. Частота ν коливань дорівнює 25 Гц.

3.14 Як рухаються частинки середовища у плоскій хвилі, що поширюється вздовж осі X у пружному середовищі?

3.15 Уздовж осі X поширюється плоска гармонічна хвиля зі швидкістю $v = 20$ м/с. Дві точки середовища, які містяться на відстанях $x = 12$ м і $x = 15$ м від джерела хвиль, коливаються з амплітудою $A = 0,1$ м і різницею фаз $\Delta\phi = 3\pi/4$. Знайти: 1) довжину хвилі λ ; 2) написати рівняння хвилі $\xi(x, t)$; 3) зміщення згаданих точок у момент часу $t = 0,5$ с. Початкова фаза хвилі дорівнює нулю.

3.16 Плоска хвиля із частотою ω поширюється так, що деяка фаза коливань переміщається вздовж осей x , y , z зі швидкостями відповідно v_1 , v_2 , v_3 . Знайти хвильовий вектор \vec{k} , припускаючи, що орти осей координат \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z є заданими.

3.17 Рівняння біжучої плоскої звукової хвилі має вигляд $\xi = 60 \cos(1800t - 5,3x)$, де ξ у мікрометрах, t у секундах, x у метрах. Знайти: 1) відношення амплітуди зміщення частинок середовища до довжини хвилі; 2) амплітуду коливань швидкості частинок середовища і її відношення до швидкості поширення хвилі; 3) амплітуду коливань відносної деформації середовища та її зв'язок з амплітудою коливання швидкості частинок середовища.

3.18 Плоска гармонічна хвиля з періодом $T = 3,5$ мкс і амплітудою $A = 30$ мкм поширюється у пружному середовищі вздовж осі x . Різниця фаз коливань у точках, що віддалені на $\Delta x = 1$ мм одна від одної, дорівнює $\pi/3$. Знайти: 1) швидкість v поширення хвилі; 2) зміщення ξ , швидкість $\dot{\xi}$ і прискорення $\ddot{\xi}$ для точок, у яких відносна деформація середовища $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$; 3) амплітуду коливань швидкості $\dot{\xi}_{\max}$ частинок середовища.

3.19 Пружна плоска хвиля з амплітудою $A = 40$ мкм поширюється вздовж осі x , причому її джерело знаходиться у площині $x = 0$. Початкова фаза хвилі дорівнює нулю. Яка відносна деформація середовища у точці, віддаленій від джерела на відстань $x = \lambda/8$ у момент часу, коли від початку відліку пройшов час $t = T/3$ (T – період). Максимальна швидкість частинок середовища $u_{\max} = 70$ м/с, швидкість хвилі $v = 3,5$ км/с.

3.20 В однорідному пружному середовищі поширюється плоска хвиля вигляду $\xi = a \cos(\omega t - kx)$. Зобразити для моменту $t = 0$: 1) графіки залежності величин ξ , $\partial \xi / \partial t$, $\partial \xi / \partial x$ від x ; 2) напрям швидкості частинок середовища в точках, де $\xi = 0$, для випадків поздовжньої і поперечної хвиль; 3) приблизний графік розподілу густини середовища $\rho(x)$ для поздовжньої хвилі.

3.21 У пружному однорідному середовищі поширюються дві плоскі хвилі, одна – вздовж осі x , інша – вздовж осі y : $\xi_1 = a \cos(\omega t - kx)$, $\xi_2 = a \cos(\omega t - ky)$. Знайти характер руху частинок середовища у площині xu , якщо обидві хвилі: 1) поперечні й напрямок коливань збігається; 2) поздовжні.

3.22 Точкове ізотропне джерело випромінює звукові коливання з частотою $\nu = 1,45$ кГц. На відстані $r_0 = 5,0$ м від джерела амплітуда зміщення частинок середовища $a_0 = 5,0$ мкм, а в точці А, що знаходиться на відстані $r = 10,0$ м від джерела, амплітуда зміщення в $\eta = 3,0$ разів менша a_0 . Знайти: 1) коефіцієнт загасання хвилі γ ; 2) амплітуду коливань швидкості частинок середовища в точці А.

3.23 Знайти коефіцієнт загасання γ звукової хвилі, якщо на відстанях $r_1 = 10$ м і $r_2 = 20$ м від точкового ізотропного джерела звуку значення інтенсивності звукової хвилі відрізняються одна від одного в $\eta = 4,5$ разів.

3.24 Від ізотропного джерела поширюється сферична хвиля у поглинальному середовищі. Частота випромінювання $\nu = 150$ Гц. На відстані $r_2 = 15$ м від джерела амплітуда зміщення частинок середовища менша у $\eta = 2,5$ разів, ніж на відстані $r_1 = 10$ м. Знайти: 1) коефіцієнт загасання хвилі γ ; 2) довжину λ і швидкість v хвилі, якщо різниця фаз коливань у згаданих точках $\Delta\phi = \pi/3$.

3.25 Знайти швидкість v поширення поздовжніх пружних коливань у таких металах: 1) алюміній; 2) мідь; 3) вольфрам.

3.26 Визначити максимальне і мінімальне значення довжини λ звукової хвилі, що сприймається людським вухом, відповідає граничним частотам $\nu_1 = 16$ Гц і $\nu_2 = 20$ кГц. Швидкість звуку взяти такою, що дорівнює 340 м/с.

3.27 Визначити швидкість v звуку в азоті при температурі $T = 300$ К.

3.28 Визначити швидкість v звуку в повітрі при температурах $T_1 = 290$ К і $T_2 = 350$ К.

3.29 Визначити швидкість звуку при нормальних умовах у: 1) гелії; 2) азоті; 3) вуглекислому газі.

3.30 Спостерігач, що знаходиться на відстані $l = 800$ м від джерела звуку, чує звук, що прийшов по повітрю, на $\Delta t = 1,78$ с пізніше, ніж звук, що прийшов по воді. Визначити швидкість v звуку у воді, якщо температура T повітря дорівнює 350 К.

3.31 На відстані $R = 3$ км від спостерігача з висоти $h = 4$ км вертикально вдарила блискавка. Який час спостерігач чутиме грім від неї?

3.32 Швидкість v звуку в деякому газі за нормальних умов дорівнює 308 м/с. Густина ρ газу дорівнює $1,78$ кг/м³. Визначити відношення c_p / c_v для цього газу.

3.33 Знайти відношення швидкостей v_1 / v_2 звуку у водні та вуглекислому газі при однаковій температурі газів.

3.34 Температура T повітря біля поверхні Землі дорівнює 300 К; при збільшенні висоти температура зменшується на $\Delta T = 7$ мК на кожен метр висоти. За який час звук, поширюючись, досягне висоти $h = 8$ км?

3.35 За скільки часу звукові коливання пройдуть відстань l між точками А і В, якщо температура повітря

між ними змінюється лінійно від T_1 до T_2 ? Швидкість звуку в повітрі $v = a\sqrt{T}$, де a – стала.

3.36 Є два джерела, які виконують коливання в однаковій фазі й збуджують в навколишньому середовищі плоскі хвилі однакової частоти та амплітуди ($A_1 = A_2 = 1$ мм). Знайти амплітуду A коливань точки середовища, віддаленої від одного джерела коливань на відстань $x_1 = 3,5$ м і від іншого – на $x_2 = 5,4$ м. Напрямки коливань у розглянутій точці збігаються. Довжина хвилі $\lambda = 0,6$ м.

3.37 У гірській породі на відстані $a = 8$ м один від одного розміщені два циліндричних заряди вибухової речовини. Під час вибуху від кожного заряду в породі поширюється циліндрична хвиля напруги. На досліді встановлено, що зміщення частинок породи на відстані r від осі заряду має вигляд $\xi(r) = (A_0 / r^{3/2}) \cos(\omega(t - r/v))$, де $A_0 = 10^{-3} \text{ м}^{5/2}$, $\omega = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $v = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Визначити максимальне зміщення частинок породи в точці, що міститься на відстані $r = 9$ м від кожного заряду.

3.38 Стояча хвиля утворюється при накладенні біжучої хвилі та хвилі, відбитої від межі поділу двох середовищ, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі. Знайти положення (відстань від межі розділу середовищ) вузлів і пучностей стоячої хвилі, якщо відбиття відбувається: 1) від середовища меншої густини; 2) від середовища більшої густини. Швидкість v поширення звукових коливань дорівнює 340 м/с, а частота $\nu = 3,4$ кГц.

3.39 У скільки разів швидкість поздовжньої хвилі в міді більша, ніж швидкість поперечної хвилі? Модуль зсуву для міді $G = 12$ ГПа.

3.40 Визначити довжину λ біжучої хвилі, якщо в стоячій хвилі відстань l між: 1) першою та сьомою пучностями дорівнює 15 см; 2) першим і четвертим вузлами дорівнює 15 см.

3.41 У трубі довжиною $l = 1,2$ м знаходиться повітря при температурі $T = 300$ К. Визначити мінімальну частоту ν_{\min} можливих коливань повітряного стовпа у двох випадках: 1) труба відкрита; 2) труба закрита.

3.42 Один зі способів визначення швидкості звуку полягає в такому. У широкій трубці **A** може вільно рухатися поршень **B**. Перед відкритим кінцем трубки **A**, який сполучений за допомогою гумової трубки з вухом спостерігача, розташований звучний камертон **K** (рис. 3.3). Відсуваючи поршень **B** від кінця трубки **A**, спостерігач фіксує ряд збільшень і зменшень гучності звуку, які йдуть один за одним. Знайти швидкість v звуку в повітрі, якщо при частоті коливань $\nu = 440$ Гц двом послідовним посиленням інтенсивності звуку відповідає відстань Δl між положеннями поршня, що дорівнює 0,375 м.

3.43 В однорідному пружному середовищі встановилася плоска стояча хвиля вигляду $\xi = a \cos kx \cdot \cos \omega t$.

Зобразити: 1) графіки залежностей величин ξ , $\partial \xi / \partial x$ від x у моменти

$t = 0$ і $t = T/2$, де T – період коливань; 2) графіки розподілу густини середовища $\rho(x)$ для поздовжніх коливань у моменти $t = 0$ і $t = T/2$; 3) графік розподілу швидкостей частинок середовища в момент $t = T/4$;

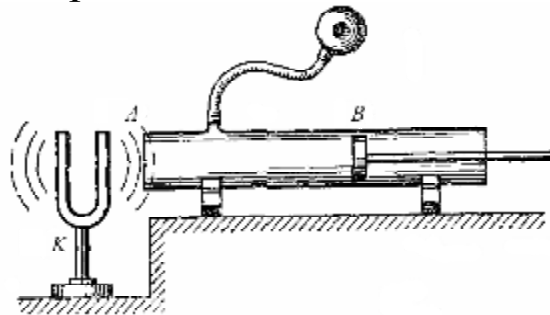


Рисунок 3.3

вказати напрямки швидкостей у цей момент у пучностях для поздовжніх і поперечних коливань.

3.44 На струні довжиною 120 см утворилася стояча хвиля, причому точки струни, для яких амплітуда зсуву дорівнює 3,5 мм, віддалені одна від одної на 15,0 см. Знайти максимальну амплітуду зміщення. Якому обертону відповідають ці коливання?

3.45 На струні завдовжки $l = 1,5$ м утворилась стояча хвиля, причому відстані між точками, в яких коливання відбуваються з амплітудою $A = 4$ мм, дорівнюють $\Delta x_1 = 9$ см і $\Delta x_2 = 16$ см. Знайти довжину хвилі та амплітуду в середині пучності. Якому обертону відповідають ці коливання?

3.46 Знайти відношення частот основного тону двох однакових струн після того, як одну з них розтягнули на $\eta_1 = 2$ %, а іншу – на $\eta_2 = 4$ %. Натяг струни вважати пропорційним розтягуванню.

3.47 Визначити, як і у скільки разів зміниться частота основного тону натягнутої струни, якщо її довжину вкоротити на 35 %, а натяг збільшити на 70 %.

3.48 Мідний стрижень довжиною $l = 50$ см закріплений посередині. Знайти число поздовжніх власних коливань цього стрижня в діапазоні частот від 20 до 50 кГц. Які їх частоти?

3.49 В оптичному резонаторі лазера плоскі дзеркала паралельні одне одному. Між дзеркалами утворюються стоячі світлові хвилі. 1) Який інтервал $\Delta \nu$ між двома власними частотами резонатора, якщо довжина його $L = 10$ см? 2) Яка кількість півхвиль n вкладається в цьому резонаторі, якщо довжина хвилі, що генерується лазером, $\lambda = 0,63$ мкм?

3.50 Струна масою m закріплена з обох кінців. У ній відбуваються коливання основного тону із циклічною частотою ω і максимальною амплітудою зміщення $a_{\text{макс}}$. Знайти: 1) максимальну кінетичну енергію струни; 2) середню за період коливання кінетичну енергію струни.

3.51 Ультразвукова хвиля відбивається від дна водоймища. У скільки разів амплітуда відбитої від дна хвилі більша за амплітуду хвилі, що проходить у донну породу? Густина донної породи $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, а швидкість поздовжньої хвилі в ній $c = 3000 \text{ м/с}$.

3.52 Плоска звукова хвиля падає перпендикулярно до плоскої межі поділу вода – повітря. Визначити інтенсивність заломленої хвилі у процентах по відношенню до інтенсивності падаючої хвилі.

3.53 Потяг проходить повз станції зі швидкістю $u = 40 \text{ м/с}$. Частота ν_0 тону гудка електровоза дорівнює 300 Гц . Визначити частоту ν тону, яку чує людина, що стоїть на платформі, у двох випадках: 1) потяг наближається; 2) потяг віддаляється.

3.54 Повз нерухомий електровоз, гудок якого дає сигнал частотою $\nu_0 = 300 \text{ Гц}$, проїжджає потяг зі швидкістю $u = 40 \text{ м/с}$. Яку частоту ν начебто чує пасажир, коли потяг наближається до електровоза, коли віддаляється від нього?

3.55 Коли поїзд проходить повз нерухомого спостерігача, висота тону звукового сигналу змінюється стрибком. Визначити відносну зміну частоти $\Delta\nu/\nu$, якщо швидкість u поїзда дорівнює 54 км/год .

3.56 Резонатор і джерело звуку частотою $\nu_0 = 8 \text{ кГц}$ розміщені вздовж прямої. Резонатор налаштований на довжину хвилі $\lambda = 4,2 \text{ см}$ і встановлений нерухомо.

Джерело звуку може рухатися вздовж прямої. З якою швидкістю u і в якому напрямку повинне рухатися джерело звуку, щоб збуджувані ним звукові хвилі викликали коливання резонатора?

3.57 Поїзд рухається зі швидкістю $u = 120$ км/год. Він дає свисток тривалістю $\tau_0 = 5$ с. Якою буде удавана тривалість τ свистка для нерухомого спостерігача, якщо: 1) потяг наближається до нього; 2) віддаляється? Взяти швидкість звуку такою, що дорівнює 348 м/с.

3.58 На шосе зближуються дві автомашини зі швидкостями $u_1 = 30$ м/с і $u_2 = 20$ м/с. Перша з них подає звуковий сигнал частотою $\nu_1 = 600$ Гц. Знайти частоту ν_2 звуку, яка сприймається водієм другої автомашини, у двох випадках: 1) до зустрічі; 2) після зустрічі. Чи зміниться відповідь (якщо зміниться, то як) у разі подачі сигналу другою машиною?

3.59 Вузкий пучок ультразвукових хвиль частотою $\nu_0 = 50$ кГц спрямований від нерухомого локатора на підводний човен, що наближається. Визначити швидкість u підводного човна, якщо частота ν_1 биття (різниця частот коливань джерела і сигналу, який відбився від човна) дорівнює 250 Гц. Швидкість ν ультразвуку в морській воді взяти 1,5 км/с.

3.60 Джерело звукових коливань із частотою $\nu_0 = 1700$ Гц і приймач знаходяться в одній точці. У момент $t = 0$ джерело починає віддалятися від приймача зі сталим прискоренням $\overline{a} = 10,0$ м/с². Вважаючи швидкість звуку $\nu = 340$ м/с, знайти частоту коливань, що сприймаються нерухомим приймачем через $t = 10,0$ с після початку руху джерела.

3.61 Джерело звуку, власна частота якого $\nu_0 = 1,8$ кГц, рухається рівномірно по прямій, що віддалена від нерухомого спостерігача на $l = 250$ м. Швидкість джерела становить $\eta = 0,80$ швидкості звуку. Знайти: 1) частоту звуку, яку сприймає спостерігач у момент, коли джерело виявиться навпроти нього; 2) відстань між джерелом і спостерігачем у момент, коли сприйнята спостерігачем частота $\nu = \nu_0$.

3.62 По циліндричній трубці діаметром $d = 20$ см і довжиною $l = 5$ м, яка заповнена сухим повітрям, поширюється звукова хвиля із середньою за період інтенсивністю $I = 50$ мВт/м². Знайти енергію W звукового поля, що зосереджене у трубці.

3.63 Інтенсивність звуку $I = 1$ Вт/м². Визначити середню об'ємну густину $\langle \omega \rangle$ енергії звукової хвилі, якщо звук поширюється у сухому повітрі за нормальних умов.

3.64 Потужність N ізотропного точкового джерела звукових хвиль дорівнює 10 Вт. Яка середня об'ємна густина $\langle \omega \rangle$ енергії на відстані $r = 10$ м від джерела хвиль? Температуру T повітря взяти 250 К.

3.65 Знайти потужність N точкового ізотропного джерела звуку, якщо на відстані $r = 25$ м від нього інтенсивність I звуку дорівнює 20 мВт/м². Яка середня об'ємна густина $\langle \omega \rangle$ енергії на цій відстані?

3.66 Визначити питомий акустичний опір Z_S повітря за нормальних умов.

3.67 Визначити питомий акустичний опір Z_S води при температурі $t = 15^\circ$ С.

3.68 Яка максимальна швидкість ξ_{\max} коливального руху частинок кисню, через який проходять звукові хвилі,

якщо амплітуда звукового тиску $p_0 = 0,2$ Па, температура T кисню дорівнює 300 К і тиск $p = 100$ кПа?

3.69 Визначити акустичний опір Z_a повітря в трубці діаметром $d = 20$ см при температурі $T = 300$ К і тиску $p = 200$ кПа.

3.70 Звук частотою $\nu = 400$ Гц поширюється в азоті при температурі $T = 290$ К і тиску $p = 104$ кПа. Амплітуда звукового тиску $p_0 = 0,5$ Па. Визначити амплітуду A коливань частинок азоту.

3.71 Визначити амплітуду p_0 звукового тиску, якщо амплітуда A коливань частинок повітря дорівнює 1 мкм. Частота звуку $\nu = 600$ Гц.

3.72 На відстані $r = 100$ м від точкового ізотропного джерела звуку амплітуда звукового тиску $p_0 = 0,2$ Па. Визначити потужність N джерела, якщо питомий акустичний опір Z_s повітря дорівнює 420 Па·с/м. Поглинанням звуку в повітрі знехтувати.

3.73 Джерело звуку невеликих лінійних розмірів має потужність $N = 1$ Вт. Знайти амплітуду звукового тиску p_0 на відстані $r = 100$ м від джерела звуку, вважаючи його ізотропним. Загасанням звуку знехтувати.

3.74 Чи переносить енергію хвиля, рівняння якої $\xi(x, t) = A \cos kx \cdot \cos \omega t$?

3.75 У сухому повітрі за нормальних умов інтенсивність I звуку дорівнює 10 пВт/м². Визначити питомий акустичний опір Z_s повітря за цих умов і амплітуду p_0 звукового тиску.

3.76 Знайти інтенсивності I_1 та I_2 звуку, відповідні амплітудам звукового тиску $p_{01} = 700$ мкПа і $p_{02} = 40$ мкПа.

3.77 Визначити рівень інтенсивності L_p звуку, якщо його інтенсивність дорівнює: 1) 100 пВт/м², 2) 10 мВт/м².

3.78 Рівень гучності авіаційного двигуна $L = 100$ дБ. Яка амплітуда коливань частинок повітря для частоти звуку $\nu = 2$ кГц за нормальних умов?

3.79 На відстані $r_1 = 24$ м від точкового ізотропного джерела звуку рівень його інтенсивності $L_p = 32$ дБ. Знайти рівень інтенсивності L_p звуку цього джерела на відстані $r_2 = 16$ м.

3.80 У сталюму стрижні діаметром $d = 1$ см поширюється поздовжня хвиля $\xi(x, t) = \xi_0 \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{v_1} - t \right)$, де $\xi_0 = 10^{-4}$ см, $T = 2\pi$ мс. Визначити максимальну силу, що діє в перерізі x стрижня.

3.81 Коефіцієнт поглинання звукових хвиль у повітрі χ залежить від частоти звуку ν за формулою $\chi = a\nu^2$, де стала $a = 2 \cdot 10^{-11}$ с²·м⁻¹. На якій відстані x_0 інтенсивність плоскої звукової хвилі, що поширюється у повітрі вздовж осі x , зменшиться у $n = 2$ рази: 1) для звукових коливань – із частотою $\nu = 10$ Гц; 2) для ультразвукових коливань – із частотою $\nu = 5 \cdot 10^5$ Гц?

3.82 Звукова хвиля пройшла через перешкоду, внаслідок чого рівень інтенсивності L_p звуку зменшився

на 30 дБ. У скільки разів зменшилась інтенсивність I звуку?

3.83 Волоконні світловоди із загасанням 15 дБ/км використовуються як кабелі телефонного і телевізійного зв'язку. У скільки разів зменшується інтенсивність світлової хвилі на шляху 1 км?

3.84 Залежність коефіцієнта поглинання χ звукових хвиль від частоти звуку ν визначається за формулою $\chi = a\nu^2$, де для повітря $a_n = 2 \cdot 10^{-11} \text{ с}^2\text{м}^{-1}$; для води $a_e = 3 \cdot 10^{-14} \text{ с}^2\text{м}^{-1}$. На якій відстані загасання плоских ультразвукових хвиль із частотою $\nu = 10^5$ Гц становить $L = 30$ дБ: 1) у повітрі; 2) у воді?

3.85 Рівень інтенсивності L_p шуму двигуна мотора дорівнює 60 дБ. Який буде рівень інтенсивності, якщо одночасно будуть працювати: 1) два таких двигуни мотори; 2) десять таких двигунів моторів?

3.86 Три тони, частоти яких дорівнюють відповідно $\nu_1 = 50$ Гц, $\nu_2 = 200$ Гц і $\nu_3 = 1$ кГц, мають однаковий рівень інтенсивності $L_p = 40$ дБ. Визначити рівні гучності L_N цих тонів.

3.87 Рівень гучності тону частотою $\nu = 30$ Гц спочатку був $L_{N1} = 10$ фонів, а потім підвищився до $L_{N2} = 80$ фонів. У скільки разів збільшилась інтенсивність тону?

3.88 Потужність N точкового ізотропного джерела звуку дорівнює 100 мкВт. Знайти рівень гучності L_N при частоті $\nu = 500$ Гц на відстані $r = 10$ м від джерела звуку.

3.89 На відстані $r = 100$ м від точкового ізотропного джерела звуку рівень гучності L_N при частоті $\nu = 500$ Гц дорівнює 20 дБ. Визначити потужність x джерела звуку.

3.90 Плоска звукова хвиля поширюється вздовж осі X . Коефіцієнт загасання хвилі $\gamma = 0,0230 \text{ м}^{-1}$. У точці $x = 0$ рівень гучності $L = 60$ дБ. Знайти: 1) рівень гучності в точці з координатою $x = 50$ м; 2) координату x точки, в якій звук вже не чути.

3.91 На відстані $r = 100$ м від точкового ізотропного джерела звуку, частота якого 200 Гц, рівень гучності $L = 50$ дБ. Поріг чутності на цій частоті відповідає інтенсивності звуку $I_0 = 0,10 \text{ нВт/м}^2$. Коефіцієнт загасання звукової хвилі $\gamma = 5,0 \text{ м}^{-1}$. Знайти звукову потужність джерела.

3.92 Плоска електромагнітна хвиля падає перпендикулярно на поверхню плоскопаралельного шару завтовшки $l = 10$ м з немагнітної речовини, діелектрична проникність якої падає від значення $\epsilon = 7$ на передній грані до $\epsilon = 3$ на задній грані за лінійним законом. Знайти час поширення хвилі у цьому шарі.

3.93 Яким чином можна розділити у просторі електричне і магнітне поля в електромагнітній хвилі?

3.94 Визначити довжину електромагнітної хвилі частотою $\nu = 130$ МГц у кремнію ($\epsilon = 12$, $\mu = 1$).

3.95 Електромагнітна хвиля із частотою $\nu = 3$ МГц переходить з вакууму в немагнітне середовище з діелектричною проникністю $\epsilon = 4$. Знайти зміну довжини хвилі.

3.96 Плоска електромагнітна хвиля із частотою $\nu = 10$ МГц поширюється в слабопровідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 10 \text{ мСм/м}$ і діелектричною проникністю $\epsilon = 9$. Знайти відношення амплітуд густин струмів провідності та зміщення.

3.97 Знайти середнє значення вектора Пойнтінга $\langle \dot{\mathbf{S}} \rangle$ для плоскої електромагнітної хвилі $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_m \cos(\omega t - \dot{k}r)$, якщо хвиля поширюється у вакуумі.

3.98 Плоска гармонічна лінійно поляризована електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі. Амплітуда напруженості електричної складової хвилі $E = 50$ мВ/м, частота $\nu = 100$ МГц. Знайти: 1) діюче значення густини струму зміщення; 2) середню за період коливання густину потоку енергії.

3.99 У вакуумі в напрямку осі x встановилася стояча електромагнітна хвиля, електрична складова якої $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Знайти магнітну складову хвилі $\dot{\mathbf{B}}(x, t)$. Зобразити приблизну картину розподілу електричної і магнітної складових хвилі ($\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{B}}$) у моменти $t = 0$ і $t = T/4$, де T – період коливань.

3.100 У вакуумі вздовж осі x встановилася стояча електромагнітна хвиля $\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Знайти x -ву проекцію вектора Пойнтінга $S_x(x, t)$ і її середнє за періодом коливань значення.

3.101 Показати, що на межі розділу двох середовищ нормальні складові вектора Пойнтінга не терплять розриву, тобто $S_{1n} = S_{2n}$.

3.102 Заряджена частинка рухається вздовж осі y за законом $y = a \cos \omega t$. Точка спостереження P знаходиться на осі x на відстані l від частинки ($l \gg a$). Знайти відношення густин потоку електромагнітного випромінювання S_1 / S_2 в точці P у моменти, коли

координата частинки $y_1 = 0$ і $y_2 = a$. Обчислити це відношення, якщо $\omega = 3,3 \cdot 10^6$ рад/с і $l = 190$ м.

3.103 Вважаючи, що частинка має форму кульки і поглинає все світло, що на неї падає, знайти радіус частинки, при якому гравітаційне тяжіння її до Сонця буде компенсуватися силою світлового тиску. Потужність світлового випромінювання Сонця $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, густина частинки $\rho = 1,0$ г/см³.

ТЕМА 4 ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

Основні формули

Умови інтерференційних максимумів

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4a)$$

і мінімумів

$$\Delta = \pm (m + 1/2)\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) . \quad (4б)$$

Ширина інтерференційної смуги

$$\Delta x = \lambda / \varphi, \quad (4в)$$

де φ – кутова відстань між джерелами.

Довжина, час і радіус когерентності пов'язані співвідношеннями

$$l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}} \approx \lambda_0^2 / \Delta\lambda, \quad \rho_{\text{ког}} \approx \lambda_0 / \psi, \quad (4г)$$

де ψ – кутовий розмір джерела.

При відбитті світла від оптично більш густого середовища фаза хвилі змінюється стрибком на π .

Різниця ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої пластинки,

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \lambda_0 / 2, \quad (4д)$$

де b – товщина пластинки; θ – кут падіння хвиль.

Радіуси світлого $r^{сб}$ і темного $r^{темн}$ кілець Ньютона з номером у відбитому світлі (R – радіус кривизни лінзи):

$$r^{сб} = \sqrt{R\lambda_0(2m-1)/2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (4е)$$

$$r^{темн} = \sqrt{R\lambda_0 2m/2}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) . \quad (4е)$$

4.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1

Плоска монохроматична світлова хвиля падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, що розміщені одна від одної на відстані $d = 2,5$ мм. На екрані, який знаходиться за діафрагмою на $l = 100$ см, утворюється система інтерференційних смуг. На яку відстань a в який бік змістяться ці смуги, коли одну із щілин перекрити скляною ($n = 1,5$) пластинкою товщиною $h = 10$ мкм?

Розв'язання

$a = ?$
 $d = 2,5$ мм;
 $l = 100$ см;
 $h = 10$ мкм;
 $n = 1,5$.

Визначимо зв'язок між різницею ходу променів Δ у точці P на екрані та координатою x цієї точки (рис. 4.1). Розглянемо два випадки: скляна пластинка відсутня, одна з щілин перекрита скляною пластинкою. Знайдемо координати точок x та x' на екрані (рис. 4.1), які відповідають двом вищезазначеним випадкам та однаковій різниці ходу променів Δ . Різниця цих координат і буде шуканою відстанню

$$a = x' - x. \quad (1)$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. Знайдемо різницю ходу Δ променів для точки P (рис. 4.1) з координатою x у разі, якщо щілина S_1 не перекрита скляною пластинкою. Джерела S_1 та S_2 випромінюють хвилі в однаковій фазі. Згідно з визначенням різниця ходу дорівнює

$$\Delta_2 = L_2 - L_1 = n_1(l_2 - l_1), \quad (2)$$

де $L_1 = n_1 l_1$ та $L_2 = n_1 l_2$ – оптичні довжини першого та другого променів відповідно; l_1 та l_2 – відстані від точки P до джерел S_1 та S_2 (рис. 4.1); n_1 – показник заломлення середовища між джерелами та екраном. Знайдемо $l_2 - l_1$,

виходячи з геометричних міркувань. Застосовуючи теорему Піфагора (рис. 4.1), можемо записати

$$l_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2, \quad l_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2.$$

Звідки

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 + l_1)(l_2 - l_1) = 2xd. \quad (3)$$

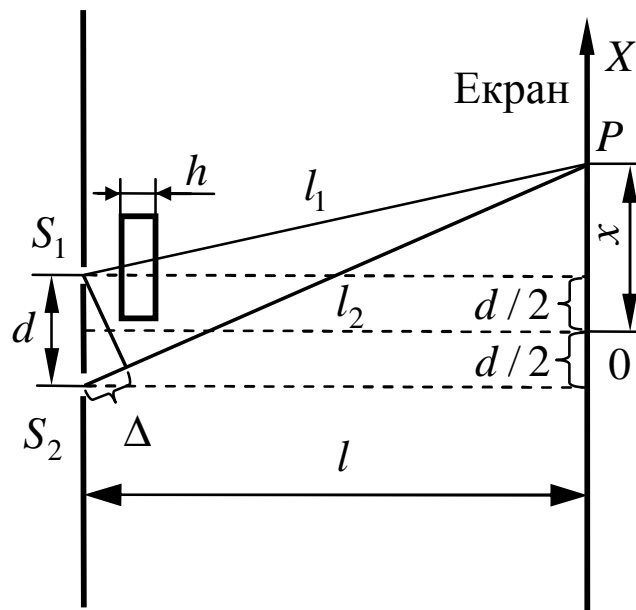


Рисунок 4.1

За умовою задачі відстань між джерелами d значно менша за відстань l до екрана. Відстань x , у межах якої утворюються інтерференційні смуги, також значно менша за l . За таких умов можна припустити, що

$$l_2 + l_1 \approx 2l.$$

Тоді з (3) можемо записати

$$l_2 - l_1 = xd/l. \quad (4)$$

Використовуючи (1), отримуємо

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_1(l_2 - l_1) = n_1xd/l. \quad (5)$$

Співвідношення (5) встановлює зв'язок між оптичною різницею ходу Δ та координатою x точки спостереження, коли скляна пластинка відсутня.

Розглянемо тепер випадок, коли на шляху променя 1 знаходиться скляна пластинка товщиною h . Через те, що відстані x' , d значно менші за l , припускаємо, що промінь 1 падає на поверхню скляної пластинки перпендикулярно. Зазначимо, що точка спостереження P має іншу координату x' , відстані до джерел S_1 та S_2 l'_1 та l'_2 стають також іншими. У цьому разі оптична довжина першого променя збільшується на $n_2h - n_1h$ і становить

$$L'_1 = n_1 l'_1 + h(n - n_1).$$

Тоді різниця ходу променів 1 і 2 дорівнюватиме

$$\Delta' = L'_2 - L'_1 = n_1(l'_2 - l'_1) - h(n - n_1). \quad (6)$$

Різницю відстаней $l'_2 - l'_1$ знаходимо аналогічно, як у (4):

$$l'_2 - l'_1 = x'd / l. \quad (7)$$

Підставляємо (7) в (6) і знаходимо зв'язок між оптичною різницею ходу Δ' та координатою x' точки спостереження, коли на шляху променя 1 знаходиться скляна пластинка:

$$\Delta' = n_1 x'd / l - h(n - n_1). \quad (8)$$

Уведення скляної пластинки призводить до того, що одна і та сама різниця ходу променів

$$\Delta = \Delta' \quad (9)$$

спостерігається у різних точках x та x' . Це означає, що відбувається зміщення інтерференційної картинки на відстань $x' - x$. Знайдемо це зміщення, використовуючи (1), (5), (8) та (9):

$$n_1 x'd / l - h(n - n_1) = n_1 x d / l,$$

$$a = x' - x = h \cdot l(n - n_1) / dn_1 = h \cdot l(n - 1) / d . \quad (10)$$

У (10) використали, що показник заломлення середовища дорівнює одиниці ($n_1 = 1$). Зазначимо, зміщення (10) є додатним. Це означає, що інтерференційна картина зміститься у додатному напрямку осі X , тобто у напрямку перекритої щілини.

Таким чином, шукана величина a визначається формулою (10). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (10) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $a = 2,0$ мм.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (10) у граничному випадку, коли показник заломлення пластини прямує до одиниці $n \rightarrow 1$. З фізичних міркувань зрозуміло, що за такої ситуації оптична довжина першого променя змінюватися не буде. Це означає, що інтерференційна картина зміщуватися також не буде, тобто $a = 0$. З розрахункової формули (10) випливає такий самий результат:

$$a = h \cdot l(n - 1) / d = h \cdot l(1 - 1) / d = 0 .$$

Отже, розрахункова формула (10) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $a = h \cdot l(n - 1) / d = 2,0$ мм, інтерференційна картина зміститься у напрямку перекритої щілини.

Приклад 4.2

На тонку плівку ($n = 1,33$) падає паралельний пучок білого світла. Кут падіння $\theta = 52^\circ$. При якій товщині плівки дзеркально відбите світло буде найбільш сильно забарвлене у жовтий колір ($\lambda_0 = 0,60$ мкм)?

Розв'язання

$b = ?$

$n = 1,33;$

$\theta = 52^\circ;$

$\lambda_0 = 0,60$ мкм.

Якщо дзеркально відбите світло буде найбільш сильно забарвлене у жовтий колір ($\lambda_0 = 0,60$ мкм), то це означає, що ці хвилі підсилюються завдяки явищу інтерференції. Для розв'язання задачі використаємо умову інтерференційного максимуму (4а):

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0,1,2,\dots) \quad (1)$$

та формулу (4д) для різниці ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої пластинки:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \lambda_0 / 2. \quad (2)$$

Підставляємо (2) в (1) і знаходимо

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \lambda_0 / 2 = \pm m\lambda_0,$$

$$b = \lambda_0(2m+1) / \left(4\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \right). \quad (3)$$

Таким чином, шукана потужність товщина плівки визначається формулою (3). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $b = 0,14 \cdot (2m+1)$ мкм, де $m = 0,1,2,\dots$. Зазначимо, що серед цілих чисел m вибираємо лише такі, які у співвідношенні (3) задовольняють умову $b > 0$ (шукаємо розв'язки задачі, у яких товщина плівки є додатною).

Відповідь: $b = \lambda_0(1+2m) / 4\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = 0,14 \cdot (2m+1)$ мкм, де $m = 0,1,2,\dots$

Приклад 4.3

На поверхню скляного ($n = 1,5$) клина нормально падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,7$ мкм і ступенем монохроматичності $\lambda/\Delta\lambda = 10^2$. Кількість інтерференційних смуг у відбитому світлі, які припадають на одиницю довжини поверхні клина, $N = 40$ см⁻¹. Визначити кут α між поверхнями клина. На якій відстані l від вершини клина зникають інтерференційні смуги?

Розв'язання

$\alpha - ?$ $l - ?$

$$n = 1,5;$$

$$\lambda = 0,7 \text{ мкм};$$

$$\lambda/\Delta\lambda = 10^2;$$

$$N = 40 \text{ см}^{-1}.$$

Для розв'язання задачі використаємо співвідношення (4д) для різниці ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої пластинки:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \lambda_0 / 2. \quad (1)$$

Зазначимо, що кут клину в радіанній мірі є малим ($\alpha \ll 1$), тому можна вважати, що світло на клин падає перпендикулярно, тобто кут падіння світла на клин дорівнює нулю $\theta = 0$. Тоді (1) набере вигляду

$$\Delta = 2bn - \lambda_0 / 2. \quad (2)$$

Також використаємо формулу для довжини когерентності (4г):

$$l_{\text{ког}} \approx \lambda_0^2 / \Delta\lambda. \quad (3)$$

Візьмемо до уваги, що інтерференційні смуги зникають, коли різниця ходу світлових хвиль стає більшою за довжину когерентності:

$$\Delta \geq l_{\text{ког}}. \quad (4)$$

Визначимо кут α між поверхнями клина. Для цього розглянемо точки клина A та B , у яких спостерігаються сусідні інтерференційні максимуми (рис. 4.2). Умови

інтерференційного максимуму для цих точок з урахуванням (2) мають вигляд

$$\Delta_1 = 2b_1n - \lambda_0 / 2 = m_1\lambda_0, \quad (5)$$

$$\Delta_2 = 2b_2n - \lambda_0 / 2 = m_2\lambda_0. \quad (6)$$

Тут b_1 та b_2 – товщина клина в точках A та B відповідно (рис. 4.2); цілі числа m_2 та m_1 пов'язані між собою співвідношенням

$$m_2 - m_1 = 1 \quad (7)$$

через те, що в точках A та B спостерігаються сусідні інтерференційні максимуми. Зі співвідношень (6) та (5) неважко отримати

$$2(b_2 - b_1)n = (m_2 - m_1)\lambda_0$$

або з урахуванням (7)

$$2(b_2 - b_1)n = \lambda_0. \quad (8)$$

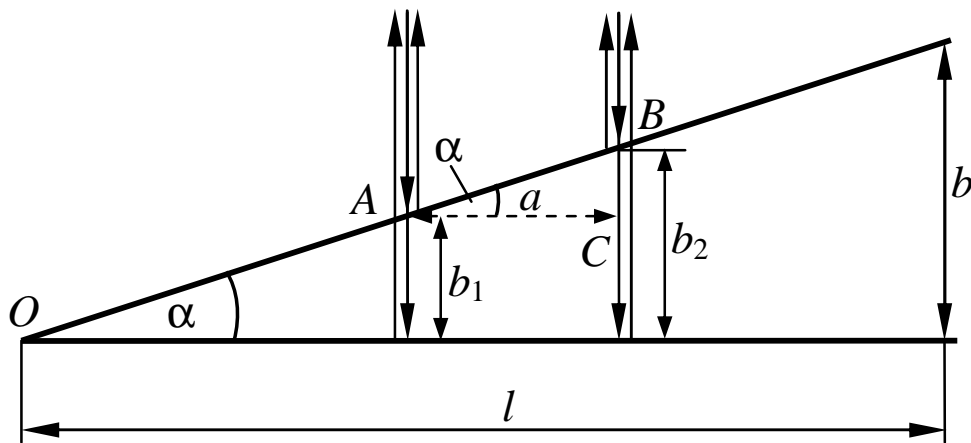


Рисунок 4.2

Різниця товщин $b_2 - b_1$ дорівнює, як випливає з рис. 4.2, відрізку CB . З трикутника ΔABC знаходимо

$$b_2 - b_1 = a \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad (9)$$

де $a = |AC|$ – відстань між сусідніми максимумами. Відстань між сусідніми максимумами a знайдемо, використовуючи те, що кількість інтерференційних смуг, які припадають на одиницю довжини поверхні клина, дорівнює $N = 40 \text{ см}^{-1}$. Це означає, що $a = 1/N$. Тоді

$$b_2 - b_1 = \text{tg}\alpha / N. \quad (10)$$

Підставляємо у (8) співвідношення (10), використовуємо умову $\alpha \ll 1$ й отримуємо

$$\alpha = \lambda_0 N / (2n). \quad (11)$$

Знайдемо відстань l від вершини клина O до точки, в якій зникають інтерференційні смуги. З геометричних міркувань (рис. 4.2) неважко знайти зв'язок між товщиною клина b у цій точці та шуканою довжиною l :

$$b = l \cdot \text{tg}\alpha \approx l \cdot \alpha = \lambda_0 N l / (2n). \quad (12)$$

Тут використали формулу для α (11). Підставляємо (12) у (2), використаємо (3), (4) і знаходимо

$$\lambda_0 N l - \lambda_0 / 2 \approx \lambda_0^2 / \Delta\lambda$$

або

$$l \approx (\lambda_0 / \Delta\lambda + 1/2) / N \approx \lambda_0 / (N\Delta\lambda). \quad (13)$$

Таким чином, шукані величини визначаються формулами (11) та (13). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (11) та (13) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо: $\alpha = 0,053^\circ$; $l = 2,5 \text{ см}$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (11), (13) у граничному випадку, коли кількість інтерференційних смуг, які припадають на одиницю довжини поверхні клина, прямує до нуля $N \rightarrow 0$. З

фізичної точки зору це означає, що товщина плівки не змінюється, а отже, кут клина прямує до нуля. Через те, що товщина плівки не змінюється, відстань від вершини клина до точки, де зникають інтерференційні смуги, буде прямувати до нескінченності. З розрахункових формул (11), (13) випливає такий самий результат:

$$\alpha = \lambda_0 N / (2n) = \lambda_0 0 / (2n) = 0,$$

$$l \approx \lambda_0 / (N \Delta \lambda) = \lambda_0 / (0 \cdot \Delta \lambda) = \infty.$$

Отже, розрахункові формули (11) та (13) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\alpha = \lambda_0 N / (2n) = 0,053^\circ$; $l \approx \lambda_0 / (N \Delta \lambda) = 2,5$ см.

Приклад 4.4

Плоско-опукла лінза радіусом $R = 0,8$ м опуклою поверхнею стикається зі скляною пластинкою. Між пластинкою та лінзою міститься рідина. При спостереженні у відбитому червоному світлі ($\lambda_0 = 650$ нм) радіус шістнадцятого темного кільця Ньютона $r = 2,5$ мм. Чому дорівнює показник заломлення рідини?

Розв'язання

$n - ?$	Кільця Ньютона виникають
$R = 0,8$ м;	завдяки інтерференції хвиль при
$\lambda_0 = 650$ нм;	відбитті від верхньої (точка A) та
$r = 2,5$ мм;	нижньої (точка B) поверхні рідини
$m = 16$.	(рис. 4.3). Для розв'язання задачі
	використаємо формулу (4д) для різниці
	ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої плівки:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - \lambda_0 / 2, \quad (1)$$

в якій можна вважати, що світло на плівку падає нормально у всіх точках, де спостерігається інтерференція $\theta = 0$. Тоді (1) набере вигляду

$$\Delta = 2bn - \lambda_0 / 2. \quad (2)$$

Позначимо через b товщину плівки, де виникає шістнадцяте темне кільце Ньютона (рис. 4.3). Шістнадцяте темне кільце відповідає шістнадцятому інтерференційному мінімуму, який, використовуючи (2), запишемо у вигляді

$$\Delta = 2bn - \lambda_0 / 2 = -\lambda_0 / 2 + m\lambda_0. \quad (3)$$

Зазначимо, що у (3) m відповідає номеру темного інтерференційного кільця.

З рис. 4.3 із прямокутного трикутника ΔOCK знаходимо зв'язок між товщиною плівки та радіусом кільця Ньютона:

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2. \quad (4)$$

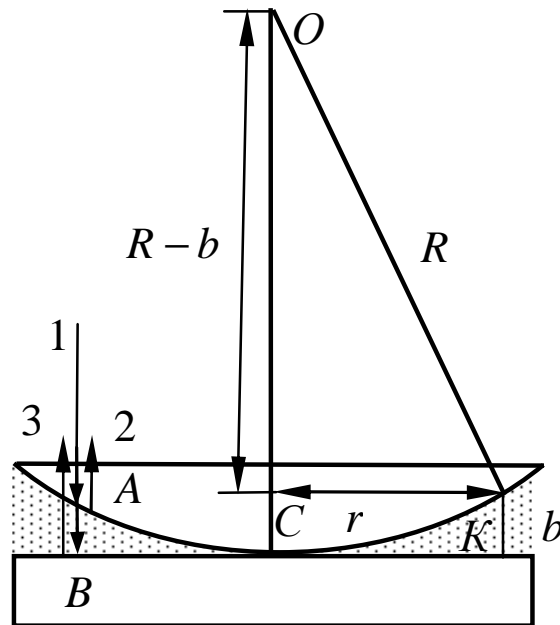


Рисунок 4.3

Через те, що b є малою величиною, ми знехтували b^2 порівняно з $2Rb$. Тоді з (4) маємо

$$b = r^2 / 2R,$$

а з (3) отримуємо

$$r^2 n / R = m\lambda_0.$$

Звідси знаходимо шуканий показник заломлення

$$n = m\lambda_0 R / r^2. \quad (5)$$

Отже, шуканий показник заломлення рідни визначається формулою (5). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення й отримаємо: $n = 1,33$.

Аналіз отриманого результату

Коли між опуклою поверхнею лінзи та пластинкою знаходиться повітря (показник заломлення $n = 1$), то радіус m -го темного кільця визначається формулою (4ε):

$$r = \sqrt{R\lambda_0 2m / 2}. \quad (6)$$

Коли в (5) прийняти $n = 1$, то отримуємо

$$r = \sqrt{m\lambda_0 R / n} = \sqrt{R\lambda_0 m}. \quad (7)$$

Таким чином, співвідношення (7), отримане з розрахункової формули (5), збігається з раніше відомою формулою (6). Це свідчить, що отримана формула (5) не суперечить раніше відомим результатам.

Відповідь: $n = m\lambda_0 R / r^2 = 1,33$.

4.2 Задачі для самостійного розв'язання

4.1 Скільки довжин хвиль монохроматичного світла із частотою коливань $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц укладеться на шляху довжиною $l = 1,2$ мм: 1) у вакуумі; 2) у склі?

4.2 Визначити довжину l_1 відрізка, на якому укладається стільки ж довжин хвиль у вакуумі, скільки їх укладається на відрізку $l_2 = 3$ мм у воді.

4.3 Якої довжини l_1 шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за той самий час, який він проходить шлях довжиною $l_2 = 1$ м у воді?

4.4 На шляху світлової хвилі, що поширюється у повітрі, поставили скляну пластинку товщиною $h = 1$ мм. На скільки зміниться оптична довжина шляху, якщо хвиля падає на пластинку: 1) нормально; 2) під кутом $\varepsilon = 30^\circ$?

4.5 На шляху монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм розміщена плоска паралельна скляна пластина товщиною $d = 0,1$ мм. Світло падає на пластину нормально. На який кут φ потрібно повернути пластину, щоб оптична довжина шляху L змінилася на $\lambda/2$?

4.6 Два паралельних пучки світлових хвиль I і II падають на скляну призму із заломлювальним кутом $\theta = 30^\circ$ і після заломлення виходять із неї (рис. 4.4). Знайти оптичну різницю ходу Δ світлових хвиль після заломлення їх призмою.

4.7 Оптична різниця ходу Δ двох хвиль монохроматичного світла, що беруть участь у інтерференції, дорівнює $0,3\lambda$. Визначити різницю фаз $\Delta\varphi$.

4.8 Знайти всі довжини хвиль видимого світла (від $0,76$ до $0,38$ мкм), які будуть: 1) максимально підсилені; 2) максимально послаблені, коли оптична різниця ходу Δ хвиль, що беруть участь в інтерференції, дорівнює $1,8$ мкм.

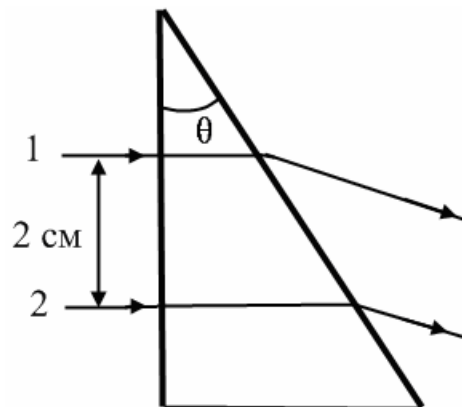


Рисунок 4.4

4.9 Відстань d між двома когерентними джерелами світла ($\lambda = 0,5$ мкм) дорівнює $0,1$ мм. Відстань b між інтерференційними смугами на екрані в середній частині інтерференційної картини дорівнює 1 см. Визначити відстань l від джерел до екрана.

4.10 Відстань d між двома щілинами в досліді Юнга дорівнює 1 мм, відстань l від щілин до екрана дорівнює 3 м. Визначити довжину хвилі λ , що випромінюється джерелом монохроматичного світла, якщо ширина b смуг інтерференції на екрані дорівнює $1,5$ мм.

4.11 У досліді Юнга відстань d між щілинами дорівнює $0,8$ мм. На якій відстані l від щілин потрібно розмістити екран, щоб ширина b інтерференційної смуги дорівнювала 2 мм?

4.12 У досліді із дзеркалами Френеля відстань d між уявними зображеннями джерела світла дорівнює $0,5$ мм, відстань l від них до екрана дорівнює 3 м. Довжина хвилі $\lambda = 0,6$ мкм. Визначити ширину b смуг інтерференції на екрані.

4.13 Джерело S світла ($\lambda = 0,6$ мкм) і плоске дзеркало M розміщені, як показано на рис. 4.5 (дзеркало Ллойда). Що буде спостерігатися в точці P екрана, де сходяться промені SP і SMP , – світло чи темрява, якщо $|SP| = r = 2$ м, $a = 0,55$ мм, $|SM| = |MP|$?

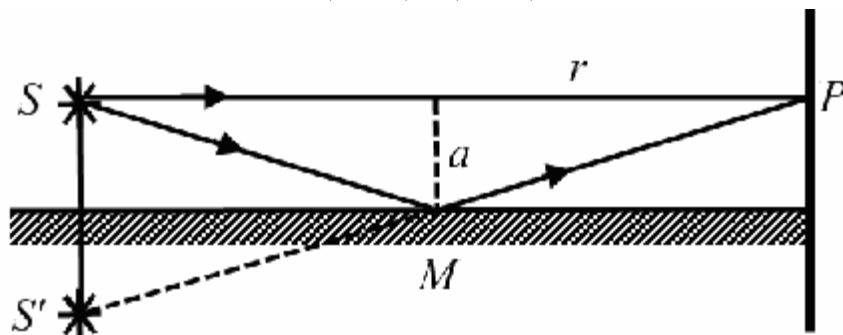


Рисунок 4.5

4.14 При деякому розміщенні дзеркала Ллойда ширина b інтерференційної смуги на екрані виявилася такою, що дорівнює 1 мм. Після того як дзеркало змістили паралельно самому собі на відстань $\Delta d = 0,3$ мм, ширина інтерференційної смуги змінилась. У якому напрямку й на яку відстань Δl потрібно перемістити екран, щоб ширина інтерференційної смуги залишилася попередньою? Довжина хвилі λ монохроматичного світла дорівнює 0,6 мкм.

4.15 Плоска паралельна скляна пластинка товщиною $d = 1,2$ мкм і показником заломлення $n = 1,5$ поміщена між двома середовищами з показниками заломлення n_1 і n_2 (рис. 4.6). Світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм падає нормально на пластинку. Визначити оптичну різницю ходу Δ хвиль 1 і 2, відбитих від верхньої й нижньої поверхонь пластинки, і вказати, підсилення або послаблення інтенсивності світла відбувається при інтерференції в таких випадках: 1) $n_1 < n < n_2$; 2) $n_1 > n > n_2$; 3) $n_1 < n > n_2$; 4) $n_1 > n < n_2$.

4.16 На мильну плівку ($n = 1,3$), що знаходиться в повітрі, падає нормально пучок променів білого світла. При якій найменшій товщині d плівки відбите світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,55$ мкм виявиться максимально підсиленням унаслідок інтерференції?

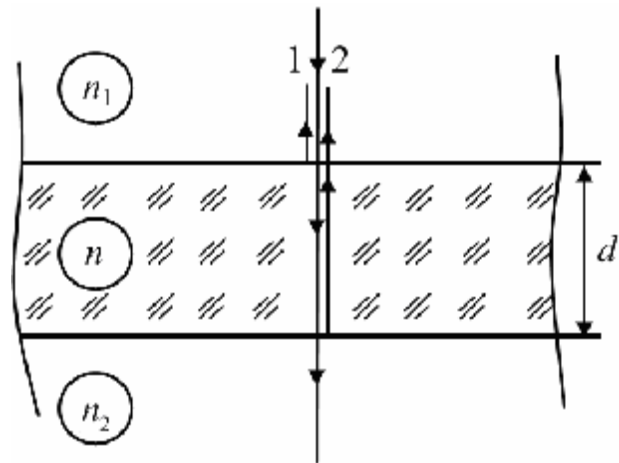


Рисунок 4.6

4.17 Пучок монохроматичних ($\lambda = 0,6$ мкм) світлових хвиль падає під кутом $\varepsilon_1 = 30^\circ$ на мильну плівку, що

знаходиться в повітрі ($n = 1,3$). При якій найменшій товщині d плівки відбиті світлові хвилі будуть максимально послаблені інтерференцією? максимально підсилені?

4.18 На тонкий скляний клин ($n = 1,55$) падає нормально монохроматичне світло. Двогранний кут α між поверхнями клина дорівнює $2'$. Визначити довжину світлової хвилі λ , якщо відстань b між сусідніми інтерференційними максимумами у відбитому світлі дорівнює $0,3$ мм.

4.19 Поверхні скляного клина утворюють між собою кут $\theta = 0,2'$. На клин нормально до його поверхні падає пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,55$ мкм. Визначити ширину b інтерференційної смуги.

4.20 На тонкий скляний клин у напрямку нормалі до його поверхні падає монохроматичне світло ($\lambda = 600$ нм). Визначити кут θ між поверхнями клина, якщо відстань b між сусідніми інтерференційними мінімумами у відбитому світлі дорівнює 4 мм.

4.21 Між двома плоско паралельними скляними пластинками поклали дуже тонкий дріт, який знаходиться на відстані $l = 75$ мм від лінії з'єднання пластинок і паралельний цій лінії. У відбитому світлі ($\lambda = 0,5$ мкм) на верхній пластинці помітні інтерференційні смуги. Визначити діаметр d поперечного перерізу дроту, якщо протягом $a = 30$ мм налічується $m = 16$ світлих смуг.

4.22 Дві плоскопаралельні скляні пластинки прикладені одна до іншої так, що між ними утворився повітряний клин з кутом $\theta = 30''$. На одну із пластинок падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм). На яких відстанях l_1 і l_2 від лінії з'єднання пластинок будуть

спостерігатись у відбитому світлі перша й друга світлі смуги (інтерференційні максимуми)?

4.23 Дві плоскопаралельні скляні пластинки утворюють клин з кутом $\theta = 30'$. Простір між пластинками заповнений гліцерином. На клин нормально до його поверхні падає пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. У відбитому світлі спостерігається інтерференційна картина. Яке число N темних інтерференційних смуг припадає на 1 см довжини клина?

4.24 Відстань $\Delta r_{1,2}$ між другим і першим темним кільцями Ньютона у відбитому світлі дорівнює 1 мм. Визначити відстань $\Delta r_{10,9}$ між десятим і дев'ятим кільцями.

4.25 Плоско-опукла лінза опуклою стороною лежить на скляній пластинці. Визначити товщину d шару повітря там, де у відбитому світлі ($\lambda = 0,6$ мкм) видно перше світле кільце Ньютона.

4.26 Діаметр d_2 другого світлого кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі ($\lambda = 0,6$ мкм) дорівнює 1,2 мм. Визначити оптичну силу D плоско-опуклої лінзи, узятої для досліду.

4.27 Плоско-опукла лінза з оптичною силою $\Phi = 2$ дптр опуклою стороною лежить на скляній пластинці. Радіус r четвертого темного кільця Ньютона у світлі, що проходить, дорівнює 0,7 мм. Визначити довжину світлової хвилі.

4.28 Діаметри d_i і d_k двох світлих кілець Ньютона відповідно дорівнюють 4,0 і 4,8 мм. Порядкові номери кілець не визначались, але відомо, що між двома виміряними кільцями розташовані три світлих кільця. Кільця спостерігались у відбитому світлі ($\lambda = 500$ нм).

Знайти радіус кривизни плоско-опуклої лінзи, узятої для досліду.

4.29 На установці для спостереження кілець Ньютона був виміряний у відбитому світлі радіус третього темного кільця ($k = 3$). Коли простір між плоскопаралельною пластиною й лінзою заповнили рідиною, то такий самий радіус стало мати кільце з номером, на одиницю більшим. Визначити показник заломлення n рідини.

4.30 В установці для спостереження кілець Ньютона світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм падає нормально на плоско-опуклу лінзу з радіусом кривизни $R_1 = 1$ м, покладену опуклою стороною на ввігнуту поверхню плоско увігнутої лінзи з радіусом кривизни $R_2 = 2$ м. Визначити радіус r_3 третього темного кільця Ньютона, що спостерігається у відбитому світлі.

4.31 Кільця Ньютона спостерігаються за допомогою двох однакових плоско-опуклих лінз радіусом кривизни $R = 1$ м, складених впритул опуклими поверхнями (плоскі поверхні лінз паралельні). Визначити радіус r_2 другого світлого кільця, що спостерігається у відбитому світлі ($\lambda = 660$ нм) при нормальному падінні світла на поверхню верхньої лінзи.

4.32 На екрані спостерігається інтерференційна картина від двох когерентних джерел світла з довжиною хвилі $\lambda = 480$ нм. Коли на шляху одного з пучків помістили тонку пластинку із плавленого кварцу з показником заломлення $n = 1,46$, то інтерференційна картина змістилася на $m = 69$ смуг. Визначити товщину d кварцової пластинки.

4.33 В обидва пучки світла інтерферометра Жамена були поміщені циліндричні трубки довжиною $l = 10$ см, закриті з обох кінців плоско паралельними прозорими пластинками; повітря із трубок було відкачане. При цьому

спостерігалась інтерференційна картина у вигляді світлих і темних смуг. В одну із трубок був закачаний водень, після чого інтерференційна картина змістилася на $m = 23,7$ смуги. Знайти показник заломлення n водню. Довжина хвилі світла $\lambda = 590$ нм.

4.34 В інтерферометрі Жамена дві однакові трубки довжиною $l = 15$ см були заповнені повітрям. Показник заломлення n_1 повітря дорівнює 1,000292. Коли в одній із трубок повітря замінили ацетиленом, то інтерференційна картина змістилася на $m = 80$ смуг. Визначити показник заломлення n_2 ацетилену, якщо в інтерферометрі використовувалося джерело монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,590$ мкм.

4.35 Визначити переміщення дзеркала в інтерферометрі Майкельсона, якщо інтерференційна картина змістилася на $m = 100$ смуг. Досвід проводився із світлом з довжиною хвилі $\lambda = 546$ нм.

4.36 Для вимірювання показника заломлення аргону в одному із плечей інтерферометра Майкельсона помістили порожню скляну трубку довжиною $l = 12$ см із плоскопаралельними торцевими поверхнями. При заповненні трубки аргонем (за нормальних умов) інтерференційна картина змістилася на $m = 106$ смуг. Визначити показник заломлення n аргону, якщо довжина хвилі λ світла дорівнює 639 нм.

4.37 В інтерферометрі Майкельсона на шляху одного з пучків світла ($\lambda = 590$ нм) помістили закриту з обох боків скляну трубку довжиною $l = 10$ см з високим вакуумом. При заповненні трубки хлористим воднем відбувся зсув інтерференційної картини. Коли хлористий водень був замінений бромистим воднем, зсув інтерференційної картини зріс на $\Delta m = 42$ смуги.

Визначити різницю Δn показників заломлення бромистого й хлористого водню.

4.38 Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,70$ мкм падає нормально на основу біпризми, зробленої зі скла ($n = 1,520$) із заломлювальним кутом $\theta = 5,0^\circ$. За біпризмою (рис. 4.7) знаходиться плоскопаралельна скляна пластина, і простір між ними заповнено бензолом ($n' = 1,500$). Знайти ширину інтерференційної смуги на екрані, розташованому за цією системою.

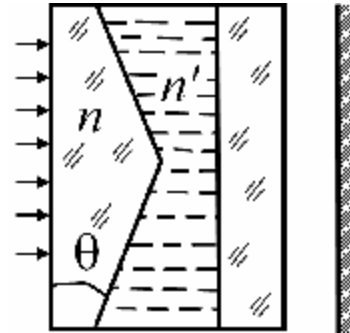


Рисунок 4.7

4.39 Лінзу діаметром 5,0 см і з фокусною відстанню $f = 25,0$ см розрізали по діаметру на дві однакові половини, причому вилученим виявився шар товщиною $a = 1,00$ мм. Після цього обидві половини змістили до зіткнення й у фокальній площині отриманої у такий спосіб білінзи помістили вузьку щілину, що випускає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,60$ мкм. За білінзою розмістили екран на відстані $L = 50$ см від неї. Визначити ширину інтерференційної смуги на екрані й число можливих максимумів.

ТЕМА 5 ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

Основні формули

Радіус зовнішньої межі m -ї зони Френеля

$$r = \sqrt{m\lambda ab / (a + b)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5a)$$

Умова мінімумів інтенсивності для дифракції Фраунгофера від щілини (світло падає нормально):

$$b \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5б)$$

де b – ширина щілини, φ – кут дифракції.

Умова головних фраунгоферових максимумів для дифракційної ґратки (світло падає нормально):

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (5в)$$

умова додаткових мінімумів

$$d \sin \varphi = \pm \lambda m' / N, \quad (5г)$$

де $m' = 1, 2, \dots$, окрім $0, N, 2N, \dots$

Кутова дисперсія дифракційної ґратки

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda = m / (d \cos \varphi). \quad (5д)$$

Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \lambda / \delta\lambda = mN, \quad (5е)$$

де N – число штрихів ґратки.

Роздільна здатність об'єктива

$$R = 1 / \delta\psi = D / (1,22\lambda), \quad (5є)$$

де $\delta\psi$ – найменша кутова відстань між точками, при якій вони ще сприймаються роздільно, D – діаметр об'єктива.

Формула Вульфа-Брегга для дифракційних максимумів:

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5ж)$$

де θ – кут ковзання, d – відстань між атомними площинами.

5.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1

Плоска світлова хвиля $\lambda = 640$ нм з інтенсивністю I_0 падає нормально на круглий отвір радіусом $r = 1,20$ мм. Знайти інтенсивність у центрі дифракційної картини на екрані, який знаходиться на відстань $b = 1,50$ м від отвору.

Розв'язання

$I - ?$		Для розв'язання задачі використаємо метод Френеля.
$\lambda = 640$ нм;		
$r = 1,20$ мм;		
$b = 1,50$.		
		Визначимо кількість зон Френеля m , що відкриті отвором, за допомогою співвідношення (5а)

$$r = \sqrt{m\lambda ab / (a + b)}, \quad (1)$$

де a – відстань від отвору до джерела світла. За умовою задачі на отвір падає **плоска** світлова хвиля. Це означає, що джерело світла знаходиться на нескінченній відстані від отвору $a = \infty$. Ураховуючи це, з (1) знаходимо

$$m = \frac{r^2(1 + b/a)}{\lambda b} = \frac{r^2}{\lambda b}. \quad (2)$$

Підставимо в (2) числові значення і знаходимо, що

$$m = 1,5 \quad (3)$$

є не цілим числом. Тому будемо розв'язувати цю задачу методом графічного додавання амплітуд.

Розіб'ємо хвильову поверхню світла в отворі на кільцеві зони, аналогічні зонам Френеля, але набагато менші за шириною. Коливання, що створюється у точці спостереження такою зоною, зобразимо у вигляді вектора (рис. 5.1), довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а кут, утворений таким вектором із напрямком, узятим за початок відліку, дорівнюватиме початковій фазі коливання

(використовуємо метод векторних діаграм). Амплітуда коливань, що створюються такими зонами в точці спостереження, повільно зменшується при переході від зони до зони. Кожне наступне коливання відстає від попереднього за фазою на одну і ту саму величину. Отже, векторна діаграма має вигляд, показаний на рис. 5.1.

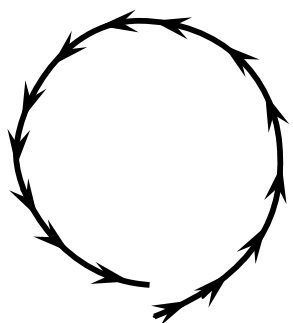


Рисунок 5.1

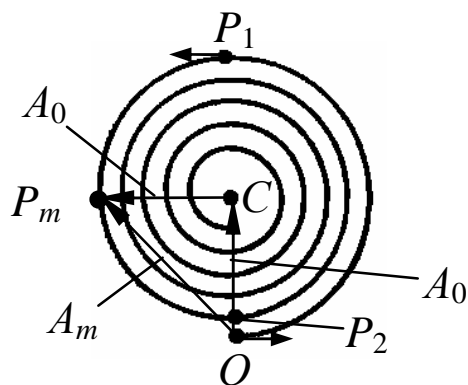


Рисунок 5.2

Через те, що амплітуда коливань від таких зон зі збільшенням номера зони зменшується, хоча й дуже повільно, вектори утворюють не замкнену фігуру, а ламану спіралеподібну лінію. При прямуванні ширини кільцевих зон до нуля векторна діаграма набере вигляду спіралі, що закручується до точки C (рис. 5.2). Фази коливань у точках O і P_1 відрізняються на π (нескінченно малі вектори, що утворюють спіраль, напрямлені у цих точках у протилежні боки, див. рис. 5.1, 5.2). Отже, ділянка спіралі $O-P_1$ відповідає першій зоні Френеля. Фази коливань у точках P_1 і P_2 відрізняються на π . Отже, точка P_2 відповідає межі другої зони Френеля. Коливання, яке збуджується у точці спостереження всією хвильовою поверхнею, зображується вектором OC (рис. 5.2). Довжина вектора OC дорівнює амплітуді світла, яке падає на отвір, яку позначимо через A_0 .

Зрозуміло, що точка P_m , яка відповідає відкритим $m = 1,5$ зонам Френеля, розміщена на спіралі між точками P_1 (відповідає першій зоні Френеля) та P_2 (відповідає другій зоні Френеля), як це зображено на рис. 5.2. Амплітуду коливань, яка створюється m зонами Френеля, A_m можемо знайти з трикутника ΔOCP_m за допомогою теореми косинусів

$$A_m^2 = A_0^2 + A_0^2 - 2A_0^2 \cos(\angle OCP_m). \quad (4)$$

Радіус CO при переході від точки O до точки P_1 , яка характеризує межу першої зони Френеля, повертається, як впливає з рис. 5.2, на π радіан. При переході до межі другої зони Френеля (точка P_2) радіус CO повертається на 2π радіан. Із цього випливає, що для m -ї зони (точка P_m) радіус повертається на $m\pi$ радіан. Таким чином, (рис. 5.2)

$$\angle OCP_m = 2\pi - m\pi. \quad (5)$$

Тоді з (4) отримуємо

$$A_m^2 = 2A_0^2(1 - \cos(2\pi - m\pi)) = 2A_0^2(1 - \cos(m\pi)). \quad (6)$$

Інтенсивність прямо пропорційна квадрату амплітуди. Тому можемо записати, що

$$I = 2I_0(1 - \cos(m\pi)) = 2I_0(1 - \cos(\pi r^2 / (\lambda b))). \quad (7)$$

У формулі (7) використали співвідношення (2) для кількості відкритих в отворі зон Френеля.

Таким чином, шукана інтенсивність визначається формулою (7). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $I = 2I_0$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (7) у граничному випадку, коли відстань до точки спостереження на екрані дорівнює нескінченності $b = \infty$. З

фізичних міркувань зрозуміло, для цього випадку кількість відкритих зон Френеля дорівнюватиме нулю, тобто інтенсивність світла на екрані буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули (7) випливає такий самий результат:

$$I = 2I_0(1 - \cos(\pi r^2 / (\lambda \infty))) = 2I_0(1 - 1) = 0.$$

Отже, розрахункова формула (7) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $I = 2I_0(1 - \cos(\pi r^2 / (\lambda b))) = 2I_0.$

Приклад 5.2

Монохроматичне світло падає нормально на щілину шириною $b = 11$ мкм. За щілиною міститься тонка лінза з фокусною відстанню $f = 150$ мм, у фокальній площині якої розміщено екран. Знайти довжину хвилі світла, якщо відстань між симетрично розміщеними мінімумами третього порядку (на екрані) дорівнює $x = 50$ мм.

Розв'язання

λ –?
$b = 11$ мкм;
$f = 150$ мм;
$x = 50$ мм;
$m = 3.$

Для розв'язання задачі використаємо умову мінімумів інтенсивності для дифракції Фраунгофера на щілині (5б):

$$b \sin \varphi = m\lambda. \quad (1)$$

Розглянемо промені, які завдяки дифракції на щілині відхиляються від прямолінійного поширення на кут $\pm\varphi$ (рис. 5.3). Відомо, що паралельні промені після проходження лінзи збираються в одній і тій самій точці у фокальній площині лінзи. При цьому промінь, який проходить через центр лінзи (точка O), не змінює свого напрямку поширення. Тому промені, які відхилились унаслідок дифракції на кут $+\varphi$, зберуться на екрані у точці P_1 , а промені, які відхилились внаслідок

дифракції на кут $-\varphi$, зберуться у точці P_2 . З рівнобічного трикутника ΔOP_1P_2 (рис. 5.3), у якому висота дорівнює фокусній відстані f , знайдемо зв'язок між відстанню між симетрично розміщеними мінімумами третього порядку ($|P_1P_2| = x$) та кутом дифракції φ :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x/2}{f} = \frac{x}{2f}. \quad (2)$$

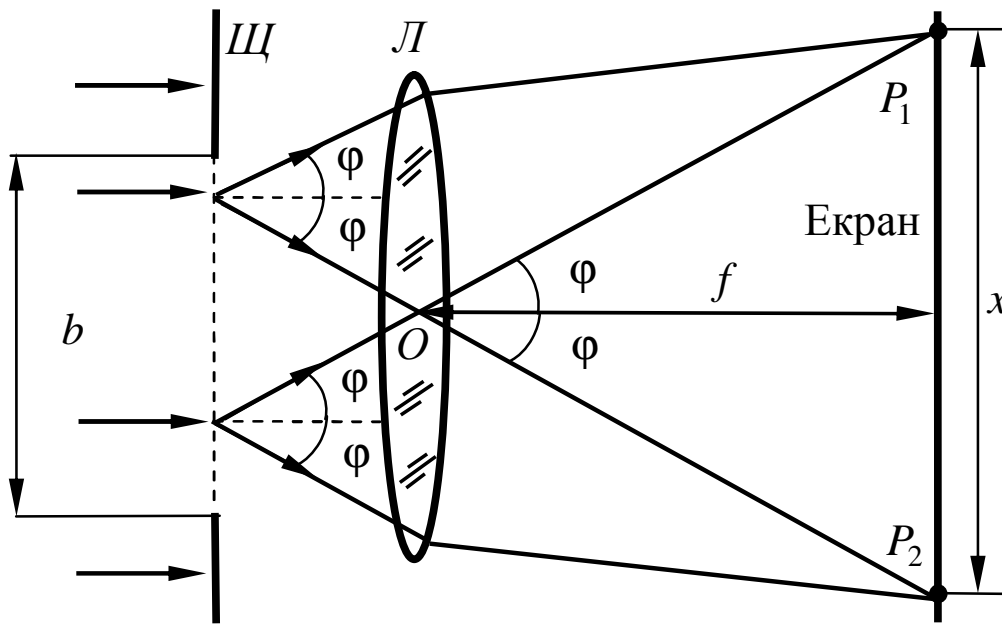


Рисунок 5.3

Рівняння (1) та (2) утворюють систему двох рівнянь відносно двох невідомих φ та λ . Виключаємо з цих рівнянь φ , використовуючи відому тригонометричну тотожність:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi}. \quad (3)$$

Звідси

$$1 + \frac{4f^2}{x^2} = \frac{b^2}{(m\lambda)^2}$$

або

$$\lambda = b / (m \sqrt{1 + 4f^2 / x^2}). \quad (4)$$

Отже, шукана довжина хвилі визначається формулою (4). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (4), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $\lambda = 0,6$ мкм.

Відповідь: $\lambda = b / (m \sqrt{1 + 4f^2 / x^2}) = 0,6$ мкм.

Приклад 5.3

Світло з $\lambda = 589,0$ нм падає нормально на дифракційну ґратку з періодом $d = 2,5$ мкм, яка має $N = 10000$ штрихів. Знайти кутову ширину дифракційного максимуму другого порядку.

Розв'язання

$\Delta\varphi$ –?	Для розв'язання використаємо умову головних фраунгоферових максимумів для дифракційної ґратки (5в):
$\lambda = 589,0$ нм;	
$d = 2,5$ мкм;	
$N = 10000$;	
$m = 2$.	

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (1)$$

та умову додаткових мінімумів (5г)

$$d \sin \varphi = \pm \lambda m' / N, \quad (2)$$

де $m' = 1, 2, \dots$, крім $0, N, 2N, \dots$

Дифракційна картина від ґратки зображена на рис. 5.4. Бачимо, що ширину дифракційних максимумів визначають додаткові мінімуми, які найближче розміщені біля цього максимуму. Біля максимуму другого порядку ($m = 2$) найближчі додаткові мінімуми характеризуються кутами

$$d \sin \varphi_1 = \frac{\lambda m'_1}{N} = \lambda \left(m - \frac{1}{N}\right), \quad d \sin \varphi_2 = \frac{\lambda m'_2}{N} = \lambda \left(m + \frac{1}{N}\right). \quad (3)$$

Шукана кутова ширина дифракційного максимуму буде визначатися виразом

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (4)$$

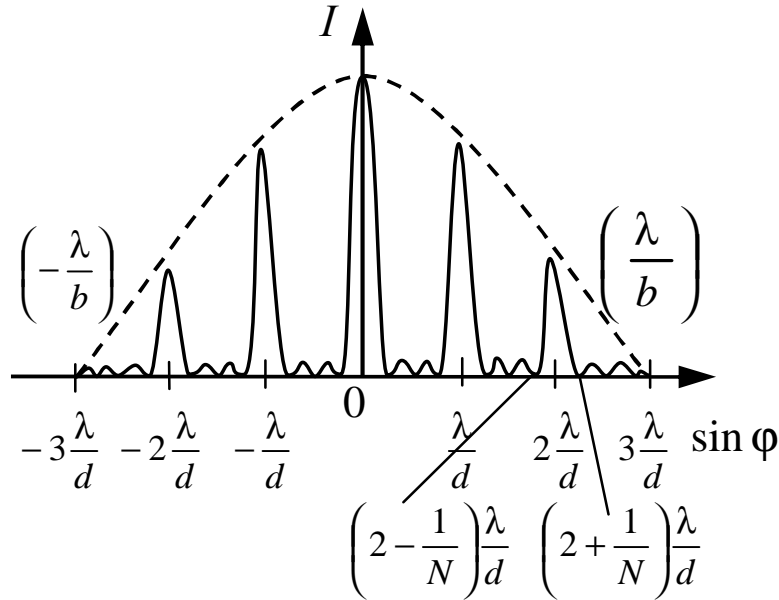


Рисунок 5.4

Далі використовуємо відоме з геометрії співвідношення

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = 2 \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right);$$

формули (3), (4); умову, що $(\varphi_2 + \varphi_1)/2 = \varphi$, де середній кут φ є кутом, який відповідає максимуму другого порядку (рис. 5.4) і визначається (1); $\sin((\varphi_2 - \varphi_1)/2) \approx (\varphi_2 - \varphi_1)/2$.

У результаті знаходимо

$$\frac{2\lambda}{Nd} = \Delta\varphi \cdot \cos \varphi = \Delta\varphi \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \Delta\varphi \cdot \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}$$

або

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{Nd \sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}}. \quad (5)$$

Таким чином, шукана величина $\Delta\varphi$ визначається формулою (5). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5) в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо $\Delta\varphi = 0,0031^\circ$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (5) у граничному випадку, коли кількість щілин ґратки прямує до нескінченності $N \rightarrow \infty$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому випадку (рис. 5.4) кутова ширина дифракційного максимуму прямуватиме до нуля. З розрахункової формули (5) впливає такий самий результат:

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{Nd\sqrt{1-(m\lambda/d)^2}} = \frac{2\lambda}{\infty d\sqrt{1-(m\lambda/d)^2}} = 0.$$

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta\varphi = 2\lambda / \left(Nd\sqrt{1-(m\lambda/d)^2} \right) = 0,0031^\circ$.

Приклад 5.4

Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на дифракційну ґратку. Знайти її кутову дисперсію залежно від кута дифракції φ .

Розв'язання

$\frac{D = \delta\varphi/\delta\lambda - ?}{\lambda}$	Для розв'язання задачі використаємо співвідношення для кутової дисперсії дифракційної ґратки (5д):
---	--

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda = m / (d \cos \varphi) \quad (1)$$

та умову головних дифракційних максимумів (5в)

$$d \sin \varphi = m\lambda. \quad (2)$$

Виключаємо із системи рівнянь (1) та (2) відношення m/d та знаходимо

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda = \frac{m}{d} \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\lambda} \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\lambda}. \quad (3)$$

Отже, шукана дисперсія визначається формулою (3).

Відповідь: $D = \delta\varphi / \delta\lambda = \operatorname{tg} \varphi / \lambda$.

Приклад 5.5

Зорова труба має об'єктив діаметром $D = 5,0$ см. Визначити роздільну здатність об'єктива труби й мінімальну можливу відстань між двома точками, що містяться на відстані $l = 3,0$ км від труби. Вважати $\lambda = 0,55$ мкм.

Розв'язання

$R - ? \Delta y_{\min} - ?$ $D = 5,0$ см; $l = 3,0$ км; $\lambda = 0,55$ мкм.	Для розв'язання задачі використаємо формулу (5ε) для роздільної здатності об'єктива:
	$R = 1 / \delta\psi = D / (1,22\lambda), \quad (1)$

де $\delta\psi$ – найменша кутова відстань між точками, при якій вони ще сприймаються роздільно (рис. 5.5).

З формули (1) знаходимо роздільну здатність об'єктива та найменшу кутову відстань $\delta\psi$ між точками A і B , при якій вони ще сприймаються роздільно:

$$\delta\psi = 1,22\lambda / D. \quad (2)$$

Далі з рівнобічного трикутника ΔABO , у якому відомі висота та кут, знаходимо шукану мінімальну відстань між двома точками, які ще сприймаються роздільно:

$$\Delta y_{\min} = 2l \sin(\delta\psi / 2) \approx l\delta\psi = 1,22\lambda l / D. \quad (3)$$

Таким чином, шукані величини визначаються формулами (1) та (3). Запишемо фізичні величини, що

входять до розрахункових формул (1) та (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $R = 7,5 \cdot 10^4$; $\Delta y_{\min} = 4,0$ см.

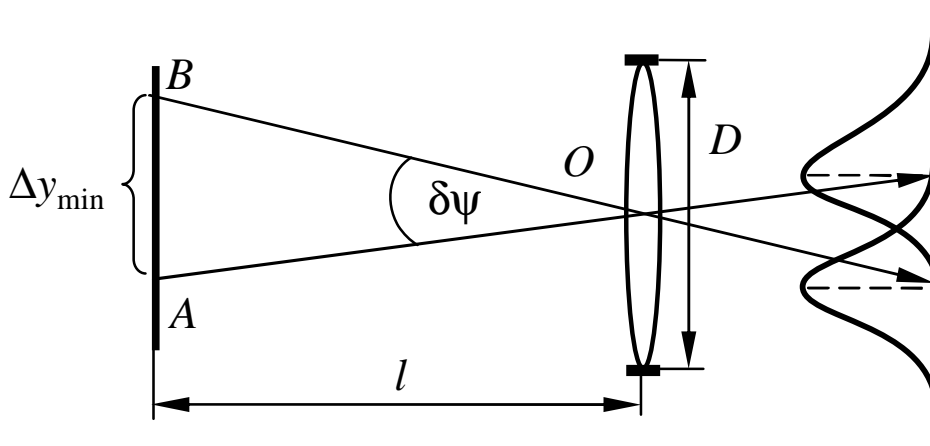


Рисунок 5.5

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (1) та (3) у граничному випадку, коли діаметр об'єктива прямує до нескінченності $D = \infty$. У цьому разі, як впливає з фізичних міркувань, роздільна здатність прямуватиме до нескінченності, а мінімальна відстань, яку можна спостерігати таким об'єктивом, – до нуля. З розрахункових формул впливає такий самий результат:

$$R = D / (1,22\lambda) = \infty / (1,22\lambda) = \infty ,$$

$$\Delta y_{\min} = 1,22\lambda l / D = 1,22\lambda l / \infty = 0 .$$

Отже, розрахункові формула (1) та (3) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $R = D / (1,22\lambda) = 7,5 \cdot 10^4$;

$\Delta y_{\min} = 1,22\lambda l / D = 4,0$ см.

Приклад 5.6

Вузький пучок монохроматичного рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 32$ пм падає на полікристалічний зразок. Радіус інтерференційного кільця на фотоплівці, яке відповідає дифракційному максимуму другого порядку, дорівнює $r = 3,64$ см. Фотоплівка віддалена від зразка на відстань $l = 10$ см. Визначити відстань між атомними площинами.

Розв'язання

$d - ?$
$\lambda = 32$ пм;
$r = 3,64$ см;
$l = 10$ см;
$m = 2$.

Для розв'язання задачі побудуємо схему проходження рентгенівського пучка (рис. 5.6) та використаємо формулу Вульфа-Брегга для дифракційних максимумів (5ж):

$$2d \sin \theta = m\lambda. \quad (1)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження кута ковзання θ .

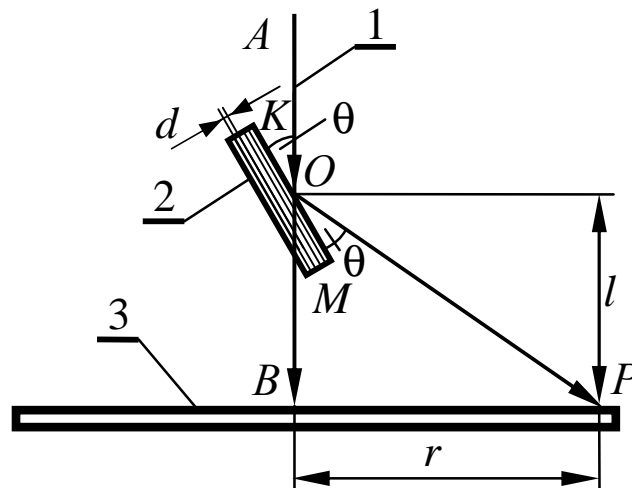


Рисунок 5.6

Пучок 1 (рис. 5.6) рентгенівського випромінювання подається на тонку полікристалічну пластинку досліджуваної речовини. Полікристалічна пластинка складається з великої кількості маленьких монокристалів, орієнтованих хаотично. На рис. 5.6, позиція 2, зображено

один із таких малих монокристалів. Частина рентгенівського випромінювання проходить крізь цей монокристал (промінь OB), а частина випромінювання відбивається від нього (промінь OP). Далі рентгенівське випромінювання потрапляє на фотоплівку 3 (точка P).

Кути ковзання θ (рис. 5.6), при яких спостерігаються максимуми відбиття рентгенівського випромінювання, задовольняють закон Вульфа-Брегга (1). При відбитті рентгенівського пучка 1 від монокристала 2 (рис. 5.6) кут падіння дорівнює куту відбиття. Із цього випливає, що кути

$$\angle KOA = \angle POM = \theta. \quad (2)$$

Нагадаємо, що кут між променем та поверхнею монокристала $\angle KOA = \theta$ називають кутом ковзання. Також візьмемо до уваги, що

$$\angle AOK = \angle BOM = \theta. \quad (3)$$

Тоді з (2), (3) та рис. 5.6 випливає, що

$$\angle BOP = 2\theta.$$

Із трикутника $\triangle BOP$ неважко знайти

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \operatorname{tg}(\angle BOP) = BP / BO = r / l. \quad (4)$$

Звідси знаходимо

$$\theta = (1/2)\operatorname{arctg}(r/l), \quad (5)$$

підставляємо цей кут в (1) і знаходимо шукану відстань між атомними площинами

$$d = m\lambda / (2 \sin \theta) = m\lambda / (2 \sin[(1/2)\operatorname{arctg}(r/l)]). \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $d = 184$ пм.

Відповідь: $d = m\lambda / (2 \sin[(1/2)\operatorname{arctg}(r/l)]) = 184$ пм.

5.2 Задачі для самостійного розв'язання

5.1 Обчислити радіус r_5 п'ятої зони Френеля для плоского хвильового фронту ($\lambda = 0,5$ мкм), якщо побудова робиться для точки спостереження, що перебуває на відстані $b = 1$ м від фронту хвилі.

5.2 Радіус r_4 четвертої зони Френеля для плоского хвильового фронту дорівнює 3 мм. Визначити радіус r_6 шостої зони Френеля.

5.3 На діафрагму із круглим отвором діаметром $d = 4$ мм падає нормально паралельний пучок променів монохроматичного світла ($\lambda = 0,5$ мкм). Точка спостереження перебуває на осі отвору на відстані $b = 1$ м від нього. Скільки зон Френеля укладається в отворі? Темна чи світла пляма буде у центрі дифракційної картини, якщо в місці спостереження розмістити екран?

5.4 Плоска світлова хвиля ($\lambda = 0,5$ мкм) падає нормально на діафрагму із круглим отвором діаметром $d = 1$ см. На якій відстані b від отвору повинна знаходитися точка спостереження, щоб отвір відкривав: 1) одну зону Френеля? 2) дві зони Френеля?

5.5 Плоска світлова хвиля падає нормально на діафрагму із круглим отвором. Унаслідок дифракції в деяких точках осі отвору, що знаходяться на відстанях b_i від його центра, спостерігаються максимуми інтенсивності. 1) Одержати функції $b = f(r, \lambda, n)$, де r – радіус отвору; λ – довжина хвилі; n – число зон Френеля, що відкриваються для цієї точки осі отвором. 2) Зробити те саме для точок осі отвору, у яких спостерігаються мінімуми інтенсивності.

5.6 Плоска світлова хвиля ($\lambda = 0,7$ мкм) падає нормально на діафрагму із круглим отвором радіусом

$r = 1,4$ мм. Визначити відстані b_1, b_2, b_3 від діафрагми до трьох найбільш віддалених від неї точок, у яких спостерігаються мінімуми інтенсивності.

5.7 Точкове джерело S світла ($\lambda = 0,5$ мкм), плоска діафрагма із круглим отвором радіусом $r = 1$ мм та екран розміщені, як це зазначено на рис. 5.7 ($a = 1$ м). Визначити відстань b від екрана до діафрагми, при якій отвір відкривав би для точки P три зони Френеля.

5.8 Як зміниться інтенсивність у точці P (див. задачу 5.6), якщо прибрати діафрагму?

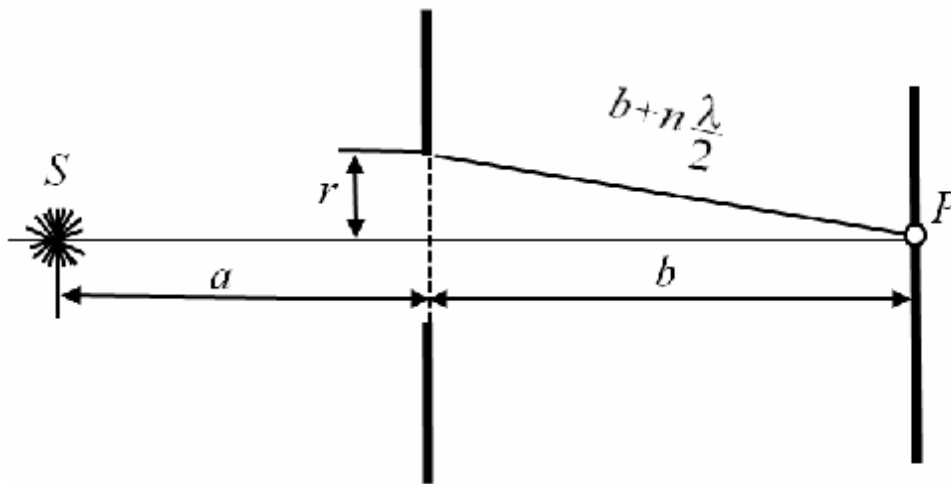


Рисунок 5.7

5.9 На щілину шириною $a = 0,05$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм). Визначити кут φ між первісним напрямком пучка світла й напрямком на четверту темну дифракційну смугу.

5.10 На вузьку щілину падає нормально монохроматичне світло. Кут φ відхилення пучків світла, що відповідає другій світлій дифракційній смузі, дорівнює 1° . Скільком довжинам хвиль падаючого світла дорівнює ширина щілини?

5.11 На щілину шириною $a = 0,1$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,5$ мкм). За щілиною

поміщена збиральна лінза у фокальній площині якої знаходиться екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут φ дифракції дорівнює: 1) $17'$; 2) $43'$.

5.12 Скільки штрихів на кожний міліметр містить дифракційна ґратка, якщо при спостереженні в монохроматичному світлі ($\lambda = 0,6$ мкм) максимум п'ятого порядку відхилений на кут $\varphi = 18^\circ$?

5.13 На дифракційну ґратку, що містить $n = 100$ штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло. Зорова труба спектрометра наведена на максимум третього порядку. Щоб навести трубу на інший максимум того самого порядку, її потрібно повернути на кут $\Delta\varphi = 20^\circ$. Визначити довжину хвилі λ світла.

5.14 Дифракційна ґратка освітлена нормально падаючим монохроматичним світлом. У дифракційній картині максимум другого порядку відхилений на кут $\varphi_1 = 14^\circ$. На який кут φ_2 відхилений максимум третього порядку?

5.15 Дифракційна ґратка містить $n = 200$ штрихів на 1 мм. На ґратку падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм). Максимум якого найбільшого порядку дає ця ґратка?

5.16 На дифракційну ґратку, що містить $n = 400$ штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм). Знайти загальне число дифракційних максимумів, які дає ця ґратка. Визначити кут φ дифракції, що відповідає останньому максимуму.

5.17 При освітленні дифракційної ґратки білим світлом спектри другого й третього порядків частково перекривають один одного. На яку довжину хвилі в спектрі

другого порядку накладається фіолетова межа ($\lambda = 0,4$ мкм) спектра третього порядку?

5.18 На дифракційну ґратку, що містить $n = 500$ штрихів на 1 мм, падає в напрямку нормалі до її поверхні біле світло. Спектр спроектовано на екран за допомогою поміщеної поблизу ґратки лінзи. Визначити ширину b спектра першого порядку на екрані, якщо відстань L лінзи до екрана дорівнює 3 м. Межі видимості спектра $\lambda_q = 780$ нм, $\lambda_\phi = 400$ нм.

5.19 На дифракційну ґратку з періодом $d = 10$ мкм під кутом $\alpha = 30^\circ$ падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм. Визначити кут ϕ дифракції, що відповідає другому головному максимуму.

5.20 Дифракційна картина отримана за допомогою дифракційної ґратки довжиною $l = 1,5$ см і періодом $d = 5$ мкм. Визначити, у спектрі якого найменшого порядку цієї картини вийдуть роздільні зображення двох спектральних ліній з різницею довжин хвиль $\Delta\lambda = 0,1$ нм, якщо лінії лежать у крайній червоній частині спектра ($\lambda \approx 760$ нм).

5.21 Яку найменшу роздільну силу R повинна мати дифракційна ґратка, щоб з її допомогою можна було розрізнити дві спектральні лінії калію ($\lambda_1 = 578$ нм і $\lambda_2 = 580$ нм)? Яке найменше число N штрихів повинна мати ця ґратка, щоб дозвіл був можливий у спектрі другого порядку?

5.22 За допомогою дифракційної ґратки з періодом $d = 20$ мкм потрібно розрізнити дублет натрію ($\lambda_1 = 589,0$ нм і $\lambda_2 = 589,6$ нм) у спектрі другого порядку. При якій найменшій довжині l ґратки це можливо?

5.23 Кутова дисперсія D_ϕ дифракційної ґратки для випромінювання деякої довжини хвилі (при малих кутах

дифракції) становить 5 хв/нм. Визначити роздільну силу R цієї решітки для випромінювання тієї ж довжини хвилі, якщо довжина l решітки дорівнює 2 см.

5.24 Визначити кутову дисперсію D_ϕ дифракційної ґратки для кута дифракції $\phi = 30^\circ$ і довжини хвилі $\lambda = 600$ нм. Відповідь виразити в одиницях СІ й у хвилинах на нанометр.

5.25 На дифракційну ґратку, що містить $n = 500$ штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 700$ нм. За ґраткою поміщена збиральна лінза з головною фокусною відстанню $f = 50$ см. У фокальній площині лінзи розташований екран. Визначити лінійну дисперсію D_l такої системи для максимуму третього порядку. Відповідь виразити в міліметрах на нанометр.

5.26 Нормально до поверхні дифракційної ґратки падає пучок світла. За ґраткою поміщена лінза, що збирає, з оптичною силою $\Phi = 1$ дптр. У фокальній площині лінзи розміщений екран. Визначити число n штрихів на 1 мм цієї ґратки, якщо при малих кутах дифракції лінійна дисперсія $D_l = 1$ мм/нм.

5.27 На дифракційну ґратку нормально до її поверхні падає монохроматичне світло ($\lambda = 650$ нм). За ґраткою знаходиться лінза, у фокальній площині якої розташований екран. На екрані спостерігається дифракційна картина під кутом дифракції $\phi = 30^\circ$. При якій головній фокусній відстані f лінзи лінійна дисперсія $D_l = 0,5$ мм/нм?

5.28 На грань кристала кам'яної солі падає паралельний пучок рентгенівського випромінювання ($\lambda = 147$ пм). Визначити відстань d між атомними площинами кристала, якщо дифракційний максимум другого порядку спостерігається, коли випромінювання

падає під кутом $\vartheta = 31^\circ 30'$ до поверхні кристала.

5.29 Яка довжина хвилі λ монохроматичного рентгенівського випромінювання, що падає на кристал кальциту, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається, коли кут ϑ між напрямком падаючого випромінювання й гранню кристала дорівнює 3° ? Відстань d між атомними площинами кристала взяти $0,3$ нм.

5.30 Паралельний пучок рентгенівського випромінювання падає на грань кристала. Під кутом $\vartheta = 65^\circ$ до площини грані спостерігається максимум першого порядку. Відстань d між атомними площинами кристала 280 пм. Визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

5.31 Діаметр D об'єктива телескопа дорівнює 8 см. Яка найменша кутова відстань β між двома зірками, дифракційні зображення яких у фокальній площині об'єктива виходять роздільними? При малій освітленості око людини найбільш чутливе до світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм.

5.32 На шпилі висотного будинку закріплені одна під іншою дві червоні лампи ($\lambda = 640$ нм). Відстань d між лампами 20 см. Будинок розглядають уночі в телескоп з відстані $r = 15$ км. Визначити найменший діаметр D_{\min} об'єктива, при якому в його фокальній площині вийдуть роздільні дифракційні зображення.

5.33 Між точковим джерелом світла й екраном помістили діафрагму із круглим отвором, радіус якого r можна змінювати в процесі досліду. Відстані від діафрагми до джерела й екрана дорівнюють $a = 100$ см і $b = 125$ см. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості в центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при $r_1 = 1,00$ мм і наступний максимум при $r_2 = 1,29$ мм.

5.34 Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,60$ мкм падає нормально на досить велику скляну пластинку, на протилежному боці якої зроблена кругла виїмка (рис. 5.8). Для точки спостереження P вона становить перші півтори зони Френеля. Знайти глибину h виїмки, при якій інтенсивність світла у точці P буде: 1) максимальною; 2) мінімальною; 3) дорівнює інтенсивності падаючого світла.

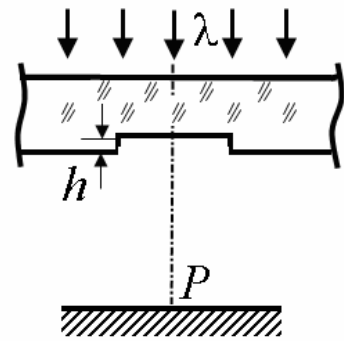


Рисунок 5.8

5.35 Плоска світлова хвиля довжини λ та інтенсивності I_0 , падає нормально на велику скляну пластинку, протилежний бік якої становить непрозорий екран із круглим отвором, що дорівнює першій зоні Френеля для точки спостереження P . У середині отвору зроблена кругла виїмка, що дорівнює половині зони Френеля. При якій глибині h цієї виїмки інтенсивність світла в точці P буде максимальною? Чому вона дорівнює?

5.36 Плоска світлова хвиля з $\lambda = 0,60$ мкм та інтенсивністю I_0 падає нормально на велику скляну пластинку, профіль якої показаний на рис. 5.9. При якій висоті h уступу інтенсивність світла у точці P , розміщеної під ним, буде мінімальною.

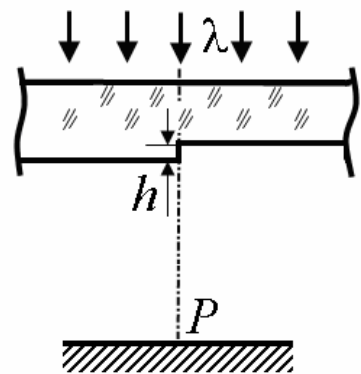


Рисунок 5.9

5.37 Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на довгу прямокутну щілину шириною b . Знайти кутовий розподіл інтенсивності світла для

фраунгоферової дифракції, а також кутове положення мінімумів.

5.38 Скориставшись результатом, отриманим у попередньому завданні, знайти умови, що визначають кутове положення максимумів першого, другого й третього порядків.

5.39 Світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,60$ мкм падає нормально на дифракційну ґратку, що нанесена на плоскій поверхні плоско-опуклої циліндричної скляної лінзи з радіусом кривизни $R = 20$ см. Період решітки $d = 6,0$ мкм. Знайти відстань між симетрично розміщеними головними максимумами першого порядку у фокальній площині цієї лінзи.

5.40 Прозора дифракційна ґратка має період $d = 1,50$ мкм. Знайти кутову дисперсію D_φ (кут. хв/нм), що відповідає максимуму найбільшого порядку спектральної лінії з $\lambda = 530$ нм, якщо світло падає на решітку: 1) нормально; 2) під кутом $\theta_0 = 45^\circ$ до нормалі.

ТЕМА 6 ПОЛЯРИЗАЦІЯ, ДИСПЕРСІЯ СВІТЛА

Основні формули

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (6a)$$

Ступінь поляризації світла

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}). \quad (6б)$$

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = n_2 / n_1. \quad (6в)$$

Діелектрична проникність речовини відповідно до елементарної теорії дисперсії

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}, \quad (6г)$$

де N_k – концентрація електронів із власною частотою ω_{0k}^2 ; e , m_e – заряд і маса електрона.

Зв'язок між показником заломлення і діелектричною проникністю для неферромагнітного середовища в оптичній області спектра

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (6д)$$

Кут φ повороту площини поляризації оптично активними речовинами

$$\varphi = \alpha \cdot l, \quad (6е)$$

де α – стала обертання; l – довжина шляху, що пройшло світло в оптично активній речовині.

6.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1

У скільки разів зменшиться інтенсивність природного світла, що проходить крізь $n = 5$ ніколей, площина пропускання кожного з яких повернута на кут $\varphi = 60^\circ$ відносно площини пропускання попереднього поляризатора. Кожний ніколь відбиває і поглинає $k = 0,1$ частини падаючого світла.

Розв'язання

$I_5/I_0 - ?$	Для розв'язання задачі використаємо закон Малюса (ба):
$n = 5;$	
$\varphi = 60^\circ;$	
$k = 0,1.$	

$$I_{\text{пол}} = I_{0\text{пол}} \cos^2 \varphi, \quad (1)$$

що описує проходження плоскополяризованого світла через поляризатор; закон, що описує проходження природного світла через поляризатор:

$$I_{\text{пол}} = I_{0\text{прир}} / 2; \quad (2)$$

умову, що кожний ніколь відбиває і поглинає $k = 0,1$ інтенсивності світла, яке падає на поляризатор (тобто проходить через поляризатор $(1 - k)$ інтенсивності падаючого світла).

На перший поляризатор падає природне світло. Тому інтенсивність на виході першого поляризатора буде визначатися співвідношенням (2) і дорівнювати

$$I_1 = I_0(1 - k) / 2. \quad (2)$$

Тут враховано, що поляризатор відбиває і поглинає $k = 0,1$ інтенсивності світла.

На другий та всі інші поляризатори падає лінійно поляризоване світло. Інтенсивність світла після їх проходження описується законом Малюса (1).

Інтенсивність світла після проходження другого поляризатора дорівнюватиме

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2 \varphi, \quad (3)$$

після проходження третього поляризатора –

$$I_3 = I_2(1-k)\cos^2 \varphi, \quad (4)$$

після проходження i -го поляризатора –

$$I_i = I_{i-1}(1-k)\cos^2 \varphi. \quad (5)$$

У формулах (3) – (5) враховано: на i -й поляризатор падає світло, яке формується $(i-1)$ -м поляризатором; кожний поляризатор пропускає $(1-k)$ інтенсивності світла.

Використовуючи формули (2) – (5), знаходимо, що інтенсивність світла після проходження i -го поляризатора буде дорівнювати

$$I_i = 0,5 \cdot I_0(1-k)^i \cos^{2(i-1)} \varphi. \quad (6)$$

В умові задачі сказано, що $i = n = 5$. Тоді з (6) знаходимо шукане відношення інтенсивностей:

$$I_n / I_0 = 0,5 \cdot (1-k)^n \cos^{2(n-1)} \varphi. \quad (7)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7), виконаємо обчислення й отримаємо: $I_5/I_0 = 1,15 \cdot 10^{-3}$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (7) у граничному випадку, коли втрати кожного поляризатора на відбиття та поглинання світла прямують до одиниці $k = 1,0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що у цьому випадку все світло буде затримуватися поляризаторами, інтенсивність світла після проходження системи ніколей дорівнюватиме нулю. З розрахункової формули (7) випливає такий самий результат:

$$I_5 / I_0 = 0,5 \cdot (1 - k)^n \cos^{2(n-1)} \varphi = 0,5 \cdot (1 - 1)^n \cos^{2(n-1)} \varphi = 0.$$

Отже, розрахункова формула (7) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $I_5 / I_0 = 0,5 \cdot (1 - k)^n \cos^{2(n-1)} \varphi = 1,15 \cdot 10^{-3}$.

Приклад 6.2

Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0,2$. Знайти відношення інтенсивності природної складової світла до інтенсивності поляризованого світла.

Розв'язання

$\frac{I_{np}/I_{пол} - ?}{P = 0,2}$	Якщо пропустити частково поляризоване світло через поляризатор, то при його обертанні навколо напрямку поширення світлового променя інтенсивність світла на виході буде змінюватися в межах від I_{max} до I_{min} . Для характеристики частково поляризованого світла використовують таку характеристику, як ступінь поляризації, що визначається співвідношенням (6б):
--------------------------------------	--

$$P = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min}). \quad (1)$$

Подамо частково поляризоване світло як сукупність природної складової з інтенсивністю I_{np} та лінійно поляризованої з інтенсивністю $I_{пол}$:

$$I = I_{np} + I_{пол}. \quad (2)$$

Інтенсивність природної складової світла, яке пройшло через поляризатор, дорівнює

$$I'_{np} = 0,5 \cdot I_{np} \quad (3)$$

і не залежить від орієнтації площини пропускання поляризатора.

Інтенсивність лінійно поляризованої складової світла, що пройшло через поляризатор, залежить від взаємної

орієнтації площини пропускання поляризатора і площини поляризації світла. Коли ці площини збігаються, лінійно поляризоване світло повністю проходить через поляризатор, його інтенсивність є максимальною:

$$I'_{\max \text{ пол}} = I_{\text{пол}}. \quad (4)$$

Коли ці площини взаємно перпендикулярні, лінійно поляризоване світло повністю затримується поляризатором, його інтенсивність є мінімальною

$$I'_{\min \text{ пол}} = 0. \quad (4)$$

Таким чином, максимальна інтенсивність частково поляризованого світла, що пройшло через поляризатор, дорівнюватиме

$$I_{\max} = I'_{\max \text{ пол}} + I'_{\text{пр}} = I_{\text{пол}} + 0,5 \cdot I_{\text{пр}}. \quad (5)$$

Мінімальну інтенсивність частково поляризованого світла, що пройшло через поляризатор, можна подати як

$$I_{\min} = I'_{\min \text{ пол}} + I'_{\text{пр}} = 0 + 0,5 \cdot I_{\text{пр}} = 0,5 \cdot I_{\text{пр}}. \quad (6)$$

Підставляємо вирази (5), (6) в (1)

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\text{пол}} + 0,5 \cdot I_{\text{пр}} - 0,5 \cdot I_{\text{пр}}}{I_{\text{пол}} + 0,5 \cdot I_{\text{пр}} + 0,5 \cdot I_{\text{пр}}} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пол}} + I_{\text{пр}}}. \quad (7)$$

Звідси знаходимо, що

$$P = \frac{1}{1 + I_{\text{пр}} / I_{\text{пол}}} \text{ або } I_{\text{пр}} / I_{\text{пол}} = \frac{1}{P} - 1 = \frac{1 - P}{P}. \quad (8)$$

Таким чином, шукане відношення інтенсивностей визначається формулою (8). Виконаємо обчислення й отримаємо $I_{\text{пр}}/I_{\text{пол}} = 4$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (8) у граничному випадку, коли ступінь поляризації світла

дорівнює одиниці $P = 1$. З фізичних міркувань зрозуміло, що за цієї ситуації світло є повністю лінійно поляризованим, тобто природна складова світла відсутня. У цьому разі відношення природної складової до лінійно поляризованої дорівнює нулю $I_{np}/I_{пол} = 0$. З розрахункової формули (8) випливає такий самий результат:

$$I_{np} / I_{пол} = (1 - P) / P = (1 - 1) / 1 = 0.$$

Отже, розрахункова формула (8) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $I_{np} / I_{пол} = (1 - P) / P = 4$.

Приклад 6.3

Кварцова пластинка, вирізана паралельно до оптичної осі, розміщена між двома схрещеними поляризаторами так, що її оптична вісь утворює кут 45° із площинами пропускання поляризаторів. При якій мінімальній товщині пластинки світло з $\lambda_{01} = 643$ нм буде проходити через цю систему з максимальною інтенсивністю, а світло з $\lambda_{02} = 564$ нм буде сильно ослабленим? Різниця показників заломлення $n_e - n_o = 0,0090$.

Розв'язання

$d - ?$ $\varphi = 45^\circ;$ $\lambda_{01} = 643$ нм; $\lambda_{02} = 564$ нм; $n_e - n_o = 0,0090.$	<p>Розглянемо процеси у досліджуваній у задачі системі (рис. 6.1, 6.2). Після проходження першого поляризатора площина поляризації світла (вектор \vec{E}_0) утворює кут $\varphi = 45^\circ$ з оптичною віссю OO' кварцової пластинки (вісь OO' збігається з віссю Y). Після входження світла в кварцову пластину промінь розділяється на звичайний (складова променя, перпендикулярна до оптичної осі OO' пластинки і паралельна осі X) і незвичайний (складова променя,</p>
---	---

паралельна оптичній осі OO' пластинки і паралельна осі Y). Амплітуди звичайного і незвичайного світла, як впливає з рис. 6.1 та рис. 6.2, дорівнюють $E_{0x} = E_0 \sin \varphi$, $E_{0y} = E_0 \cos \varphi$. Коли $\varphi = 45^\circ$, то

$$E_{0x} = E_{0y}. \quad (1)$$

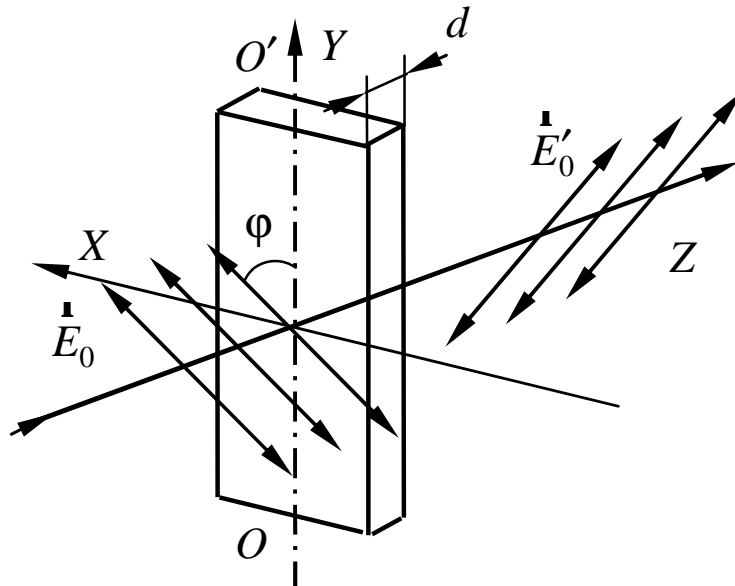


Рисунок 6.1

Ці промені, не розділяючись, поширюються у кристалі, з різною швидкістю, тобто характеризуються різними показниками заломлення. Оптичні довжини ходу в кристалічній пластинці звичайного (L_1) і незвичайного променів (L_2) є різними:

$$L_1 = d \cdot n_o, \quad L_2 = d \cdot n_e. \quad (2)$$

Різниця ходу цих променів дорівнює

$$\Delta L = L_2 - L_1 = d \cdot (n_e - n_o). \quad (3)$$

Тому на виході з кристала початкові фази коливань x -компоненти та y -компоненти напруженості електричного поля будуть різними, їх різниця має вигляд

$$\delta = 2\pi\Delta/\lambda_0. \quad (4)$$

Тут використано, що різниця фаз прямо пропорційна різниці ходу; різниця фаз у $2\cdot\pi$ радіанів відповідає різниці ходу λ_0 .

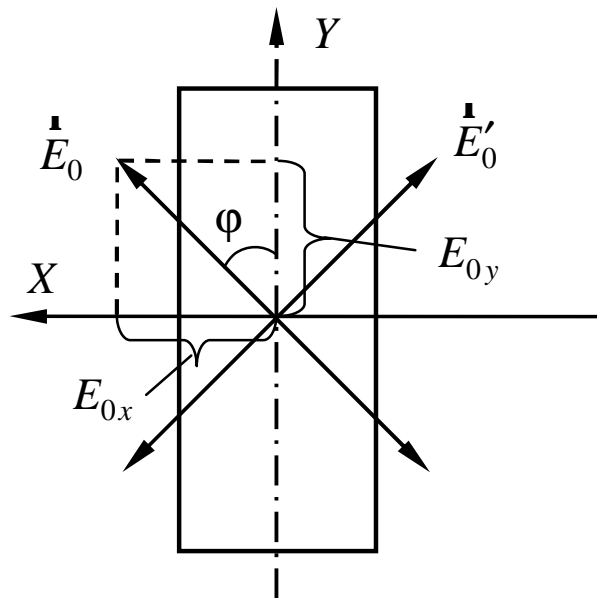


Рисунок 6.2

Як відомо, результат додавання взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою залежить від різниці початкових фаз:

- $\delta = 2\pi m_1$ ($m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$) – коливання напруженості електричного поля відбувається вздовж такої самої прямої, що й у хвилі, яка падає на кварцову пластинку (паралельно вектору \vec{E}_0 (рис. 6.1, 6.2));
- $\delta = \pi + 2\pi m_2$ ($m_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$) – коливання напруженості електричного поля відбувається вздовж прямої, яка для випадку $E_{0x} = E_{0y}$ перпендикулярна до вектора \vec{E}_0 і напрямлена паралельно вектору \vec{E}'_0 (рис. 6.1, 6.2);

- $\delta = \pi/2 + 2\pi m_3$ ($m_3 = 0, 1, 2, 3, \dots$) – кінець вектора напруженості електричного поля для випадку $E_{0x} = E_{0y}$ рухається по колу.

Щоб світло із довжиною хвилі λ_{01} проходило з максимальною інтенсивністю через поляризатор, площина пропускання якого повернена на 90° по відношенню до вхідного поляризатора, потрібно, щоб після кварцової пластинки поляризація світла була паралельною площині пропускання цього поляризатора, тобто перпендикулярною до вихідної і напрямленою паралельно вектору \vec{E}'_0 (рис. 6.1, 6.2). Для цього різниця початкових фаз коливань x -компоненти та y -компоненти напруженості електричного поля повинна дорівнювати

$$\delta = \pi + 2\pi m_2,$$

де, як це випливає з (3) та (4),

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_{01}} d \cdot (n_e - n_o).$$

Звідси знаходимо

$$d = \frac{(1/2 + m_2)\lambda_{01}}{(n_e - n_o)}. \quad (5)$$

Також повинна виконуватись й інша умова: світло з довжиною хвилі λ_{02} на виході із системи повинне бути максимально ослабленим. Тому поляризація світла цієї довжини хвилі після кварцової пластинки має бути перпендикулярною до площини пропускання поляризатора, а отже, близькою до вихідної, яка характеризується вектором \vec{E}_0 (рис. 6.1–6.2)). Різниця початкових фаз коливань x -компоненти та y -компоненти

напруженості електричного поля для хвилі цієї довжини повинна дорівнювати

$$\delta = 2\pi m_1,$$

де, як це випливає з (3) та (4),

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_{02}} d \cdot (n_e - n_o).$$

Звідси знаходимо

$$d = \frac{m_1 \lambda_{02}}{(n_e - n_o)}. \quad (6)$$

Товщина пластинки повинна одночасно задовольняти як умову (5), так і умову (6). Підберемо, виходячи з цієї умови, цілі числа m_1 та m_2 . Для цього обчислимо за формулами (5) та (6) відповідні значення для товщини пластинки. Результати обчислень запишемо у табл. 1 та 2.

Таблиця 1

m_2	0	1	2	3	4
d , мм	0,0355	0,106	0,177	0,249	0,320

Таблиця 2

m_1	0	1	2	3	4	5
d , мм	0	0,0624	0,125	0,187	0,250	0,312

Порівнюючи значення довжин d у табл. 1 та 2, бачимо, що найбільш близькими є значення 0,249 мм ($m_2 = 3$) та 0,250 мм ($m_1 = 4$). Таким чином, шукана товщина визначається виразом (5), де $m_2 = 3$.

Відповідь: $d = (1/2 + m_2)\lambda_{01} / (n_e - n_o) = 0,25$ мм, де $m_2 = 3$.

Приклад 6.4

Показник заломлення повітря для видимого світла – жовтої лінії натрію ($\lambda_1 = 0,59$ мкм) – дорівнює 1,0003. Знайти показник заломлення повітря для ультрафіолетового випромінювання з довжиною хвилі $\lambda_2 = 0,3$ мкм і для інфрачервоного випромінювання з довжиною хвилі $\lambda_3 = 2,0$ мкм. Частоту власних коливань зовнішніх атомних електронів взяти $\omega_0 = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$.

Розв'язання

$n_2 - ?$ $n_3 - ?$ $\lambda_1 = 0,59 \text{ мкм};$ $n_1 = 1,0003;$ $\lambda_2 = 0,3 \text{ мкм};$ $\lambda_3 = 2,0 \text{ мкм};$ $\omega_0 = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}.$
--

Для розв'язання задачі використаємо формулу діелектричної проникності речовини (бг):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (1)$$

де N – концентрація електронів із власною частотою ω_0^2 ; e , m_e – заряд і маса електрона.

Запишемо співвідношення (1) для трьох довжин хвиль ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$):

$$n_1^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}, \quad (2)$$

$$n_2^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_2)^2)}, \quad (3)$$

$$n_3^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 (\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_3)^2)}. \quad (4)$$

Тут використали відомий зв'язок між частотою та довжиною хвилі:

$$\omega = 2\pi c / \lambda,$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

З рівняння (2) неважко знайти концентрацію електронів із власною частотою ω_0^2 :

$$N = m_e \varepsilon_0 (n_1^2 - 1) (\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2) / e^2. \quad (5)$$

Підставляємо цей вираз у (3) та (4) й знаходимо шукані показники заломлення:

$$n_2^2 = 1 + \frac{(n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_2)^2}, \quad (6)$$

$$n_3^2 = 1 + \frac{(n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_3)^2}. \quad (7)$$

Таким чином, шукані концентрації визначаються формулами (6) та (7). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (6) та (7), в одиницях СІ, виконаємо обчислення: $n_2 = 1,00082$, $n_3 = 1,00025$.

Аналіз отриманого результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (6) та (7) у граничному випадку, коли концентрація електронів із власною частотою ω_0^2 дорівнює нулю $N = 0$. У цьому разі, як випливає з (6) та (1), дисперсія відсутня, показники заломлення для будь-яких частот дорівнюють одиниці $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 1$. З розрахункових формул (6) та (7) випливає такий самий результат:

$$\begin{aligned} n_2^2 &= 1 + \frac{(n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_2)^2} = \\ &= 1 + \frac{(1 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_2)^2} = 1, \end{aligned}$$

$$n_3^2 = 1 + \frac{(n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_3)^2} =$$

$$= 1 + \frac{(1 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_3)^2} = 1.$$

Отже, розрахункові формули (6) та (7) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $n_2^2 = 1 + \frac{(n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_2)^2} = 1,00082;$

$$n_3^2 = 1 + \frac{(n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_1)^2)}{\omega_0^2 - (2\pi c / \lambda_3)^2} = 1,00025.$$

6.2 Задачі для самостійного розв'язання

6.1 Пучок світла, що йде в повітрі, падає на поверхню рідини під кутом $\theta_1 = 54^\circ$. Визначити кут заломлення γ_1 пучка, якщо відбитий пучок повністю поляризований.

6.2 На якій кутовій висоті φ над обрієм повинне перебувати Сонце, щоб сонячне світло, відбите від поверхні води, було повністю поляризоване?

6.3 Пучок природного світла, що йде у воді, відбивається від грані алмаза, зануреного у воду. При якому куті падіння θ відбите світло повністю поляризоване?

6.4 Кут Брюстера θ_{Br} при падінні світла з повітря на кристал кам'яної солі дорівнює 57° . Визначити швидкість світла в цьому кристалі.

6.5 Граничний кут θ повного відбиття пучка світла на межі рідини з повітрям дорівнює 43° . Визначити кут Брюстера θ_{Br} для падіння променя з повітря на поверхню цієї рідини.

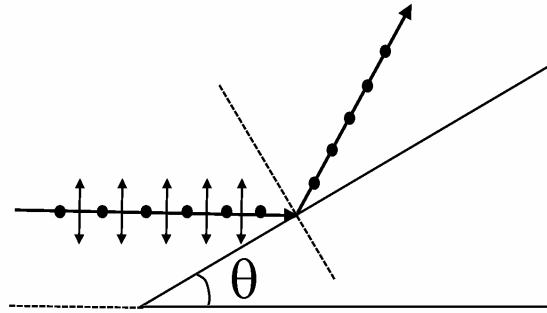


Рисунок 6.3

6.6 Пучок природного світла падає на скляну ($n = 1,6$) призму (рис. 6.3). Визначити двогранний кут θ призми, якщо відбитий пучок максимально поляризований.

6.7 Алмазна призма знаходиться у деякому середовищі з показником заломлення n_1 . Пучок природного світла падає на призму так, як це показано на рис. 6.4. Визначити показник заломлення n_1 середовища, якщо відбитий пучок максимально поляризований.

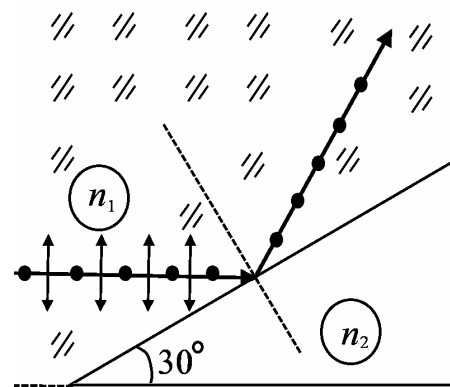


Рисунок 6.4

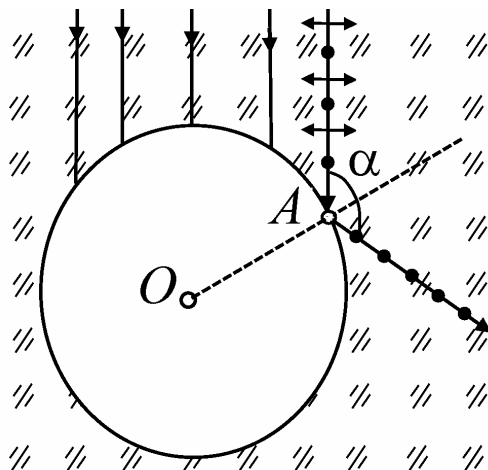


Рисунок 6.5

6.8 Паралельний пучок природного світла падає на сферичну краплю води. Знайти кут α між відбитим і падаючим пучками в точці A (рис. 6.5).

пучками в точці A (рис. 6.6).

6.9 Пучок природного світла падає на скляну кулю ($n=1,54$). Знайти кут γ між заломленим і падаючим

6.10 Пучок природного світла падає на скляну кулю, що знаходиться у воді. Знайти кут φ між відбитим і падаючим пучками в точці A (рис. 6.7). Показник заломлення n скла взяти 1,58.

6.11 Аналізатор в $k = 2$ рази зменшує інтенсивність світла, що приходить до нього від поляризатора. Визначити кут α між площинами пропускання поляризатора й аналізатора. Втрати інтенсивності світла в аналізаторі знехтувати.

6.12 Кут α між площинами пропускання поляризатора й аналізатора дорівнює 45° . У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, що виходить із аналізатора, якщо кут збільшити до 60° ?

6.13 У скільки разів послаблюється інтенсивність світла, що проходить крізь два ніколі, площини поляризації яких утворюють кут $\alpha = 30^\circ$, якщо в кожному з ніколів окремо витрачається 10% інтенсивності падаючого на нього світла?

6.14 У частковополяризованому світлі амплітуда світлового вектора, що відповідає максимальній інтенсивності світла, в $n = 2$ рази більша за амплітуду, що відповідає мінімальній інтенсивності. Визначити ступінь поляризації P світла.

6.15 Ступінь поляризації P частковополяризованого світла дорівнює 0,5. У скільки разів відрізняється

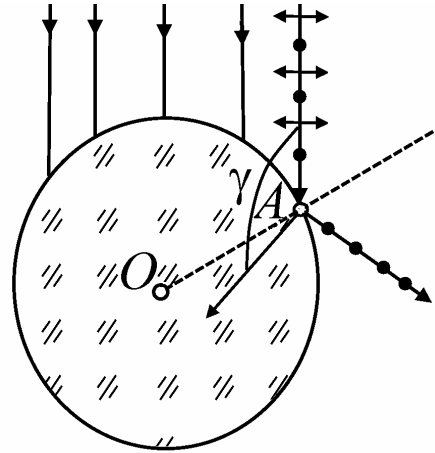


Рисунок 6.6

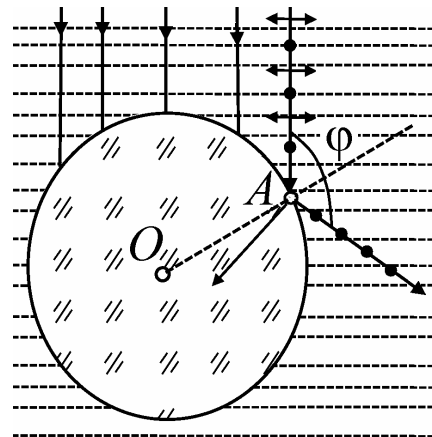


Рисунок 6.7

максимальна інтенсивність світла, що пропускається через аналізатор, від мінімальної?

6.16 На шляху частковополяризованого світла, ступінь поляризації P якого дорівнює 0,6, поставили аналізатор так, що інтенсивність світла, що пройшло через нього, стала максимальною. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, якщо площину пропускання аналізатора повернути на кут $\alpha = 30^\circ$?

6.17 На ніколь падає пучок частковополяризованого світла. При деякому положенні ніколя інтенсивність світла, що пройшло через нього, стала мінімальною. Коли площину пропускання ніколя повернули на кут $\beta = 45^\circ$, інтенсивність світла зростає в $k = 1,5$ разів. Визначити ступінь поляризації P світла.

6.18 Пластинку кварцу товщиною $d_1 = 2$ мм, вирізану перпендикулярно до оптичної осі, помістили між паралельними ніколями, внаслідок чого площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi = 53^\circ$. Визначити товщину d_2 пластинки, при якій дане монохроматичне світло не проходить крізь аналізатор.

6.19 Розчин глюкози з масовою концентрацією $C_1 = 280$ кг/м³, що втримується у скляній трубці, повертає площину поляризації монохроматичного світла, що проходить через цей розчин, на кут $\varphi = 32^\circ$. Визначити масову концентрацію C_2 глюкози в іншому розчині, налитому в трубку такої самої довжини, якщо він повертає площину поляризації на кут $\varphi = 24^\circ$.

6.20 Кут φ повороту площини поляризації жовтого світла натрію при проходженні через трубку з розчином цукру дорівнює 40° . Довжина трубки $d = 15$ см. Питоме обертання $[\alpha]$ цукру дорівнює $1,17 \cdot 10^{-2}$ рад·м³/(м·кг). Визначити густину ρ розчину.

6.21 Вільний електрон знаходиться у полі монохроматичної світлової хвилі. Інтенсивність світла $I = 150 \text{ Вт/м}^2$, його частота $\omega = 3,4 \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$. Знайти: 1) амплітуду коливань електрона й амплітуду його швидкості. При знаходженні рівняння руху можна знехтувати магнітною складовою поля; 2) відношення F_m/F_e , де F_m і F_e – амплітудні значення сил, що діють на електрон з боку магнітної та електричної складових поля світлової хвилі.

6.22 Електромагнітна хвиля із частотою ω поширюється в розрідженій плазмі. Концентрація вільних електронів у плазмі дорівнює n_0 . Нехтуючи взаємодією хвилі з іонами плазми, знайти залежність: 1) діелектричної проникності плазми від частоти; 2) фазової швидкості електромагнітної хвилі від її довжини хвилі λ у плазмі.

6.23 Знайти концентрацію вільних електронів іоносфери, якщо для радіохвиль із частотою $\nu = 100 \text{ МГц}$ її показник заломлення $n = 0,90$.

6.24 Маючи на увазі, що для досить жорстких рентгенівських променів електрони речовини можна вважати вільними, визначити, на скільки відрізняється від одиниці показник заломлення графіту для рентгенівських променів з довжиною хвилі у вакуумі $\lambda = 50 \text{ пм}$.

6.25 Електрон, на який діють квазіпружна сила kx і «сила тертя» γv , перебуває в полі електромагнітного випромінювання. E – складова поля – змінюється в часі за законом $E = E_0 \cos(\omega t)$. Нехтуючи дією магнітної складової поля, знайти рівняння руху електрона;

6.26 Знайти залежність між груповою u і фазовою v швидкостями для таких законів дисперсії: 1) $v \propto 1/\sqrt{\lambda}$; 2) $v \propto k$; 3) $v \propto 1/\omega^2$. Де λ , k і ω – довжина хвилі, хвильове число, кутова частота.

6.27 У деякому середовищі зв'язок між груповою й фазовою швидкостями електромагнітної хвилі має вигляд $v\upsilon = c^2$, де c – швидкість світла у вакуумі. Знайти залежність діелектричної проникності цього середовища від частоти хвилі $\epsilon(\omega)$.

6.28 Показник заломлення сірковуглецю для світла із довжинами хвиль 509, 534 і 589 нм дорівнює відповідно 1,647, 1,640 і 1,630. Обчислити фазову й групову швидкості світла поблизу $\lambda = 534$ нм.

6.29 Плоский світловий імпульс поширюється в середовищі, де фазова швидкість υ лінійно залежить від довжини хвилі λ за законом $\upsilon = a + b\lambda$, a і b – деякі додатні сталі. Показати, що в такому середовищі форма довільного світлового імпульсу буде відновлюватися через проміжок часу $\tau = 1/b$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1 $T = 2$ с; $\varphi = 36^\circ$.

1.2 $T = 0,8$ с; $\nu = 1,25$ Гц; $\varphi = \pi$ рад.

1.4 $x = 4 \cos(\pi t + \pi/2)$ см; 1) $(\omega t + \varphi) = 5\pi/3$ рад;

2) $(\omega t + \varphi) = 0,842\pi$ рад.

1.5 $x = 0,1 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$ м; $x = -8,66$ см, $v = -5,24$ см/с,
 $a = 9,50$ см/с².

1.6 $v_{\max} = 4,71$ см/с; $a_{\max} = 7,40$ см/с².

1.7 $|a| = \omega \sqrt{(\omega^2 A^2 - v^2)} = 12$ см/с².

1.8 $\omega = 2$ с⁻¹; $a_{\max} = 40$ см/с².

1.9 $\omega = 10$ с⁻¹; $T = 0,628$ с; $A = 1$ см; $x = \cos(10t)$ см.

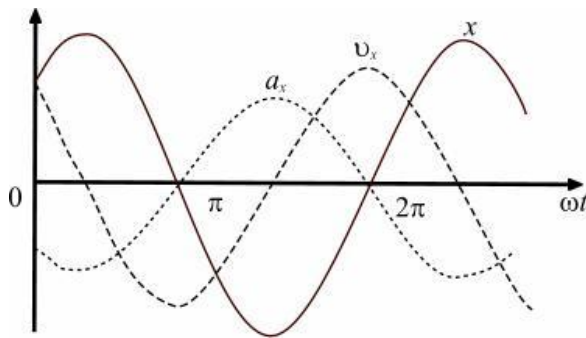
1.10 $A = 2x_1^2 / \sqrt{4x_1^2 - x_2^2} = 8,33$ см.

1.11 $\omega = \sqrt{-1111} = 4$ с⁻¹; $T = 2\pi/\omega = 1,57$ с;

$A = \sqrt{x^2 + \omega^2 x^2} = 7,07$ см; $(\omega t + \varphi) = \arccos(x/A) = \pi/4$ рад;

v_{\max}, a_{\max} .

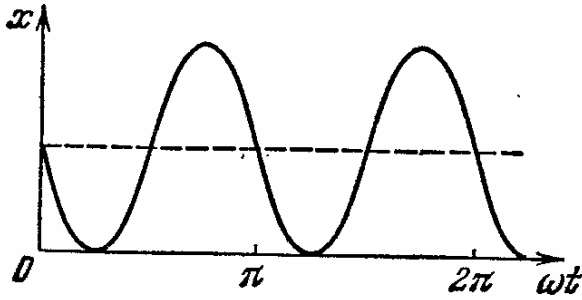
1.12 $a = 0,12$ м/с².



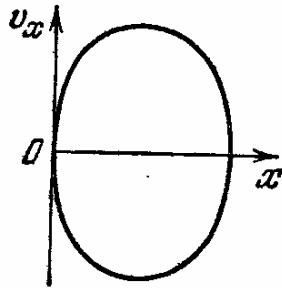
1.13 1)

2) $(v_x / A\omega)^2 + (x/A)^2 = 1, a_x = -\omega^2 x$.

1.14 1) $A = a/2, T = \pi/\omega;$



2) $v_x^2 = 4\omega^2 x(a-x)$



1.15 $\omega = \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)/(x_2^2 - x_1^2)}, A = \sqrt{(v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2)/(v_1^2 - v_2^2)}.$

1.16 1) $\langle v \rangle = 3A/T = 0,50 \text{ м/с};$ 2) $\langle v \rangle = 6A/T = 1,0 \text{ м/с}.$

1.17 1) $\langle v_x \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} A\omega;$ 2) $|\langle \bar{v} \rangle| = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} A\omega;$

3) $\langle v \rangle = \frac{2(4-\sqrt{2})}{3\pi} A\omega$

1.18 $\Delta\varphi = \pi/3 \text{ рад}.$

1.19 $\Delta\varphi = 2\pi/3 \text{ рад}$ або $\Delta\varphi = 4\pi/3 \text{ рад}.$

1.20 $A = 1,41 \text{ см}; \varphi = \pi/4 \text{ рад}; x = 1,41 \cos(\pi t + \pi/4) \text{ см}.$

1.21 $A = 2,24 \text{ см}; \nu = 0,159 \text{ Гц}; \varphi = 0,353\pi \text{ рад};$

$x = 2,24 \cos(t + 0,353\pi) \text{ см}.$

1.22 $A = 3,86 \text{ см}; \varphi = 0,417\pi \text{ рад};$

$x = 3,86 \cos(4,19t + 0,417\pi) \text{ см}.$

1.23 $A = 6 \text{ см}; \varphi = \pi/3 \text{ рад}; x = 6 \cos(\pi t + \pi/3) \text{ см}.$

1.24 $T = 2 \text{ с}.$

1.25 $y = -(A_2/A_1)x$ або $y = -(1/2)x.$

1.26 $y = -\left(A_2 / A_1\right)x$ або $y = -2x$.

1.27 $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ або $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

1.28 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, $v = 13,7$ м/с.

1.29 $y = -2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)x^2 + A_2$ або $y = -\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 1$.

1.30 $y = \left(\frac{A_2^2}{2A_1}\right)(A_1 - x)$ або $y = \frac{9}{4}(2 - x)$

1.31 $v_{\max} = 2,73A\omega$

1.32 $\omega_1 = 47,9$ рад/с; $\omega_2 = 52,1$ рад/с; $T = 1,5$ с.

1.33 1) $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, за годинниковою стрілкою;

2) $\bar{a} = -\omega^2\bar{r}$.

1.34 1) $F = -62,5$ мН; 2) $F = -125$ мН.

1.35 $F_{\max} = 2$ мН, $T_{\max} = 50$ мкДж.

1.36 $F = 4,39$ мН, $E = 877$ мкДж.

1.37 $t = 2$ с, $\omega t = \pi/3$.

1.38 $k = 4,87$ Н/м.

1.39 $T = 0,6$ с.

1.40 $E = 0,8$ Дж.

1.41 $\frac{l_1}{l_2} = -\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2,25$.

1.42 $T = 2\pi\sqrt{l/(g+a)} = 1,8$ с.

$$1.43 \quad L = \frac{l^2 - 2d(l-d)}{l-2d} = 50 \text{ см}, \quad T = 2\pi\sqrt{L/g} = 1,42 \text{ с.}$$

$$1.44 \quad L = \frac{5}{6}l = 25 \text{ см}, \quad T = 2\pi\sqrt{L/g} = 1 \text{ с.}$$

$$1.45 \quad T = 2\pi\sqrt{3l/g} = 1,9 \text{ с.}$$

$$1.46 \quad T = 2\pi\sqrt{2R/g} = 1,55 \text{ с.}$$

$$1.47 \quad T = 2\pi\sqrt{3R/(2g)} = 1,35 \text{ с.}$$

$$1.48 \quad L = 36 \text{ см}, \quad T = 1,2 \text{ с.}$$

$$1.49 \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R^2 + r^2)(R+r)}{2g(R^2 + Rr + r^2)}} = 1,14 \text{ с.}$$

$$1.50 \quad a = 10 \text{ см.}$$

$$1.51 \quad a = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 34,6 \text{ см.}$$

$$1.52 \quad J = \frac{mR^2T_1^2}{2(T_2^2 - T_1^2)} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

$$1.53 \quad T = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}} = 1,6 \text{ с.}$$

$$1.54 \quad l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6,21 \text{ м.}$$

1.55 Рівняння руху кульки $x = A \cos \omega t$, де $A = l \sin \alpha$,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \text{ Максимальна швидкість } v_{\max} = A\omega = 0,31 \text{ м/с.}$$

Користуючись законами збереження енергії:

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 0,31 \text{ м/с.}$$

$$1.56 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2 + 2ag \sin \alpha}}} = 1,1 \text{ с.}$$

$$1.57 \quad q = 4h\sqrt{(\eta^2 - 1)\pi\epsilon_0 mg} = 4 \text{ мкКл.}$$

$$1.58 \quad F = mg \cos(\varphi_m \cos \omega t) + ml\omega^2 \varphi_m^2 \sin^2 \omega t .$$

$$1.59 \quad A = 5,52 \text{ см, } T = 0,2 \text{ с.}$$

$$1.60 \quad T = 2\pi / \sqrt{(k/m) - \omega^2} , \quad (k/m) < \omega^2 .$$

$$1.61 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g S}} = 0,77 \text{ с.}$$

$$1.62 \quad T = 2\pi \sqrt{h / [g(\rho_g / \rho_n - 1)]} = 60,2 \text{ с.}$$

$$1.63 \quad A\omega^2 > g .$$

$$1.64 \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p_e E}{I}} = 2,4 \text{ кгЦ.}$$

$$1.65 \quad B = \frac{4\pi^2 I}{T^2 i S} = 8,2 \text{ мТл.}$$

$$1.66 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a^2 U_0}} .$$

$$1.67 \quad T = 4\pi a \frac{\sqrt{ma}}{b^2}$$

$$1.68 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\eta l}{g(\eta - 1)}} = 1,1 \text{ с.}$$

$$1.69 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\eta(1 - \eta)m}{\chi}} = 0,13 \text{ с.}$$

$$1.70 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\chi_1 + \chi_2}} .$$

$$1.71 \quad T = 2\pi \sqrt{m \frac{(\chi_1 + \chi_2)}{\chi_1 \chi_2}} .$$

1.72 1) $\frac{g}{R}x = 0$, де x – зміщення тіла відносно центра Землі, R – радіус Землі, g – нормальне прискорення вільного падіння;

2) $\tau = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42$ хв; 3) $v = \sqrt{gR} = 7,9$ км/с.

1.73 $k = 4\pi^2 \frac{a}{gT^2} = 0,4$.

1.74 1) $\vartheta = 3,0^\circ \cos 3,5t$; 2) $\vartheta = 4,5^\circ \cos 3,5t$;
3) $\vartheta = 5,4^\circ \cos(3,5t + 1,0)$, t у секундах.

1.75 $\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + a\left(\frac{y}{v_0}\right)^2 = 1$.

1.76 $\Delta h_{\max} = \frac{mg}{k} = 10$ см, $E = \frac{m^2 g^2}{2k} = 4,8$ мДж.

1.77 $A = \frac{mg}{\chi} \sqrt{1 + \frac{2h\chi}{mg}}$, $E = mgh + \frac{m^2 g^2}{2\chi}$.

1.78 $A = \frac{mg}{\chi} \sqrt{1 + \frac{2h\chi}{(m+M)g}}$.

1.79 $T = \frac{4\pi}{\omega}$.

1.80 $I = ml^2 \frac{\omega_2^2 - \frac{g}{l}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = 0,8$ Г·м².

1.81 $\omega = \sqrt{\frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1 + I_2}}$.

1.82 Індукція поля збільшиться у 25 разів.

1.83 $t_2 = 15$ хв.

1.84 $\beta = 0,0023 \text{ c}^{-1}$.

1.85 $\lambda = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{A_1}{A_2} = 2,31 \cdot 10^{-3}$.

1.86 $N = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_1}{A_2} = 231$.

1.87 $N = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_1}{A_2} = 173$, $t = 2\pi n \sqrt{\frac{m}{k}} = 172 \text{ c}$.

1.88 $r = 9,16 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с}$.

1.89 $T = 1,005 \text{ с}$.

1.90 $N = 35$.

1.91 1) $\beta = 0,025 \text{ c}^{-1}$; 2) $\nu = 1,59 \text{ Гц}$; 3) $\lambda = 0,0157$;
4) $N = 64$.

1.92 У 8 разів.

1.93 $Q \approx \pi \nu_0 \tau = 1,88 \cdot 10^5$.

1.94 $Q = \sqrt{\frac{mk}{r}} = 200$.

1.95 $x = 0,1e^{-0,2t} \cos 8\pi t \text{ (м)}$.

1.96 $\omega_0 = \omega \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} = 152 \text{ c}^{-1}$.

1.97 1) $A = a_0$, $\nu = a_0 \omega$;

2) $t_n = \frac{1}{\omega} \left(\arctg \frac{\omega}{\beta} + n\pi \right)$, де $n = 0, 1, 2, \dots$

1.98 1) $\phi(0) = -\beta \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = (\beta^2 - \omega^2) \phi_0$;

2) $t_n = \frac{1}{\omega} \left(\arctg \frac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega} + n\pi \right)$ $t_n = \frac{1}{\omega} \left(\arctg \frac{\omega}{\beta} + n\pi \right)$,

де $n = 0, 1, 2, \dots$

$$1.99 \quad \beta = \omega \sqrt{\eta^2 - 1} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

$$1.100 \quad 1) v(t) = a_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t}; \quad 2) v(t) = v_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} e^{-\beta t}.$$

1.101 Відповідь залежить від того, який зміст вкладають у питання. Із часом загасають швидше перші коливання. Якщо ж узяти для кожного коливання його природний масштаб часу – період, то за цей час швидше загасають другі коливання.

$$1.102 \quad T = \sqrt{(4\pi^2 + \lambda^2) \Delta x / g} = 0,70 \text{ с}.$$

$$1.103 \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4g\tau^2}{l \ln^2 \eta} - 1} = 1,3 \cdot 10^2.$$

$$1.104 \quad \tau = \frac{2RI}{a^4 B^2}.$$

$$1.105 \quad 1) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\chi}} = 0,28 \text{ с};$$

$$2) N = \left(x_0 - \frac{kmg}{\chi} \right) / \left(4 \frac{kmg}{\chi} \right) = 3,5.$$

$$1.106 \quad n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} = 16 \text{ с}^{-1}.$$

$$1.107 \quad v = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 10,2 \text{ м/с}.$$

$$1.108 \quad v_0 = 1002 \text{ Гц}.$$

$$1.109 \quad \Delta v = \frac{\beta^2}{4\pi^2 v_0} = 4,05 \text{ Гц}.$$

$$1.110 \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta y}{\nu_0}} = 0,089.$$

$$1.111 \quad \nu_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{2}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}} = 1,75 \text{ Гц.}$$

$$1.112 \quad \beta = 0,1 \text{ с}^{-1}, A_{\text{рез}} = 5 \text{ см.}$$

$$1.113 \quad F_0 = 2\pi\nu_0 r A_{\text{рез}} = 0,314 \text{ мН.}$$

$$1.114 \quad \nu_{\text{рез}} = 510 \text{ Гц.}$$

$$1.115 \quad 1) \nu_0 = 5,03 \text{ Гц}; 2) \nu_{\text{рез}} = 4,91 \text{ Гц}; 3) A_{\text{рез}} = 6,4 \text{ мм};$$

4) 3,2.

$$1.116 \quad 1) 1,53; 2) 15,2.$$

$$1.117 \quad x = \frac{F_0 / m}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t).$$

$$1.118. \quad 1) \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2};$$

$$2) \beta = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\sqrt{3}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{12}}.$$

$$1.119 \quad A = \pi a F_0 \sin \varphi.$$

$$2.1 \quad T \approx 1 \text{ мкс.}$$

$$2.2 \quad t \approx 10 \text{ мкс}; I_m = 0,47 \text{ А.}$$

$$2.3 \quad U^2 + I^2 L / C = U_m^2.$$

$$2.4 \quad 1) I = I_m \sin \omega_0 t, \text{ где } I_m = U_m \sqrt{C / L}, \quad \omega_0 = 1 / \sqrt{CL};$$

$$2) \xi_S = U_m / \sqrt{2}$$

$$2.5 \quad A = (\eta^2 - 1)W.$$

$$2.6 \quad 1) T = 2\pi \sqrt{L(C_1 + C_2)} = 0,7 \text{ мс};$$

$$2) I_m = U \sqrt{(C_1 + C_2) / L} = 8 \text{ А.}$$

2.7 $U = \frac{1}{2}(1 \pm \cos \omega t)U_0$ -, де знак "+" для лівого конденса-
тора, знак «-» - для правого; $\omega = \sqrt{2 / CL}$.

$$2.8 I = \frac{\Phi}{L} \cos(t / \sqrt{LC}).$$

$$2.9 1) T = 3,14 \text{ мс}; 2) \lambda = 0,06; 3) U = 100e^{-20t} \cos 636\pi t .$$

2.10 20.

2.11 Не зміниться.

$$2.12 -\Delta W = 2\pi R \frac{CU_0^2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 31,4 \text{ мкДж.}$$

$$2.13 W = W_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}, 50 \text{ \%}.$$

$$2.14 t \approx \frac{Q}{2\pi\nu_0} \ln \eta = 1,0 \text{ мс.}$$

$$2.15 1) \operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi n}{\omega}; 2) t_n = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\omega} + \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.16 \frac{U_0}{U_m} = \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}.$$

$$2.17 Q = \frac{U_m^2}{2P} \sqrt{\frac{C}{L}} = 6,5 \cdot 10^3.$$

$$2.18 \langle P \rangle = R \langle I \rangle^2 = \frac{1}{2} R I_m^2 = 20 \text{ мВт.}$$

$$2.19 U_C = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\beta},$$

$$U_C(0) = I_m \sqrt{\frac{L}{C(1 + \beta^2 / \omega^2)}}.$$

$$2.20 \frac{W_L}{W_C} = \frac{L}{CR^2} = 5.$$

$$2.21 t = \frac{Q}{\pi\nu} \ln \eta = 0,5 \text{ с.}$$

$$2.22 n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1} = 16.$$

$$2.23 \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(2Q)^2}} \approx \frac{1}{8Q^2} = 0,5 \% .$$

$$2.24 \text{ 1) } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}};$$

$$2) Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}.$$

Для розв'язання потрібно врахувати, що $\frac{dq}{dt} = I - I'$,

де q – заряд конденсатора, I – струм через котушку, I' – струм через конденсатор ($I' = U/R$).

$$2.25 \varphi = \arctg \sqrt{\left(\frac{U_0}{I_0 R}\right)^2 - 1} = 0,8 \text{ рад.}$$

$$2.26 Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = 60,2 \text{ Ом,}$$

$$\varphi = -\arctg(\omega RC) = -0,72 \text{ рад.}$$

$$2.27 I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left(\cos(\omega t - \varphi) - \cos \varphi \cdot e^{-\frac{tR}{L}} \right), \quad \text{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

$$2.28 \quad I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \left(\cos(\omega t - \varphi) - \cos \varphi \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC}.$$

$$2.29 \quad 1) \quad Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}} = 51,7 \text{ Ом};$$

$$2) \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1};$$

$$3) \quad Z_{\text{рез}} = \frac{L}{CR} = 1,11 \text{ кОм}.$$

$$2.30 \quad 1) \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = 345 \text{ с}^{-1};$$

$$2) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{R^2 C^2}{2}}} = 372 \text{ с}^{-1}.$$

$$2.31 \quad \varphi = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{X_L}{Z} \right)^2} = 37^\circ,$$

$$P = \left(\frac{U}{Z} \right)^2 \sqrt{(Z)^2 - X_L^2} = 160 \text{ Вт}.$$

$$2.32 \quad I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} = 6 \text{ А},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{(\omega^2 LC - 1)R}{\omega L} = 6,56^\circ.$$

2.33 $\cos \varphi_2 = 0,8.$

2.34 $\eta = 1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} = 1,5.$

2.35 $Q = \sqrt{n^2 - 1/4}.$

2.36 $\rho = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon\nu} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = 6 \cdot 10^6 \text{ Ом}\cdot\text{м}.$

2.38 1) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = 3 \cdot 10^4 \text{ рад/с};$

2) $I = URC / L = 3 \text{ мА}, I_L = U\sqrt{C/L} = 1 \text{ А},$

$$I_C = U\sqrt{\frac{C}{L} - \left(\frac{RC}{L}\right)^2} = 1 \text{ А}.$$

2.39 $Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}}.$

3.1 1) $\nu = 100 \text{ Гц}, \lambda = 3,14 \text{ м};$ 2) $\nu = 314 \text{ м/с};$

3) $\xi_{\text{max}} = 0,314 \text{ м/с}, \xi_{\text{max}} = 197 \text{ м/с}^2.$

3.3 1,3,5–10.

3.5 1) $\xi(0, t) = A \cos 2\pi\nu t$; 2) $\xi = -2 \text{ мм}.$

3.6 1) $\nu = 350 \text{ м/с};$ 2) $\xi_{\text{max}} = 0,79 \text{ м/с}.$

3.7 1) $\xi = -0,1 \text{ мм};$ 2) $\xi = 0,863 \text{ м/с}, \xi = 0,439 \text{ м/с}^2.$

3.8 $\xi = 5,88 \text{ см}.$

3.9 $\xi = -1,73 \text{ см}.$

3.10 $\Delta\varphi = 1,26$ рад.

3.11 $\Delta\varphi = 1,57$ рад.

3.12 $\nu = 50$ Гц.

3.13 $\nu = 15$ м/с.

3.14 .У всіх точках площини $x = const$ коливаються в однаковій фазі й мають однакове зміщення.

3.15 .1) $\lambda = 8$ м; 2) $\xi(x, t) = 0,1 \cos 5\pi \left(t - \frac{x}{20} \right)$; 3) $\xi_1 = 0$,

$\xi_2 = -0,07$ м.

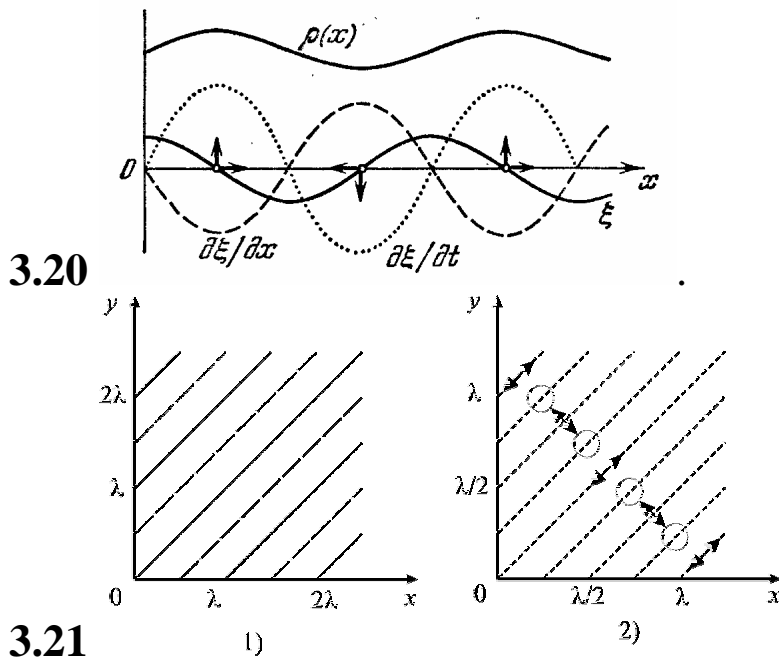
3.16 $\frac{\mathbf{r}}{k} = \omega \left(\frac{\mathbf{r}}{v_1} e_x + \frac{\mathbf{r}}{v_2} e_y + \frac{\mathbf{r}}{v_3} e_z \right)$.

3.17 1) $\frac{a}{\lambda} = 5,1 \cdot 10^5$; 2) $\xi_{\max} = 11$ см/с, $\xi_{\max} / \nu = 3,2 \cdot 10^{-4}$;

3) $(\partial\xi/\partial x)_{\max} = 3,2 \cdot 10^{-4}$, $(\partial\xi/\partial t)_{\max} = \nu(\partial\xi/\partial x)_{\max}$.

3.18 1) $\nu = 1,7$ км/с; 2) $\xi = 30$ мкм, $\xi = -5,1$ м/с, $\xi = -9,7 \cdot 10^7$ м/с²; 3) $\xi_{\max} = 54$ м/с.

3.19 $\varepsilon = 1,9 \cdot 10^{-2}$.



1) частинки середовища у точках на суцільних прямих ($y = x \pm n\lambda, n = 0, 1, 2, \dots$) коливаються з максимальною амплітудою, на пунктирних – не коливаються зовсім;

2) частинки середовища у точках на суцільних прямих $y = x \pm n\lambda, \quad y = x \pm (n \pm 1/2)\lambda, \quad y = x \pm (n \pm 1/4)\lambda$ коливаються вздовж них, перпендикулярно до них рухаються по колу. В інших точках частинки рухаються по еліпсу.

$$3.22 \quad 1) \gamma = \frac{\ln(\eta r_0 / r)}{r - r_0} = 0,08 \text{ м}^{-1}; \quad 2) v_m = \frac{2\pi\nu a_0}{\eta} = 15 \text{ см/с.}$$

$$3.23 \quad \gamma = \frac{\ln(\eta r_1 / r_2)}{2(r_2 - r_1)} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

$$3.24 \quad 1) \gamma = \frac{\ln(\eta r_1 / r_2)}{(r_2 - r_1)} = 0,1 \text{ м}^{-1}; \quad 2) \lambda = 30 \text{ м}, \quad \nu = 4500 \text{ м/с.}$$

$$3.25 \quad 1) \nu = 5,05 \text{ км/с}; \quad 2) \nu = 3,31 \text{ км/с}; \quad 3) \nu = 4,44 \text{ км/с.}$$

$$3.26 \quad \lambda_{\min} = 17 \text{ мм}, \quad \lambda_{\max} = 21 \text{ м.}$$

$$3.27 \quad \nu = 350 \text{ м/с.}$$

$$3.28 \quad \nu_1 = 339 \text{ м/с}, \quad \nu_2 = 375 \text{ м/с.}$$

$$3.29 \quad 1) \nu = 972 \text{ м/с}; \quad 2) \nu = 337 \text{ м/с}; \quad 3) \nu = 262 \text{ м/с.}$$

$$3.30 \quad \nu = 1,45 \text{ км/с.}$$

$$3.31 \quad t = 6 \text{ с.}$$

$$3.32 \quad c_p / c_v = 1,67.$$

$$3.33 \quad \nu_1 / \nu_2 = 4,8.$$

$$3.34 \quad t = 25,8 \text{ с.}$$

$$3.35 \quad t = \frac{2l}{a(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})}.$$

$$3.36 \quad A = 1,73 \text{ мм.}$$

3.37 $\xi_{\max} = 64,15 \text{ мкм.}$

3.38 1) $l_{\text{вузл}} = (2m+1)\nu/(4\nu), \quad l_{\text{вузл}} = 2,5, 7,5, 12,5, \dots \text{ см,}$

$l_{\text{пучн}} = m\nu/(2\nu), \quad l_{\text{пучн}} = 0,5, 10, \dots \text{ см;}$

2) $l_{\text{вузл}} = m\nu/(2\nu), \quad l_{\text{вузл}} = 0,5, 10, \dots \text{ см,} \quad l_{\text{пучн}} = (2m+1)\nu/(4\nu),$

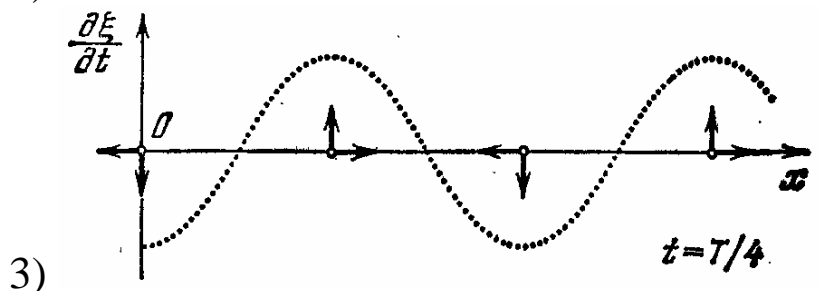
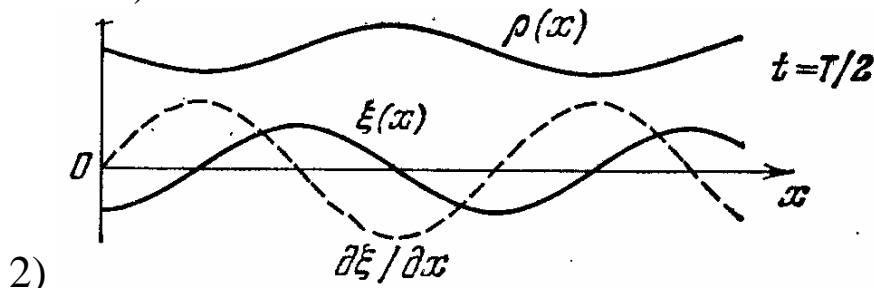
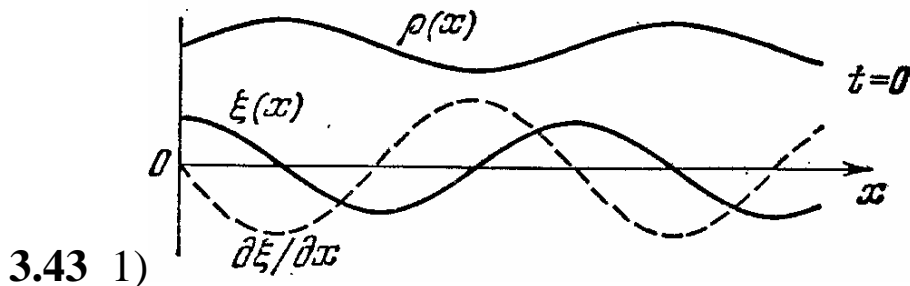
$l_{\text{пучн}} = 2,5, 7,5, 12,5, \dots \text{ см,;}$

3.39 $n = \sqrt{E/G} = 3,3.$

3.40 1) $\lambda = 5 \text{ см;}$ 2) $\lambda = 10 \text{ см.}$

3.41 1) $v_{\min} = 144 \text{ Гц;}$ 2) $v_{\min} = 72 \text{ Гц.}$

3.42 $\nu = 330 \text{ м/с.}$



3.44 $A = 5 \text{ мм,}$ третьему обертому.

3.45 $\lambda = 50 \text{ см;}$ $A = 7,4 \text{ мм}$ або $A = 4,8 \text{ мм;}$ номер

обертому $n = \frac{2l}{\lambda_n} = 6.$

$$3.46 \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\eta_2(1+\eta_1)}{\eta_1(1+\eta_2)}} = 1,4.$$

$$3.47 \text{ Збільшиться у } \eta = \sqrt{\frac{1-\Delta T/T}{1+\Delta l/l}} = 2 \text{ рази.}$$

$$3.48 v_n = \frac{2n+1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3,8(2n+1) \text{ кГц; чотири коливання з}$$

частотами $v_1 = 26,6 \text{ кГц}$, $v_2 = 34,2 \text{ кГц}$, $v_3 = 41,8 \text{ кГц}$,
 $v_4 = 49,4 \text{ кГц}$.

$$3.49 \text{ 1) } \Delta v = 1,5 \text{ ГГц; 2) } n = 3,2 \cdot 10^5.$$

$$3.50 \text{ 1) } T_{\text{макс}} = \frac{1}{4} m \omega^2 a_{\text{макс}}^2; \text{ 2) } \langle T \rangle = \frac{1}{8} m \omega^2 a_{\text{макс}}^2.$$

$$3.51 A_{\text{відб}} / A_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho c}{\rho_{\epsilon} c_{\epsilon}} - 1 \right) = 1,57.$$

$$3.52 0,118 \%$$

$$3.53 \text{ 1) } v = 341 \text{ Гц; 2) } v = 268 \text{ Гц.}$$

$$3.54 \text{ 1) } v = 336 \text{ Гц; 2) } v = 264 \text{ Гц.}$$

$$3.55 \Delta v / v = 0,09.$$

$$3.56 u = 4,1 \text{ м/с, у напрямку до резонатора.}$$

$$3.57 \text{ 1) } \tau = 4,5 \text{ с; 2) } \tau = 5,5 \text{ с.}$$

$$3.58 \text{ 1) } v_2 = 699 \text{ Гц; 2) } v_2 = 517 \text{ Гц.}$$

Зміниться: 1) $v_2 = 696 \text{ Гц}$; 2) $v_2 = 515 \text{ Гц}$.

$$3.59 u = \frac{\Delta v}{2v_0 + \Delta v} v = 3,74 \text{ м/с.}$$

$$3.60 v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 2\omega t / v}} = 1,35 \text{ кГц.}$$

3.61 1) $v = \frac{v_0}{1 - \eta^2} = 5$ кГц ; 2) $r = l\sqrt{1 + \eta^2} = 0,32$ км.

3.62 $W = 23,7$ мкДж.

3.63 $\langle \omega \rangle = 3,01$ мДж/м³.

3.64 $\langle \omega \rangle = 2,51$ Дж/м³.

3.65 $N = 157$ Вт; $\langle \omega \rangle = 60,2$ мкДж/м³.

3.66 $Z_S = 428$ Па·с/м.

3.67 $Z_S = 1,39$ МПа·с/м.

3.68 $\xi_{\max} = 0,472$ мм/с.

3.69 $Z_a = 25,7$ кПа·с/м³.

3.70 $A = 475$ нм.

3.71 $p_0 = 1,61$ Па.

3.72 $N = 5,98$ Вт.

3.73 $p_0 = 82,5$ мПа.

3.74 Ні. Стояча хвиля енергію не переносить.

3.75 $Z_S = 430$ Па·с/м, $p_0 = 93$ мкПа.

3.76 $I_1 = 27,2$ пВт/м², $I_1 = 1,87$ пВт/м².

3.77 1) $L_p = 20$ дБ; 2) $L_p = 100$ дБ.

3.78 $A = \frac{1}{2\pi r v} \sqrt{\frac{RT}{\gamma M}} \sqrt{2\rho I_0 10^{10} \frac{L}{RT} \sqrt{\frac{\gamma M}{RT}}} = 0,55$ мкм.

3.79 $L_p = 35,5$ дБ.

3.80 Вказівка. Використати закон Гука у диференціальній

формі $\sigma = E d\xi / dx$. $F = \frac{\pi^2 d^2 \xi_0 \sqrt{\rho E}}{2T} = 3,11$ Н.

3.81 $x_0 = \frac{\ln n}{2av^2}$. 1) $x_0 = 17$ км; 2) $x_0 = 7$ см.

3.82 У 10^8 разів.

3.83 У 32 рази.

3.84 1) $x = 17$ м; 2) $x = 11,6$ км.

3.85 1) $L = 63$ дБ; 2) $L = 70$ дБ.

3.86 Перший тон не чути. $L_2 = 20$ фон, $L_3 = 40$ фон.

3.87 У 100 разів.

3.88 $L_N = 50$ дБ.

3.89 $N = 40$ мкВт.

3.90 1) $L' = L - 20\gamma x \lg e = 50$ дБ; 2) $x = 0,30$ км.

3.91 $P = 4\pi r^2 e^{2\gamma r} I_0 \cdot 10^L = 1,4$ Вт, L у белах.

3.92 $t = \frac{2l}{3c(\epsilon_1 - \epsilon_2)} (\epsilon_1^{3/2} - \epsilon_2^{3/2}) = 7 \cdot 10^{-8}$ с.

3.93

3.94 $\lambda = 0,67$ м.

3.95 $\Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} - 1 \right) \frac{c}{\nu} = -50$ м.

3.96 $\frac{j}{j_{c3}} = \frac{\sigma}{2\pi\nu\epsilon\epsilon_0} = 2$.

3.97 $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} k\epsilon_0 c^2 \frac{E_m^2}{\omega}$.

3.98 1) $j_{c3} = \sqrt{2}\pi\epsilon_0\nu E_m = 0,20$ мА/м²;

2) $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_m^2 = 3,3$ мВт/м².

3.99 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m \sin kx \cdot \sin \omega t$, де $\mathbf{B}_m \perp \mathbf{E}_m$, $B_m = E_m / c$.

3.100 $S_x(x, t) = \frac{1}{4} \epsilon_0 c E_m^2 \sin 2kx \cdot \sin 2\omega t$, $\langle S_x \rangle = 0$.

$$3.102 \quad S_1 / S_2 = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega l}{c} \right) = 3.$$

$$3.103 \quad R = \frac{3P}{16\pi c \gamma \rho M_c} \approx 0,6 \text{ мкм.}$$

$$4.1 \quad 2 \cdot 10^3; 3 \cdot 10^3.$$

$$4.2 \quad 4 \text{ мм.}$$

$$4.3 \quad 1,33 \text{ мм.}$$

$$4.4 \quad \text{Збільшиться на: 1) } 0,50 \text{ мм; 2) } 0,542 \text{ мм.}$$

$$4.5 \quad \varphi = \sqrt{n\lambda/2d(n-1)} = 30 \text{ мрад} = 1,72^\circ. \quad \text{Кут повороту пластини при розв'язанні задачі вважати малим.}$$

$$4.6 \quad 1,73 \text{ см.}$$

$$4.7 \quad 0,6\pi.$$

$$4.8 \quad \text{1) } 0,6 \text{ і } 0,45 \text{ мкм; 2) } 0,72; 0,51 \text{ і } 0,4 \text{ мкм.}$$

$$4.9 \quad 2 \text{ м.}$$

$$4.10 \quad 500 \text{ мм.}$$

$$4.11 \quad l = db/\lambda = 2,5 \text{ м.}$$

$$4.12 \quad 3,6 \text{ мм.}$$

$$4.13 \quad \text{Темрява; геометрична різниця ходу променів } \Delta_{\text{геом}} = \lambda = 0,6 \text{ мкм. Оптична різниця ходу } \Delta = \Delta_{\text{геом}} + \lambda/2.$$

$$4.14 \quad \Delta l = 2\Delta db/\lambda = 1 \text{ м; відсунути від джерела на } 1 \text{ м.}$$

$$4.15 \quad \text{1) } 4,8 \text{ мкм; 2) } 4,8 \text{ мкм; 3) } 5,1 \text{ мкм; 4) } 5,1 \text{ мкм; у перших двох випадках підсилення, в останніх двох – послаблення.}$$

$$4.16 \quad 0,1 \text{ мкм.}$$

$$4.17 \quad 0,25 \text{ мкм; } 0,125 \text{ мкм.}$$

$$4.18 \quad 541 \text{ нм.}$$

$$4.19 \quad b = \lambda/2n\theta = 3,15 \text{ мм.}$$

$$4.20 \quad 10,3''.$$

$$4.21 \quad 10 \text{ мкм.}$$

$$4.22 \quad 3,1 \text{ мм; } 5,2 \text{ мм.}$$

$$4.23 \quad N = 2n\theta/\lambda = 8,55 \text{ см}^{-1}.$$

- 4.24** 0,39 мм.
4.25 0,15 мкм.
4.26 1,25 дптр.
4.27 490 нм.
4.28 880 мм.
4.29 $n = (k + 1)k = 1,33$.
4.30 $r_k = \sqrt{kR_1R_2\lambda/(R_2 - R_1)} = 1,73$ мм.
4.31 $r_k = \sqrt{(2k + 1)R\lambda/4} = 0,704$ мм.
4.32 $d = m\lambda/(n - 1) = 72$ мкм.
4.33 1,00014.
4.34 $n_2 = n_1 + m\lambda/l = 1,000607$.
4.35 27,3 мкм.
4.36 $n = 1 + k\lambda/2l = 1,000282$.
4.37 $\Delta n = \Delta m\lambda/2l = 0,000124$.
4.38 $\Delta x \approx \lambda/2\theta(n - n') = 0,20$ мм.
4.39 $\Delta x = \lambda f/a = 0,15$ мм, 13 максимумів.

- 5.1** 1,58 мм.
5.2 3,69 мм.
5.3 8 зон; темна пляма.
5.4 1) 50 м; 2) 25 м.
5.5 1) $b = r^2/n\lambda$, $n = 1, 3, 5, \dots$; 2) $b = r^2/n\lambda$, $n = 2, 4, 6, \dots$
5.6 $b_1 = 1,4$ м; $b_2 = 0,7$ м; $b_3 = 0,47$ м.
5.7 $b = ar^2/(ak\lambda - r^2) = 2$ м.
5.8 Зменшиться у 4 рази.
5.9 $2^\circ 45'$.
5.10 143.
5.11 1) Перший дифракційний мінімум; 2) дифракційний максимум, що відповідає $k = 2$.
5.12 103.

5.13 580 нм.

5.14 $21^{\circ}17'$.

5.15 8.

5.16 8; 74° .

5.17 0,6 мкм.

5.18 66 см.

5.19 $\varphi = \arcsin(\sin \alpha + m\lambda/d) = 38,3^{\circ}$.

5.20 3.

5.21 $R = \lambda/\Delta\lambda = 290$; $N = R/k$.

5.22 $l = \lambda d/(k\delta\lambda) = 10$ мм.

5.23 $R = D_{\varphi}l = 2,91 \cdot 10^4$.

5.24 $D_{\varphi} = (tg\varphi)/\lambda = 9,62 \cdot 10^5$ рад/м.

5.25 1 мм/нм.

5.26 10^3 штрихів/мм.

5.27 $f = D_l \lambda \cos^3 \varphi / \sin \varphi = 21,1$ см.

5.28 0,28 нм.

5.29 31 пм.

5.30 506 пм.

5.31 1,6".

5.32 6 см.

5.33 $\lambda = (r_2^2 - r_1^2)(a+b)/2ab = 0,6$ мкм.

5.34 1) $h = \lambda(k + 3/8)/(n-1) = 1,2(k + 3/8)$ мкм;

2) $h = 1,2(k + 7/8)$ мкм; 3) $h = 1,2k$ або $1,2(k + 3/4)$ мкм. Тут $k = 0, 1, 2, \dots$

5.35 $h = \lambda(k + 3/4)/(n-1)$, де $k = 0, 1, 2, \dots$; $I_{\max} = 8 I_0$.

5.36 $h = 0,6(2k+1)$ мкм, де $k = 0, 1, 2, \dots$

5.37 $I_{\vartheta} \propto (\sin^2 \alpha)/\alpha^2$, де $\alpha = (\pi b/\lambda)\sin \vartheta$; $b \sin \vartheta = k\lambda$, $k = 1, 2, \dots$

5.38 $tg((\pi b/\lambda)\sin \vartheta) = (\pi b/\lambda)\sin \vartheta$. Розв'язок цього рівняння дає наступні значення коренів: $\alpha_1 = 1,43\pi$, $\alpha_2 = 2,46\pi$, $\alpha_3 = 3,47\pi$. Звідси $b \sin \vartheta_1 = 1,43\lambda$, $b \sin \vartheta_2 = 2,46\lambda$, $b \sin \vartheta_3 = 3,47\lambda$.

5.39 $x = 2R/(n-1)\sqrt{(d/\lambda)^2 - 1} = 8$ см.

5.40 1) $D_\varphi = \frac{2}{d}\sqrt{1 - (2\lambda/d)^2} = 6,5$ кут.хв/мм;

2) $D_\varphi = \frac{4}{d}\sqrt{1 - (4\lambda/d - \sin \theta_0)^2} = 13$ кут.хв/мм.

6.1 36° .

6.2 37° .

6.3 $61^\circ 12'$.

6.4 194 ММ/с.

6.5 $55^\circ 45'$.

6.6 32° .

6.7 1,52.

6.8 106° .

6.9 156° .

6.10 100° .

6.11 45° .

6.12 В 2 рази.

6.13 В 3,3 рази.

6.14 0,33.

6.15 В 3 рази.

6.16 В 1,23 рази.

6.17 0,348.

6.18 3,4 мм.

6.19 $0,21$ г/см³.

6.20 $0,4$ г/см³.

6.21 1) $a = eE_0/m\omega^2 = 5 \cdot 10^{-16}$ см, $E_0 = \sqrt{2I/\epsilon_0 c}$;

2) $F_m/F_e = 2,9 \cdot 10^{-11}$.

6.22 1) $\epsilon = 1 - n_0 e^2 / \epsilon_0 m \omega^2$, $v = c \sqrt{1 + n_0 e^2 \lambda^2 / 4\pi^2 \epsilon_0 m c^2}$.

6.23 $n_0 = (4\pi^2 v^2 m \epsilon_0 / e^2) (1 - n^2) = 2,4 \cdot 10^7$ см⁻³.

6.24 $n - 1 = -n_0 e^2 \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 m c^2 = -5,4 \cdot 10^{-7}$, де n_0 – концентрація електронів у вуглеці.

6.25 $x = a \cos(\omega t + \varphi)$, де $a = \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$,

$\text{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$. Тут $\beta = \gamma/2m$, $\omega_0^2 = k/m$.

6.26 1) $u = \frac{3}{2}v$; 2) $u = 2v$; 3) $u = \frac{1}{3}v$.

6.27 $\epsilon = 1 + A/\omega^2$, A – деяка стала.

6.28 $v = c/n = 1,83 \cdot 10^8$ м/с, $u = \left[1 + (\lambda/n) \frac{dn}{d\lambda} \right] \frac{c}{n} = 1,7 \cdot 10^8$ м/с.

6.29 Потрібно розглянути три гармонічні складові для хвильового імпульсу. (Найпростіший метод – графічний).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И. В. Курс физики: учебник: в 3 т. – Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М. : Наука, 1989. – 469 с.
2. Бушок Г. Ф. Курс фізики: навч. посібник: у 2 кн. – Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – 2-ге вид. – К. : Либідь, 2001. – 448 с.
3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие. – 9-е изд., перераб. – М. : Бинوم. Лаборатория знаний, 2012. – 431 с.
4. Чертов А. Г. Задачник по физике: учеб. пособие / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. – М. : Издательство физико-математической литературы, 2001. – 640 с.
5. Гаркуша І. П. Збірник задач з фізики : навч. посібник / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний, М. Ш. Певзнер; за заг. ред. І. П. Гаркуші. – К. : Вища шк., 1995. – 334 с.

Навчальне видання

Лисенко Олександр Володимирович,
Коваль Віталій Вікторович,
Ромбовський Михайло Юрійович

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ:
КОЛИВАННЯ, ХВИЛІ, ОПТИКА**

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки В. В. Ковалю
Редактор Н. А. Гавриленко
Комп'ютерне верстання О. В. Лисенка

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 10,17. Обл.-вид. арк. 18,81. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.