

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОГО ТОРА

*А.С. Мазманишвили, д-р физ.-мат. наук, профессор
Сумский государственный университет, г. Сумы*

Рассмотрена задача построения алгоритма генерации нормальных двумерных марковских полей на поверхности идеального цилиндра и идеального тора. Синтезированные поля обладают свойствами стационарности, однородности и самосогласованности. Приведен пример генерированного поля. Описаны возможные перспективы применения нормальных марковских полей, реализованных на поверхности идеального тора.

Ключевые слова: нормальное двумерное марковское поле, идеальный цилиндр, идеальный тор.

Розглянута задача побудови алгоритму генерації нормальних двовимірних марківських полів на поверхні ідеального циліндра та ідеального тора. Синтезовані поля мають властивості стаціонарності, однорідності та самоузгодженості. Наведено приклад генерованого поля. Запропоновані перспективи використання нормальних марківських полів, які реалізовані на поверхні ідеального тора.

Ключові слова: нормальне двовимірне марківське поле, ідеальний циліндр, ідеальний тор.

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительные задачи стохастического моделирования начинаются с синтеза алгоритмов генерации случайных величин с необходимыми для данной задачи свойствами. При моделировании принято использовать допущение о декартовой структуре пространства, в котором разыгрываются случайные события. Это допущение распространяется и на сами случайные объекты, которые реализуются на отрезке или в прямоугольнике, или, наконец, в многомерном гиперкубе [1, 2]. Известные алгоритмы опираются на прямоугольную декартову систему даже в тех случаях, когда исследуемый объект мало удобен при описании в прямоугольной системе, например, тор или цилиндр [2]. Алгоритмы генерации двумерных марковских полей [3, 4] приспособлены для их использования в прямоугольнике, стороны которого параллельны декартовым осям на плоскости. Между тем в задачах машиностроения [5], технической электродинамики [6], навигации [7] и других в большинстве объекты не являются плоскими или прямоугольными, а их статистическая природа такова, что не может быть удовлетворительно описана в прямоугольной декартовой системе.

Настоящая работа посвящена попытке построить алгоритм генерации случайного объекта – нормального марковского поля, реализующегося на поверхности идеального тора. Поперечными сечениями такого поля, реализующимися вдоль большого радиуса R , будут стационарные марковские процессы Орнштейна-Уленбека, значения которых периодически повторяются („броуновский мост“). Сечениями же поля, реализующимися на окружности заданного малого радиуса тора r , будут каждый раз также марковские процессы, значения которых также периодически повторяются („броуновский мост“) с возрастанием поперечного азимута. В узлах внутри дважды замкнутого прямоугольника, накрытого на тор, будет синтезировано стационарное и самосогласованное марковское поле, при этом с увеличением

азимутальных сторон „прямоугольника” поле будет дважды периодически повторено. Построение алгоритма генерации искомого марковского поля будет основано на иерархическом принципе. При этом на нижнем уровне иерархии будет использован стандартный генератор нормального “белого” шума $u(t)$ с интенсивностью (среднем квадратичным отклонением) σ . На его основе будут построены процессы вдоль образующих и броуновские мосты. Последовательное заполнение зацепленными броуновскими мостами и позволит сгенерировать марковское поле на поверхности тора.

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРА И ТОРА

Алгоритмы генерации двумерных марковских полей приспособлены для применения в прямоугольнике, стороны которого параллельны декартовым осям координат на плоскости. Хотя в большинстве решаемых прикладных задач машиностроения, навигации, технической электродинамики и других практически важных задач в большинстве объектов никак не являются плоскими или прямоугольными, а их статистическая природа такова, что не может быть удовлетворительно описана в прямоугольной декартовой системе. В работе синтезирован алгоритм генерации случайного объекта – нормального марковского поля, реализующегося на торической поверхности. Последовательное заполнение зацепленными броуновскими мостами и позволит сгенерировать марковское поле на торической поверхности.

Пусть Δ_X – шаг вдоль оси X на плоскости, а Δ_Y – шаг вдоль оси Y , N – число узлов по x , а M – число узлов вдоль оси y . Обозначим H – поле, синтезируемое в узлах $\{h_{n,m}\}$, причем $0 \leq n \leq N$ и $0 \leq m \leq M$. Далее пусть v_X, v_Y – декременты затухания нормального марковского поля по продольной и поперечным осям соответственно, поэтому его безусловные корреляторы в соседних узлах равны

$$p = \exp(-v_X \Delta_X), \quad q = \exp(-v_Y \Delta_Y). \quad (1)$$

Рассмотрим сначала сечение поля при $y = 0$, когда $m = 0$. Совместная плотность распределения вероятностей случайных значений $\{h_{n,0}\}$ в узлах с номерами $0 \leq n \leq N$, вытекающая из плотности белого шума в тех же точках, имеет вид [3, 5]:

$$f_H(\{h_{n,0}\}) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(1-p^2)]^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-p^2)} \sum_{n=1}^N (h_{n,0} - ph_{n-1,0})^2\right\}, \quad (2)$$

при этом справедливо следующее нумерационное правило периодичности, что $h_{N,0} = h_{0,0}$, $h_{N+1,0} = h_{1,0}$ и т.д. Пусть $u_{n,0}$ – генератор белого шума в узлах с нулевым средним и $\langle u_{n,0}^2 \rangle = \sigma^2$, $n = 1, \dots, N$. Тогда из вида квадратичной формы относительно $\{h_{n,0}\}$ в плотности (2) следует порождающая система связей

$$h_{n,0} = ph_{n-1,0} + \alpha u_{n,0}, \quad n = 1, \dots, N \quad (3)$$

**ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ГЕНЕРАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ
ДВУМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ
ИДЕАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРА И ТОРА**

Ниже будут рассмотрены вопросы, связанные с геометрической интерпретацией результатов, полученных в результате применения синтезированного алгоритма генерации нормального двумерного марковского поля на цилиндрической и торической поверхностях.

Идеальный тор характеризуется двумя радиусами – азимутальным R и радиусом r кругового сечения плоскостью, проходящей через центр тора. Соответственно, при заданных R и r уравнения, задающие идеальный тор, можно параметризовать с помощью двух азимутальных углов: φ – угол в плоскости XOY , проходящей перпендикулярно к оси OZ , и ψ – фазовый угол кругового сечения. Задав сетку из $N \times M$ узлов, идеальный тор можно определить формулами:

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= (R + r \sin \psi_n) \cos \varphi_m, \\ Y_{n,m} &= (R + r \sin \psi_n) \sin \varphi_m, \\ Z_{n,m} &= r \cos \psi_m. \end{aligned} \quad (19)$$

Наложение случайного поля H со случайными значениями $\{h_{n,m}\}$ в узлах выбранной сетки можно осуществить с помощью выражений

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= [R + (r + h_{n,m}) \sin \psi_n] \cos \varphi_m, \\ Y_{n,m} &= [R + (r + h_{n,m}) \sin \psi_n] \sin \varphi_m, \\ Z_{n,m} &= (r + h_{n,m}) \cos \psi_m. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 1 изображен идеальный тор с параметрами: большой радиус $R = 6$, малый радиус $r = 3$, количество узлов пространственной сетки: $N = 40$, $M = 40$.

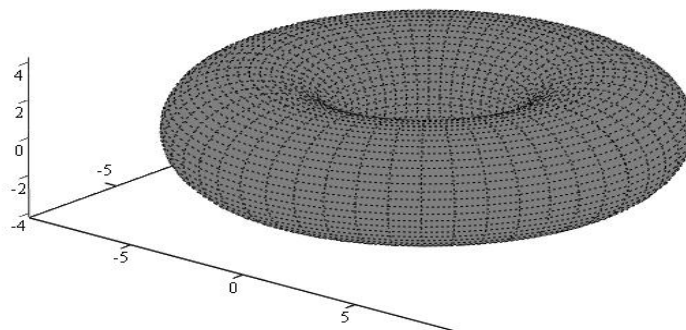


Рисунок 1 – Идеальный тор

На рис. 2 показан пример генерации марковского поля на торе с параметрами: декремент по оси x : $p = 0,5$, декремент по оси y : $q = 0,5$, интенсивность случайного поля $\sigma = 0,20$ (вид под углом) процессов, а также их связь в соседних узлах.

Стохастическое поле H , синтезированное в узлах $\{h_{n,m}\}$ сетки, стационарно, поскольку для него, с учетом нормировки (15), справедливо

соотношение (13), гарантирующее инвариантность средних относительно сдвигов вдоль осей.

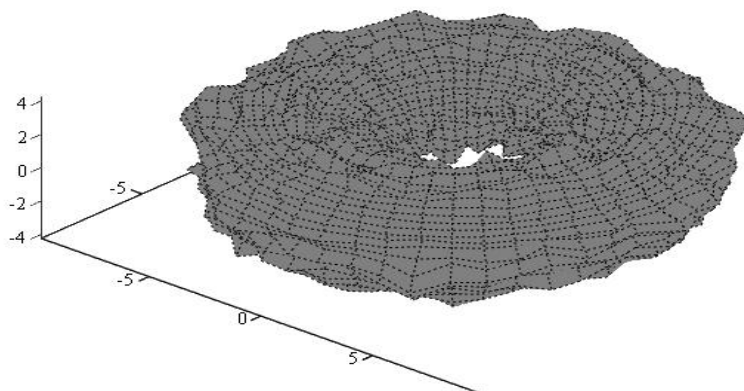


Рисунок 2 - Пример сгенерированного марковского поля на торе (вид под углом)

При программировании оказались более удобными аналоги формул (2), (9), (10), (12), выполненные в терминах векторов и циркулянтных матриц [9].

На рисунках 3 и 4 показано, как выглядит тот же стохастически возмущенный тор, но сбоку и сверху.

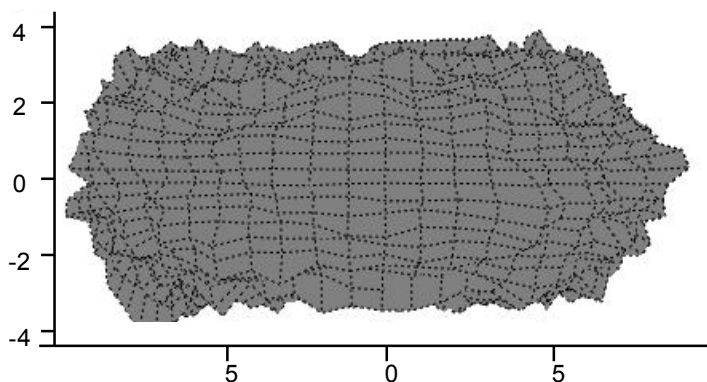


Рисунок 3 - Пример сгенерированного марковского поля на торе (вид сбоку)

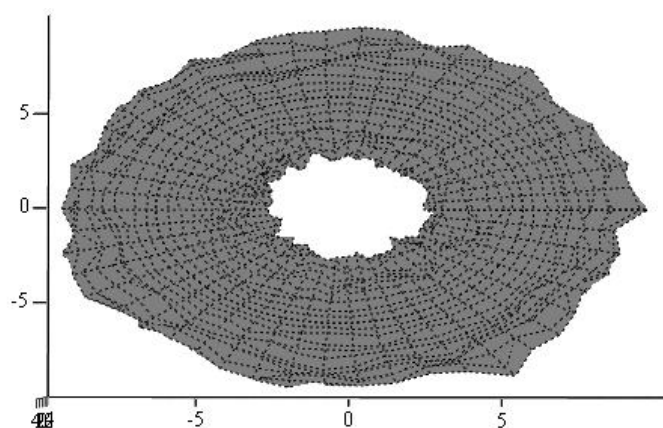


Рисунок 4 - Пример сгенерированного марковского поля на торе (вид в плане)

Из рисунков 2–4 можно видеть самосогласованное поведение отсчетов поля, эволюцию сечений – случайных процессов, а также их связь в соседних узлах.

Полученное на торе поле H обладает свойствами нормальности и марковости в том смысле, что оно имеет вдоль выбранных направлений экспоненциальные корреляторы [6, 7] для отсчетов в выбранных двух парах узлов.

ВЫВОДЫ

Таким образом, иерархический подход при синтезе дает возможность генерировать марковские поля на поверхности идеального тора. По существу, развиваемый метод отличается от метода генерации полей на плоскости [9] действием двойного правила периодичности, а в роли равновесного состояния, необходимого для диссипативных случайных объектов, выступают броуновские мосты. Область применения подобных случайных объектов определяется тем достаточно широким классом задач, для которых существенным является учет отклонения поверхности от её идеального значения. Недостатком реализованного подхода является неаналитическое введение азимутальных периодичностей броуновских мостов. Возможность применения подобного подхода для пространственных тел более сложной структуры, например, таких, как сфера, остается открытой.

SUMMARY

ALGORITHM OF GENERATION FOR THE NORMAL MARKOVIAN FIELDS ON IDEAL TORICAL SURFACE

A.S. Mazmanishvili

Sumy State University, Sumy

This paper deals with the problem of generating normal two-dimensional Markovian fields on the ideal cylindrical and torical surfaces. An algorithm for generating toric Markovian fields is developed. Generated fields are stationary, homogeneous and self-consistent. An example of generated field is given. Outlook of normal Markovian fields generated on the surface of an ideal torus is offered.

Key words: *normal two-dimensional Markovian fields, ideal cylindrical and torical surfaces.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бусленко Н.П. Метод статистических испытаний/ Н.П. Бусленко, Ю.А. Шрейдер. – М.: Физматгиз, 1961.– 280 с.
2. Харин Ю.С. Практикум на ЭВМ по математической статистике / Ю.С. Харин, М.Д. Степанова. – Минск: Университетское, 1987. – 304 с.
3. Habibi A. Two-Dimensional Bayesian Estimate of Image // Proc. IEEE. –1972. - V.60, №7. - P.878-883.
4. Хусу А.П. Шероховатость поверхностей / А.П. Хусу, Ю.Р. Витенберг, В.А. Пальмов. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
5. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. – М.: Советское радио, 1970. – 384 с.
6. Ярлыков М.С. Статистическая теория навигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 344 с.
7. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
8. Мазманишвили А.С. Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля/ Мазманишвили А.С., Щербань В.Е. // Электронное моделирование. – 1996. - Т.18, №2. - С.93-95.
9. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления/ В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
10. Мазманишвили А.С. Алгоритм генерации нормального марковского поля на поверхности идеального цилиндра // Электронное моделирование. – 1998. – Т. 20, № 6. - С. 65-69.

Поступила в редакцию 19 февраля 2009 г.