

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



А. В. Павлов, А. Ю. Журавлев

*НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ*

Конспект лекций



Сумы

Сумский государственный университет

2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	С. 5
1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ.....	7
1.1 Основные типы нелинейных систем и характеристик.....	7
1.2 Особенности математических моделей нелинейных систем.....	14
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 1.....	19
2 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ.....	23
2.1 Свойства фазовых портретов.....	24
2.2 Особенности фазовых портретов.....	26
2.3 Построение фазовых портретов.....	28
2.4 Анализ прямых показателей качества переходных процессов систем по фазовым портретам.....	30
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 2.....	33
3 МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ.....	35
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 3.....	38
4 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	41
4.1 Критерий В. М. Попова.....	41
4.2 Метод А. М. Ляпунова.....	44
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 4.....	48

5 МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЖИМА АВТОКОЛЕБАНИЙ.....	53
5.1 Метод Л. С. Гольдфарба.....	54
5.2 Метод Е. П. Попова.....	57
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 5.....	58
6 АНАЛИЗ КОСВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	63
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 6.....	68
7 ВИБРАЦИОННАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ.....	70
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ЗНАНИЯ МАТЕРИАЛОВ.....	75
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	78

ВВЕДЕНИЕ

Вплоть до середины двадцатого века теория автоматического управления развивалась, базируясь на трех фундаментальных принципах построения автоматических систем. Это были принцип управления по отклонению, принцип управления по возмущению и принцип комбинированного управления. Однако начиная со второй половины двадцатого века, с появлением кибернетики, начинают интенсивно разрабатываться средства, эффективно использующие свойство запоминания информации в своей работе и способные проводить самостоятельно достаточно трудоемкие для человека математические вычисления. Так появились первые, относительно эффективные, электронные вычислительные машины, ставшие технологической базой для разработки и усовершенствования более мощных и более производительных компьютеров и компьютерных систем. С появлением компьютеров ученым и инженерам стало посильным решение таких задач:

- исследование и анализ сложных нелинейных систем посредством вычислительных методов;
- разработка и реализация эффективных алгоритмов регулирования, использующих принцип предикции при формировании управляющих воздействий;
- вопросы формализации и исследования линейных систем с большим числом переменных (многомерные системы) с помощью метода переменных состояния.

Отдельным классом задач, для которых уровень решения повысился с появлением компьютеров, стали задачи идентификации объектов, которые без применения численных методов с использованием «ручных» вычислений решались, но не всегда с достаточной эффективностью и точностью.

Подытоживая написанное выше, можно сказать, что основными объектами изучения и исследования для современной теории автоматического управления стали нелинейные системы со сложными переходными процессами и возможностью самоорганизации их внутренних параметров, дискретные информационно-управляющие системы и многомерные линейные системы с большим количеством выходных переменных. Отдельным классом в современной теории автоматического управления идут задачи точной и эффективной идентификации объектов системной инженерии.

Основным инструментарием современной теории автоматического управления являются вычислительные аналитические и численные методы в основе большей части, которых лежат базовые (классические) подходы к анализу, синтезу и управлению, известные еще из классической ТАУ, но получившие новое развитие с появлением высокопроизводительных компьютеров, а также с упрощением возможности применения свойства запоминания информации.

1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ

К нелинейным системам относят все системы, которые не могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Практически все реальные системы являются нелинейными или близкими к таковым.

1.1 Основные типы нелинейных систем и характеристик

Появление данного класса систем в ТАУ можно объяснить тем, что не все процессы в системах управления можно объяснить с помощью теории, применяемой для описания линейных систем. Зачастую, в процессе функционирования таких систем проявляются нелинейные эффекты, которые, в свою очередь, значительно усложняют описание системы с помощью ранее известной передаточной функции. К таким эффектам в механических, электромеханических и других системах можно отнести гистерезис, сухое трение, насыщение и другие. Поэтому с целью проведения определенной классификации подобных эффектов в ТАУ были введены аналитические модели таких процессов, которые впоследствии были названы *типовыми нелинейностями*. Перечислим основные типовые нелинейности.

1.1.1 *Характеристика с зоной нечувствительности*. Такой характеристикой обладают элементы и системы, обладающие определенной инертностью, а проявляется это в том, что элемент не дает реакции на воздействие в определенном начальном интервале входных сигналов (см. рис. 1.1). Математически такую характеристику можно представить кусочно-линейно:

$$U = \begin{cases} k(E + c), & \text{при } E < -c \\ 0, & \text{при } -c \leq E \leq c \\ k(E - c), & \text{при } E > c \end{cases},$$

где $k = tg\alpha$, причем зона нечувствительности для этой характеристики составляет $2c$.

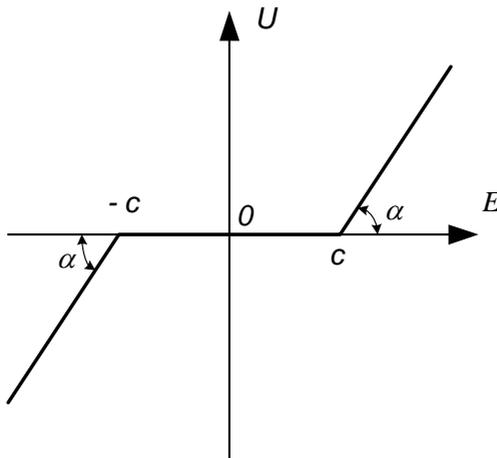


Рисунок 1.1 – Характеристика с зоной нечувствительности

1.1.2 *Характеристика с зоной насыщения.* Эффект насыщения свойственен многим элементам, применяемым в системах управления. К таким эффектам можно отнести магнитное насыщение материалов, в частности металлов, когда материал не может усиливать внешнее магнитное поле. Другим примером может быть насыщение в телекоммуникационных системах, то есть такое состояние, когда какой-то компонент системы достигает максимума своей пропускной способности. Математическая модель:

$$U = \begin{cases} -b, & \text{при } E < -c \\ kE, & \text{при } -c \leq E \leq c, \\ b, & \text{при } E > c \end{cases}$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$.

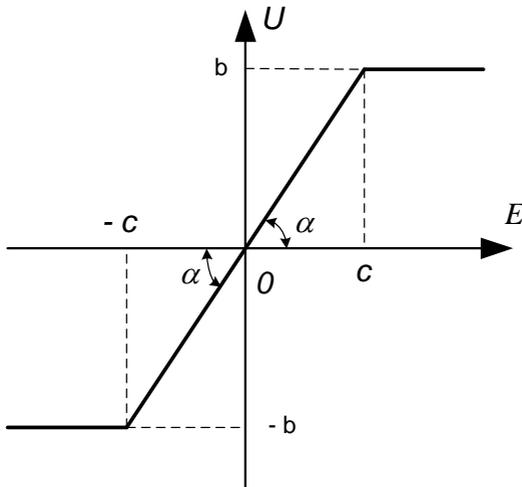


Рисунок 1.2 – Характеристика с зоной насыщения

1.1.3 *Релейная характеристика.* Данная характеристика свойственна большинству элементов релейно-контактных схем и описывает скачкообразное изменение состояния элемента при изменении значения входного сигнала. Математическая модель:

$$U = \begin{cases} -b, & \text{при } E < -c \\ b, & \text{при } E > c \end{cases}.$$

Все вышеперечисленные характеристики относятся к типовым *однозначным*, так как одному значению входного сигнала, причем независимо от направления его изменения, в

таким элементе соответствует единственное значение выходного сигнала.

Нелинейные характеристики, которые представляют собой комбинацию нескольких простейших, называют *комбинированными* нелинейными характеристиками, к которым можно отнести релейную характеристику с зоной нечувствительности.

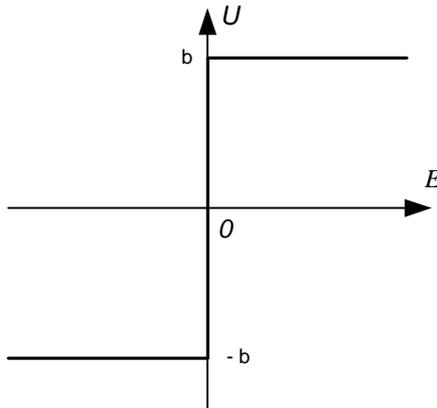


Рисунок 1.3 – Релейная характеристика

1.1.4 *Релейная характеристика с зоной нечувствительности*
 Данная характеристика представляет собой комбинацию релейной характеристики и характеристики с зоной нечувствительности. Математическая модель:

$$U = \begin{cases} -b, & \text{при } E < -c \\ 0, & \text{при } -c \leq E \leq c. \\ b, & \text{при } E > c \end{cases}$$

Характеристики, в которых значение выходной величины зависит не только от значения входной, но и от направления ее изменения называют *неоднозначными*. К таким характеристикам

можно отнести характеристику с люфтом или мертвым ходом, а также характеристику реального релейного элемента. Неоднозначности статических характеристик зачастую вызываются различными люфтами в свойствах или параметрах нелинейных звеньев или зазорами между их составляющими, то есть, например, при плохом прижиге, соединении деталей, обуславливающим состояние, когда одна деталь свободно в небольших пределах движется в разные стороны без сцепления или контакта с другой деталью. Другим примером может быть проявление остаточной намагниченности ферромагнетика в случае магнитного гистерезиса.

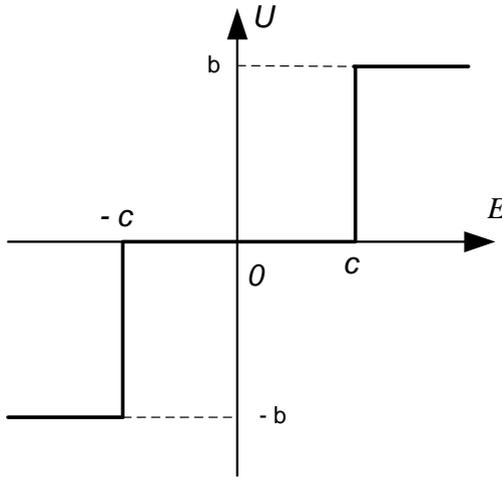


Рисунок 1.4 – Релейная характеристика с зоной нечувствительности

1.1.5 *Характеристика с люфтом или мертвым ходом.* Чтобы понять, как изменяется выходной сигнал в зависимости от входного в звене с данной характеристикой, достаточно представить два зубчатых колеса, находящихся во взаимном зацеплении, при этом между их зубьями пусть имеется

некоторый зазор. Вращая одно колесо, мы приводим во вращение другое, однако только стоит поменять направление вращения первого колеса, то поменяется направление движения и второго колеса, причем не сразу, а после выборки соответствующего зазора между зубьями. Математическая модель:

$$U = \begin{cases} k(E - c), & \text{при } dE/dt > 0 \\ k(E + c), & \text{при } dE/dt < 0, \\ const, & \text{при } |kE - U| < c \end{cases}$$

где $k = tg\alpha$.

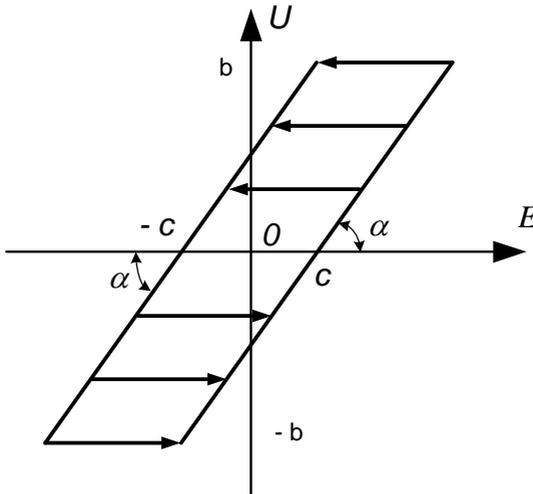


Рисунок 1.5 – Характеристика с люфтом или мертвым ходом

1.1.6 *Реальная релейная характеристика.* Данная характеристика, по сути, представляет собой обычный релейный переход из состояния в состояние только с запаздыванием, вызванным каким-либо зазором или люфтом в параметрах соответствующего нелинейного элемента.

Математическая модель:

$$U = \begin{cases} \begin{cases} -b, & \text{при } E < c \\ b, & \text{при } E > c \end{cases} & \text{при } \frac{dE}{dt} > 0 \\ \begin{cases} b, & \text{при } E > -c \\ -b, & \text{при } E < -c \end{cases} & \text{при } \frac{dE}{dt} < 0 \end{cases} .$$

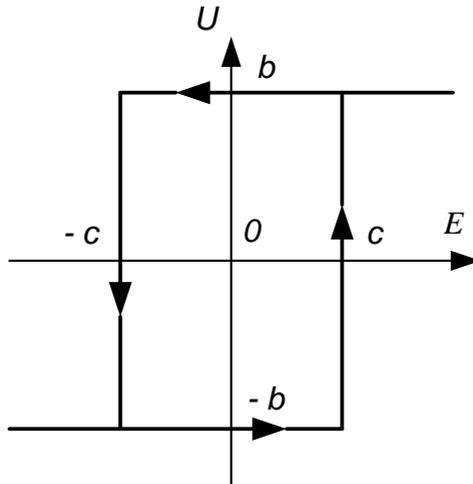


Рисунок 1.6 – Реальная релейная характеристика

Все вышеперечисленные нелинейности для упрощения описательного процесса с точки зрения их задания аналитически или численно были представлены кусочно-линейно. Подобным образом кусочно-линейными функциями, с помощью определенных упрощений или допущений, можно описать математически любой реальный нелинейный эффект.

1.2 Особенности математических моделей нелинейных систем

При математическом описании нелинейных систем несущественные нелинейности линеаризуются (заменяются приближенными линейными зависимостями), а существенные сводятся к типовым нелинейностям. Простейшая нелинейная система управления может быть представлена как совокупность нелинейного звена и линейной части, охваченных обратной связью (см. рис. 1.7).

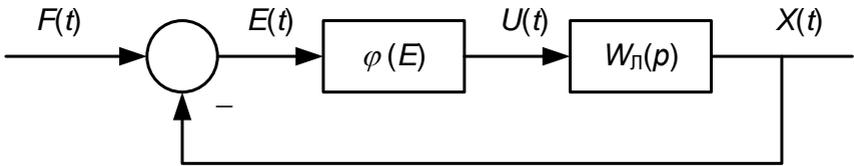


Рисунок 1.7 – Простейшая модель нелинейной системы управления

Более сложные системы всегда можно свести к простейшему варианту, объединив с помощью элементарных преобразований все линейные звенья в единой линейной части. Рассмотрим правила преобразования нелинейных звеньев в общее результирующее. Нижеописанный способ объединения нелинейных звеньев в общее, путем построения результирующих характеристик, в дальнейшем будем называть *методом результирующих характеристик*.

1.2.1 Последовательное соединение нелинейных звеньев. Главной особенностью последовательного соединения любых звеньев есть тот факт, что выходной сигнал каждого предыдущего звена,

входящего в последовательное соединение, является входным для последующего (см. рис. 1.8).

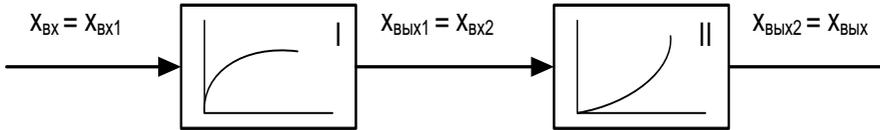


Рисунок 1.8 – Система последовательно соединенных нелинейных звеньев

Причем входным сигналом всей системы звеньев в целом является вход первого звена системы звеньев, а выходом – выход последнего звена цепочки. Учитывая эту особенность последовательного соединения нелинейных звеньев, проиллюстрируем метод получения результирующей характеристики для случая двух последовательно соединенных элементов (см. рис. 1.9).

В общей системе координат изображаются характеристики первого и второго нелинейных звеньев. Они должны быть расположены по отношению друг к другу таким образом, что выходная переменная первого звена есть входной для второго, а выход второго, определяющий выходной сигнал системы звеньев, путем линейного переноса, совмещается с входом системы, совпадающим с входным сигналом первого нелинейного звена.

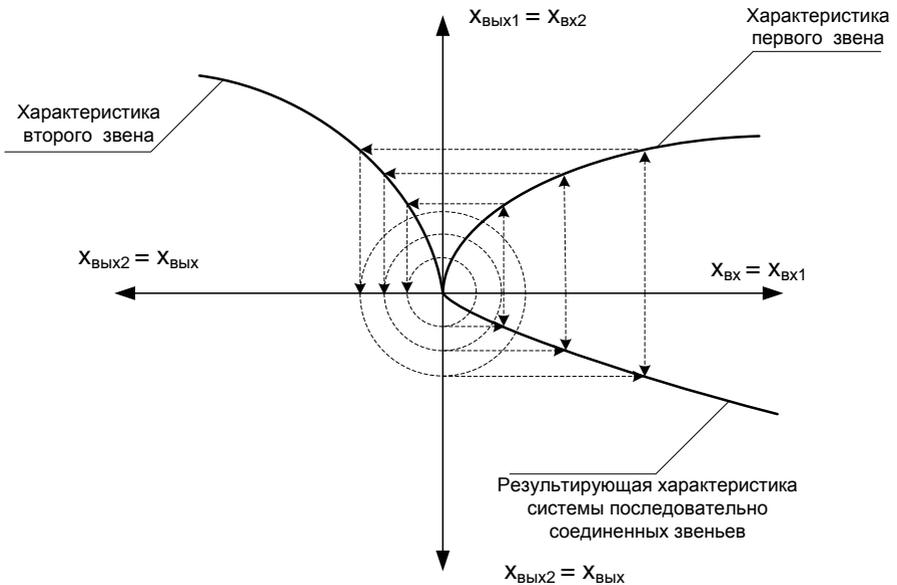


Рисунок 1.9 – Получение результирующей характеристики системы последовательно соединенных нелинейных звеньев

1.2.2 *Параллельное соединение нелинейных звеньев.* Главной особенностью любого параллельного соединения звеньев в ТАУ есть то, что входной сигнал системы звеньев есть одновременно входным сигналом для каждого из звеньев входящего в параллельную цепочку. Результат прохождения сигнала через систему параллельно соединенных звеньев, в том числе и нелинейных, есть сумма или разность (в случае соединения через инвертирующие входы сумматора) выходных сигналов элементов системы (см. рис. 1.10).

Результирующая характеристика может быть получена после построения в общей системе координат нелинейных характеристик первого и второго звеньев, а затем их поточечного суммирования (в случае присутствия

инвертирующих входов сумматора в соединении – вычитания) по выходным значениям (см. рис. 1.11).

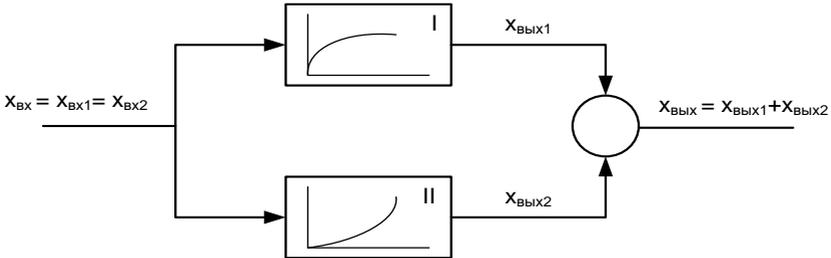


Рисунок 1.10 – Система параллельно соединенных нелинейных звеньев

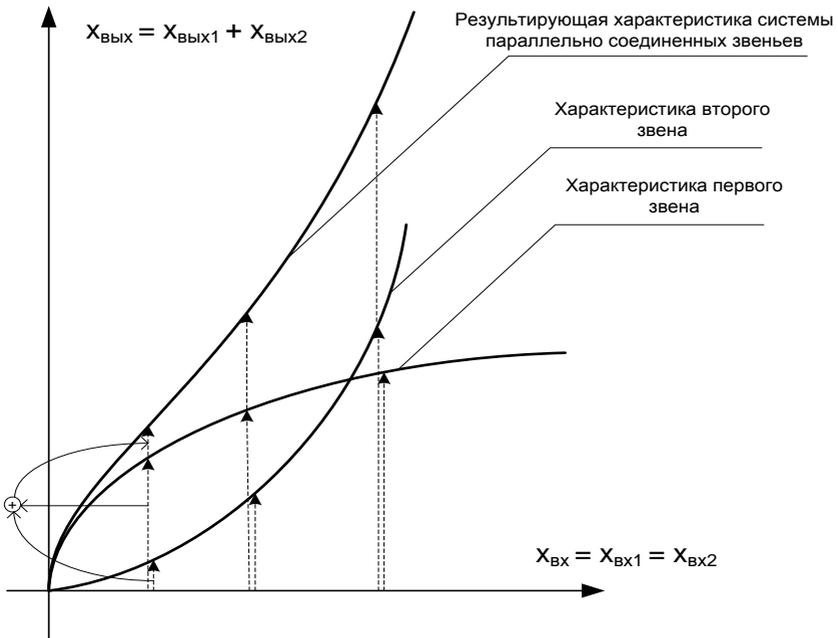


Рисунок 1.11 – Получение результирующей характеристики системы параллельно соединенных нелинейных звеньев

1.2.3 *Встречно-параллельное соединение нелинейных звеньев* структурно представляет собой звено, которое охватывается положительной или отрицательной обратной связью через другое звено (см. рис. 1.12).

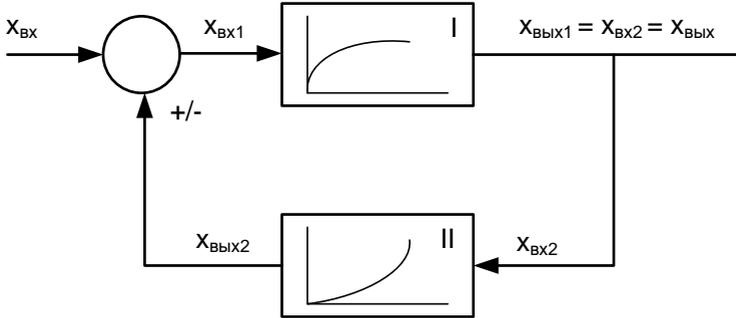


Рисунок 1.12 – Система нелинейных звеньев соединенных встречно-параллельно

Встречно-параллельное соединение сочетает в себе свойства последовательного и параллельного соединений звеньев. Построение результирующих характеристик, а соответственно и выбор осей для их построения, сходно, в определенной степени, с ранее описанными вариантами соединений (см. рис. 1.13). Выходной сигнал встречно-параллельного соединения звеньев определяется выходным сигналом первого нелинейного звена, который, в свою очередь, является входным для второго, причем сигналы в обоих звеньях идут параллельно, хоть и в противоположных направлениях.

Таким образом, любую систему управления, в состав которой входит одно или несколько нелинейных звеньев можно свести к простейшему варианту (см. рис. 1.7).

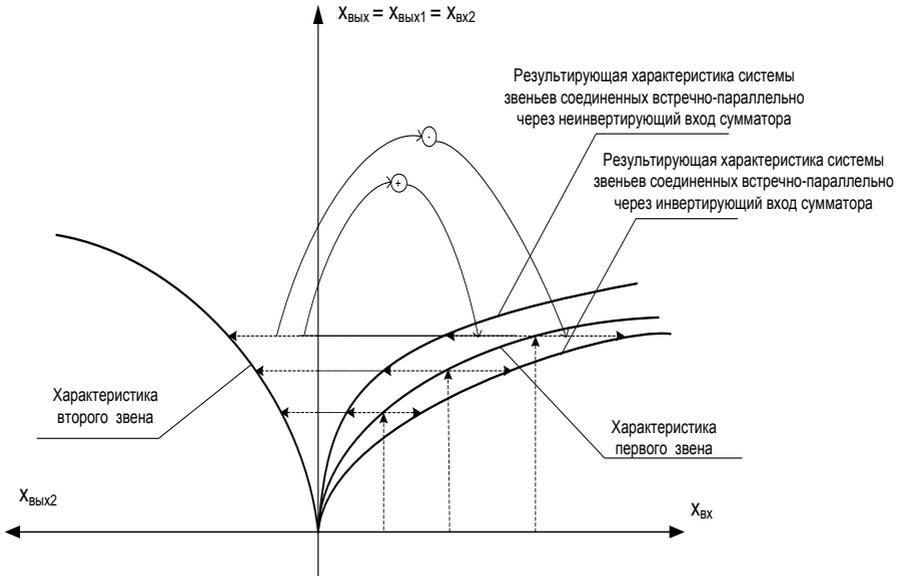


Рисунок 1.13 – Получение результирующей характеристики системы нелинейных звеньев соединенных встречно-параллельно

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 1

Условие. Имеется система нелинейных звеньев, соединенных между собой (рис. 1.14).

Получить и построить результирующую характеристику данной системы нелинейных звеньев, если каждое из них по отдельности имеет следующие статические характеристики (рис. 1.15), причем $c_1 > c_2$, $k = tg \alpha$.

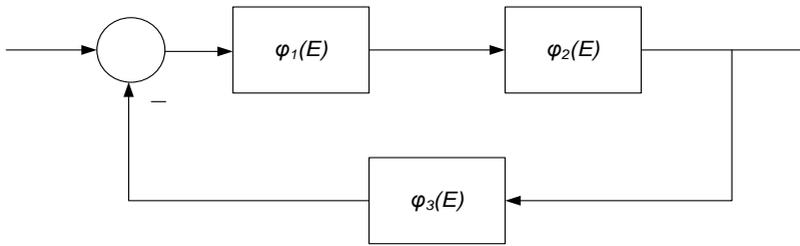


Рисунок 1.14 – Система нелинейных звеньев (задание)

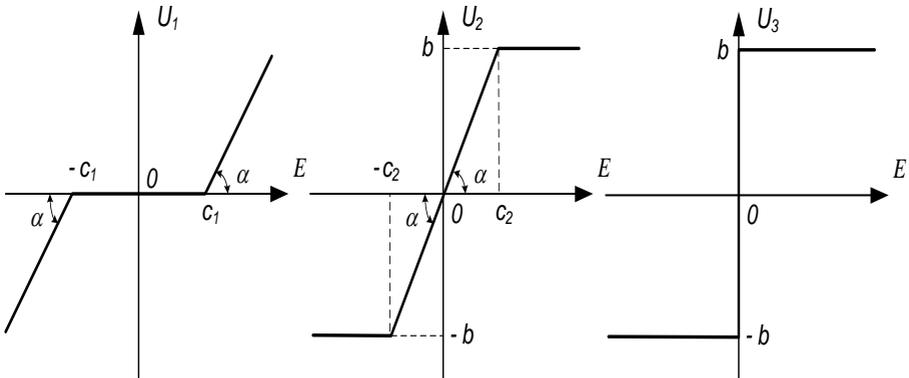


Рисунок 1.15 – Статические характеристики нелинейных звеньев (задание)

Решение. Получим результирующую характеристику первого и второго звеньев с учетом того, что они соединены между собой последовательно. Причем, вследствие нечетности характеристик (симметричности относительно начала координат), для построения можно использовать только их положительные части (рис. 1.16):

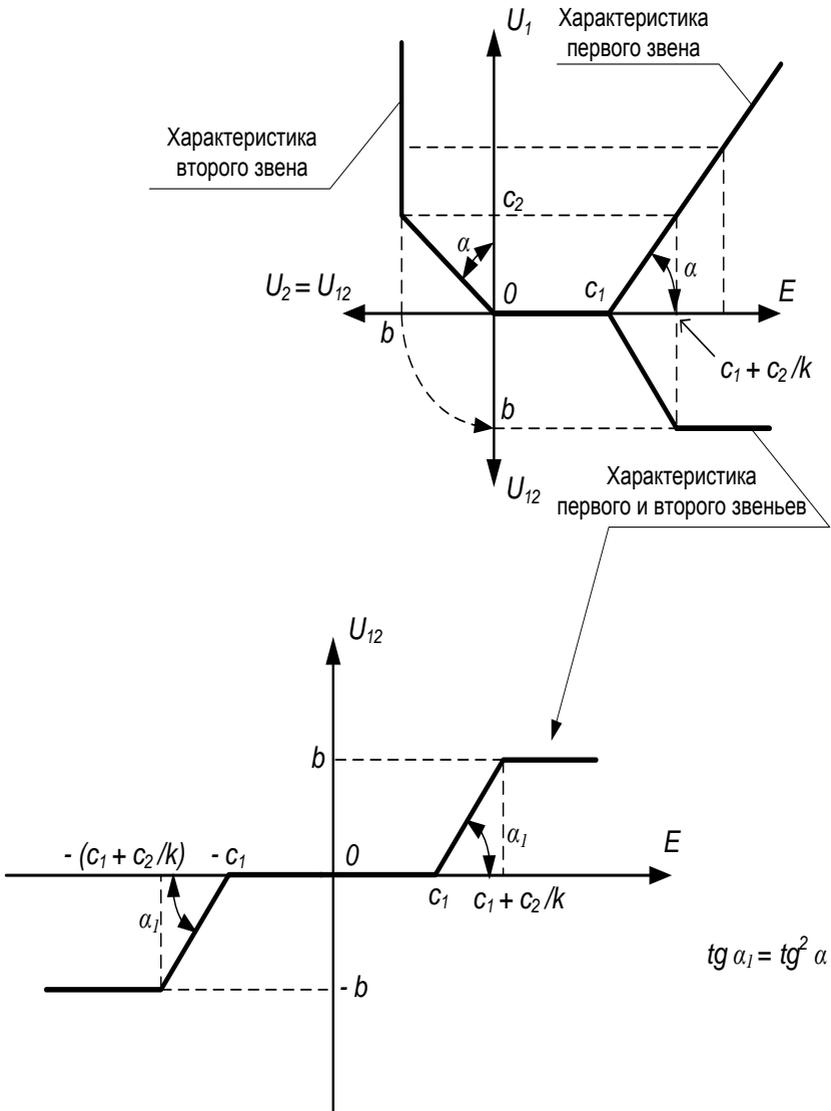


Рисунок 1.16 – Результирующая характеристика первого и второго звеньев

Рассчитаем результирующую характеристику всей совокупности звеньев, учитывая, что первое и второе звенья охвачены отрицательной обратной связью через третье звено.

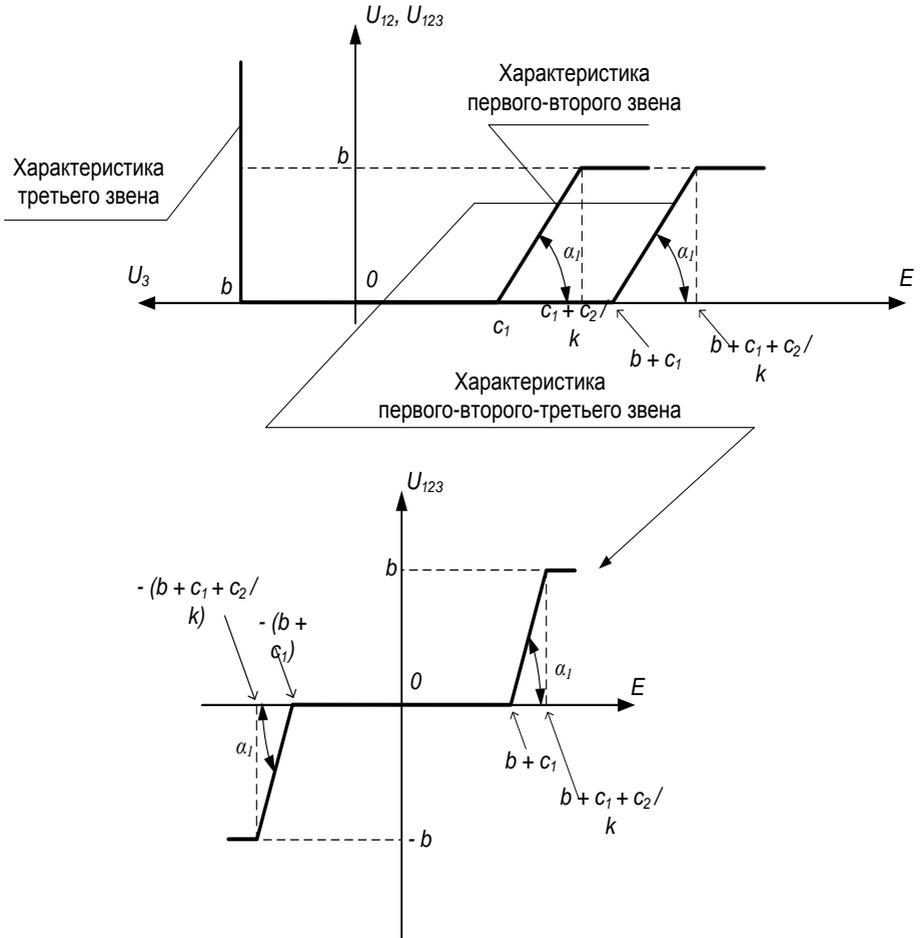


Рисунок 1.17 – Результирующая характеристика всей совокупности звеньев

2 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Когда движение системы можно описать координатами x и y посредством уравнений $dx/dt = f_1(x,y)$ и $dy/dt = f_2(x,y)$, то для исследования такой системы, зачастую, удобно изображать соответствующее движение на плоскости в прямоугольной системе координат. Координаты x и y в этом случае называются *фазовыми координатами*, а время t в явном виде в изображение движения не входит. Косвенно оно отражается так: каждому моменту времени t_k соответствует фиксированное значение координат $x(t_k)$ и $y(t_k)$, изображаемое в осях x и y точкой. При изменении t изображающая точка перемещается по *фазовой плоскости*, прочерчивая на ней линию, называемую *фазовой траекторией*.

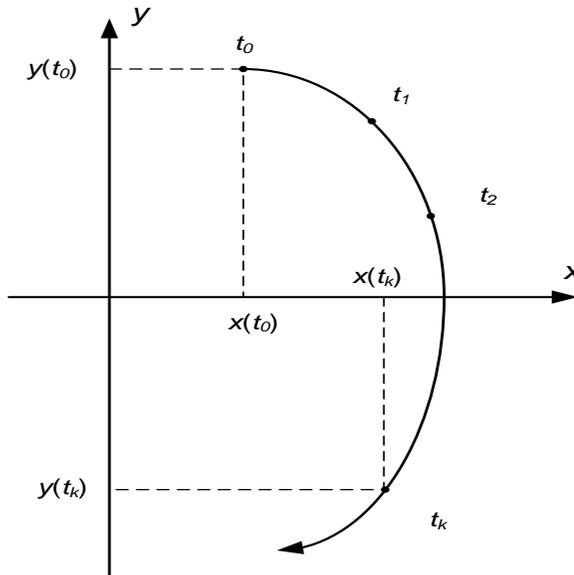


Рисунок 2.1 – Представление времени на фазовой траектории

Можно ввести переменную t в изображение движения и тем самым обозначить положения точки в моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$

Изображение всей совокупности возможных движений на фазовой плоскости часто оказывается весьма удобным благодаря своей наглядности. Наиболее распространен такой способ изображения, при котором используют две фазовые переменные – основную координату x и скорость ее изменения y :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y). \quad (2.2)$$

Величины представляют собой фазы движения системы, что и послужило основанием введения термина «*фазовая плоскость*».

2.1 Свойства фазовых портретов

Поделив уравнение (2.2) на (2.1), можно получить дифференциальное уравнение интегральной кривой на фазовой плоскости:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}. \quad (2.3)$$

Его решение, при различных начальных условиях, дает уравнения кривых в конечной форме, изображение которых в совокупности на фазовой плоскости называется *фазовым портретом*.

Можно определить важные свойства фазового портрета, которые необходимо учитывать с целью проверки правильности соответствующих построений.

1. Если $f(x, y)$ определены в некоторой открытой области R , непрерывны в этой области и имеют непрерывные частные производные по своим аргументам, то через

всякую точку фазовой плоскости, за исключением состояний равновесия (*особых точек*), в которых одновременно $y = 0$ и $f(x, y) = 0$, проходит единственная интегральная кривая (теорема Коши). Это, в частности, означает, что фазовые траектории не пересекаются в неособых точках подобно силовым линиям магнитного спектра, что обеспечивает наглядность картины. Иногда функции $f(x, y)$ не удовлетворяют условиям Коши (разрывные, имеются изломы, неоднозначные и т.д.), тогда движение исследуют по участкам, на каждом из которых $f(x, y)$ удовлетворяет условиям Коши.

2. Так как при $y = dx/dt > 0$ значение x только возрастает, то в верхней фазовой полуплоскости при возрастании t изображающая точка движется по фазовой траектории слева направо, а, соответственно, в нижней – справа налево. Направления движения на фазовых траекториях принято отмечать стрелками.
3. В точках $y = 0$, $f(x, y) \neq 0$, то есть не особых точках оси абсцисс, фазовые траектории пересекают горизонтальную ось под прямым углом. Причем сверху вниз в правой, и снизу вверх в левой полуплоскости фазовой плоскости системы.
4. Значениям $y = 0$ и $f(x, y) = 0$, то есть особым точкам на оси абсцисс, соответствует остановка движения. Решения уравнения $f(x, y) = 0$, которому соответствуют $x = 0$ и $y = 0$, является тривиальным решением. В нелинейной системе в зависимости от вида функции $f(x, y)$ существует одно или множество решений, часть из которых могут быть устойчивыми, а часть – неустойчивыми. Поэтому в общем случае нельзя говорить об устойчивости или неустойчивости нелинейной системы, можно говорить лишь об устойчивости или неустойчивости ее конкретных движений или состояний равновесия.

2.2 Особенности фазовых портретов

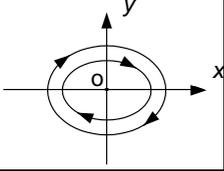
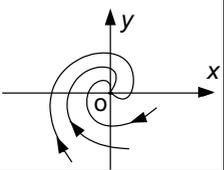
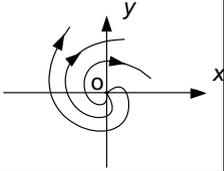
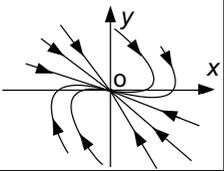
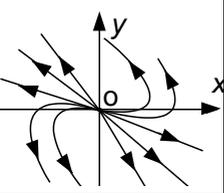
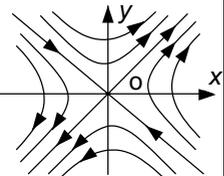
Согласно уравнению (2.3) возможны случаи, когда $dy/dx = 0/0$. Такие точки, в которых не существует конкретного направления касательной к фазовой траектории, называют *особыми точками*.

Если результатом движения точки по фазовой плоскости является замкнутая линия, то эта линия (соответствующая установившемуся движению точки) называется *особой линией*. Особые линии, которые разделяют качественно разные движения точек на фазовом портрете, называются *сепаратрисами*.

Рассмотрим более подробно вышеупомянутые особенности фазовых портретов. Согласно тому, какое равновесие присутствует в системе и какой вид имеют фазовые траектории вблизи особой точки, эти точки можно классифицировать. Классификация особых точек показана в таблице 2.1.

Если в фазовом пространстве возможна реализация качественно разных видов движения, то результатом этого может стать формирование так называемых особых линий, к которым можно отнести граничный устойчивый цикл (см. рис. 2.2 а), граничный неустойчивый цикл (см. рис. 2.2 б) и сепаратрисы (см. рис. 2.2 в), которая на рисунке формируется тройкой особых точек – центр (точка О) и два седла (точки С₁ и С₂).

Таблица 2.1 – Классификация особых точек

Вид на фазовом портрете	Название особой точки	Выражение переходной характеристики
	Центр	$x(t) = A \sin(\beta t + \varphi)$
	Устойчивый фокус	$x(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\alpha > 0$
	Неустойчивый фокус	$x(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\alpha > 0$
	Устойчивый узел	$x(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t},$ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$
	Неустойчивый узел	$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t},$ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$
	Седло	$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t},$ $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$ или $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$

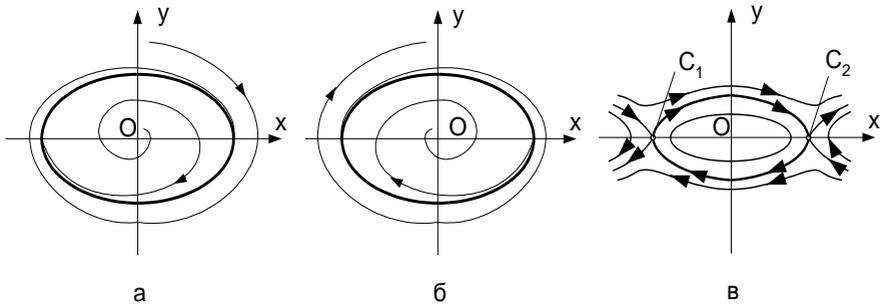


Рисунок 2.2 – Примеры граничного устойчивого цикла (а), граничного неустойчивого цикла (б) и сепаратрисы (в)

Все вышеописанные элементы фазовых портретов могут быть получены и построены путем решения системы уравнений (2.1), (2.2) или уравнения (2.3) с учетом разных начальных условий. Удобство применения метода фазовой плоскости состоит, прежде всего, в том, что глядя на фазовый портрет можно несомненно сказать, в какое состояние по целому ряду переменных система перейдет в следующий момент. Всегда можно оценить интервалы параметров системы, при которых она является устойчивой или неустойчивой. Фазовый портрет, в свою очередь, является как бы «фронтальным срезом» совокупности переходных характеристик системы, и в нем, хоть и не явно (посредством дифференцирования) заложена временная зависимость изменения определяющего параметра.

2.3 Построение фазовых портретов

Метод фазовой плоскости относится к точным методам исследования нелинейных систем. Наиболее полно этот метод разработан для систем второго порядка. Совокупность фазовых траекторий (фазовый портрет), которая отвечает различным начальным положениям изображающей точки, дает полное представление про динамику нелинейной системы. Поэтому исследование методом фазовой плоскости сводится к

построению фазового портрета и анализу, с его помощью, динамических режимов системы. Как уже ранее отмечалось построение отдельных фазовых траекторий можно осуществлять на основе аналитического решения уравнений (2.1) – (2.3). Интенсивное развитие вычислительной техники сделало более доступным метод фазовой плоскости при решении большого числа аналитических задач исследования сложных нелинейных систем. Вместе с тем появились и методы, требующие меньших вычислительных затрат, в отличие от прямых (аналитических) методов построения фазовых портретов.

Фазовые траектории можно построить и, не решая дифференциальных уравнений, если воспользоваться *методом изоклин*. *Изоклина (линия одинакового наклона)* – линия, в точках которой производная dx/du имеет одно и то же значение. Уравнение изоклины можно найти, решив уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y} = C. \quad (2.4)$$

При построении фазового портрета методом изоклин требуется следовать следующим пунктам:

1. Задать начальные условия и построить семейство изоклин.
2. На изоклинах отметить наклон касательных к фазовым траекториям.
3. Построить фазовые траектории кусочно, из расчета того, что фазовая траектория есть средняя линия между двумя соседними изоклинами (см. рис. 2.3).

качества для нелинейной системы можно проводить по принципу, описанному далее.

Сопоставим семейству точек фазовой траектории системы значения моментов времени, в которые она находилась в соответствующих состояниях. Затем развернем по соответствующей переменной (например, x) во временной график процесс перехода системы из исходного состояния в конечное состояние, учитывая соответствующие значения *неявно* заданного времени (см. рис. 2.4).

Нижняя часть рисунка 2.4 представляет собой не что иное, как переходную характеристику исследуемой системы, по которой легко получить следующие прямые показатели качества: перерегулирование, время нарастания, максимальное значение сигнала, время достижения первого максимума, время переходного процесса, степень затухания и т. д. Если возникает необходимость оценить время, в течение которого система будет двигаться из одного состояния (состояние i) в другое (состояние n), то это можно сделать по следующей формуле:

$$t_{in} = \sum_i^n \frac{\Delta x_{i,i+1}}{\Delta y_{i,i+1}}. \quad (2.5)$$

Важно отметить, что формула (2.5) справедлива для случая, если формализация системы осуществлялась в соответствии с выражениями (2.1) и (2.2). Если переменные x и y связаны между собой не только через производную, то необходимо сначала оценить, какому приращению по времени соответствуют приращения по обоим переменным и затем скорректировать выражение (2.5).

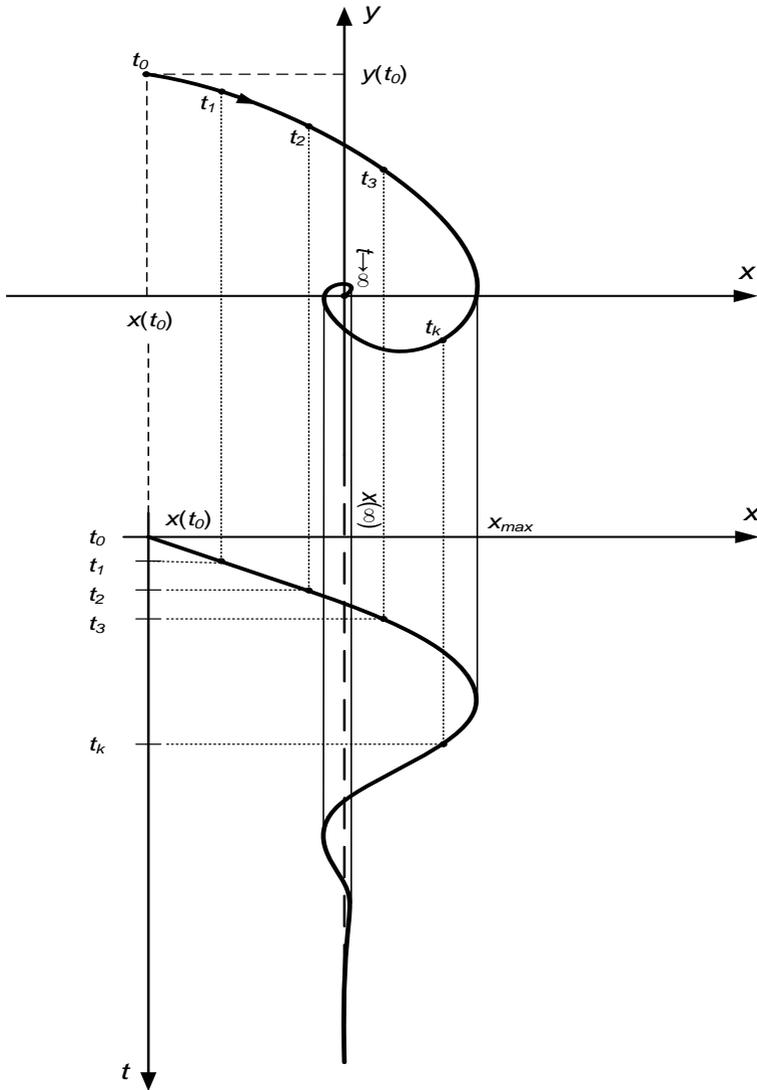


Рисунок 2.4 – Получение графика переходного процесса из фазовой траектории системы

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 2

Условие. Свободное движение материальной точки происходит в соответствии с уравнением $x'' + \omega_0^2 x = 0$ ($\omega_0 > 0$). Построить фазовый портрет динамики данной материальной точки.

Решение. Если в качестве основной координаты принять переменную x , то второй координатой y удобно принять скорость изменения основной $y = dx/dt$. В этом случае система уравнений, соответствующая динамике материальной точки, записанная в форме Коши, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Нахождение решения системы уравнений, записанной выше, удобно проводить в рамках теории Ляпунова. Расчет характеристического уравнения данной системы дифференциальных уравнений сводим к расчету определителя характеристической матрицы данной системы и приравнению соответствующего результата к нулю:

$$\det \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

причем корни характеристического уравнения будут равны $\lambda_{1,2} = \pm j \omega_0$.

Соответствующие законы изменения координат x и y будут иметь вид

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} \frac{x(t)}{A} = \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \frac{y(t)}{A \omega_0} = \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

После возведения в квадрат и суммирования элементов записанной выше системы уравнений несложно получить следующее общее выражение фазовой траектории, соответствующей движению материальной точки в фазовой плоскости:

$$\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{A\omega_0}\right)^2 = 1,$$

что является уравнением эллипса и будет давать следующий фазовый портрет движения материальной точки, а также соответствовать особой точке под названием «центр» совпадающей с началом координат (рис. 2.5):

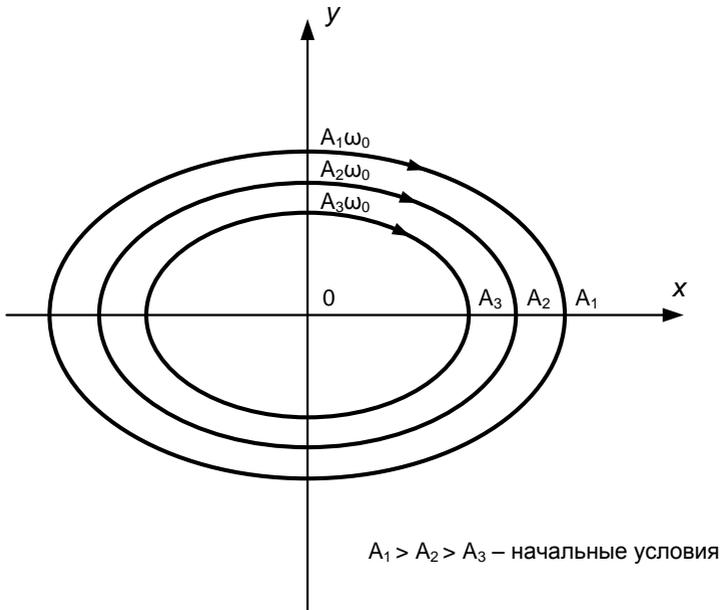


Рисунок 2.5 – Фазовый портрет движения материальной точки

3 МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

В отличие от метода фазовой плоскости, который по своей сущности относится к точным методам исследования нелинейных систем, метод гармонической линеаризации является приближенным. Метод гармонической линеаризации широко используется для исследования систем высокого порядка, а также для оценки качества переходных процессов. Рассмотрим суть данного метода.

Пусть при прохождении гармонического сигнала (см. рис. 3.1) $E(t) = a \sin \omega t$ на выходе нелинейного звена формируется следующий периодический сигнал $U(t) = \varphi(a \sin \omega t)$.

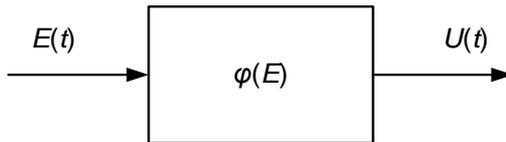


Рисунок 3.1 – Прохождение сигнала через нелинейное звено

Если разложить данный сигнал в гармонический ряд Фурье получим:

$$U(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t); \quad (3.1)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) d(\omega t); \quad (3.2)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t); \quad (3.3)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \quad (3.4)$$

Если принять $A_0 = 0$, что справедливо для большинства нелинейностей, то выражение (3.1) можно представить в виде:

$$U(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + \text{высшие гармоники}. \quad (3.5)$$

Несложно показать, что:

$$\sin \omega t = \frac{E(t)}{a}; \quad \cos \omega t = \frac{pE(t)}{a\omega}, \quad (p - \text{оператор Лапласа}).$$

В этом случае выражение (3.5) приобретает следующий вид:

$$U(t) = \frac{A_1}{a} E(t) + \frac{B_1 p}{a\omega} E(t) + \text{высшие гармоники} \quad (3.6)$$

$$\text{или } U(t) = k_r E(t) + k_r' \frac{p}{\omega} E(t) + \text{высшие гармоники}, \quad (3.7)$$

где $k_r = \frac{A_1}{a}$; $k_r' = \frac{B_1}{a}$ и называются *коэффициентами гармонической линеаризации*.

Если рассмотреть простейшую нелинейную систему автоматического управления (см. рис. 1.7) и предположить следующее:

1. В системе присутствуют исключительно периодические сигналы.
2. Линейная часть системы служит фильтром низких частот, отфильтровывая высшие гармоники, приходящие на нее с выхода нелинейного звена (гипотеза фильтра).

Тогда выражение (3.7) можно будет переписать следующим образом:

$$U(t) = k_r E(t) + k_r' \frac{p}{\omega} E(t). \quad (3.8)$$

Не сложно показать, что в дальнейшем любому нелинейному звену можно сопоставлять гармоническую передаточную функцию

$$W_{\text{НЗ}}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_r + k_r' \frac{p}{\omega}, \quad (3.9)$$

при этом обязательно помнить, что она функциональна только при условии выполнения гипотезы фильтра относительно

линейной части и в процессе решения задач всегда необходимо осуществлять соответствующую проверку.

В таблице 3.1 в качестве примера приведены уже рассчитанные коэффициенты гармонической линеаризации для некоторых типовых нелинейностей.

Таблица 3.1 – Коэффициенты гармонической линеаризации для нелинейных звеньев

Вид нелинейности звена	Коэффициенты гармонической линеаризации	
	k_r	k_r'
Характеристика с зоной нечувствительности (см. рис. 1.1)	$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right)$, при $a > c$	0
Характеристика с зоной насыщения (см. рис. 1.2)	$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{ak} + \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right)$, при $a > b/k$	0
Релейная характеристика (см. рис. 1.3)	$\frac{4b}{\pi a}$	0
Релейная характеристика с зоной нечувствительности (см. рис. 1.4)	$\frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$, при $a > c$	0
Характеристика с люфтом или мертвым ходом (см. рис. 1.5)	$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2c}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{2c}{a} \right) \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{a} \right)} \right]$, при $a > c$	$-\frac{4kc}{\pi a} \left(1 - \frac{c}{a} \right)$, при $a > c$

Можно заметить, что для однозначных типовых нелинейностей коэффициенты k_r' равны нулю, а отличны от нуля они только для неоднозначных нелинейностей.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 3

Условие. Рассчитать коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена имеющего статическую характеристику вида характеристики с зоной нечувствительности (см. рис. 1.1).

Решение. Построим реакцию данного нелинейного звена на входной сигнал вида $E(t) = a \sin \omega t$ (рис. 3.2).

Причем ненулевая реакция нелинейного звена на входной сигнал возможна только в том случае, если амплитуда входного сигнала будет больше характерного значения нелинейности, то есть при $a > c$.

Рассчитаем коэффициенты гармонической линеаризации данного нелинейного звена с помощью выражений (3.3) и (3.4).

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} [(k(a \cdot \sin \omega t - c) \sin \omega t)] d(\omega t) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} (ka \cdot \sin^2 \omega t) d(\omega t) - \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} (kc \cdot \sin \omega t) d(\omega t) = \\
 &= \frac{4ka}{\pi} \left[\int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) d(\omega t) - \frac{c}{a} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t d(\omega t) \right] = \frac{4ka}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \right. \\
 &\left. - \frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{c}{a} \cos \omega t \right] \Big|_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4ka}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\omega t_1}{2} + \frac{\sin 2\omega t_1}{4} - \frac{c}{a} \cos \omega t_1 \right].
 \end{aligned}$$

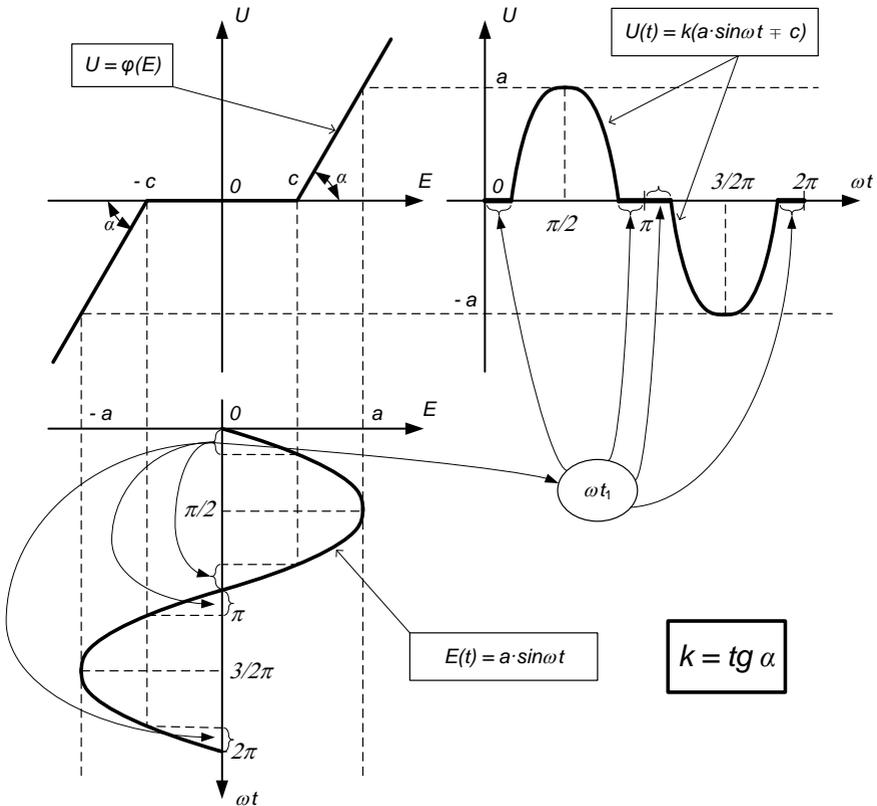


Рисунок 3.2 – Реакция нелинейного звена на входной сигнал вида $E(t) = a \sin \omega t$

Принимая во внимание, что $\omega t_1 = \arcsin(c/a)$, получаем

$$A_1 = ka - \frac{2ka}{\pi} \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{ka}{\pi} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right) - \frac{4ka}{\pi} \frac{c}{a} \cos\left(\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right) =$$

$$= ka - \frac{2ka}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{c}{a} \right) + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right];$$

$$k_r = A_1/a = k - \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{c}{a} \right) + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right].$$

Аналогичными вычислениями несложно показать, что $B_1 = 0$ и $k_r' = 0$.

4 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Нелинейные системы, в отличие от линейных, могут быть устойчивы при одних режимах работы и неустойчивы при других. Для нелинейных систем различают устойчивость *в малом*, *в большом* и *абсолютную* устойчивость. Движение системы устойчиво *в малом*, если условия устойчивости выполняются лишь в малой окрестности положения равновесия, то есть при малых начальных отклонениях. Если же движение устойчиво при конечных отклонениях, возможных в данной системе по условиям её работы, то его принято называть устойчивым *в большом*. Нелинейная система считается *абсолютно* устойчивой, если ее движение устойчиво при любых начальных отклонениях, то есть не зависит от них.

4.1 Критерий В. М. Попова

Критерий В. М. Попова определяет условия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления. *Абсолютная устойчивость* означает асимптотическую устойчивость нелинейной системы в целом (относительно всего пространства состояний системы) при условии, что задано не конкретную нелинейность, а какой-то класс нелинейностей.

Пусть имеется какой-то класс стационарных нелинейностей, расположенных в секторе между линиями $U_1 = k_1 E$ и $U_2 = k_2 E$ (см. рис. 4.1).

При этом выполняются следующие условия:

1. $\varphi(E)$ – непрерывная функция, проходящая через начало координат.
2. При $E \neq 0$ $E \varphi(E) > 0$.
3. $\int_0^{\pm\infty} \varphi(E) dE = \pm\infty$.

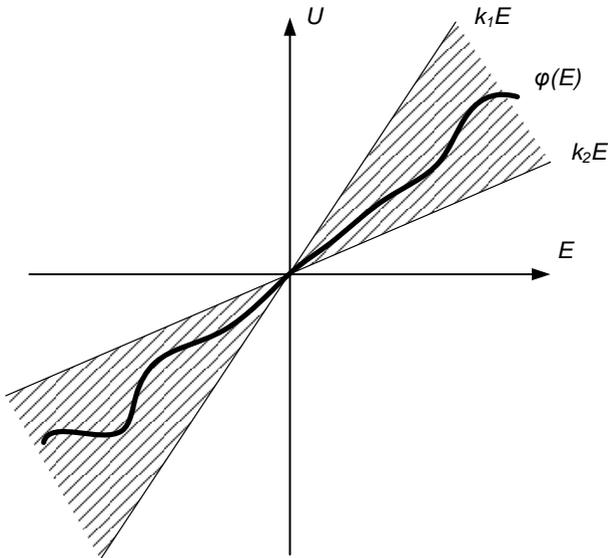


Рисунок 4.1 – Расположение нелинейности в пределах класса $[k_1, k_2]$

Абсолютная устойчивость означает устойчивость в целом для всех характеристик заданного класса. Обычно на практике нелинейности располагаются в секторе $S [0, k]$. В этом случае для простейшей нелинейной системы (см. рис. 1.7) достаточным условием устойчивости является выполнение следующих условий:

1. $Re[(1 + qj\omega)W_n(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0$, при этом $-\infty < q, \omega < +\infty$ и являются действительными.
2. Система, в которой $\varphi(E) \rightarrow C \leq k$, должна быть устойчивой.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части может быть представлена в виде

$$W_n(j\omega) = U_n(\omega) + jV_n(\omega).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[(1 + qj\omega)(U_{\text{л}}(\omega) + jV_{\text{л}}(\omega))] = \\ & = \operatorname{Re}[U_{\text{л}}(\omega) + qj\omega U_{\text{л}}(\omega) + jV_{\text{л}}(\omega) - q\omega V_{\text{л}}(\omega)] = U_{\text{л}}(\omega) - \\ & \quad - q\omega V_{\text{л}}(\omega). \end{aligned}$$

В этом случае можно представить, что:

$$[X - qY] + \frac{1}{k} > 0, \quad (4.1)$$

$$\text{где } X = U_{\text{л}}(\omega) = \operatorname{Re}[W_{\text{л}}(j\omega)]; \quad Y = \omega V_{\text{л}}(\omega) = \omega \operatorname{Re}[W_{\text{л}}(j\omega)].$$

Полученное уравнение (4.1) является уравнением, так называемой *прямой Попова*. *Видоизмененной частотной характеристикой (кривой Попова)* называется амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы управления, представленная в виде следующего выражения:

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = U_{\text{л}}(\omega) + j\omega V_{\text{л}}(\omega). \quad (4.2)$$

Условие абсолютной устойчивости можно сформулировать следующим образом: нелинейная система будет абсолютно устойчивой, если в плоскости $W_{\text{л}}^*(j\omega) = X + jY$ можно провести хотя бы одну прямую Попова так, чтобы кривая Попова была слева от нее (см. рис 4. 2).

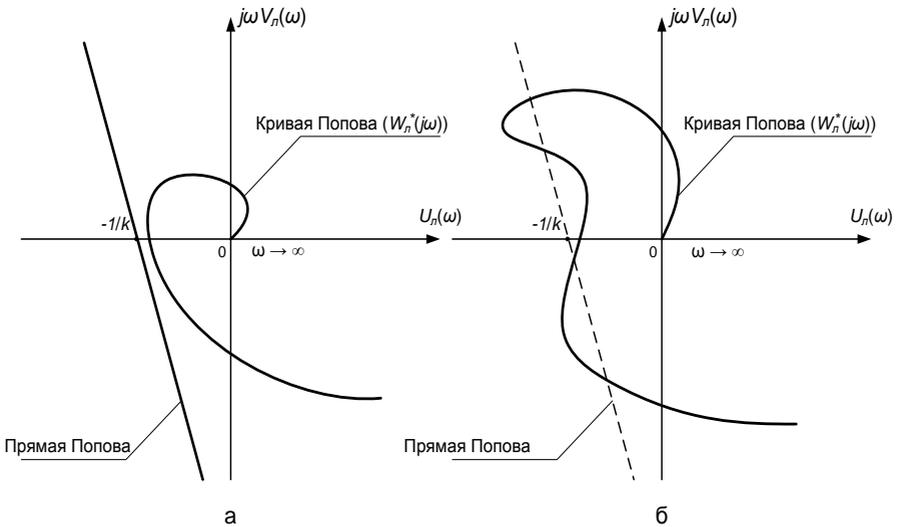


Рисунок 4.2 – Примеры выполнения (а) и невыполнения (б) критерия Попова относительно абсолютной устойчивости нелинейной системы

4.2 Метод А. М. Ляпунова

Второй (прямой) метод Ляпунова основывается на построении специальных функций Ляпунова, позволяющих получить достаточные условия устойчивости равновесия *в большом*. Имеется в виду тот вариант, когда все начальные условия движения системы лежат внутри некоторой замкнутой области фазового пространства. В его основе лежат две теоремы Ляпунова.

Теорема 1. Если существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ производная которой по времени $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = dV(x_1, x_2, \dots, x_n)/dt$ в силу дифференциальных уравнений движения или представляет собой знакопостоянную функцию,

«Нелинейные системы автоматического управления»

противоположного с $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знака, или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение системы устойчиво.

Теорема 2. Если, кроме того, функция $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знакоопределенная, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Отметим, что *знакопостоянной* называют функцию, принимающую при всех значениях своих аргументов только значения одного знака либо нулевое, а *знакоопределенной* – знакопостоянную функцию, принимающую нулевое значение только при нулевом значении всех ее аргументов (в начале координат).

Уяснить смысл функций Ляпунова и сформулированных в теоремах условий устойчивости легко с помощью понятий фазового пространства. Если $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знакоопределенная функция, то уравнение $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C = const$ обычно представляет в фазовом пространстве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ замкнутую поверхность, охватывающую точку $x = 0$ (начало координат). Поверхность $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1$ находится внутри поверхности $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2$, если $C_1 < C_2$. При приближении C к нулю поверхность стягивается в точку $x = 0$. Если в силу уравнений движения определенно-положительная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с течением времени только убывает, то есть $dV(x_1, x_2, \dots, x_n)/dt$ определенно-отрицательная, то это означает, что с течением времени изображающая точка переходит с внешних поверхностей на внутренние все время приближаясь к началу координат, которое в этом случае является точкой асимптотически устойчивого равновесия. Описанное выше напоминает, если сравнить изображающую точку с точечным электрическим зарядом, свободно движущимся в потенциальном поле, когда он в процессе движения переходит с эквипотенциалей более высокого значения на эквипотенциали значением ниже, постепенно стремясь к точечному источнику соответствующего потенциального поля. Другой аналогией

могут быть линии уровня (аналогия функций Ляпунова) на топографической карте, которые дают представление о соответствующем рельефе поверхности, а движение изображающей точки будет напоминать траекторию скатывания шарика, наблюдаемую сверху, в гравитационном поле вдоль соответствующего рельефа.

Задача о нахождении функций Ляпунова, которые бы для данной системы дали необходимое и достаточное условие устойчивости, весьма сложна. В зависимости от конфигурации фазовых траекторий уравнение замкнутой поверхности $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая бы при всех C пронизывалась бы фазовыми траекториями только снаружи внутрь или наоборот, найти весьма трудно (см. рис. 4.3).

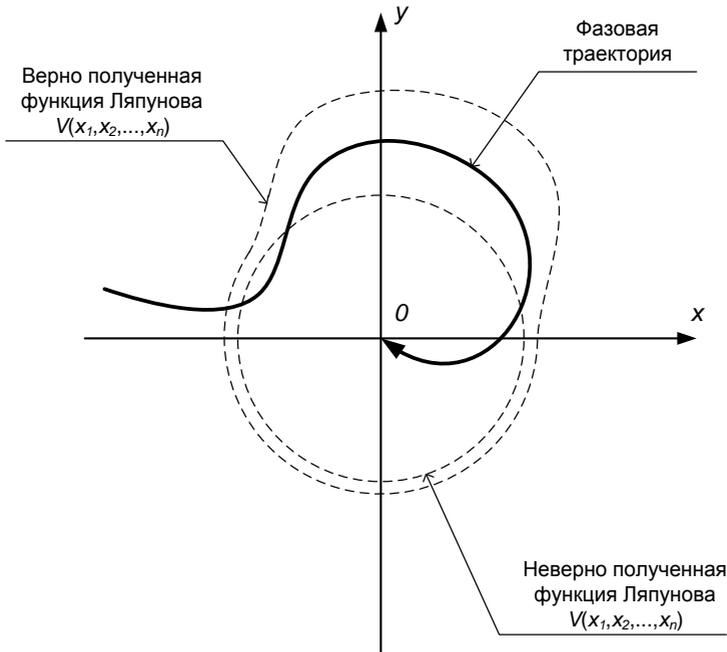


Рисунок 4.3 – Верный и неверный варианты функций Ляпунова

Поэтому при отыскании функций Ляпунова им обычно заранее приписывают некоторую форму, параметры которой сравнительно несложно вычислить по исходным уравнениям движения. Если функцию заданной формы при этом найти удалось, можно легко и с уверенностью судить об устойчивости или не устойчивости равновесия на основании приведенных ранее теорем Ляпунова. Если же функцию заданной формы при этом найти не удалось, это еще не означает, что равновесие неустойчиво, может просто оказаться, что функции Ляпунова данной формы не существует, но существует функция другого вида.

В случае линейных систем функции Ляпунова часто удается найти в виде квадратичных форм, координаты которых рассчитать сравнительно несложно. Если задаться квадратичной формой с неопределенными коэффициентами в виде

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{k,l} x_k x_l, \quad (4.3)$$

то коэффициенты $\alpha_{k,l}$ могут быть рассчитаны с помощью следующего условия

$$\frac{dV(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n A_j x_j^2, \quad (4.4)$$

где A_j – любые постоянные; dx_j/dt задаются на основании исходных уравнений движения. Сравнивая коэффициенты при одинаковых элементах $x_k x_l$ в левой и правой частях выражения (4.4) можно получить алгебраические уравнения для нахождения коэффициентов $\alpha_{k,l}$.

Иногда функцию Ляпунова в виде квадратичной формы удается отыскать и для нелинейных систем близких к линейным системам, но вообще такое ограничение формы резко сужает возможности исследования. Довольно существенное

расширение дает функция Ляпунова, предложенная А. И. Лурье и В. И. Постниковым. Если нелинейность обусловлена введением в линейную систему одного безынерционного нелинейного звена со статической характеристикой $U = \varphi(E)$, принадлежащей классу $[0, k]$, то функцию Ляпунова во многих случаях удастся построить в виде «квадратичная форма + интеграл нелинейности»:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = R(x) + B \int_0^E \varphi(E) dE |_{E=x}, \quad (4.5)$$

где квадратичная форма задана в виде $R(x) = x^* H x$; x^* – матрица-строка, полученная транспонированием вектора x ; H – квадратная определенно-положительная симметрическая матрица размера $n \times n$, элементы которой постоянны и рассматриваются как искомые неопределенные коэффициенты, B – постоянный коэффициент интеграла.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 4

Условие. Исследовать на устойчивость систему, представляющую собой следящий электропривод, структурная схема которого имеет вид:

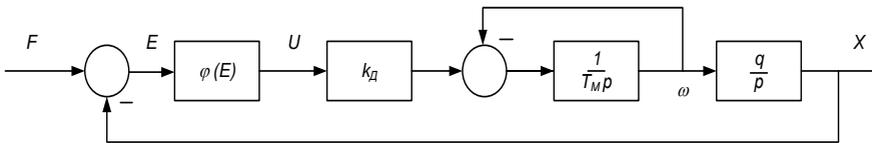


Рисунок 4.4 – Структурная схема следящего электропривода

Параметры электропривода равны: $k_D = 1,5 \left(\frac{1}{B \cdot c}\right)$; $T_M = 0,1(c)$; $q = 0,1$ Характеристика $\varphi(E)$ является нечетной однозначной.

Решение на основе критерия В. М. Попова. Если представить структурную схему данной системы в виде, изображенном на рисунке 1.7, то можно определить передаточную функцию линейной части, и она будет равна:

$$W_L(p) = \frac{k_D q}{p(T_M p + 1)}.$$

Рассчитаем амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части данной системы:

$$W_L(j\omega) = -\frac{k_D q T_M}{T_M^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k_D q}{T_M^2 \omega^3 + \omega}.$$

Рассчитаем видоизменённую частотную характеристику линейной части системы на основании выражения (4.2)

$$W_L^*(j\omega) = U_L(\omega) + j\omega V_L(\omega) = -\frac{k_D q T_M}{T_M^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k_D q}{T_M^2 \omega^2 + 1}.$$

Вследствие равенства действительной и мнимой частей, с точностью до постоянного множителя, видоизмененная частотная характеристика будет представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат под углом $1/T_M$ (рис. 4.5). Это означает, что данная система будет абсолютно устойчивой для всех нечетных нелинейностей, проходящих через начало координат, и расположенных в первом и третьем квадрантах системы координат статической характеристики нелинейного звена системы, так как можно провести бесконечное число прямых Попова с характерными координатами в интервале от 0 до $-\infty$.

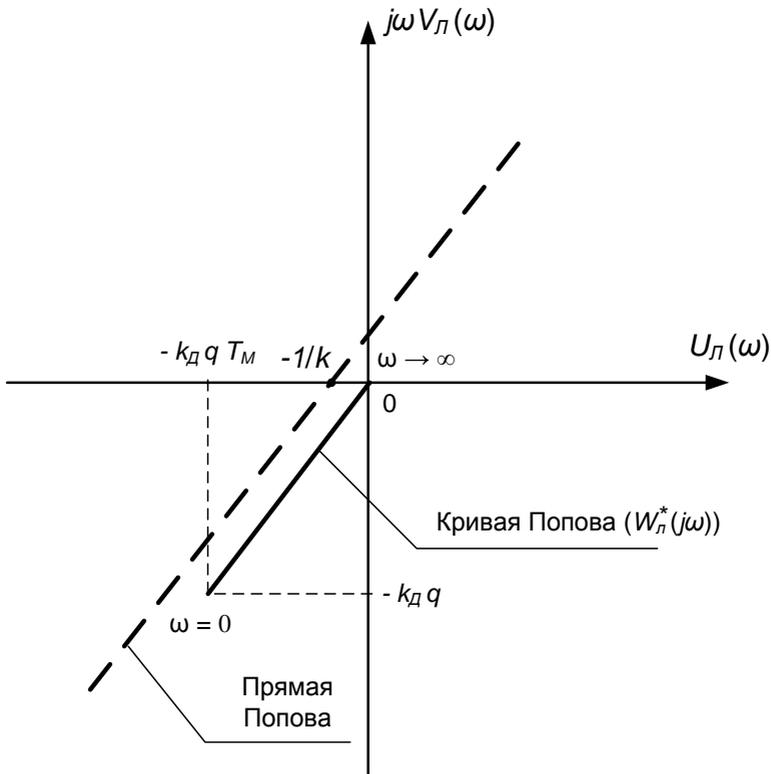


Рисунок 4.5 – Видоизмененная частотная характеристика системы

Решение на основе метода А. М. Ляпунова. Прежде чем воспользоваться теоремами Ляпунова для анализа устойчивости соответствующей системы получим выражения функций Ляпунова в виде «квадратичная форма + интеграл нелинейности» (выражение (4.5)), но предварительно запишем уравнения движения системы. Если принять за основную координату выходную переменную системы x , а второй переменной y удобно взять ω (см. структурную схему к задаче), тогда первое уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = qy.$$

Второе уравнение получается, если сформировать связь переменной x с переменной y путем движения по структурной схеме по ходу часовой стрелки, через обратную связь, учитывая, что нас интересует свободная составляющая движения системы, то есть $F = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{1}{T_M}\right)y + \left(\frac{k_D}{T_M}\right)\varphi(-x)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{1}{T_M}\right)y - \left(\frac{k_D}{T_M}\right)\varphi(x)$$

(с учетом нечетности соответствующей нелинейности).

Функция Ляпунова в первом приближении будет иметь вид:

$$V(x, y) = \alpha_{11}x^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})xy + \alpha_{22}y^2 + B \int_0^x \varphi(x)dx.$$

Условие знакоопределенности требует выполнения следующего условия:

$$(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0.$$

Рассчитаем полную производную функции $V(x, y)$:

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} = [2\alpha_{11}x + B\varphi(x)] \frac{dx}{dt} + 2\alpha_{22}y \frac{dy}{dt},$$

что с учетом дифференциальных уравнений движения дает

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = [2\alpha_{11}x + B\varphi(x)]qy + 2\alpha_{22}y \left[-\left(\frac{1}{T_M}\right)y - \left(\frac{k_D}{T_M}\right)\varphi(x) \right].$$

Снова оцениваем возможность выполнения условия знакоопределенности заданной функции Ляпунова и ее полной первой производной. Данное условие будет выполняться если:

$$\alpha_{11} = 0; B = 2\alpha_{22} \left(\frac{k_D}{q T_M} \right);$$

α_{22} – любое положительное действительное число.

Окончательно получаем:

$$V(x,y) = \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{22} \left(\frac{k_D}{q T_M} \right) \int_0^x \varphi(x) dx;$$

$$W(x,y) = \frac{dV(x,y)}{dt} = -\frac{2\alpha_{22}}{T_M} y^2,$$

причем нелинейность должна проходить через начало координат, а также должна быть нечетной и располагаться в пределах первого и третьего квадрантов, чтобы соответствующий интеграл всегда оставался положительным.

Анализируя последние полученные выражения, можно сделать вывод: исследуемая система всегда будет асимптотически устойчивой в большом относительно положения равновесия, так как выполняются первая и вторая теоремы метода. Единственным условием является то, что статическая характеристика соответствующего нелинейного звена должна быть нечетной, проходить через начало координат и располагаться в первом и третьем квадрантах соответствующей системы координат.

5 МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЖИМА АВТОКОЛЕБАНИЙ

Нелинейным системам свойственно возникновение специфических режимов функционирования, которые на фазовых портретах будут проявляться в виде граничных устойчивых циклов. Речь идет об автоколебаниях.

Автоколебания — это незатухающие колебания в диссипативной нелинейной динамической системе с обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть *непериодического* внешнего воздействия. Отличаются они от вынужденных колебаний тем, что последние вызваны *периодическим* внешним воздействием и происходят с частотой этого воздействия, в то время как возникновение автоколебаний и их частота полностью определяются внутренними свойствами самой автоколебательной системы.

Идейно, методы, которые будут описаны ниже, базируются на том, что после гармонической линеаризации исследуемую систему можно представить в виде, как на рис. 5.1, где $W_{\text{л}}(p) = R(p) / Q(p)$ — линейная часть нелинейной системы; $W_{\text{нл}}(p)$ — нелинейная часть системы после гармонической линеаризации и имеющая передаточную функцию вида (3.9).

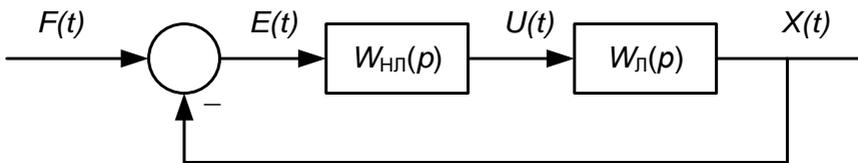


Рисунок 5.1 – Линеаризованная нелинейная система

Дальнейшее использование, например, частотного критерия устойчивости Найквиста, если оценку производить по разомкнутому контуру, дает следующее условие нахождения

«Нелинейные системы автоматического управления»

системы управления на границе устойчивости (или в условиях автоколебательного режима):

$$W_{\text{НЛ}}(j\omega)W_{\text{Л}}(j\omega) = -1, \quad (5.1)$$

при этом линейная часть системы должна быть устойчивой или нейтральной, то есть полином $Q(p)$ не должен иметь корней с положительной действительной частью, а также она должна обеспечивать выполнение гипотезы фильтра как условия гармонической линеаризации соответствующего нелинейного звена системы, то есть быть фильтром низких частот.

5.1 Метод Л. С. Гольдфарба

С помощью данного метода можно определить параметры автоколебаний для систем с одним нелинейным элементом, коэффициенты гармонической линеаризации которого являются функциями только амплитуды. В этом случае уравнение (5.1) будет иметь вид

$$W_{\text{НЛ}}(A)W_{\text{Л}}(j\omega) = -1, \quad (5.2)$$

и решается графически. Если его представить в виде

$$W_{\text{Л}}(j\omega) = -1/W_{\text{НЛ}}(A), \quad (5.3)$$

то очевидно, что для его решения необходимо построить две характеристики: АФЧХ линейной части системы $W_{\text{Л}}(j\omega)$ и отрицательную обратную характеристику нелинейного звена $-1/W_{\text{НЛ}}(A)$. Характеристики нужно строить в общей системе координат с единым масштабом. Если построенные кривые не пересекаются, то решения уравнения (5.3) не существует и

автоколебания в системе отсутствуют. Если же кривые пересекаются (см. рис. 5.2), то уравнение (5.3) имеет решение и автоколебания возможны.

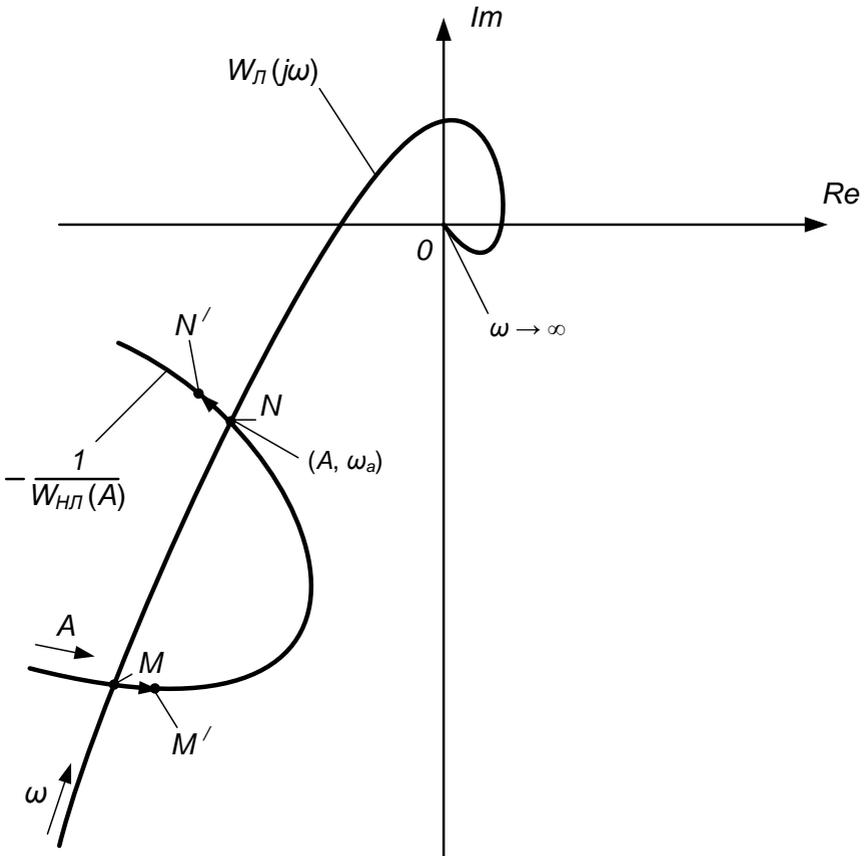


Рисунок 5.2 – Анализ режима автоколебаний методом Л. С. Гольдфарба

Устойчивость или неустойчивость автоколебаний можно исследовать, анализируя точки пересечения M и N . Этим точкам

соответствуют граничные циклы в фазовой плоскости (см. рис. 5.3).

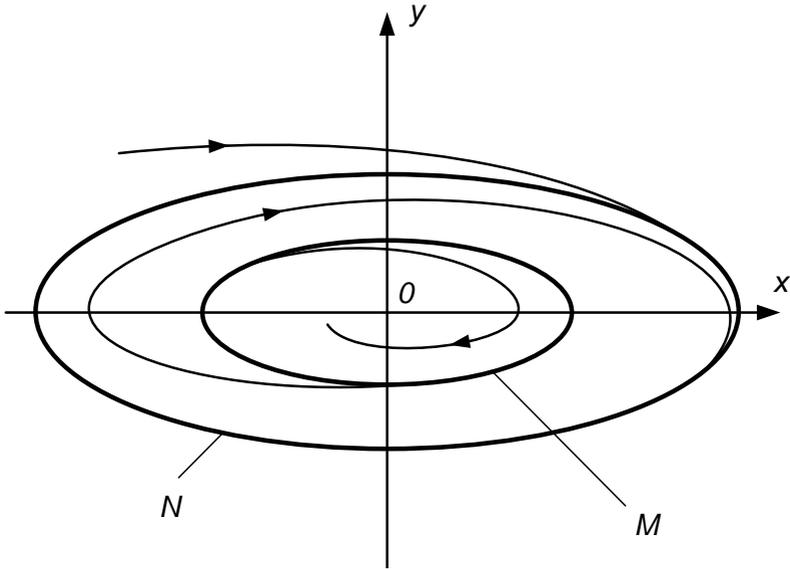


Рисунок 5.3 – Граничный устойчивый (точка N) и неустойчивый (точка M) циклы

При этом цикл N имеет большую амплитуду и является устойчивым, а M – меньшую амплитуду и неустойчив.

Правило для оценки устойчивости колебаний можно сформулировать следующим образом: если точка на кривой $-1/W_{\text{НЛ}}(A)$, отвечающая возрастающей амплитуде, не охватывается АФЧХ линейной части системы, то колебания устойчивые, а если охватывается, то не устойчивые. На рисунке 5.3 присутствуют точки M и N , которые переходят в точки M' и N' в случае приращения амплитуды в сторону увеличения и, впоследствии, используются для анализа с помощью правила сформулированного выше.

5.2 Метод Е. П. Попова

Данный метод, в основу которого заложен критерий устойчивости Михайлова, дает возможность исследовать системы с нелинейными звеньями, линеаризированные передаточные функции которых $W_{\text{НЛ}}(j\omega, A)$ зависят не только от амплитуды, но и от частоты. Кроме этого, с помощью данного метода можно исследовать нелинейные системы с несколькими нелинейными звеньями, которые разделяются линейными инерционными звеньями.

Рассмотрим структурную схему, приведенную на рисунке 5.1. Определим передаточную функцию замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{\frac{R(p)W_{\text{НЛ}}(p,A)}{Q(p)}}{1 + \frac{R(p)W_{\text{НЛ}}(p,A)}{Q(p)}} = \frac{R(p)W_{\text{НЛ}}(p,A)}{Q(p) + R(p)W_{\text{НЛ}}(p,A)} \quad (5.4)$$

и запишем характеристический полином

$$D(p) = Q(p) + R(p)W_{\text{НЛ}}(p, A). \quad (5.5)$$

Условие нахождения системы на границе колебательной устойчивости будет иметь вид:

$$Q(j\omega) + R(j\omega)W_{\text{НЛ}}(j\omega, A) = 0. \quad (5.6)$$

Выделив в выражении (5.6) действительную и мнимую части, получим

$$X(\omega, A) + jY(\omega, A) = 0.$$

Это равенство будет выполняться, если действительная и мнимая части одновременно будут равны нулю, то есть:

$$\begin{cases} X(\omega, A) = 0 \\ Y(\omega, A) = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Решив эти уравнения в системе, можно найти параметры возможных автоколебаний A и ω_a , причем как амплитуда, так и частота должны быть положительными действительными числами. Если какое-нибудь значение будет отрицательным или комплексным, то автоколебания с соответствующей парой значений параметров в системе не возможны.

Проверка устойчивости автоколебаний может быть проведена при помощи следующего неравенства:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_a \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_a - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_a \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_a > 0. \quad (5.8)$$

То есть, если для какой-то положительной и действительной пары параметров A и ω_a выполняется условие (5.8), то автоколебания будут устойчивыми (точка N рисунка 5.3), иначе – неустойчивыми (точка M рисунка 5.3).

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 5

Условие. Оценить амплитуду и частоту автоколебаний следящего электропривода, структурная схема которого имеет вид (рис. 5.4):

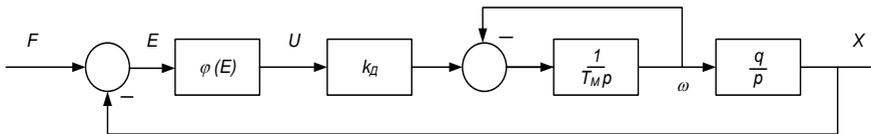


Рисунок 5.4 – Структурная схема следящего электропривода

Параметры электропривода равны: $k_D = 1,5 \left(\frac{1}{B \cdot c}\right)$; $T_M = 0,1(c)$; $q = 0,1$. Характеристика $\varphi(E)$ является характеристикой реального релейного элемента со значениями: $b = 100 (B)$; $c = 0,25 (rad)$ (см. рис. 1.6).

Решение методом Л. С. Гольдфарба. После приведения исследуемой системы с помощью эквивалентных преобразований к системе вида, изображенного на рисунке 5.1, передаточная функция линейной части будет иметь вид:

$$W_L(p) = \frac{k_D q}{p(T_M p + 1)},$$

а функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента приобретет вид:

$$W_{НЛ}(A) = k_r + k_r' \frac{p}{\omega},$$

$$\text{где } k_r = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \text{ и } k_r' = -\frac{4bc}{\pi A^2}.$$

После подстановки $p = j\omega$, получим:

$$W_{НЛ}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} = \frac{4bc}{\pi A^2} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right).$$

Отрицательная обратная характеристика нелинейного звена будет равна:

$$-\frac{1}{W_{НЛ}(A)} = -\frac{\pi c}{4b} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right).$$

АФЧХ линейной части можно представить равной:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{k_{\text{Д}}q}{j\omega(j\omega T_{\text{М}} + 1)}$$

или
$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{k_{\text{Д}}qT_{\text{М}}}{T_{\text{М}}^2\omega^2 + 1} - j\frac{k_{\text{Д}}q}{T_{\text{М}}^2\omega^3 + \omega}$$

Если построить полученные отрицательную обратную характеристику нелинейного звена и АФЧХ линейного звена в общей комплексной системе координат, то они будут расположены друг относительно друга следующим образом (рис. 5.5).

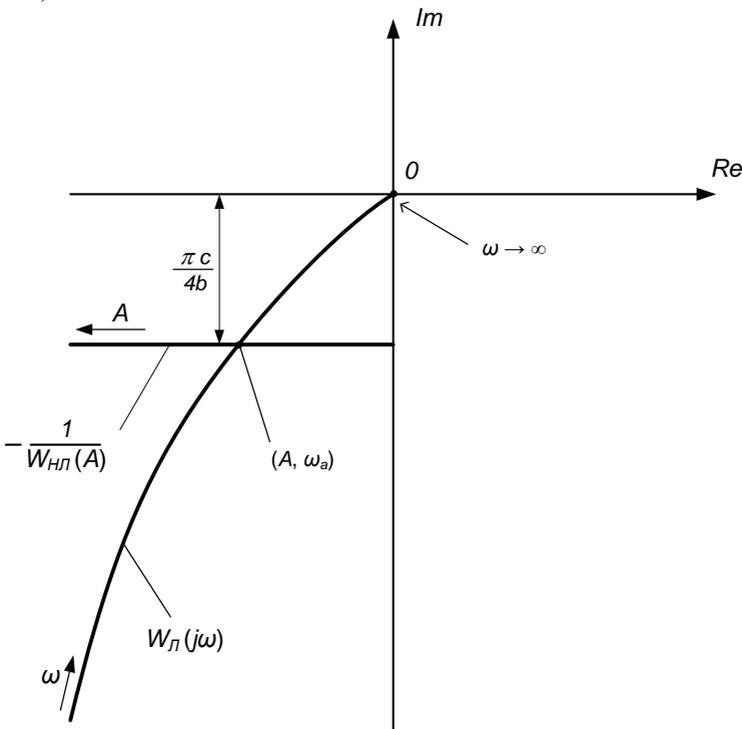


Рисунок 5.5 – Полученные отрицательная обратная характеристика нелинейного звена и АФЧХ линейного звена в общей комплексной системе координат

Как видно из рисунка 5.5, характеристики пересекаются, что свидетельствует о том, что в данной системе автоколебания возможны, причем в виде граничного устойчивого цикла.

Рассчитаем параметры возможных колебаний, приравняв по-отдельности действительные и мнимые составляющие отрицательной обратной характеристики нелинейного звена и АФЧХ линейного звена. В результате получим следующие уравнения:

$$\frac{k_D q}{T_M^2 \omega_a^3 + \omega_a} = \frac{\pi c}{4b}$$

$$\text{или } T_M^2 \omega_a^3 + \omega_a = \frac{k_D q 4b}{\pi c}$$

$$\text{и } \frac{\pi c}{4b} \sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} = \frac{k_D q T_M}{T_M^2 \omega_a^2 + 1}.$$

Решая совместно записанные уравнения, с учетом численных значений параметров системы, получаем значения амплитуды и частоты возможных автоколебаний: $A = 0,51(\text{rad})$ и $\omega_a = 18,01(\text{rad}/\text{c})$.

Решение методом Е. П. Попова. Запишем передаточную функцию линейной части в следующем виде:

$$W_L(p) = \frac{k_D q}{p(T_M p + 1)} = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента будет иметь вид:

$$W_{НЛ}(A, p) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega}.$$

Характеристический полином системы согласно выражению (5.5) записывается так:

$$D(p) = T_M p^2 + p + k_{Дq} \left(\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega} \right).$$

После подстановки $p = j\omega$ определим действительную и мнимую части характеристического полинома системы и составим систему уравнений в соответствии с выражением (5.7):

$$\begin{cases} X(\omega, A) = -T_M \omega^2 + \frac{4bk_{Дq}}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} = 0 \\ Y(\omega, A) = \omega - \frac{4bk_{Дq}c}{\pi A^2} = 0 \end{cases}.$$

Решением записанной системы уравнений будет положительная действительная пара значений $A = 0,51(rad)$ и $\omega_a = 18,01(rad/c)$, что свидетельствует о том, что в данной системе автоколебания возможны.

Исследуем на устойчивость соответствующие колебания с помощью выражения (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial A} &= \frac{4bk_{Дq}}{\pi} \frac{2c^2 - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - c^2}}; & \frac{\partial X}{\partial \omega} &= -2T_M \omega; \\ \frac{\partial Y}{\partial A} &= \frac{8bk_{Дq}c}{\pi A^3}; & \frac{\partial Y}{\partial \omega} &= 1. \end{aligned}$$

При $A = 0,51(rad)$ и $\omega_a = 18,01(rad/c)$ условие (5.8) будет выполняться, что свидетельствует о том, что возможный автоколебательный режим будет устойчивым (граничный устойчивый цикл на фазовом портрете).

Важно отметить, что, независимо от того, каким методом мы решали данную задачу, обязательно проводилась проверка выполнения гипотезы фильтра линейной частью, и в нашем случае она выполнялась.

6 АНАЛИЗ КОСВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для оценки качества нелинейных САУ используются показатели, аналогичные показателям качества линейных САУ, то есть время переходного процесса, перерегулирование, колебательность переходного процесса и др. В связи с тем, что устойчивость нелинейных систем зависит от величины и места приложения внешнего воздействия, то, соответственно, от внешнего зависят и показатели качества. Очевидно, что для того, чтобы получить максимально полную информацию о качестве функционирования нелинейной САУ, необходимо произвести расчеты переходных процессов с учетом максимального количества вариантов возмущающих воздействий и входных сигналов.

Приближенную, но достаточно точную оценку качества нелинейной системы без расчета переходных процессов можно получить по следующей методике. Рассмотрим простейшую нелинейную систему (см. рис. 1.7). С учетом гармонической линеаризации можно записать передаточную функцию нелинейной части в виде:

$$W_{\text{НЛ}}(p) = k_r(\alpha) + k_r'(\alpha) \frac{p}{\omega},$$

где $\alpha = a/c$ – относительная амплитуда сигнала на входе нелинейного звена; c – характерное значение на статической характеристике нелинейного звена.

Колебательность гармонически линеаризованной системы будет равна (см. рис. 6.1):

$$M = A(\omega_{\text{max}})/A(0).$$

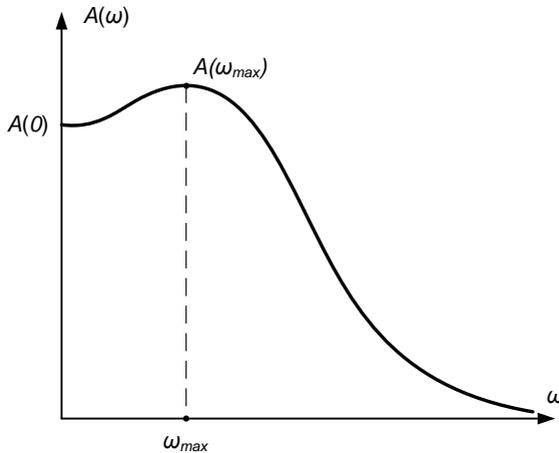


Рисунок 6.1 – Амплитудно-частотная характеристика колебательной системы

Передаточная функция линеаризованной простейшей нелинейной системы равна:

$$W_3(p) = \frac{W_L(p)W_{НЛ}(p)}{1+W_L(p)W_{НЛ}(p)}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика такой системы приобретает следующий вид:

$$W_3(j\omega) = \frac{W_L(j\omega)W_{НЛ}(j\omega)}{1+W_L(j\omega)W_{НЛ}(j\omega)} = \frac{W_L(j\omega)}{1/W_{НЛ}(j\omega)+W_L(j\omega)}.$$

Введем понятие преобразованной амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) нелинейного звена системы:

$$Z(j\omega) = 1/W_{НЛ}(j\omega).$$

Тогда АФЧХ замкнутой нелинейно системы можно записать в виде:

$$W_3(j\omega) = \frac{W_L(j\omega)}{Z(j\omega) + W_L(j\omega)}.$$

Сделаем следующие подстановки:

$$\begin{cases} W_L(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \\ W_{НЛ}(j\omega) = W_{НЛ}(p)|_{p=j\omega} = k_r(\alpha) + k_r'(\alpha) \frac{p}{\omega} |_{p=j\omega} = k_r(\alpha) + jk_r'(\alpha). \end{cases} \quad (6.1)$$

В этом случае преобразованную АФЧХ нелинейного звена системы можно записать в виде:

$$Z(j\omega) = 1/(k_r(\alpha) + jk_r'(\alpha)) = r(\alpha) + jr'(\alpha).$$

Показатель колебательности может быть записан следующим образом:

$$M = \left[\frac{1}{A(0)} \right] \frac{\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}}{\sqrt{(U(\omega) + r(\alpha))^2 + (V(\omega) + r'(\alpha))^2}},$$

$$\text{или } M \cdot A(0) = \frac{\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}}{\sqrt{(U(\omega) + r(\alpha))^2 + (V(\omega) + r'(\alpha))^2}}.$$

Дальнейшие преобразования записанного выше выражения приводят к следующей формуле:

$$(U(\omega) - U_0)^2 + (V(\omega) - V_0)^2 = R^2, \quad (6.2)$$

$$\text{где } U_0 = \frac{r(\alpha)\bar{M}^2}{1 - \bar{M}^2}; \quad (6.3)$$

$$V_0 = \frac{r'(\alpha)\bar{M}^2}{1-\bar{M}^2}; \quad (6.4)$$

$$R^2 = [r^2(\alpha) + (r'(\alpha))^2] \frac{\bar{M}^2}{(1-\bar{M}^2)^2}; \quad (6.5)$$

$\bar{M} = M \cdot A(0)$ – относительная колебательность системы.

Отсюда следует, что для заданных постоянных значений M и α в комплексной плоскости выражению (6.2) соответствует окружность с координатами центра $(U_0; jV_0)$. Если принять показатель колебательности неизменным ($M = const$), то для различных значений относительной амплитуды можно получить семейство окружностей, соответствующих желательному показателю колебательности и формирующих *запрещенную зону* (см. рис. 6.2).

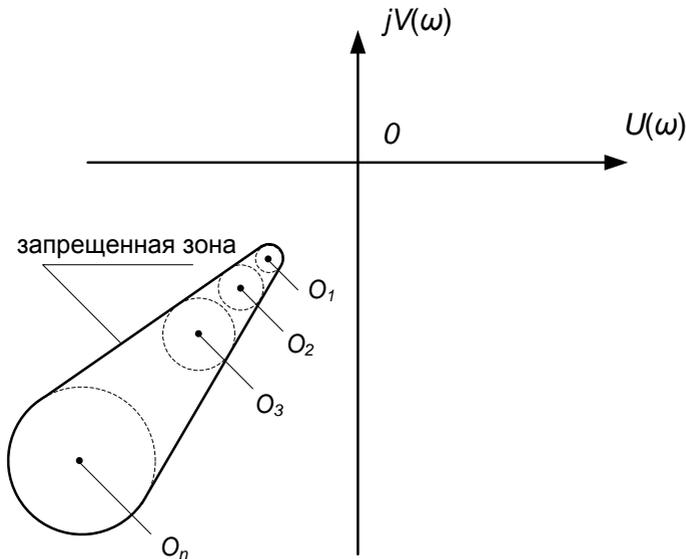


Рисунок 6.2 – Формирование запрещенной зоны нелинейной системы

Для определения показателя колебательности необходимо в комплексной плоскости построить АФЧХ линейной части и запрещенные зоны, соответствующие различным значениям M . Показатель колебательности определяется такой величиной M , которой касается характеристика $W_{\text{д}}(j\omega)$, не заходя внутрь ее.

Пользуясь данным подходом можно решать не только задачи оценки качества регулирования в нелинейных системах, но и решать задачи их *коррекции* и *синтеза*.

Задача коррекции нелинейной системы в рамках данного подхода может быть решена следующим образом: когда имеется семейство запрещенных зон соответствующих различным M системы, можно «подогнать» АФЧХ линейной части под ту запрещенную зону, которая соответствует наиболее желательным показателям качества. Это делается путем корректировки структуры линейной части за счет дополнительных линейных звеньев и подбора их параметров, а также изменением параметров нелинейной части, что приводит к изменению форм соответствующих запрещенных зон.

Задача синтеза в рамках данного подхода заключается в изначальном формировании структуры линейной части таким образом, чтобы ее АФЧХ правильно располагалась относительно запрещенных зон, определяемых исключительно конкретными нелинейными звеньями и желаемыми значениями колебательности системы. Или в изначальном формировании, на основании выражений (6.3) – (6.5), запрещенных зон такой формы и нужными показателями качества, которых АФЧХ неизменной линейной части будет касаться, не заходя внутрь.

Все описанное выше, зачастую, удобно выполнять, пользуясь логарифмическим масштабом, переход в который не сложен, если помнить связь амплитудно-фазовых частотных характеристик с логарифмическими амплитудными и фазовыми частотными характеристиками.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ РАЗДЕЛА 6

Условие. Имеется простейшая нелинейная система автоматического управления (см. рис. 1.7). Построить семейство запрещенных зон данной системы со значениями относительной колебательности в интервале $(1; 2)$, считая, что нелинейная характеристика имеет вид релейной характеристики.

Решение. Считая, что гармонически линеаризованная передаточная функция звена с релейной характеристикой будет равна

$$W_{\text{НЛ}}(p) = \frac{4b}{\pi a}$$

запишем выражения (6.2) – (6.5), определяющие форму запрещенных зон в нашей нелинейной системе:

$$(U(\omega) - U_0)^2 + V^2(\omega) = R^2;$$

$$U_0 = \frac{\pi a}{4b} \frac{\bar{M}^2}{1 - \bar{M}^2}; \quad V_0 = 0; \quad R = \frac{\pi a}{4b} \frac{\bar{M}}{\bar{M}^2 - 1}.$$

Из записанных выражений видно, что запрещенные зоны будут формироваться окружностями, общие огибающие к которым представляют собой прямые

$$V(\omega) = \pm \frac{1}{\bar{M}} U(\omega).$$

Построим соответствующие запрещенные зоны в комплексной системе координат, учитывая, что все запрещенные зоны будут располагаться в левой полуплоскости соответствующей комплексной плоскости вследствие отрицательности значений величины U_0 :

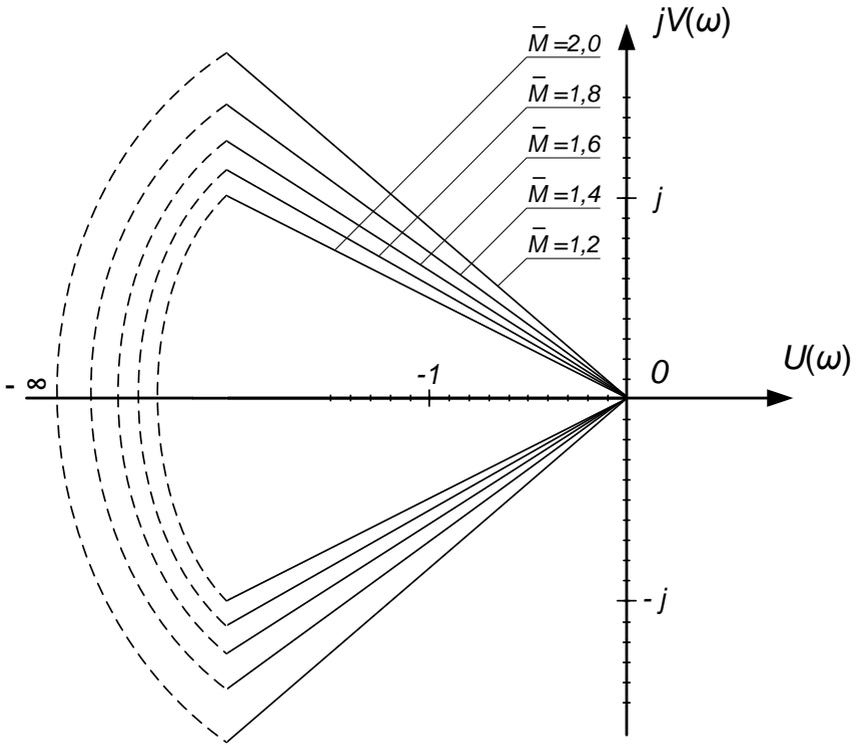


Рисунок 6.3 – Построение запрещенных зон в комплексной системе координат

7 ВИБРАЦИОННАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Метод вибрационной линеаризации нелинейных звеньев является техническим средством для предотвращения возникновения нежелательных автоколебательных режимов и их пагубного воздействия на систему.

Рассмотрим суть данного метода на следующем примере. Возникновение автоколебаний в релейных системах объясняется, в основном, тем, что в них перемещение регулирующего органа происходит с одинаковой скоростью V_{POmax} при любых отклонениях регулируемой величины x , выходящих за зону нечувствительности a (см. рис. 7.1).

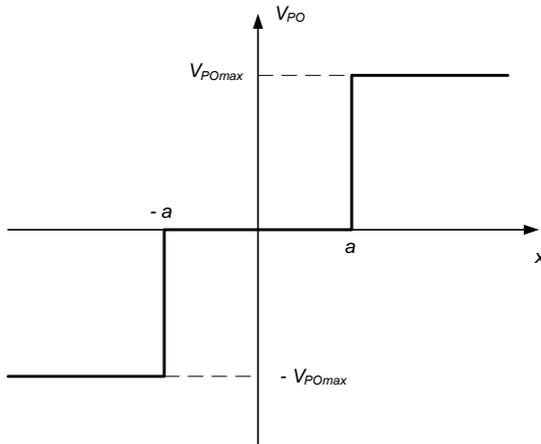


Рисунок 7.1 – Зависимость скорости регулирующего органа от положения

Поэтому к положению равновесия регулирующий орган подходит с достаточно большой скоростью, а затем, вследствие инерции, может пройти его и вызвать срабатывание системы в

«Нелинейные системы автоматического управления»

обратную сторону. Если этот процесс окажется незатухающим, то система будет находиться в автоколебательном режиме.

Автоколебания можно устранить за счет увеличения зоны нечувствительности a релейного элемента, что, в свою очередь, приведет к снижению точности системы, что может быть недопустимым с точки зрения ее эксплуатации.

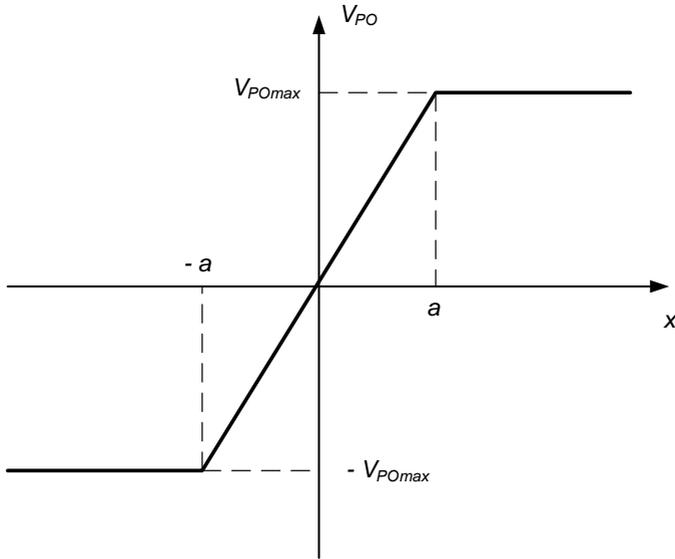


Рисунок 7.2 – Желаемая зависимость скорости регулирующего органа от положения

Устойчивой работы системы, не снижая ее точности можно добиться, если обеспечить линейную или близкую к таковой характеристику релейного элемента, при которой скорость регулирующего органа вблизи положения равновесия будет пропорциональна отклонению регулируемой величины (см. рис. 7.2).

Эффективным средством уменьшения влияния нелинейностей на свойства системы является наложение на

основной низкочастотный сигнал дополнительного высокочастотного сигнала. Такие принудительные высокочастотные колебания называются *вибрационными* и существенно уменьшают отрицательное влияние люфтов, зазоров, сухого трения и других эффектов на динамику нелинейной системы. Важно отметить, что вибрационный сигнал подается исключительно на вход нелинейного звена, как это показано на рис. 7.3.

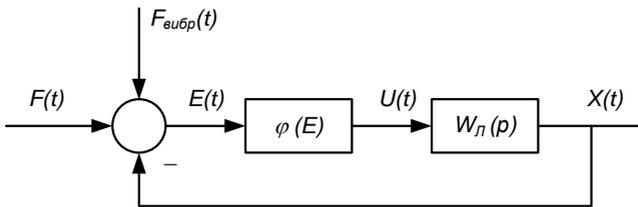


Рисунок 7.3 – Подача вибрационного сигнала в нелинейную систему

В этом случае на вход нелинейного звена действует относительно медленно изменяющийся основной сигнал $E_0(t)$ и дополнительный высокочастотный $E_d(t)$:

$$E(t) = E_0(t) + E_d(t) = E_0(t) + E_{dm} \sin(\omega_d t).$$

Частота ω_d должна быть достаточно высокой, чтобы основной сигнал $E_0(t)$ оставался практически неизменным в течение нескольких периодов дополнительного вибрационного сигнала $E_d(t)$, а амплитуда E_{dm} должна быть достаточной для срабатывания нелинейного звена, то есть соизмеримой с характерными значениями соответствующих нелинейностей (в случае релейной характеристики с зоной нечувствительности, соизмеримой с шириной зоны нечувствительности $E_{dm} \sim a$).

Важным условием работы системы в таких условиях является подавление линейной частью высокочастотной составляющей (ω_D) на выходе нелинейного звена, которое помимо низкочастотной составляющей будет иметь и высокочастотную (вибрационную) составляющую, и более высоких гармоник, то есть (аналогично гипотезе фильтра в случае гармонической линеаризации):

$$|W(j\omega_D)| \ll |W(j\omega_{\Pi})| ,$$

где ω_{Π} – полоса пропускания линейной части.

Если все описанные выше условия были соблюдены, то нелинейное звено фиктивно приобретет нелинейность вида, например, для случая релейной системы, изображенного на рисунке 7.4, по отношению к линейной части и общей структуре системы.

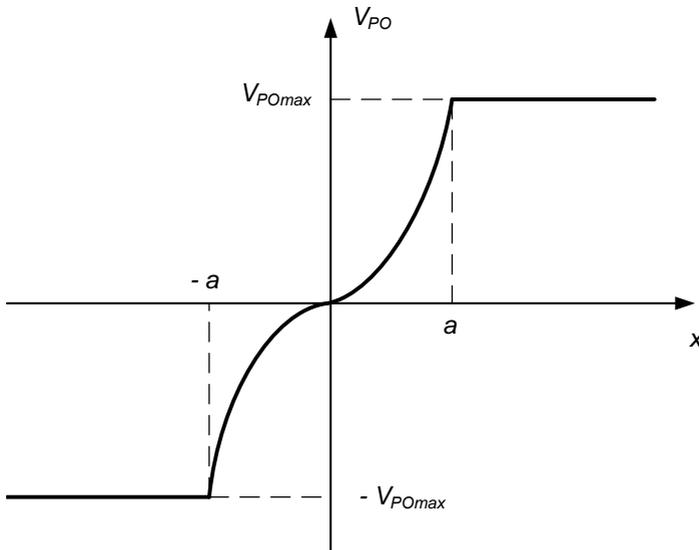


Рисунок 7.4 – Фиктивная характеристика нелинейного звена после вибрационной линеаризации

Это является технической иллюстрацией принципа: «Если не можешь изменить что-то в системе, то поменяй свое отношение к этому».

Как видно из рисунка 7.4 фиктивная характеристика близка по свойствам к характеристике, изображенной на рисунке 7.2, что дает право предположить, что в данной системе автоколебания будут устранены.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ЗНАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПЕРВОЙ ЧАСТИ

1. Какие системы автоматического управления называются нелинейными?
2. Что такое типовая нелинейность?
3. Какие нелинейности являются однозначными?
4. Какие нелинейности считаются комбинированными?
5. Что такое неоднозначная нелинейность?
6. Перечислить основные типовые нелинейности.
7. Какие основные особенности структуры нелинейных систем автоматического управления вы знаете?
8. Какие основные принципы построения математических моделей нелинейных систем вам известны?
9. В чем суть метода результирующих характеристик нелинейных звеньев?
10. Как получить результирующую характеристику системы последовательно соединенных нелинейных звеньев?
11. Как получить результирующую характеристику системы параллельно соединенных нелинейных звеньев?
12. Как получить результирующую характеристику системы встречно-параллельно соединенных нелинейных звеньев?
13. В чем заключается основная идея метода фазовой плоскости?
14. Дайте определение следующим понятиям: фазовые координаты, фазовая плоскость, фазовое пространство, фазовая траектория, фазовый портрет.
15. Перечислите основные свойства фазовых портретов.
16. Дайте определение следующим понятиям: особая точка, особая линия.
17. Перечислите основные особенности фазовых портретов.
18. Какие методы построения фазовых портретов вы знаете?

19. Поясните суть метода изоклин для построения фазовых портретов.
20. Как осуществляется оценка прямых показателей качества переходных процессов по фазовым портретам?
21. В чем суть гармонической линеаризации нелинейных звеньев?
22. Как осуществляется расчет коэффициентов гармонической линеаризации нелинейных звеньев?
23. Какие важные условия должны соблюдаться при гармонической линеаризации нелинейных звеньев системы?
24. Какие графоаналитические методы исследования автоколебаний в нелинейных системах вы знаете?
25. Поясните основные принципы метода Гольдфарба для оценки параметров автоколебаний в нелинейных системах.
26. Поясните основные принципы метода Попова для оценки параметров автоколебаний в нелинейных системах.
27. Что такое абсолютная устойчивость нелинейных систем?
28. Что такое прямая Попова?
29. Что такое кривая Попова или видоизмененная частотная характеристика линейной части?
30. В чем суть критерия Попова для оценки абсолютной устойчивости нелинейных систем?
31. Каков алгоритм исследования абсолютной устойчивости с помощью критерия Попова?
32. В чем суть метода Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем?
33. Что такое функция Ляпунова в теории исследования устойчивости систем?
34. Поясните понятия: знакопостоянная и знакоопределенная функции Ляпунова.
35. Как задаются функции Ляпунова в виде «квадратичная форма + интеграл нелинейности»?

36. Каков принцип исследования косвенных показателей качества нелинейных систем без построения графиков переходных процессов?
37. Что такое запрещенная зона какого-либо косвенного показателя качества?
38. Как можно построить запрещенную зону относительной колебательности нелинейной системы?
39. Как можно осуществлять синтез и коррекцию параметров нелинейных систем автоматического управления?
40. В чем суть вибрационной линеаризации нелинейных звеньев?
41. Что такое вибрационный сигнал?
42. Какие важные условия должны соблюдаться при использовании вибрационной линеаризации нелинейных звеньев?
43. В чем основные отличия вибрационной и гармонической линеаризаций нелинейных звеньев?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук .– 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2007.– 656 с.
2. Теория автоматического управления : учеб. для ТЗЗ вузов по спец. «Автоматика и телемеханика»: в 2 ч. Ч. II. Теория нелинейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др. ; под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. шк., 1986. — 504 с.
3. Лурье Б. Я. Классические методы автоматического управления / Б. Я. Лурье, П. Дж. Энрайт; под ред. А. А. Ланнэ.– СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 640 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник в 5 т. Т.5. Методы современной теории автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – 2-е изд., перераб. и доп.— М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.— 784 с.
5. Лукас В. А. Теория автоматического управления : учебник для вузов / В. А. Лукас. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Недра, 1990. – 416 с.