А.Н. Витренко, “Вісник СумДУ”, №10(56), 58-63 (2003)

УДК 531.19

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ БЕЛЫХ ШУМОВ

А. Н. Витренко, асп.

Один из распространенных методов исследования физических систем, взаимодействующих с флуктуирующей средой, основывается на уравнениях Ланжевена [1-3], в которых влияние окружения учитывается посредством внешнего шума с известными статистическими характеристиками. Во многих случаях этот шум может быть аппроксимирован гауссовским белым шумом, вследствие чего параметр состояния системы становятся диффузионным марковским процессом [4]. При этом одномерная плотность вероятности и плотность вероятности перехода будут удовлетворять уравнению Фоккера-Планка, которое может быть решено точно в отдельных случаях [2,3,5,6].

Однако в зависимости от характера взаимодействия и особенностей самой среды уравнения Ланжевена могут содержать несколько гауссовских белых шумов [10] с разными статистическими характеристиками. Обычно рассматривается мультипликативный (зависит от параметра состояния системы) и аддитивный шум. Так как поведение таких систем может отличаться от поведения систем, подверженных влиянию одного шума, точные результаты имеют большое значение.

В этой статье находятся точные выражения для статистических характеристик свободной частицы, движение которой описывается простейшим, в общем случае нелинейным, уравнением Ланжевена

$$\dot{x}(t) = g(x(t))f_1(t) + f_2(t), \; x(0) = x_0 > 0 \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ – параметр состояния системы (координата частицы), $g(x(t))$ – некоторая детерминированная функция, независящая явно от времени, $f_1(t)$ – мультипликативный и $f_2(t)$ – аддитивный гауссовский белый шум. Полагается, что шумы независимые с нулевыми средними значениями и корреляционными функциями

$$\langle f_i(t) f_i(t_1) \rangle = 2\Delta_i \delta(t - t_1), \quad (i=1,2) \tag{2}$$

где угловые скобки $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по реализациям шумов $f_i(t)$, Δ_i – интенсивности шумов $f_i(t)$, $\delta(t)$ – δ-функция Дирака.

Вычислим сперва одномерную плотность вероятности $P(x,t)$ того, что $x(t)=x$. Уравнение Фоккера-Планка в интерпретации Стратоновича, соответствующее (1) и (2), имеет вид [7-9]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} a(x) P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x) P(x,t), \tag{3}$$

где $P(x,0) = \delta(x - x_0)$; $a(x)$ и $2b(x)$ – коэффициенты сноса и диффузии:

$$a(x) = \Delta_1 g'(x) g(x), \qquad b(x) = \Delta_1 g^2(x) + \Delta_2 . \tag{4}$$

Для получения решения уравнений (3),(4) используем взаимно-однозначное преобразование $u = \psi(x)$ фазового пространства марковского процесса $x(t)$, при котором коэффициент диффузии $2\tilde{b}(u)$ марковского процесса $u(t)$ будет равен единице [10]:

$$\psi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\Delta_1 g^2(x) + \Delta_2}} . \tag{5}$$

Оказывается, при таком выборе функции $\psi(x)$ коэффициент сноса $\tilde{a}(u)$, определяемый как функция старой переменной следующим образом

$$\tilde{a}(x) = a(x)\psi'(x) + b(x)\psi''(x),$$

будет равен нулю. Следовательно, плотность вероятности $P(u,t)$ удовлетворяет простейшему уравнению диффузии:

$$\frac{\partial P(u,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(u,t), \tag{6}$$

решение которого, с учетом начального условия $P(u,0) = \delta[u - \psi(x_0)]$, имеет вид [11]

$$P(u,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{ -\frac{[u - \psi(x_0)]^2}{4t} \right\}. \tag{7}$$

Принимая во внимание (5) и (7), плотность вероятности $P(x,t)$ записывается как

$$P(x,t) = \left\{4\pi t\left[\Delta_1 g^2(x) + \Delta_2\right]\right\}^{-1/2} \exp\left\{-\left[\psi(x) - \psi(x_0)\right]^2 / (4t)\right\}. \tag{8}$$

Таким образом, решение уравнений (3),(4) может быть записано в виде квадратур для произвольной функции $g(x)$. Для получения результатов в явном виде рассмотрим три ее частных случая с качественно разным асимптотическим поведением на бесконечности, для которых интеграл (5) может быть вычислен.

В первом примере исследуем систему (1) с неограниченно возрастающей на бесконечности функцией интенсивности мультипликативного шума, $g(x) = x$. Взаимно-однозначное преобразование (5) принимает форму

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1}} \operatorname{arsh}\left(x \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right). \tag{9}$$

При этом нестационарная плотность вероятности (8) будет имеет вид

$$P(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t\left(\Delta_1 x^2 + \Delta_2\right)}} \exp\left\{ -\frac{1}{4\Delta_1 t}\left[\operatorname{arsh}\left(x\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) - \operatorname{arsh}\left(x_0\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) \right]^2 \right\}. \tag{10}$$

Для второго примера явных выражений (8) выберем функцию $g(x)$, стремящуюся к нулю при большом x, $g(x) = \dfrac{1}{|x| + 1}$. Функция $\psi(x)$ (5)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} \frac{x}{|x|} \sqrt{(|x| + 1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \qquad (11)$$

определяет взаимно-однозначное преобразование, нестационарная плотность вероятности (8) дается выражением

$$P(x,t) = \frac{|x| + 1}{2\sqrt{\pi t\left[\Delta_2(|x| + 1)^2 + \Delta_1\right]}} \exp\left\{-\frac{1}{4\Delta_2 t}\left[\frac{x}{|x|}\sqrt{(|x|+1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} - \sqrt{(x_0+1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}\right]^2\right\}. \qquad (12)$$

В третьем примере примем $g(x) = \mathrm{th}\, x$, для большого x интенсивность мультипликативного шума постоянна. В этом случае функция (5)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2}} \mathrm{arsh}\left(\sqrt{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_2}}\, \mathrm{sh}\, x\right) \qquad (13)$$

задает взаимно-однозначное преобразование и нестационарная плотность вероятности (8) имеет вид

$$P(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t\left(\Delta_1\, \mathrm{th}^2 x + \Delta_2\right)}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4(\Delta_1 + \Delta_2)t}\left[\mathrm{arsh}\left(\sqrt{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_2}}\, \mathrm{sh}\, x\right) - \mathrm{arsh}\left(\sqrt{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_2}}\, \mathrm{sh}\, x_0\right)\right]^2\right\}. \qquad (14)$$

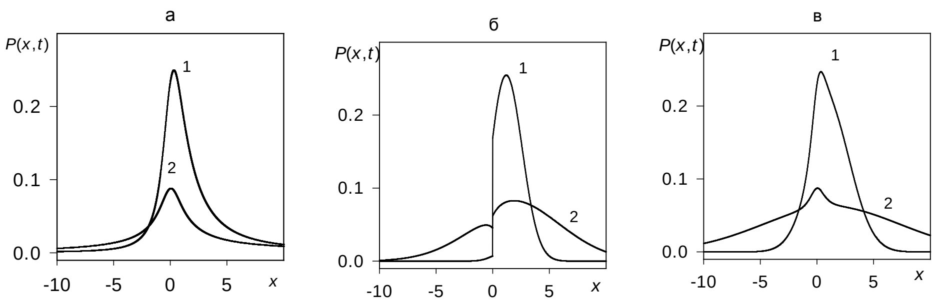

Рисунок 1- Эволюция во времени одномерной плотности вероятности $P(x,t)$ *при разных функциях* $g(x)$ *интенсивности мультипликативного шума* $f_1(t)$: а) $g(x) = x$, б) $g(x) = 1/(1+|x|)$ в) $g(x) = \mathrm{th}x$ ($\Delta_1=\Delta_2 = 1$, $x_0 = 1$, 1) t=1, 2) t=10).

Графики плотностей вероятности (10), (12), (14) приведены на рисунке 1. Качественно разное асимптотическое поведение на бесконечности интенсивности

$g(x)$ мультипликативного шума приводит к качественно разному виду плотностей вероятности.

Зная одномерную плотность вероятности, можно найти другие статистические характеристики системы. Моменты (среднее значение и дисперсия) имеют немаловажное значение.

Для системы (1) с линейной интенсивностью мультипликативного шума $g(x) = x$ возможно вычислить целые моменты $\langle x^n(t) \rangle$. По определению

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P(x,t) dx . \qquad (15)$$

Подставим в (15) выражение одномерной плотности вероятности (10), и, выполняя замену переменной $u = \psi(x)$, где $\psi(x)$ определяется выражением (9), будем иметь

$$\langle x^n(t) \rangle = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^{n/2} \frac{\exp\left(-u_0^2/(4t)\right)}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \mathrm{sh}^n\left(\sqrt{\Delta_1} u\right) \exp\left(-\frac{u^2}{4t} + \frac{u_0 u}{2t} \right), \qquad (16)$$

[$u_0 = \psi(x_0)$]. Для вычисления интеграла в (16) используем формулы степеней гиперболической функции sh x [12]

$$\mathrm{sh}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \mathrm{ch}\, 2(n-k)x + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \qquad (17)$$

$$\mathrm{sh}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} \mathrm{sh}(2n-2k+1)x , \qquad (18)$$

где $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты. Подставляя (17) и (18) в (16) и принимая во внимание интегральную формулу [12]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - cx} \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}\, bx \\ \mathrm{ch}\, bx \end{Bmatrix} dx = (\mp 1) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 + c^2}{4a} \right) \begin{Bmatrix} \mathrm{sh}[bc/(2a)] \\ \mathrm{ch}[bc/(2a)] \end{Bmatrix},$$

окончательно получим точные выражения для целых моментов:

$$\langle x^{2n}(t) \rangle = \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)^n \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \exp\left[4\Delta_1 t (n-k)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \,\mathrm{ch}\left[2(n-k) \,\mathrm{arsh}\left(x_0 \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} \right) \right] + (-1)^n \binom{2n}{n} \right\}, \qquad (19)$$

$$\left\langle x^{2n+1}(t)\right\rangle = \frac{1}{2^{2n}}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{n+1/2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\,\exp\left[4\Delta_1 t\left(n-k+\frac{1}{2}\right)^2\right]\,\times$$
$$\times\,\mathrm{sh}\left[2\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{arsh}\left(x_0\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}\right)\right]. \qquad (20)$$

Найдем дисперсию координаты частицы, $\sigma_x^2(t) = \left\langle x^2(t)\right\rangle - \left\langle x(t)\right\rangle^2$. Используя (19), (20), и свойства гиперболических и обратных гиперболических функций, получим

$$\sigma_x^2(t) = x_0^2\left(e^{4\Delta_1 t} - e^{2\Delta_1 t}\right) + \frac{\Delta_2}{2\Delta_1}\left(e^{4\Delta_1 t} - 1\right). \qquad (21)$$

Как видно из (21) дисперсия частицы экспоненциально возрастает со временем.

Таким образом, изучены статистические свойства свободной частицы, поведение которой описывается нелинейным уравнением Ланжевена с двумя независимыми гауссовскими белыми шумами. Получены точное выражение (в виде квадратур) одномерной плотности вероятности в общем случае, ее явные выражения для трех интенсивностей мультипликативного шума с качественно разным асимптотическим поведением на бесконечности. В случае линейной интенсивности также найдены точные выражения для целых моментов; установлено, что дисперсия координаты частицы экспоненциально возрастает со временем.

SUMMARY

Statistical characteristics of free particle under simultaneous influence of two uncorrelated Gaussian white noises are studied. The univariate probability distribution function is obtained exactly for arbitrary intensity of multiplicative noise. Whole moments are derived for linear intensity, it is established that the mean-square displacement increases exponentially for long times.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Г. Ван Кампен Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высш.шк., 1990.
2. К.В. Гардинер Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986.
3. В. Хорстхемке, Р. Лефевр Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1990.
4. Дж.Л. Дуб Вероятностные процессы. – М.:ИЛ, 1956.
5. H. Risken, The Fokker-Planck equation, 2nd ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1990.
6. V. Stohny Symmetry properties and exact solutions of the Fokker-Planck equation // Nonlinear Math. Phys. – 1997. – V.4. – N.1–2. – P.132–136.
7. S.I. Denisov, A.N. Vitrenko, and W. Horsthemke Nonequilibrium transitions induced by the cross-correlation of white noises // Phys. Rev. E. – 2003. – V.68. – 046132.
8. D.J Wu, L. Cao, and S.Z Ke Bistable kinetic model driven by correlated noises: Steady-state analysis // Phys. Rev. E. – 1994. – V.50. – P.2496.
9. M. Gitterman Simple treatment of correlated multiplicative and additive noises // J. Phys. A. – 1999. – V.32. – L293 – L297.
10. В.И. Тихонов и М.А. Миронов Марковские процессы. – М.: Сов. Радио, 1977.
11. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики. – М.: Наука,1972.
12. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981.