СТАТИСТИЧНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ЧИСЛА ПІ В ДОСЛІДІ БЮФФОНА

Лук'янихін О. В, *студент*; СумДУ, гр. ПМ-41

У роботі розглянута класична задача теорії геометричних ймовірностей з експериментального обчислення числа Пі. Видатний французький вчений XVIII ст. Жорж-Луї Леклерк де Бюффон навів її разом із розв'язанням у доповненнях до "Природничої історії" в 1777 році. В рамках дистанційного курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика" (http://dl.sumdu.edu.ua) створене інтерактивне практичне завдання для проведення досліду Бюффона.

Вихідні дані: площина розграфлена паралельними прямими, що знаходяться одна від одної на відстані h. На площину навмання кидають голку довжиною L $(L < h)$. *Пряма задача*: знайти ймовірність того, що голка перетне будь-яку пряму. *Обернена задача*: наближено обчислити число Пі.

Розв'язання. Положення голки повністю визначається заданням певних значень x і φ (рис. 1). Отже, x набуває значення від 0 до h; можливі значення φ змінюються від 0 до π. З іншого боку, упорядкована пара чисел задає на площині точку, що належить прямокутнику зі сторонами π та h. Тому кидання голки на площину рівносильне киданню точки в цей прямокутник.

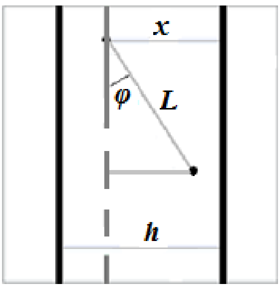

Рисунок 1 – Схема досліду Бюффона:
h – відстань між паралелями;
L – довжина голки;
x – відстань від верхнього лівого кінця голки до найближчої лінії справа;
φ – кут між голкою та лінією, що паралельна наявним прямим на площині (у додатному напрямку)

Очевидно, площа прямокутника дорівнює: $S = \pi h$. Голка перетне лінію за умови: $x \le L\sin\varphi$. Тобто, якщо голка перетинається з прямою, то точка, що їй відповідає, потрапляє в область фігури g, обмеженою кривою $x = L\sin\varphi$ та віссю $O\varphi$. А оскільки точку кидають навмання, то ймовірність її потрапляння в цю фігуру обчислюється як геометрична. Площа фігури g, кожна точка якої сприяє події, що нас цікавить:

$$S_g = \int_0^{\pi} L \cdot \sin\varphi \, d\varphi = 2L \quad (1)$$

Отже, ймовірність того, що голка перетне пряму (*пряма задача*),

$$P_{теор} = S_g / S = 2L / \pi h \quad (2)$$

Теоретична ймовірність $P_{теор}$ того, що голка перетне будь-яку пряму при заданих L і h, порівнюється зі статистичною $P_{ст} = m/n$, де n – загальне число кидків голки, m – число перетинів голки з прямою. Зазначену кількість разів програма генерує пару чисел x і φ – "кидає голку", що однозначно визначає положення голки на площині. Після кожного кидка відбувається перевірка умови $x \le L \sin\varphi$, і підрахунок m та n. Наприклад, при $L = 206$ і $h = 286$ отримуємо $P_{теор} = 0{,}4584$, а за даними експерименту $n = 10000$ і $m = 4553$ обчислюємо $P_{ст} = 0{,}4553$.

Оскільки при великому числі випробувань статистична ймовірність приблизно дорівнює теоретичному значенню, число π можна наближено обчислити (*обернена задача*) за формулою

$$\pi = 2Ln / mh \quad (3)$$

Тренажер дає змогу провести експеримент із заданими параметрами і отримати наближене значення числа Пі (табл. 1).

Таблиця 1 – Дані комп'ютерного експерименту при заданих $L = 150$ і $h = 180$ (№1–3) та сталому значенні $n = 4000$ (№4–6)

№	n	m	π
1	1000	524	3,1807
2	2000	1052	3,1686
3	4000	2119	3,1461

№	L	h	m	π
4	90	180	1273	3,1422
5	15	180	212	3,1446
6	175	180	2474	3,1438

Із перших трьох дослідів бачимо, що при збільшенні числа кидків точність статистичного обчислення числа Пі збільшується. Зміна ж параметрів L і h (досліди 4–6) істотно не впливає на результат.

Керівник: Шовкопляс О. А., *ст. викл.*