

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Шосткинський інститут

**Г. М. ХУДОЛЕЙ**

# **ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ**

*КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ*

*У двох частинах*

*Частина 1*

*Аналіз лінійних систем автоматичного  
управління*

Суми  
Сумський державний університет  
2016

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Шосткинський інститут

# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

## *КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ*

для студентів напряму підготовки 6.050201  
«Системна інженерія»  
усіх форм навчання

*У двох частинах*

*Частина 1*

*Аналіз лінійних систем автоматичного управління*

Затверджено  
на засіданні кафедри системотехніки  
та інформаційних технологій  
як конспект лекцій із дисципліни  
«Теорія автоматичного управління».  
Протокол № 01 від 31 серпня 2015 р.



Суми  
Сумський державний університет  
2016

Теорія автоматичного управління : конспект лекцій : у 2 ч.  
Ч. 1 «Аналіз лінійних систем автоматичного управління» /  
укладач Г. М. Худoley. – Суми : Сумський державний  
університет, 2016. – 179 с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій  
ШІ СумДУ

ВСТУП.....	7
Лекція 1.....	8
Теорія автоматичного управління, поняття та термінологія .....	8
1 Основні елементи та поняття САУ .....	11
1.1 Вхідні та вихідні змінні об'єкта управління, змінні стану .....	12
1.2 Основні складові засобів управління .....	14
1.3 Поняття функціональної та структурної схем.....	15
Лекція 2.....	18
2 Фундаментальні принципи управління в техніці .....	18
2.1 Принцип прямого розімкнутого управління .....	19
2.2 Принцип компенсації (керування за збуренням) .....	19
2.3 Принцип зворотного зв'язку (управління за відхиленням).....	21
2.4 Комбінований принцип управління .....	23
2.5 Класифікація систем автоматичного управління.....	23
Лекція 3.....	29
3 Поняття моделі та моделювання .....	29
3.1 Фізичні та математичні моделі .....	29
3.2 Аналітичні та експериментальні методи побудови математичних моделей .....	31
3.3 Основні види математичних моделей .....	32
3.3.1 Математичні моделі статички і динаміки.....	32
3.3.2 Стаціонарні й нестаціонарні математичні моделі.....	33
3.3.3 Лінійні й нелінійні математичні моделі. Лінеаризація.....	33
3.4 Лінійні диференціальні рівняння елементів і систем .....	35
3.5 Поняття лінійного диференціального оператора .....	36
3.8 Принцип суперпозиції .....	37
3.9 Складові рішення лінійного диференціального рівняння.....	38
Лекція 4.....	41

3.10	Поняття передаточної функції .....	41
3.11	Зв'язок передаточної функції з перетвореннями Лапласа .....	42
3.12	Нулі та полюси передаточної функції .....	43
3.13	Часові характеристики: перехідна та імпульсна перехідна характеристики .....	44
Лекція 5	.....	50
3.14	Частотні характеристики САУ та їх елементів .....	50
3.14.1	Поняття частотної характеристики .....	50
3.14.2	Зв'язок частотних характеристик із передаточними функціями .....	52
3.14.3	Комплексний передаточний коефіцієнт підсилення. Амплітудна фазочастотна характеристика системи .....	53
3.14.4	Логарифмічна амплітудна фазочастотна характеристика .....	55
3.14.5	Асимптотична ЛЧХ .....	57
Лекція 6	.....	60
4	Типові динамічні ланки та їх характеристики .....	60
4.1	Поняття типової динамічної ланки .....	60
4.2	Характеристики типових динамічних ланок .....	64
4.2.1	Ідеальна підсилувальна ланка .....	64
4.2.2	Інтегруюча ланка (ідеальна) .....	66
Лекція 7	.....	70
4.2.3	Аперіодична ланка першого порядку .....	70
4.2.4	Аперіодична, коливальна і консервативна ланки другого порядку .....	73
Лекція 8	.....	79
4.2.5	Ланка, що диференціює (ідеальна) .....	79
4.2.6	Реальна ланка, що диференціює .....	80
4.2.7	Ланка першого порядку, що форсує (ідеальна) .....	82
4.3	Немінімально-фазові ланки .....	83
4.4	Трансцендентні та ірраціональні ланки. Ланка чистого запізнювання .....	85
Лекція 9	.....	88

5 Структурні схеми систем управління та методи їх перетворень .....	88
5.1 Поняття структурної схеми та її складові.....	88
5.2 Правила перетворення структурних схем.....	90
5.2.1 Послідовне з'єднання ланок .....	90
5.2.2 Паралельне з'єднання ланок .....	91
5.2.3 Зустрічно-паралельне з'єднання ланок (ланка, охоплена зворотним зв'язком) .....	92
5.2.4 Допоміжні правила перетворення структурних схем.....	93
5.3 Формула Мейсона .....	95
5.4 Передаточна функція типової одноконтурної САУ .....	95
Лекція 10.....	99
6 Методи одержання математичного опису елементів і систем .....	99
6.1 Аналітичний метод одержання математичного опису .....	99
6.2 Експериментальний метод одержання математичного опису.....	104
6.2.1 Пасивний метод ідентифікації .....	105
6.2.2 Активний метод ідентифікації.....	107
Лекція 11.....	110
7 Аналіз систем автоматичного управління.....	110
7.1 Статична точність систем автоматичного управління ....	111
7.2 Динамічна точність систем автоматичного управління.....	114
7.2.1 Прямі показники якості систем автоматичного управління.....	115
Лекція 12.....	121
7.2.2 Непрямі показники якості систем автоматичного управління .....	121
7.2.2.1 Частотні показники якості перехідного процесу .....	121
7.2.2.2 Кореневі показники якості перехідного процесу.....	125
7.3 Інтегральні оцінки якості САУ .....	129
Лекція 13.....	134
8 Стійкість систем автоматичного управління.....	134

8.1 Загальне поняття стійкості .....	134
8.2 Стійкість руху системи за Ляпуновим .....	136
8.2.1 Поняття фазового простору.....	136
8.2.2 Поняття стійкості руху систем.....	137
8.3 Загальна математична умова стійкості лінійних систем .....	139
Лекція 14.....	144
8.4 Критерії стійкості лінійних систем .....	144
8.4.1 Алгебраїчні критерії стійкості .....	145
8.4.2 Частотні критерії стійкості.....	149
Лекція 15.....	156
8.4.3 Аналіз стійкості за логарифмічними характеристиками.....	162
8.5 Поняття і визначення запасу стійкості системи .....	164
8.6 Стійкість систем управління з запізненням.....	166
Список використаної літератури.....	169
Додаток А .....	172

## ВСТУП

Такі безумовно важливі фактори прогресу на сучасному етапі розвитку людства, як зростання продуктивності та ефективності праці, збільшення одиничної потужності і продуктивності машин, підвищення вимог до точності та якості, складність і небезпечність технологічних процесів, зростання відповідальності за безпеку як самої людини, так і її середовища проживання, обумовлюють необхідність подальшого підвищення ролі автоматизації, цільове призначення якої – часткове або повне виключення людини з безпосередньої участі у виробничому процесі.

Основними засобами автоматизації є системи автоматичного управління, а теоретичною базою – теорія управління та її базова частина – теорія автоматичного управління, наука, що розробляє і вивчає методи та засоби створення систем управління.

Цей конспект лекцій являє собою виклад першої частини курсу лекцій «Теорія автоматичного управління», присвяченого ознайомленню з основними поняттями лінійної теорії автоматичного управління та методами аналізу стійкості та якості систем автоматичного управління, та призначений в першу чергу для студентів напрямку підготовки «Системна інженерія». Одержані, при вивченні викладеного тут матеріалу, знання є базовими і вкрай необхідними в подальшому для вирішення основного завдання теорії управління – проектування і експлуатації ефективних та якісних систем управління.



# Лекція 1

## Теорія автоматичного управління, поняття та термінологія

Дисципліна *теорія автоматичного керування* (ТАУ) в наш час може бути представлена як *наука про загальні принципи управління в різних галузях техніки*.

Її місце і обсяг ще остаточно не сформувалися. За різними джерелами до ТАУ відносять теорію лінійних, нелінійних і цифрових систем, теорію оптимального та адаптивного управління і т. п. З іншого боку, *ТАУ часто розглядається як складова частина кібернетики* як науки про найбільш загальні принципи управління і зв'язку в природі (живій і неживій).

У наші дні прийнято розрізняти класичну і сучасну ТАУ, відмінність між якими полягає, насамперед, у покладених в їх основу формах математичних описів систем і заснованих на них методах досліджень.

### Поняття управління в техніці

Усі *цілеспрямовані процеси* (операції), *що виконуються людиною* для досягнення яких-небудь корисних результатів, *поділяються на:*

- робочі операції;
- операції управління.

Операції управління необхідні для досягнення безпечного, правильного і високоякісного виконання робочих операцій (забезпечення в потрібні моменти часу початку і завершення робочих операцій, підтримання заданого або найкращого в деякому сенсі режиму і т. д.).

Відповідно до такої класифікації операцій можна сформулювати два важливих поняття:

- ✓ **механізація** – це заміна ручної праці при виконанні робочих операцій машинною. Наприклад, використання побутової м'ясорубки - це механізація, так як при цьому ручна

(точніше «зубна») праця з подрібнення м'яса перекладається на плечі механізму (м'ясорубки), проте функції управління процесом залишаються за людиною. Лише людина вирішує, коли почати крутити ручку, коли закінчити, з якою швидкістю, а також здійснює контроль безпеки процесу.

✓ **автоматизація** – це часткова або повна передача (заміна) функцій управління від людини до якого-небудь пристрою (спеціалізованого пристрою або обчислювальної машини).

Звідси можна отримати два важливі наслідки. По-перше, автоматизація можлива лише в умовах, коли ручні операції механізовані, і, по-друге, в умовах відсутності автоматизації операції управління – це функції людини, її розуму.

*Сукупність машин, знарядь праці, засобів механізації, за допомогою яких забезпечуються робочі операції, з точки зору теорії управління – це **об'єкт управління** (ОУ).*

*Сукупність пристроїв, що забезпечують операції управління – це **засоби управління**.*

*Сукупність засобів управління та об'єкта управління утворює **систему управління** (СУ).*

Системи управління, в яких усі робочі операції та операції управління виконуються без участі людини, називаються *системами автоматичного управління* (САУ). Як приклад можна навести систему автопілоту, численні верстати-автомати та ін. Необхідно зазначити, що практично всі процеси життєдіяльності біологічних істот це, по суті, автоматичні системи: підтримання температури тіла, тиску, складу крові і т. д.

Якщо частина операцій управління все ж передається людині (точніше сказати, залишається за людиною) – це *автоматизована система*. Таких систем у техніці величезна кількість – вони відрізняються тільки ступенем участі людини в процесах управління – від майже повного до так званого режиму «порадника».

Все розмаїття операцій управління можна поділити на три *основні різновиди*:

- *операції перемикання*, які вивчаються теорією перемикальних пристроїв або теорією розкладів;
- *операції контролю стану*, що вивчаються теорією автоматичного контролю;
- *операції з підтримання* або зміни за заданим законом параметрів робочих операцій, які вивчаються теорією автоматичного управління.

Так що ж таке теорія автоматичного управління? Поняття ТАУ акумулює терміни, що входять до її назви:

- теорія – сукупність знань, які дозволяють при певних умовах одержувати достовірний результат;
- управління – вплив, який чиниться на об'єкт для досягнення певної мети;
- автоматичне, тобто без втручання людини, за допомогою технічних засобів.

Таким чином, ***теорія автоматичного управління*** – це сукупність знань, що дозволяють створювати і вводити в дію автоматичні системи управління процесами та об'єктами з заданими характеристиками.

*Об'єкт вивчення* ТАУ – системи автоматичного управління.

*Предмет вивчення* ТАУ – процеси, що відбуваються в САУ.

*Мета вивчення* ТАУ – придбання знань, необхідних для використання в практичній діяльності в ході проектування, виробництва, монтажу, налагодження і експлуатації САУ.

## **Короткі історичні відомості про розвиток автоматизації та основні етапи становлення ТАУ як науки**

Історичні відомості про розвиток автоматизації і основні етапи становлення ТАУ як науки наводяться в додатку А.

## **Техніко-економічне значення автоматизації**

Автоматизація є одним із головних напрямків науково-технічного прогресу і важливим засобом підвищення

ефективності виробництва. Сучасне промислове виробництво характеризується: постійним зростанням масштабів і ускладненням технологічних процесів, збільшенням одиничної потужності окремих установок, застосуванням інтенсивних, високошвидкісних режимів, часто близьких до критичних, підвищенням вимог до якості продукції, безпеки персоналу, збереження обладнання і навколишнього середовища. Економічне, надійне і безпечне функціонування складних технічних об'єктів у таких умовах може бути забезпечене лише за допомогою самих досконалих технічних засобів управління, розроблення, виготовлення, монтаж, налагодження і експлуатація яких немислимі без глибокого знання ТАУ.

## 1 Основні елементи та поняття САУ

Потреба в управлінні виникає в тому випадку, коли нормальний хід процесу (робочих операцій) порушується через вплив на об'єкт управління різного роду зовнішніх або внутрішніх збурень. При цьому необхідно зазначити, що подібного роду збурення в технічних об'єктах більшою чи меншою мірою присутні завжди.

Для здійснення управління і побудови ефективних керуючих систем необхідні *знання двох видів*:

- ✓ *конкретні знання про об'єкт управління* (наприклад, про машину або технологічний процес), тобто про те, яким законам підпорядковуються процеси, що відбуваються в ньому, або його поведінку;
- ✓ *знання принципів і методів управління*, які дають можливість встановити, що і (або) як потрібно міняти в системі, щоб у кінцевому підсумку одержати бажаний результат, тобто зберегти нормальний хід процесу.

У теорії автоматичного управління прийнято вважати, що знання першого роду вже одержані, тобто математичний опис об'єкта управління відомий.

**Зауваження.** Подібне припущення носить досить умовний характер. Справа в тому, що величезна кількість і різноманіття

об'єктів, що підлягають управлінню, вимагає з одного боку великих витрат часу на розроблення таких описів, а з іншого боку – як спеціальних знань у різних галузях техніки, так і серйозного володіння складним сучасним математичним апаратом. Здавалося б, що така робота була б більш прийнятною для вузько профільних фахівців у відповідній предметній галузі. Проте з ряду причин об'єктивного і суб'єктивного характеру (особливо це характерно для хімічної і подібних галузей) часто виходить так, що на момент постановки задачі створення системи управління математичного опису об'єкта управління або взагалі немає, або воно створене для цілей, відмінних від цілей управління і з цієї причини виявляється неприйнятним. В цих умовах питаннями розроблення математичного опису доводиться займатися (незалежно від галузі) фахівцям із розроблення систем управління. З цієї причини нам все ж доведеться ознайомитися з основними методами та особливостями створення математичних описів об'єктів управління і елементів систем. Однак це буде трішки пізніше. Поки ж будемо вважати (як і прийнято), що математичний опис об'єкта нам відомий!

## **1.1 Вхідні та вихідні змінні об'єкта управління, змінні стану**

Будь-який *технічний* (і не тільки) *процес як об'єкт управління характеризується, а також зазнає впливу ззовні деякої сукупності фізичних величин, які називаються координатами, змінними або (рідше в технології) параметрами процесу.* Маємо кілька прикладів. Рух автомобіля як об'єкта управління характеризується: швидкістю, прискоренням, напрямком; на нього впливають: змінна сила зовнішнього опору і керуючі дії водія. Людина як об'єкт управління характеризується: температурою тіла, тиском і хімічним складом крові; на нього впливають: атмосферний тиск, температура середовища і навіть атмосфера в компанії друзів.

У загальному випадку об'єкт управління зручно умовно подати у вигляді прямокутника, а перелічені вище впливи у вигляді стрілочок (див. рис. 1.1).

Дії, що впливають на об'єкт ззовні, носять назву *вхідних*

координат (змінних) і бувають двох видів:

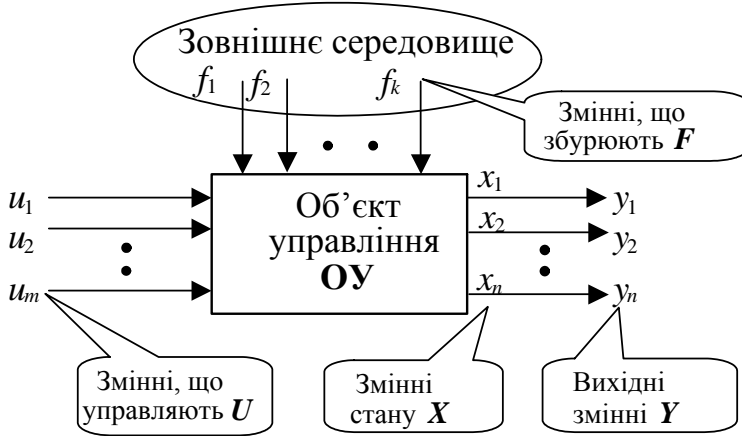


Рисунок 1.1 – Схематичне зображення об'єкта управління

- такі, що управляють  $U\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , які характеризуються тим, що їх значення може бути не тільки вимірне, але і, за необхідності, змінено;
- такі, що збурюють  $F\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ , які якимось чином впливають на об'єкт управління, проте їх можна, в кращому випадку, тільки виміряти.

Вихідні змінні  $Y\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  часто називають керованими, підкреслюючи той факт, що їх значення залежать як від характеристик і стану об'єкта, так і від впливів управління.

Поточний стан об'єкта характеризується незалежними змінними стану  $X\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , такими, що значення вихідної змінної  $Y\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  в довільний момент часу однозначно визначаються їх значеннями в деякий початковий момент. Умовно змінні стану можна зобразити так, як показано на рис. 1.2.

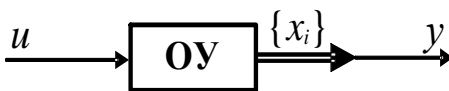


Рисунок 1.2 – До розуміння змінних стану

При цьому в багатьох випадках практики вихідні змінні це суть відображення змінних стану (більш докладно про змінні

стану розповімо в наступних лекціях).

Величини  $Y$ ,  $U$  і  $F$  (у загальному випадку вектори) залежно від природи (властивостей) об'єкта управління пов'язані між собою різними математичними залежностями, які в сукупності становлять його математичний опис або модель. У загальному випадку

$$Y(t) = A(a(t), U(t), F(t), t), \quad (1.1)$$

де  $a(t)$  – вектор коефіцієнтів (параметрів) об'єкта управління, що визначає його властивості;  $t$  – час;  $A$  – вектор-оператор впливу, що визначає загальний вид сукупності залежностей вектора  $Y$  від  $U$ ,  $F$  і  $a$ . Фізична сутність вектора  $A$  – це те, яким чином об'єкт впливає на вхідні змінні (перетворює їх в вихідні), а з точки зору математики – це правило відображення вхідних координат у вихідні. Вид оператора впливу  $A$  визначає вид математичної моделі (опису) об'єкта управління.

## 1.2 Основні складові засобів управління

До складу засобів управління, як правило, входять:

- *вимірювальний* (чутливий) *елемент* або *давач* для фіксації змін вихідної (рідше вхідної, що збурює) змінної і перетворення її в сигнал стандартного типу. Асортимент датчиків, їх характеристики та принцип дії є предметом вивчення інших дисциплін;
  - *керуючий пристрій* (регулятор, пристрій, що коригує), який отримує сигнал від вимірювального елемента і формує за якимось певним законом вихідний сигнал, необхідний для управління об'єктом. Часто керуючий пристрій одночасно виконує роль підсилювача потужності;
  - *виконавчий елемент* (пристрій), що дозволяє здійснювати вплив на об'єкт за допомогою зміни керуючої змінної. До таких пристроїв належать різного роду засувки, вентиля тощо, оснащені відповідними механізмами привода.
- Наведений склад засобів управління є характерним

практично для будь-яких систем управління. Для прикладу розглянемо як об'єкт управління економіку держави. Тут за вимірювальний елемент виступають органи державної статистики. Верховна Рада країни формує закони, тобто, по суті, є пристроєм управління. І, нарешті, реалізацію прийнятих законів забезпечують виконавчі елементи – органи примусу на місцях: податкова інспекція, міліція, суд і прокуратура.

### **1.3 Поняття функціональної та структурної схем**

Вивчення та аналіз складних систем автоматичного управління істотно полегшується, якщо її попередньо подумки розділити на більш прості (типові) елементи, виявити фізичні взаємозв'язки між ними і відобразити ці взаємозв'язки схематично в якій-небудь умовній формі.

У теорії автоматичного управління найчастіше для цих цілей використовують функціональні та алгоритмічні структури (функціональні і структурні схеми). *Функціональні і структурні схеми складаються з умовних зображень елементів (як правило у вигляді прямокутників) і зв'язків між ними, зображуваних у вигляді ліній зі стрілками, що показують напрямки передачі впливів.* Кожна лінія відповідає одному сигналу або одному впливу. Біля кожної лінії зазначають фізичну величину, що характеризує цю дію.

Як правило, спочатку складають функціональну схему системи автоматичного управління, а потім – структурну.

**Функціональна схема** – це структура (схема), що відображає функції (цільові призначення) окремих частин системи автоматичного управління. Як частини функціональної схеми системи розглядаються функціональні пристрої. Назви пристроїв вказують на виконання певних функцій. Наприклад: давач, підсилювач, блок порівняння і т. д.

**Структурна схема** – це структура (схема), що являє собою сукупність взаємозв'язаних алгоритмічних ланок (частин алгоритмічної структури системи автоматичного управління, відповідно певному математичному або логічному алгоритму



перетворення сигналу) і характеризує алгоритми перетворення інформації в системі. На схемах алгоритмічні ланки зображують прямокутниками, усередині яких записують відповідні оператори перетворення сигналів (математичні вирази). Іноді замість операторів у формульному вигляді наводять графіки залежності вихідної величини від вхідної. Приклади функціональної та структурної схем наведено на рис. 1.3 та рис. 1.4 відповідно.

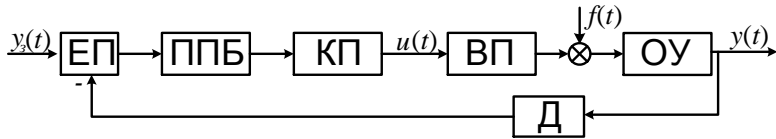


Рисунок 1.3 – Приклад функціональної схеми САУ:  
 ЕП – елемент порівняння; ППБ – підсилювально-перетворюючий блок;  
 КУ – пристрій, що корегує; ВП – виконавчий пристрій; ОУ – об’єкт управління; Д – датчик

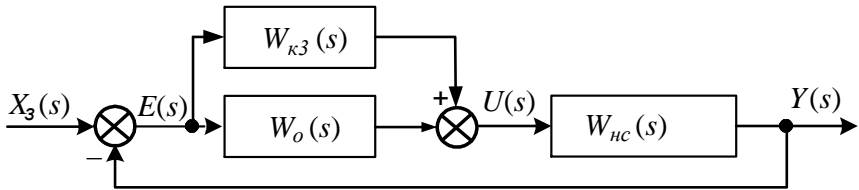


Рисунок 1.4 – Приклад структурної схеми САУ

**Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю**

1. Дисципліна ТАУ – це наука про ... .
2. Складовою частиною якої науки часто розглядають ТАУ?
3. Які два різновиди операцій, що виконуються людиною в своїй корисній діяльності, ви знаєте?
4. Для чого потрібні операції управління?
5. Як називається заміна ручної праці машинною?
6. Як називається часткова або повна передача функцій управління від людини до будь-якого пристрою?
7. Що собою являє сукупність машин, засобів механізації, що забезпечують виконання робочих операцій, з точки зору ТАУ?
8. Сукупність яких двох складових створює систему управління?

9. Чим відрізняються автоматичні системи управління від автоматизованих?
10. Про що це? ... – сукупність знань, що дозволяють створювати та вводити в дію автоматичні системи управління за заданими характеристиками.
11. Розробники яких пристроїв вперше в історії людства зіткнулись із необхідністю автоматизації?
12. Який регулятор можна по праву вважати першим промисловим регулятором?
13. Назвіть декілька причин, які викликають необхідність та підвищену значущість автоматизації?
14. В якому разі виникає необхідність в операціях управління?
15. Які знання необхідні для побудови дійової системи управління?
16. Які знання в ТАУ вважаються апіорі відомими: знання про об'єкт управління чи знання принципів та методів управління?
17. Як називають сукупність фізичних величин, що характеризують стан об'єкта управління або впливають на нього зовні?
18. Як називаються змінні, що характеризують поточний стан ОУ?
19. Змінні стану та вихідні змінні – це одне і те саме, чи ні?
20. Що таке вхідні змінні (координати) об'єкта управління?
21. Чим відрізняються вхідні керуючі змінні від змінних збурення?
22. Запишіть вираз (формулу) для математичного опису об'єкта в найбільш загальному вигляді.
23. Що визначає вектор-оператор впливу?
24. Що визначає вектор коефіцієнтів (параметрів) об'єкта?
25. В чому фізична та математична суть вектора-оператора впливу?
26. Які складові входять до складу засобів управління?
27. Який елемент використовується для фіксації змін вихідних змінних та перетворення їх до стандартного вигляду?
28. Який елемент використовується для формування закону управління об'єктом та для реалізації впливу на ОУ?
29. Для чого використовують функціональні та структурні схеми?
30. Чим відрізняється функціональна схема від структурної?
31. З чого складаються функціональні та структурні схеми?
32. Що відображають назви пристроїв функціональних схем?
33. Що записують в прямокутниках елементів структурних схем?
34. Що означають стрілочки на лініях, які зв'язують між собою елементи структурних схем?

## Лекція 2

### 2 Фундаментальні принципи управління в техніці

Знаючи властивості об'єкта управління (математичний опис, математичну модель) і характеристики зовнішніх впливів (збурень), можна спробувати розробити такий алгоритм (закон) управління, який забезпечив би необхідну якість функціонування системи. Проте математична модель об'єкта завжди наближено відображає його справжні властивості, а характеристики впливів, що збурюють, заздалегідь, як правило, взагалі невідомі. З цієї причини подібний підхід до створення систем управління є непродуктивним.

*Принципи управління*, які використовуються в даний час в техніці, є одним із ознак класифікації САУ і *визначаються обсягом інформації, що використовуються керуючим пристроєм для формування керуючих впливів*. Розрізняють принципи розімкнутого управління (пряме управління і управління за збуренням), принцип зворотного зв'язку (управління за відхиленням) і принцип комбінованого управління.

***Розімкнена*** САУ – система, в якій не здійснюється контроль керованої змінної, тобто вхідними впливами її керуючого пристрою є тільки зовнішні (такі, що задаються, та/або такі, що збурюють) впливи.

***Замкнута*** САУ (зі зворотним зв'язком) – система, в якій вхідними впливами для її керуючого пристрою є як зовнішні (такі, що задаються), так і внутрішні (вихідні змінні або змінні стану) впливи. Керуючий вплив у замкненій системі формується в більшості випадків у вигляді деякої залежності від величини, знака і похідних відхилення фактичного значення керованої вихідної змінної від її заданого значення.

## 2.1 Принцип прямого розімкнутого управління

Функціональна схема прямого розімкнутого управління має вигляд, поданий на рис. 2.1, а алгоритм роботи зображується у вигляді залежності

$$u(t) = U[y_3(t)]. \quad (2.1)$$

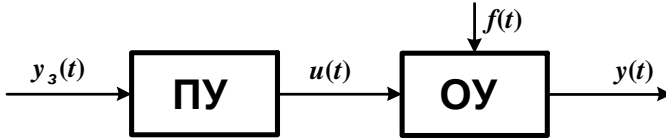


Рисунок 2.1 – Функціональна схема системи прямого розімкнутого управління

Оператор  $U$  встановлює функціональний зв'язок між впливом, що є заданим  $y_3(t)$ , і керуючим впливом  $u(t)$ , а сама система в цьому випадку здійснює програмне управління (за заданим законом).

Близькість значень  $y_3(t)$  і  $y(t)$  забезпечується лише конструкцією і підбором закону дії пристрою управління ПУ.

*Системи такого типу працюють з достатньою ефективністю лише за умови, що вплив збурень  $f(t)$  на об'єкт незначний і всі елементи розімкнутого ланцюга мають досить стабільні характеристики.*

Приклади подібних систем: музична скринька (шарманка), розподільний кулачковий механізм двигуна та ін.

## 2.2 Принцип компенсації (керування за збуренням)

У системах керування за збуренням (рис. 2.2) керуючий

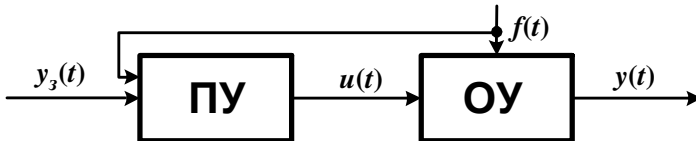


Рисунок 2.2 – Функціональна схема системи управління за збуренням

вплив залежить як від впливу, що збуджує  $f(t)$ , так і впливу, що задається  $y_3(t)$ , а алгоритм роботи подається у вигляді

$$u(t) = U[y_3(t), f(t)]. \quad (2.2)$$

У більшості випадків розімкнуті системи управління за збудженням виконують функції стабілізації керованої величини.

*Перевага розімкнутих систем управління за збудженням – їх швидкодія:* вони компенсують (звідси і назва компенсаційні) вплив збудження ще до того, як воно проявиться на виході об'єкта. Але застосовуються ці системи лише в тому випадку, якщо на керовану величину діють одне або два збудження і є можливість вимірювання цих збудрень.

Наприклад, порівняно легко можна вимірювати температуру, витрату води, струм навантаження генератора. Тому, якщо ці величини діють на об'єкт як збудження, то, як правило, прагнуть компенсувати їх вплив за допомогою додаткової системи або ввести в основну систему управління об'єктом сигнал, пов'язаний із таким впливом.

*Класичний приклад управління за збудженням – схема компаундування генератора постійного струму (рис. 2.3), що*

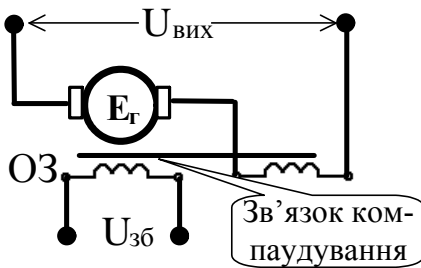


Рисунок 2.3 – Електрична схема системи управління генератором постійного струму значення струму.

забезпечує незмінність вихідної напруги при коливаннях струму навантаження. Тут обмотку компаундування якірного ланцюга генератора включено таким чином, що зменшення, наприклад, струму навантаження призводить до збільшення сумарної напруги збудження, а це в свою чергу – до відновлення колишнього

*Загальним недоліком розглянутих вище принципів розімкнутого управління є незалежність керуючої змінної від*

стану об'єкта управління, тобто від величини вихідної координати. Характер регулюючих впливів залежить від властивостей об'єкта лише тією мірою, якою вони враховані при створенні керуючого пристрою. Тому при зміні властивостей об'єкта управління або при появі інших неврахованих впливів, що збурюють, фактичне значення вихідної змінної може значно відрізнятись від необхідного.

Розімкнуті системи працюють за «балістичним» принципом. Так, стрілець, прицілюючись у мішень, може зробити поправку на фактори збурень: вітер, швидкість цілі та ін., але після пострілу вплинути на результат вже не в змозі.

Як правило, в більшості випадків практики немає вичерпної і достовірної інформації ні про властивості об'єкта управління, ні про характеристики впливів, що збурюють, і тому розімкнуті системи управління виявляються малоефективними. Значно частіше застосовують більш складні конструктивно, але і більш ефективні замкнуті системи.

### 2.3 Принцип зворотного зв'язку (управління за відхиленням)

У замкнутих системах (рис. 2.4) використовується принцип

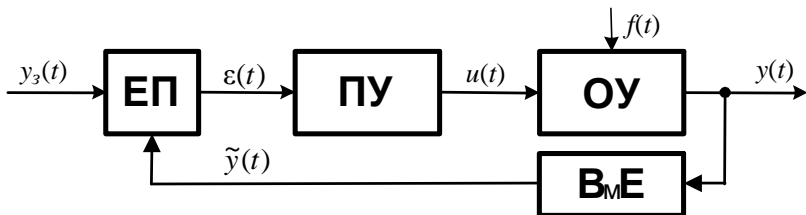


Рисунок 2.4 – Функціональна схема замкнутої системи з управлінням за відхиленням

зворотного зв'язку, найбільш потужний принцип автоматичного управління. На відміну від розімкнутих систем, у замкнутих системах обов'язково є вимірювальний елемент **ВМЕ** і елемент порівняння **ЕП**. **ВМЕ** забезпечує вплив вихідної (регульованої) змінної на *характер керуючого впливу*, який *формується*

залежно від величини і знака відхилення фактичного значення  $y(t)$  керованої величини від заданого  $y_3(t)$

$$u(t) = U[\varepsilon(t)], \quad (2.3)$$

де  $\varepsilon(t) = y_3(t) - y(t)$  – сигнал похибки системи (сигнал неузгодженості). Тому замкнуту систему часто називають системою управління за відхиленням.

Сигнал  $\tilde{y}(t)$ , як правило, пропорційний вихідній змінній  $y(t)$ , порівнюється на елементі порівняння **ЕП** із заданим значенням (або з якимось іншим, що подається ззовні)  $y_3(t)$  і лише у разі виникнення неузгодженості  $\varepsilon(t)$  за законом пристрою управління **ПУ** формується сигнал керування  $u(t)$ , який повинен бути таким, щоб забезпечити усунення цієї неузгодженості.

Якщо вплив вихідної величини на вхід системи відбувається зі знаком «–», тобто таким чином, щоб зменшити неузгодження, це **негативний зворотний зв'язок**. В іншому випадку – **позитивний зворотний зв'язок**. Останній не характерний для систем управління. Позитивний зворотний зв'язок, головним чином, знаходить застосування в пристроях для генерації коливань.

Велика перевага замкнутих систем полягає в тому, що в них контролюється безпосередньо керована (вихідна) величина і тим самим через неї при формуванні керуючого впливу побічно враховується дія всіх збурень.

Однак за все необхідно платити. Замкнуті системи також мають недоліки:

- через наявність ланцюга зворотного зв'язку в цих системах можуть виникати коливання, які в деяких випадках можуть призвести до неприцездатності системи;
- сам принцип дії замкнутих систем допускає небажані зміни керованої величини: спочатку результат дії збурення повинен проявитися на виході, система «відчує» відхилення і лише потім виробить керуючий вплив, спрямований на усунення

цього відхилення. Така «повільність» (запізнювання сигналу у прямому ланцюгу) знижує ефективність управління.

Однак, незважаючи на наявність певних недоліків, цей принцип управління широко застосовується при створенні САУ, так як дозволяє надійно вирішувати завдання управління при нестачі інформації.

Прикладів замкнутих систем дуже багато. Так, наприклад, забезпечення життєдіяльності живих організмів – класичні приклади використання зворотного зв'язку в природі. Перші регулятори Ползунова і Уатта – також пристрої зі зворотним зв'язком.

## 2.4 Комбінований принцип управління

Комбінована САУ – система (рис. 2.5), в якій вхідними

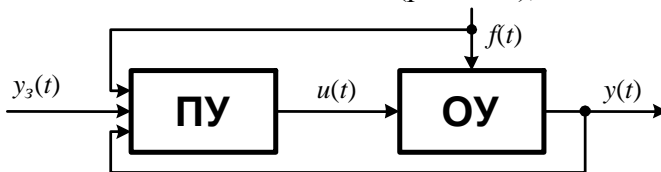


Рисунок 2.5 – Функціональна схема комбінованої системи управління

впливами її пристрою управління ПУ є як зовнішні (завдання і збурення), так і внутрішні (зворотний зв'язок) впливи.

У комбінованих системах є два ланцюги (канали) впливу – за завданням (управлінням) і за збуренням, а керуючий вплив формується згідно закону

$$u(t) = U_1[\varepsilon(t)] + U_2[f(t)], \quad (2.4)$$

де  $U_1$  і  $U_2$  – закони створення керуючого впливу за каналом управління і за каналом збурення відповідно.

Ефективність роботи комбінованої САУ завжди вища, ніж в окремо функціонуючої замкнутої або розімкнутої системи.

## 2.5 Класифікація систем автоматичного управління

Існує велика кількість систем автоматичного управління.



Щоб якось розібратися в цьому різноманітті, проводиться класифікація САУ, в якій використовують безліч ознак. Класифікація САУ залежно від виду структури (або принципу управління) була розглянута вище. На рис. 2.6 наведена ще одна з можливих класифікацій САУ.



Рисунок 2.6 – Приклад класифікації САУ

Основні існуючі ознаки класифікації САУ:

1. За виглядом диференціальних рівнянь (математичної моделі), що описують елементи систем управління розрізняють:
  - *лінійні* САУ – це такі, всі елементи яких описуються лінійними диференціальними та/або алгебраїчними рівняннями, і для яких справедливий принцип суперпозиції;
  - *нелінійні* САУ – це такі, у яких хоча б один елемент описується нелінійними диференціальними та/або алгебраїчними рівняннями.

2. За кількістю вихідних координат об'єкта управління розрізняють:

- *одновимірні САУ* (скалярні), які мають одну вихідну координату;
- *багатовимірні САУ* (векторні), які, в свою чергу, можуть поділятися на *системи зв'язаного і незв'язаного управління*. У системах зв'язаного управління окремі пристрої управління з'єднані між собою зовнішніми зв'язками. Окрема САУ, що входить до складу багатовимірної системи, називається *автономною*, якщо керована нею вихідна змінна не залежить від значення інших керованих величин.

3. За призначенням або за характером зміни завдання розрізняють:

- *системи автоматичної стабілізації*, алгоритм управління яких містить припис підтримувати значення керованої величини на заданому рівні з деякою точністю. Це найпоширеніші САУ у промисловій автоматичності;
- *системи програмного управління*, алгоритм управління яких містить припис змінювати керовану величину відповідно з наперед заданою функцією часу. Прикладом програмної САУ є система керування активною потужністю синхронного генератора на електричній станції протягом доби за заданим графіком;
- *системи, що слідкують*, алгоритм управління яких містить припис змінювати керовану величину відповідно із заздалегідь невідомою функцією часу.

У стабілізуючих, програмних і таких, що стежать, САУ мета управління полягає в забезпеченні рівності або близькості керованої величини  $y(t)$  до її заданого значення  $y_s(t)$ . Такий *особливий випадок управління* називається *регулюванням*.

Пристрій управління, що здійснює регулювання, називається *регулятором*, а система – *системою регулювання*.

4. Залежно від виду сигналів, що діють у САУ, вони поділяються на:

- *безперервні системи*, в яких діють безперервні (аналогові) сигнали, визначені в кожен момент часу;
  - *дискретні системи*, в яких діє хоча б один дискретний, визначений лише в окремі моменти часу сигнал. До дискретних відносяться, наприклад, САУ, що мають у своєму складі цифрові обчислювальні пристрої: мікропроцесори, контролери. У свою чергу дискретні системи поділяються на *імпульсні, релейні, цифрові*;
  - *гармонійно модульовані системи*.
5. За характером використовуваної інформації про умови роботи системи розрізняють:
- САУ з *жорстким законом управління та структурою* (безпошукові), в яких керуючий вплив формується в результаті порівняння дійсного значення керованої величини з завданням. Такі системи застосовуються для управління порівняно нескладними об'єктами, характеристики яких досить добре вивчені і для яких заздалегідь відомо, як потрібно змінити керуючий вплив при певному відхиленні керованої величини від заданого значення;
  - САУ із структурою і законом управління, який змінюється, (пошукові), в яких керуючий вплив формується за допомогою пробних керуючих впливів і подальшого аналізу результатів цих впливів. Таку процедуру пошуку необхідного керуючого впливу доводиться застосовувати в тих випадках, коли характеристики об'єкта управління змінюються або відомі не повністю. З цієї причини пошукові системи називають ще системами з неповною інформацією. До таких систем відносяться:
    - ✓ системи управління з автоматичним настроюванням параметрів;
    - ✓ самонавчальні системи;
    - ✓ системи, що самоорганізуються.
6. За ступенем залежності керованої величини в усталеному режимі від величини і виду збурення САУ поділяють на:

- *статичні системи*, в яких присутня залежність керованої величини в усталеному режимі від величини збурення;
  - *астатичні системи*, в яких відсутня залежність керованої величини в усталеному режимі від величини збурення.
7. Залежно від джерела енергії, за допомогою якого створюється керуючий вплив, розрізняють САУ:
- *прямої дії*, в яких керуючий вплив створюється за рахунок енергії об'єкта управління. До них належать найпростіші системи стабілізації (рівня, витрати, тиску тощо), в яких вимірювальний елемент безпосередньо (наприклад, через важільну систему) діє на виконавчий орган (заслінку, клапан тощо);
  - *непрямої дії*, в якій керуючий вплив створюється за рахунок додаткового джерела енергії. Таких систем на практиці більшість.

Запропонований перелік не вичерпує всіх можливостей класифікації. Можна відзначити ще системи стаціонарні та нестаціонарні, з зосередженими та розподіленими параметрами, з детермінованим і стохастичним вхідним впливом і т. д.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Як називається система, в якій для формування керуючого впливу вихідна змінна не використовується?
2. Як називається система, в якій для формування керуючого впливу використовується інформація про величину вихідної змінної?
3. Якщо керуюча змінна залежить лише від завдання  $u(t) = U[y_s(t)]$ , то така система працює за принципом ... . Яким?
4. Чим забезпечується близькість вихідної змінної до заданого значення в системах прямого розімкнутого управління?
5. Яка умова ефективної роботи систем прямого розімкнутого управління?
6. Наведіть приклад системи прямого розімкнутого управління.

7. Якщо керуюча змінна залежить від завдання і сигналу збурення  $u(t) = U[y_s(t), f(t)]$ , то така система працює за принципом ... . Яким?
8. У чому перевага систем управління за збуренням?
9. Чи можна використовувати систему управління, що працює за компенсаційним принципом, якщо збурення, що впливає на об'єкт управління, не може бути вимірним?
10. У чому головний недолік систем управління за збуренням?
11. Чи залежить у системах управління за збуренням керуючий вплив від вихідної змінної?
12. Є система управління розімкнутого типу. Що станеться, якщо з часом параметри об'єкта управління зміняться?
13. Спробуйте стисло викласти «балістичний» принцип роботи розімкнутих систем управління.
14. У чому причина непоширення розімкнутих систем управління в техніці?
15. Якщо керуюча змінна залежить лише від величини і знака відхилення фактичного значення керованої величини від завдання  $u(t) = U[\varepsilon(t)]$ , то така система працює за принципом ... . Яким?
16. Що таке сигнал неузгодженості в замкнутій системі?
17. Якщо вплив вихідної змінної зменшує неузгодженість, то як називається такий зворотний зв'язок?
18. Якщо вплив вихідної змінної збільшує неузгодженість, то як називається такий зворотний зв'язок?
19. У чому полягає головна перевага систем управління за відхиленням?
20. Назвіть недоліки замкнутих систем управління.
21. Які системи переважно застосовувати при недостатці інформації про об'єкт управління або при наявності збурень?
22. Переваги яких типів систем управління поєднує в собі комбінована САУ?
23. Підкресліть назви систем – синоніми: розімкнена система, система зі зворотним зв'язком, система управління за збуренням, система управління за відхиленням, система прямого управління.

## Лекція 3

### 3 Поняття моделі та моделювання

Для аналізу (дослідження поведінки) існуючих систем управління і синтезу (створення) нових необхідна наявність їх математичного опису (математичної моделі). *Математичною моделлю динамічної системи* прийнято називати сукупність математичних співвідношень, що однозначно описують розвиток процесів у системі в часі (часто називають «у русі»). Якщо це співвідношення, що пов'язують лише вхідні і вихідні координати системи (об'єкта), то такі моделі мають назву *математичних моделей «вхід-вихід»*. У сучасній теорії управління поряд із моделями «вхід-вихід» широке застосування знайшли *математичні моделі у просторі змінних стану* – моделі у векторно-матричному поданні (детальніше будуть розглянуті пізніше).

*Ідея моделювання* ґрунтується на повній або частковій подібності двох об'єктів однакової або різної природи. Подібними називаються об'єкти, параметри (змінні) яких, що визначають їх стан в будь-який момент часу і в будь-якій точці, відрізняються в певне число разів. В *об'єктах з неповною подібністю* подібними можуть бути не всі, а лише деякі, найбільш значущі параметри (змінні).

Об'єкт, якому ми знаходимо або створюємо подібний (тобто модель), називається *об'єктом моделювання*. Процес вивчення властивостей об'єкта шляхом аналізу або дослідження аналогічних властивостей його моделі називається *моделюванням*.

#### 3.1 Фізичні та математичні моделі

Розрізняють два види подібності об'єкта і моделі: фізичну та математичну.

а) Процеси, що відбуваються у *фізично подібних об'єктах*, мають, як правило, однакову фізичну природу. Наприклад,

хімічна реакція в колбі й аналогічний процес у багатотонному реакторі; обтікання повітрям автомобіля і обтікання повітрям його моделі в аеродинамічній трубі і т. п.

Моделі, в основу яких покладені принципи фізичної подібності, називаються фізичними, а дослідження фізичних моделей – фізичним моделюванням.

*Перевага фізичного моделювання* – природність досліджуваних процесів. *Недоліки*: необхідність повного комплексу вимірювань і витрат на побудову моделі, інколи небезпека при проведенні експериментів, можливість помилок при перенесенні результатів, одержаних при дослідженні моделі, на реальний об'єкт через вплив засобів вимірювання або зміну геометричних розмірів.

б) *Математично подібні об'єкти об'єднує* (робить подібними) лише *однаковість опису процесів математичними співвідношеннями*, при цьому фізична природа їх може бути різною. Тому моделі, основані на математичній подоби, можуть бути самими різними, в тому числі й поданими у вигляді математичних виразів, які відображають фізичну сутність процесів в об'єкті моделювання. У ТАУ широке застосування знайшли два види моделей, заснованих на математичній подоби: *аналогові й математичні моделі*.

*Ідея аналогових моделей і моделювання* основана на математичній подібності процесів, що відбуваються в електричних ланцюгах, багатьом іншим фізичним процесам і явищам. Тобто, по суті, аналогова модель – це модель неповної подоби, вона подібна об'єкту лише своїм математичним описом. Аналогове моделювання зберігає всі риси дослідження фізичних моделей.

*Математична модель* не має фізичної реалізації. Це, можна сказати, віртуальна модель. Вона являє собою одне або декілька математичних співвідношень, що описують явища, які відбуваються в об'єкті моделювання. З цих причин *математичне моделювання* – це дослідження математичної

моделі шляхом багаторазового рішення системи рівнянь при різних вихідних даних.

*Переваги математичного моделювання:* низька вартість досліджень, безпека проведення експериментів, можливість прогнозування поведінки процесів у граничних станах. *Недоліки:* складність і дорожнеча розроблення моделі, необхідність глибоких знань фізичної і хімічної сутності процесів і гарної математичної підготовки розробника.

### **3.2 Аналітичні та експериментальні методи побудови математичних моделей**

Математичний опис системи управління відповідно з її структурою повинен складатися з математичного опису складових її частин: засобів управління (вимірювальних і виконавчих пристроїв, керуючих пристроїв (регуляторів)) і об'єкта управління. Як правило, математичний опис елементів засобів управління через їх стандартність відомий заздалегідь або є результатом проектування системи управління. З об'єктом управління все значно складніше. У багатьох випадках математичний опис об'єктів управління існує, але через велику різноманітність технічних процесів таких випадків не так і багато. Та навіть наявні математичні моделі процесів за різними причинами не завжди виявляються придатними для вирішення задач управління.

*Задачу створення математичної моделі практично не можна формалізувати,* тобто немає такого алгоритму або інструкції, дотримуючись якої будь-який бажаючий міг би розробити математичний опис будь-якого об'єкта. До деякої міри це мистецтво.

Розрізняють *два методи створення математичних моделей.*

*Аналітичний (теоретичний) метод побудови математичних моделей* базується на використанні фундаментальних законів природи (термодинаміки, хімічної кінетики, законів збереження енергії, маси та ін.). Для



визначення коефіцієнтів (параметрів) таких моделей часто потрібні трудомісткі дослідження. Наприклад, є добре відомим співвідношення, що визначає перенесення енергії у формі теплоти (закон Фур'є)  $-\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = E$ . Однак для конкретного реального процесу величину  $\lambda$  необхідно визначати окремо (з довідників або експериментально).

*Експериментальний* (статистичний) *метод побудови математичних моделей* заснований на обробці експериментальних даних, отриманих на об'єкті, в результаті якої одержують емпіричні або напівемпіричні залежності, що пов'язують між собою змінні і параметри процесу, але, як правило, не відображають його фізичної сутності. Перевага такого підходу в тому, що при мінімальних знаннях про сутність процесів вдається отримати задовільний для цілей практики математичний опис, проте подальше його використання можливе лише у вузькому, обмеженому рамкахі проведених досліджень, діапазоні зміни координат.

Наведений поділ не строгий, тобто при створенні математичної моделі складних процесів можуть застосовуватися і ті, і інші методи в однаковій мірі. При цьому завжди необхідно мати на увазі, що математичний опис (модель) це є відображення властивостей об'єкта з більшою або меншою точністю. Тому не потрібно ототожнювати модель і об'єкт.

Нижче буде наведений загальний огляд основних видів математичних описів.

### **3.3 Основні види математичних моделей**

#### **3.3.1 Математичні моделі статички і динаміки**

*Математична модель статички* об'єкта управління не враховує його динамічних властивостей (тобто наявності інерційності), навіть якщо вони йому притаманні, і описує залежності між вхідними і вихідними змінними в усталеному режимі. З формальної сторони математична модель статички не містить у своєму складі звичайних диференціальних рівнянь

(диференціальні рівняння в часткових похідних можуть бути наявними). Графічне представлення математичної моделі статичної – *статична характеристика*.

Якщо математичний опис враховує динамічні властивості об'єкта моделювання – це *математична модель динаміки*. У складі математичного опису такої моделі обов'язково наявні диференціальні рівняння першого і вище порядків (якщо, звісно, об'єкт має інерційні властивості).

Математичний опис статичної – це окремий випадок математичного опису динаміки об'єкта, коли всі похідні за часом у диференціальних рівняннях дорівнюють нулю.

### **3.3.2 Стаціонарні й нестационарні математичні моделі**

У більшості випадків практики властивості системи управління (засобів та об'єкта управління), що виражаються в коефіцієнтах рівнянь математичного опису  $a(t)$  (див. (1.1)), змінюються у часі. Наприклад, коефіцієнт теплопередачі в рівнянні математичного опису процесу теплообміну в трубчастому теплообміннику має властивість із часом зменшуватися через забруднення внутрішньої поверхні труб накипом. Такі процеси носять назву нестационарних. *Нестационарні математичні моделі* – це моделі, рівняння математичного опису яких містять коефіцієнти (параметри), залежні від часу. Моделювання таких процесів досить складне і вимагає використання особливих математичних методів.

Однак у багатьох випадках залежність коефіцієнтів від часу вкрай слабка (тобто вони змінюються, але досить повільно порівняно з часом процесів управління) і тому, з достатньою для практики точністю, нею нехтують. Такі об'єкти називають *квазістационарними*. *Стаціонарні математичні моделі* – це моделі, у рівняннях математичного опису яких містяться лише постійні коефіцієнти.

### **3.3.3 Лінійні й нелінійні математичні моделі. Лінеаризація**

*Математична модель називається лінійною, якщо*

математичний опис її складається виключно з лінійних рівнянь (звичайних диференціальних і алгебраїчних). Статична характеристика такого об'єкта представляє пряму лінію (див. рис. 3.1).

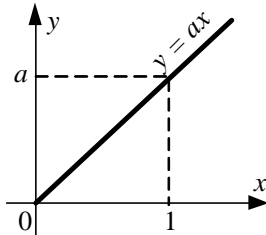


Рисунок 3.1 – Статична характеристика лінійного об'єкта

Властивість нелінійності притаманна більшості технічних процесів і об'єктів, що створює істотні труднощі при вирішенні задач моделювання. З іншого боку методика розв'язання саме лінійних рівнянь і систем (у тому числі і диференціальних) у даний час розроблена досить добре.

Враховуючи той факт, що часто в процесі управління змінні незначно відхиляються від деякої точки, що зветься робочою або заданою (звичайно за умови якісного управління), в інженерних розрахунках широко використовують *лінеаризацію* – наближену заміну нелінійних співвідношень моделі лінійними.

Лінеаризацію гладких (несуттєво нелінійних) статичних характеристик можна здійснювати за *методом дотичної* (рис. 3.2) або *малих відхилень*.

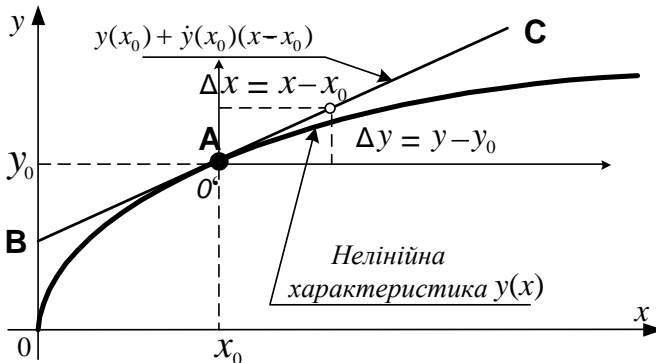


Рисунок 3.2 – Лінеаризація статичної характеристики методом дотичної

Лінеаризація за методом дотичної полягає в розкладанні функції  $y(x)$  в інтервалі навколо деякої робочої точки  $x_0$  в ряд Тейлора і в подальшому урахуванні лише перших лінійних членів отриманого нескінченного ряду

$$y(x) \approx y(x_0) + \dot{y}(x_0)(x - x_0), \quad (3.1)$$

де  $\dot{y}(x_0)$  – значення похідної функції  $y(x)$  в заданій точці **A** з координатами  $x_0$  і  $y_0$ .

Геометричний зміст такої лінеаризації полягає в заміні кривої  $y(x)$  дотичною **BC**, що проведена до кривої в точці **A** (рис. 3.2).

При аналізі систем управління зручно лінійні статичні характеристики розглядати в відхиленнях змінних  $x$  і  $y$  від значень  $x_0$  і  $y_0$ , тобто  $\Delta y = y - y_0$  і  $\Delta x = x - x_0$  (що відповідає перенесенню системи координат). Тоді вираз (3.1) має вигляд

$$\Delta y = k \Delta x, \quad (3.2)$$

де  $k = \dot{y}(x_0)$  – *передаточний коефіцієнт об'єкта* (*коефіцієнт підсилення*), що характеризує його передаточні (підсилювальні) властивості в статичному режимі.

*Надалі всі одержувані висновки будуть відноситися лише до лінійних стаціонарних об'єктів* (систем, елементів).

### **3.4 Лінійні диференціальні рівняння елементів і систем**

*Звичайне диференціальне рівняння* є найбільш загальною і повною формою математичного опису динамічних властивостей (руху) елементів САУ.

Для елемента, що має один вхідний сигнал  $u(t)$ , збурення  $f(t)$  і один вихідний сигнал  $y(t)$  (див. рис. 1.1) звичайне диференціальне рівняння в загальному випадку має вигляд

$$\Phi[y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t), f(t), t] = 0, \quad (3.3)$$

де  $\Phi$  – деяка функція;  $t$  – час (незалежна змінна);  $n, m$  – найвищий порядок похідних. Для реальних, фізичних систем

завжди виконується співвідношення  $m \leq n$ .

*Лінійне диференціальне рівняння* – це рівняння, в якому функція  $\Phi$  лінійна по відношенню до всіх її аргументів, тобто відносно  $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t), f(t), t$ .

У лінійному диференціальному рівнянні вихідну величину  $y(t)$  та її похідні записують зліва, а вхідні величини та їх похідні справа. Коефіцієнти при вхідній і вихідній величинах зручно мати такими, що дорівнюють одиниці. Нехай динаміка деякої лінійної системи описується рівнянням (для простоти розглянемо рівняння другого порядку)

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b \frac{du(t)}{dt} + u(t) + cf(t) \quad (3.4)$$

при деяких відомих початкових умовах.

*Початкові умови* – це по фізичній суті стан динамічної системи в початковий момент часу (як правило при  $t=0$ ). З математичної точки зору для системи, що описується диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку, це будуть значення самої вихідної змінної  $y(t)$  і її  $n-1$  похідних при  $t=0$ . Для забезпечення єдиного розв'язку диференціального рівняння (згідно теореми Коші про існування та єдиність рішення диференціального рівняння) завдання початкових умов є необхідною умовою. У ТАУ в більшості випадків вважають, що система починає рух із стану спокою, що відповідає нульовим початковим умовам. Однак це не є неперушим правилом.

Коефіцієнти  $a_0, a_1, b$  і  $c$  у рівнянні (3.4) називаються параметрами і відображають властивості об'єкта, що описується відповідним диференціальним рівнянням.

### **3.5 Поняття лінійного диференціального оператора**

У теорії автоматичного управління лінійні диференціальні рівняння часто записують у *символічній (операторній) формі*, використовуючи для заміни операції диференціювання символ

$p = \frac{d}{dt}$ . Для другої похідної відповідно  $p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$  і т. д. Тоді рівняння (3.4) в операторній формі набере вигляду

$$a_0 p^2 y(t) + a_1 p y(t) + y(t) = b p u(t) + u(t) + c f(t). \quad (3.5)$$

В останньому співвідношенні  $p y(t)$  і  $p u(t)$  – це добутки, що не мають властивості комутативності, тобто  $p y(t) \neq y(t) p$ . Однак така заміна дозволяє розглядати  $y(t)$  або  $u(t)$  як спільні множники і записати (3.5) у вигляді

$$y(t)(a_0 p^2 + a_1 p + 1) = u(t)(b p + 1) + f(t)c. \quad (3.6)$$

Якщо ввести позначення  $Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + 1$ ;  $R_1(p) = b p + 1$  і  $R_2(p) = c$ , то одержимо диференціальне рівняння в скороченій і універсальній операторній формі запису

$$Q(p)y(t) = R_1(p)u(t) + R_2(p)f(t). \quad (3.7)$$

Поліноми від символу  $p$  з постійними коефіцієнтами  $Q(p)$ ,  $R_1(p)$  і  $R_2(p)$  називаються *лінійними диференціальними операторами*. Якщо коефіцієнт при молодшому членові полінома дорівнює 1 (одиниці), – це *нормований оператор*.

При дослідженні роботи системи управління, як правило, розглядають спільно систему рівнянь усіх елементів. При цьому загальний вигляд лінійних диференціальних операторів і рівняння (3.7) залишаються незмінними, однак його складові записуються в матричній формі.

### 3.8 Принцип суперпозиції

*Принцип суперпозиції* (принцип накладання) полягає в тому, що кожна вхідна величина створює свою складову вихідної величини незалежно від характеру і наявності інших вхідних величин, а також початкових умов (див. рис. 3.3). Іншими словами, зміна вихідної величини  $y(t)$ , що виникає в результаті дії на елемент суми вхідних сигналів  $x_i(t)$ , дорівнює сумі змін вихідних величин  $y_i(t)$ , викликаних кожним сигналом

$x_i(t)$  окремо.

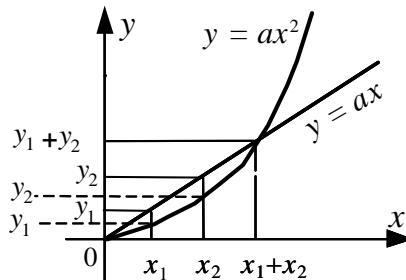


Рисунок 3.3 – До розуміння принципу суперпозиції

Принцип суперпозиції є справедливим (тобто виконується) виключно для лінійних систем.

### 3.9 Складові рішення лінійного диференціального рівняння

Рішення лінійного диференціального рівняння (3.4) при заданих початкових умовах дорівнює сумі трьох складових

$$y = y_u + y_f + y_e, \quad (3.8)$$

де  $y_u, y_f$  – часткові рішення неоднорідних рівнянь  $Q(p)y(t) = R_1(p)u(t)$  і  $Q(p)y(t) = R_2(p)f(t)$  при нульових початкових умовах, які описують вимушений рух системи від відповідних вхідних впливів;  $y_e$  – загальне рішення однорідного рівняння  $Q(p)y(t) = 0$  при заданих початкових умовах, яке описує вільний рух системи.

З останнього твердження видно, що характер вільного руху однозначно визначається лише виглядом полінома  $Q(p)$  і початковими умовами. Відповідно з цим диференціальний оператор  $Q(p)$ , що відображає властивості самої системи, називають *власним оператором* системи (елемента). Лінійні диференціальні оператори виду  $R_i(p)$  називають *операторами впливу*.

Загальне рішення однорідного лінійного диференціального

рівняння  $Q(p)y(t) = 0$  може бути подане у вигляді суми рішень, які залежать від виду коренів характеристичного рівняння системи, яке одержують формальною заміною символу диференціювання  $p$  у власному операторі будь-якою алгебраїчною комплексною змінною, наприклад  $\lambda$

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + 1. \quad (3.9)$$

При цьому кожному дійсному кореню  $\alpha_i$  характеристичного рівняння (3.9) відповідає складова загального рішення  $y_g$  виду  $A_i e^{\alpha_i t}$ ; кожному дійсному кореню  $\alpha_k$  кратності  $v$  – складова  $e^{\alpha_k t} (A_k + A_{k+1}t + \dots + A_{k+v-1} t^{v-1})$ ; кожній парі комплексно спряжених коренів  $\alpha_l \pm j\beta_l$  –  $e^{\alpha_l t} (A_l \sin \beta_l t + B_l \cos \beta_l t)$ . Постійні інтегрування  $A$  і  $B$  визначаються з системи алгебраїчних рівнянь, складених із використання початкових умов.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Що називають математичною моделлю системи або об'єкта?
2. На чому базується ідея моделювання?
3. Як співвідносяться між собою параметри подібних об'єктів?
4. Як ви розумієте термін «моделювання»?
5. Процеси, що відбуваються у фізично подібних об'єктах мають однакову ... .
6. В чому перевага фізичного моделювання?
7. Назвіть хоча б один недолік фізичного моделювання.
8. Що робить подібними математично подібні об'єкти?
9. У чому полягає ідея аналогових моделей і моделювання?
10. Яка з моделей: аналогова чи математична не має фізичної реалізації?
11. На використанні чого оснований аналітичний метод побудови математичних моделей?
12. На яких принципах базується експериментальний метод побудови математичних моделей?



13. Яка модель краще відображає фізичну сутність процесів в об'єкті: побудована аналітичним чи експериментальним методом?
14. Як називається математична модель, що описує залежність між вхідними і вихідними змінними в усталеному режимі?
15. Які властивості об'єкта враховує математична модель динаміки?
16. У складі математичного опису деякого об'єкта немає звичайних диференціальних рівнянь. Яка це модель?
17. Чим відрізняється стаціонарна математична модель від нестаціонарної?
18. На що схожа статична характеристика об'єкта, представлена лінійною математичною моделлю?
19. Що необхідно зробити для одержання з нелінійної моделі лінійну?
20. Які властивості системи описує диференціальне рівняння?
21. Що забезпечує наявність початкових умов при розв'язанні диференціального рівняння?
22. Що являють собою за фізичною сутністю початкові умови диференціального рівняння?
23. Для яких систем завжди виконується принцип суперпозиції?
24. З яких двох складових складається рішення лінійного диференціального рівняння при заданих початкових умовах?
25. Який вид руху системи описується операторним рівнянням  $Q(p)y(t) = R_1(p)u(t)$  ?
26. Який вид руху системи описується операторним рівнянням  $Q(p)y(t) = 0$  ?
27. Система описується рівнянням в операторній формі запису  $Q(p)y(t) = R(p)u(t)$ . Як називається оператор  $Q(p)$  ?
28. Система описується рівнянням в операторній формі запису  $Q(p)y(t) = R(p)u(t)$ . Як називається оператор  $R(p)$  ?
29. Який оператор: власний або оператор впливу є основою для отримання характеристичного рівняння?
30. Яким із коренів характеристичного рівняння відповідає рішення диференціального рівняння виду  $A_1 e^{\alpha_1 t}$  ?
31. Яким із коренів характеристичного рівняння відповідає рішення диференціального рівняння виду  $e^{\alpha t} (A_1 \sin \beta t + B_1 \cos \beta t)$  ?

## Лекція 4

### 3.10 Поняття передаточної функції

У попередній лекції (див. лекцію 3, п.п. 3.7 і 3.9) було показано, що диференціальне рівняння, яке описує поведінку лінійної стаціонарної динамічної системи, може бути записане в компактній операторній формі (див. формулу (3.7))  $Q(p)y(t) = R_1(p)u(t) + R_2(p)f(t)$ , де  $Q(p)$  – власний оператор системи, а  $R_i(p)$  – оператори впливу.

Оскільки ми розглядаємо лише лінійні стаціонарні системи, для яких виконується принцип суперпозиції, то з метою досліджень доцільно розглядати реакцію системи окремо на сигнал управління і окремо на сигнал збурення (справедливо вважаючи, що реакція на сумарний сигнал буде дорівнювати сумі окремих реакцій). Іншими словами можна спочатку досліджувати поведінку системи під впливом лише сигналу управління

$$Q(p)y(t) = R_1(p)u(t), \quad (3.10 \text{ а})$$

припускаючи, що збурення відсутнє, а потім – навпаки, вважаючи, що є лише зовнішнє збурення  $f(t)$ , тобто

$$Q(p)y(t) = R_2(p)f(t). \quad (3.10 \text{ б})$$

Якщо розділити праву і ліву частину рівнянь (3.10) і (3.11) на  $Q(p)$ , то одержимо відповідно:

$$y(t) = \frac{R_1(p)}{Q(p)}u(t); \quad (3.11 \text{ а})$$

$$y(t) = \frac{R_2(p)}{Q(p)}f(t). \quad (3.11 \text{ б})$$

У правих частинах цих виразів співвідношення перед змінними  $u(t)$  і  $f(t)$  визначають те, яким чином впливають характеристики системи  $Q(p)$  і вхідні впливи  $R_i(p)$  на процес перетворення цих змінних (у загальному випадку – сигналів) у системі, в результаті чого отримуємо вихідну змінну (сигнал)

$y(t)$ . Іншими словами, **як передається** відповідний сигнал на вихід системи. З цієї причини співвідношення (поліноми) виду  $R_i(p)/Q(p)$  одержали назву **передаточних функцій**.

Таким чином, **передаточною функцією** називають відношення оператора впливу до власного оператора. З урахуванням (3.11a) і (3.11б), будь-яку динамічну систему можна охарактеризувати двома передаточними функціями (для позначення передаточної функції традиційно використовується велика літера  $W$ ):

- за керуючим впливом  $u(t)$  (або за управлінням) із рівняння (3.11a)

$$W_u(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{bp + 1}{a_0 p^2 + a_1 p + 1}; \quad (3.12)$$

- за впливом, який збуджує,  $f(t)$  (або за збудженням) із рівняння (3.11б)

$$W_f(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)} = \frac{c}{a_0 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (3.13)$$

З урахуванням введених позначень (3.12) і (3.13) рівняння (3.7) (див. лекцію 3) після ділення правої і лівої частини на  $Q(p)$  запишеться у вигляді

$$y(t) = W_u(p)u(t) + W_f(p)f(t). \quad (3.14)$$

### 3.11 Зв'язок передаточної функції з перетвореннями Лапласа

Поряд з операторною (символічною) формою запису передаточної функції використовують запис передаточної функції у формі зображень Лапласа. Це є можливим у зв'язку з тим, що зображення Лапласа похідних першого і вищих порядків змінної-оригіналу при нульових початкових умовах (див. властивість диференціювання оригіналів [18]) із точністю до позначень збігається з її операторною формою запису. Порівняйте:

➤ у символічній формі запису  $\frac{dy(t)}{dt} = py(t)$ ;

➤ зображення Лапласа  $\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow sY(s) - y(0) = |y(0) = 0| = sY(s)$ .

Якщо застосувати перетворення Лапласа до вхідної і вихідної змінної у виразі (3.4) (див. лекцію 3) і прийняти, що початкові умови нульові, то, застосувавши властивість диференціювання оригіналу, одержимо (для спрощення вважаємо, що збурення відсутні):

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b \frac{du(t)}{dt} + u(t);$$

$$a_0 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + Y(s) = b s U(s) + U(s);$$

$$(a_0 s^2 + a_1 s + 1) Y(s) = (b s + 1) U(s);$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b s + 1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} = W(s) \Rightarrow W(p).$$

Звідси друге формулювання визначення передаточної функції: **передаточна функція** – це відношення зображення за Лапласом вихідної величини до зображення вхідної при нульових початкових умовах. Враховуючи, що у більшості випадків практики рух системи починається із стану спокою або це можна умовно прийняти, то передаточну функцію у формі зображень Лапласа можна одержати з операторної форми формальною заміною  $p = s$ . Однак потрібно завжди пам'ятати, що така схожість виключно зовнішня. Подібний підхід може бути застосований лише для лінійних стаціонарних елементів (об'єктів, систем) і лише при нульових початкових умовах!

### 3.12 Нулі та полюси передаточної функції

Як бачимо з (3.12) і (3.13), передаточна функція являє собою відношення двох поліномів вигляду (в символічній формі запису)

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3.15)$$

Значення змінної  $p$ , при якому передаточна функція  $W(p)$  обертається в нескінченність, називається **полюсом передаточної функції**. Очевидно, що полюсами передаточної функції є корені (рішення полінома) власного оператора  $Q(p)$ .

Значення змінної  $p$ , при якому передаточна функція  $W(p)$  обертається в нуль, називається **нулем передаточної функції**. Очевидно, що нулями передаточної функції є корені (рішення) вхідного оператора (чи оператора впливу)  $R(p)$ .

Якщо коефіцієнт  $a_n \neq 0$ , то передаточна функція не має нульового полюса ( $p=0$ ) і така система називається **статичною**. Значення передаточної функції статичної системи при  $p=0$  (або при  $t=\infty$ ), яке не дорівнює нулю  $k = W(0) = \frac{b_m}{a_n}$ ,

називається **передаточним коефіцієнтом** (або коефіцієнтом підсилення). На противагу статичним, **астатичні** системи характеризуються наявністю нульових полюсів ( $p=0$ ).

Передаточна функція, як і диференціальне рівняння, являє собою вичерпну характеристику системи (об'єкта). Однак, якщо при ненульових початкових умовах власний оператор і оператор впливу мають однакові корені (множники, які можна скоротити), то за скороченою формою запису передаточної функції відновити початковий вигляд диференціального рівняння не можливо.

### **3.13 Часові характеристики: перехідна та імпульсна перехідна характеристики**

Якщо є математичний опис динаміки системи (об'єкта, елемента) у формі диференціального рівняння, то його рішення (у вигляді графіка) може дати наочне уявлення про поведінку вихідної змінної у часі, що дуже важливо для аналізу систем управління. Загальне рішення диференціального рівняння (або системи рівнянь), як відомо, представляє суму двох складових: вільного та вимушеного рішення, і тому порівняння поведінки

двох систем у загальному випадку при довільному вхідному впливі може виявитися неінформативним. У ТАУ при аналізі та синтезі систем управління широко використовують рішення диференціальних рівнянь математичного опису при певних (стандартних, типових) вхідних впливах.

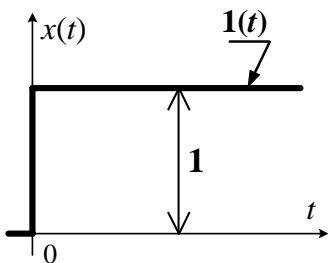
Ці впливи відрізняються тим, що описуються простими математичними функціями і достатньо просто фізично відтворюються при дослідженні САУ. Використання типових впливів дозволяє уніфікувати аналіз різних систем і полегшує їх порівняння між собою.

Аналітичне рішення диференціальних рівнянь, що описують динаміку системи при типових вхідних впливах, називають *часовими функціями*, а графічне зображення часових функцій – *часовими характеристиками*.

В інженерній практиці використовують два види часових функцій (характеристик): перехідна функція (характеристика) і імпульсна перехідна функція (характеристика).

*Перехідною функцією* системи називають функцію, що описує зміну вихідної величини системи (реакцію системи) при вхідному впливі у вигляді одиничного ступінчастого сигналу при нульових початкових умовах. Позначають перехідну функцію (характеристику)  $h(t)$ .

Математично одиничний ступінчастий вплив описується одиничною функцією з класу узагальнених функцій (функція Хевісайда) (рис. 3.4) у вигляді



$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Рисунок 3.4 – Одинична ступінчаста функція

У ТАУ одинична функція знаходить широке застосування, так як за своїми властивостями є вхідним впливом, який містить весь спектр частот (у цьому можна перекоонатися, якщо розглянути спектральну характеристику функції Хевісайда),

тобто створює для системи найважчі умови випробування. Якщо система показує задовільні результати після випробування таким сигналом, то можна очікувати, що при інших, менш напружених сигналах якість управління буде кращою.

Перехідні характеристики можна одержати кількома способами:

- з використанням методів операційного обчислення (перетворення Лапласа);
- графоаналітичним методом (останнім часом не застосовується);
- експериментально у виробничих умовах на реальному об'єкті, якщо зафіксувати зміну вихідної змінної при подачі на вхід ступінчастого впливу (наприклад, дуже швидке відкриття або закриття на деяку величину регулюючого вентиля). Однак, як правило, такий вплив не є одиничним, тому одержана таким чином характеристика носить назву «кривої розгону» або «розгінної характеристики». З «кривої розгону» одержують перехідну характеристику нормуванням (приведенням її до одиничного впливу).

Форми одержуваних перехідних характеристик можуть бути різними, але можна виділити три типових: аперіодична, що сходиться або розходиться, та коливальна (див. рис. 3.5).

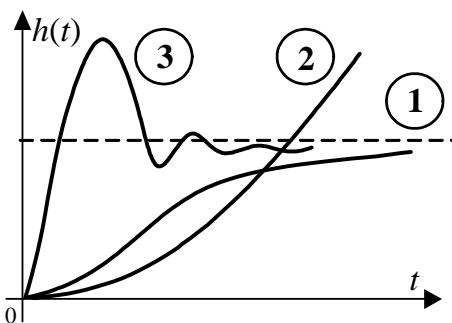


Рисунок 3.5 – Типи перехідних характеристик:

1,2 – аперіодична; 3 – коливальна

Якщо на систему впливають декілька сигналів одночасно, то, враховуючи принцип суперпозиції, можна визначити перехідні характеристики для кожного впливу окремо.

У тому разі, якщо вхідний ступінчастий вплив не одиничний, а збільшений в  $a$  раз, тобто  $a \cdot 1(t)$ , де  $a$  – константа, то перехідна

функція системи  $h_a(t) = a \cdot h(t)$ .

Використовуючи останнє твердження і відому перехідну характеристику, можна наближено визначити реакцію системи на довільний вхідний вплив  $g(t)$ , уявно замінивши його сумою зсунутих у часі і помножених на коефіцієнти типових ступінчастих впливів (див. рис. 3.6) з подальшим складанням реакцій на ці впливи  $y(t) \approx g_0 h(t) + g_1 h(t-t_1) + g_2 h(t-t_2) + \dots$ .

Загалом, реакція системи на відомий вхідний вплив  $g(t)$  знаходиться за допомогою інтеграла Дюамеля (коли кількість доданків прямує до нескінченності)

$$y(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} g(\tau) d\tau, \text{ де } \tau -$$

відносний зсув часу.

*Імпульсною перехідною функцією* або *ваговою функцією* системи називають функцію, що описує реакцію системи на одиничний імпульсний вхідний вплив при нульових початкових умовах.

*Одиничний імпульс* – це ідеалізований імпульсний сигнал (див. рис. 3.7) нескінченно великої величини і нескінченно малої

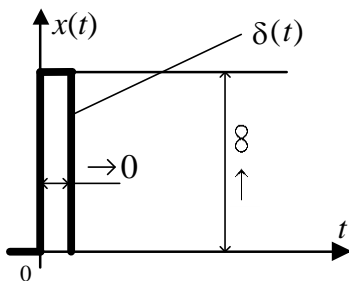


Рисунок 3.7 – Дельта-функція

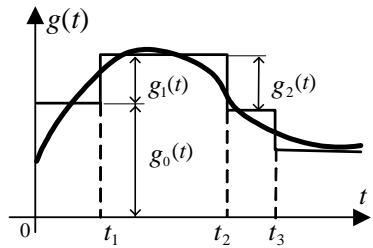


Рисунок 3.6 – Уява довільного вхідного сигнала

тривалості, причому його площа (добуток висоти на тривалість) дорівнює 1 (одиниці). Математичний опис такого сигналу

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Одиничний імпульс, описуваний одиничною функцією



$\delta(t)$  (3.17), яка ще називається *дельта-функцією*, відноситься, як і одиничний ступінчатий сигнал, до класу узагальнених функцій і являє собою похідну одиничного ступінчатого сигналу

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}, \quad (3.18)$$

що добре видно з рис. 3.4, якщо прослідкувати зміну величини тангенса кута нахилу дотичної вздовж графіка.

Зображення Лапласа від типових вхідних впливів  $1(t)$  та  $\delta(t)$  є табличними

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s}; \quad L\{\delta(t)\} = 1. \quad (3.19)$$

З виразу (3.18) вочевидь випливає, що вагова функція системи, що позначається як  $w(t)$  може бути одержана диференціюванням перехідної функції, тобто

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (3.20)$$

Співвідношення між перехідною, імпульсною перехідною та передаточною функціями (без виведення) при нульових початкових умовах:

$$\begin{aligned} L\{w(t)\} &= W(s); & w(t) &= L^{-1}\{W(s)\}; \\ L\{h(t)\} &= W(s) \cdot \frac{1}{s}; & h(t) &= L^{-1}\{W(s) \cdot \frac{1}{s}\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Чи можна дослідити реакцію лінійної стаціонарної системи окремо на керуючий вплив і вплив збурення?
2. Для яких систем можна досліджувати реакцію окремо на керуючий вплив і вплив збурення?
3. Передачу чого визначає чи описує передаточна функція?
4. Чим відрізняється передаточна функція за управлінням від передаточної функції за збуренням?
5. На об'єкт із одним виходом діє два керуючих та три сигнали збурення. Скількома передаточними функціями його можна

охарактеризувати?

6. Передаточна функція має вигляд  $\frac{R(p)}{Q(p)}$ . Що тут є власним оператором?
7. При яких умовах передаточна функція в операторній формі повністю збігається з передаточною функцією в зображеннях Лапласа?
8. Яка операція забезпечує формальний перехід від передаточної функції в операторній формі до передаточної функції в зображеннях Лапласа?
9. В якому випадку формальна заміна  $p = s$  дозволяє одержати передаточну функцію в зображеннях Лапласа безпосередньо з передаточної функції в операторній формі?
10. Корені якого оператора, власного чи впливу, називають полюсом передаточної функції?
11. Корені якого оператора, власного чи впливу, називають нулем передаточної функції?
12. Наявність якого полюса характерно для астатичних систем?
13. Відсутність якого полюса характерно для статичних систем?
14. Що саме: передаточна функція чи диференціальне рівняння, являє собою вичерпну характеристику динамічної системи?
15. Рішення диференціального рівняння дає наочне уявлення про що?
16. На що є відгуком (реакцією) часова характеристика?
17. На який вхідний сигнал є відгуком (реакцією) перехідна характеристика?
18. На який вхідний сигнал є відгуком (реакцією) вагова функція?
19. Чому одиничний ступінчатий сигнал має велике значення в ТАУ?
20. Що легше відтворити на практиці: одиничний ступінчастий чи імпульсний сигнал?
21. Запишіть математичний опис функції Хевісайда.
22. Запишіть математичний опис дельта-функції.
23. Дельта-функція – це похідна чи інтеграл від одиничної ступінчастої функції?
24. Як одержати вагову функцію з перехідної функції?
25. Запишіть зображення за Лапласом одиничної ступінчастої функції.
26. Запишіть зображення за Лапласом дельта-функції.
27. Що ми одержимо в результаті такого перетворення:  $L^{-1}\{W(s)\}$ ?

## Лекція 5

### 3.14 Частотні характеристики САУ та їх елементів

#### 3.14.1 Поняття частотної характеристики

Вище було розглянуто два типових вхідних впливи: одиничний ступінчастий та імпульсний. Третім найважливішим видом типового вхідного впливу є гармонійний або, іншими словами, синусоїдальний. Важливість і широке застосування його для дослідження систем управління обумовлено такими факторами, що підтверджуються теоретичними викладками і практичними дослідженнями:

- ✓ практично всі реальні вхідні впливи, а, отже, і реакція на них елемента чи системи можуть бути представлені як сума гармонійних сигналів (див. [18] розкладання в ряд Фур'є);
- ✓ в усталеному режимі (тобто після завершення деякого часу після внесення збурення, необхідного для завершення перехідних процесів) гармонійні сигнали передаються лінійними елементами без спотворень;
- ✓ гармонійні сигнали відносно просто і досить точно (але не завжди дешево) фізично реалізуються в ході досліджень на реальному об'єкті.

Розглянемо поведінки системи під впливом гармонійного сигналу. Нехай на вхід лінійного стаціонарного елемента (рис. 3.8 а) в момент часу  $t = 0$  подано гармонійний вплив з частотою

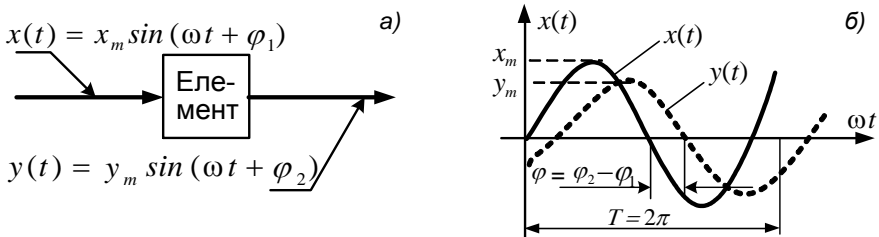


Рисунок 3.8 – До розуміння частотної характеристики  $\omega$  і в загальному випадку з початковою фазою  $\varphi_1$

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (3.22)$$

де  $x_m$ ,  $\omega = 2\pi T$  і  $T$  – амплітуда, кутова частота і період коливань вхідного сигналу.

По завершенні перехідного процесу на виході елемента встановиться режим вимушених коливань, і вихідна величина  $y(t)$  буде змінюватися за тим самим законом, що і вхідна  $x(t)$ , але в загальному випадку з **іншою амплітудою**  $y_m$  і **іншим фазовим зсувом**  $\varphi_2$  за часом відносно вхідного сигналу (рис. 3.8 б)

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (3.23)$$

Провівши аналогічний дослід, але вже *при іншій частоті*, можна переконатися, що амплітуда і фазовий зсув змінилися, тобто *вони залежать від частоти*. Повторюючи подібні досліді багаторазово для різних частот можна експериментально одержати цю залежність. Якщо провести аналогічні експерименти з іншим елементом, то можна переконатися, що залежності змінних  $y_m$  та  $\varphi_2$  від частоти інші. Отже, такі залежності можуть служити характеристиками динамічних властивостей елементів. Такі характеристики називаються **частотними**.

Залежність відношення амплітуд вихідного і вхідного сигналів від частоти  $A(\omega) = \frac{y_m}{x_m}$  називають *амплітудною частотною характеристикою* (АЧХ) елемента (системи). АЧХ показує, яким чином елемент пропускає зі входу на вихід величини сигналів на різних частотах.

Залежність фазового зсуву (різниці фаз) між вхідним і вихідним сигналами від частоти називають *фазовою частотною характеристикою* (ФЧХ) елемента. ФЧХ показує, яке відставання або випередження вихідного сигналу за фазою по відношенню до вхідного створює елемент на різних частотах.

Разом з тим частотні характеристики мають набагато більше значення, ніж просто реакція на гармонічний сигнал.

Особливого значення вони набули через наявність тісного зв'язку з передаточними функціями.

### 3.14.2 Зв'язок частотних характеристик із передаточними функціями

Відомо, що інтегральне перетворення Фур'є, визначається виразом

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.24)$$

де  $x(t)$  – будь-яка функція часу, що задовольняє умовам застосування перетворення Фур'є, може розглядатися як

окремий випадок перетворення Лапласа  $X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$ ,

якщо комплексний аргумент  $s = c_0 + j\omega$  є уявним (абсциса збіжності  $c_0 = 0$ ). Подібний підхід хоч і не є строго математично обґрунтованим, однак у більшості випадків практики цілком виправданий.

Розглянемо динамічну систему, динаміка якої описується диференціальним рівнянням (3.4), в якому для простоти не будемо враховувати змінну збурення  $f(t)$

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = b \frac{du(t)}{dt} + u(t). \quad (3.25)$$

Використовуючи властивість лінійності і властивість диференціювання перетворень Фур'є, які є аналогічними відповідним властивостям перетворень Лапласа, виконаємо перетворення Фур'є рівняння (3.25) при нульових початкових умовах (див. для порівняння п. 3.11, лекція 4):

$$a_0(j\omega)^2 Y(j\omega) + a_1(j\omega)Y(j\omega) + Y(j\omega) = b(j\omega)U(j\omega) + U(j\omega); \quad (3.26 a)$$

$$[a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + 1]Y(j\omega) = [b(j\omega) + 1]U(j\omega); \quad (3.26 б)$$

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b(j\omega) + 1}{a_0(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + 1} = W(j\omega). \quad (3.26 в)$$

У виразах (3.26) змінні  $Y(j\omega)$  та  $U(j\omega)$  (на відміну від  $Y(s)$  і  $U(s)$  п. 3.11) називають Фур'є-перетворенням функцій  $y(t)$  та  $u(t)$ , які набувають смисл спектральних характеристик відповідних цим змінним сигналів, залежних від частоти  $\omega$ . Відношення поліномів  $W(j\omega)$  називається **частотною передаточною функцією** комплексної змінної (або просто частотною характеристикою). Оскільки вона відображає відношення величин спектральних характеристик сигналів на виході і вході системи, то її часто називають *комплексним коефіцієнтом посилення*.

Порівнюючи вираз (3.13) для передаточної функції з виразом (3.26 в), бачимо, що частотну характеристику можна одержати з передаточної функції шляхом формальної заміни комплексної змінної  $s$  на  $j\omega$  і навпаки.

### **3.14.3 Комплексний передаточний коефіцієнт підсилення. Амплітудна фазочастотна характеристика системи**

При будь-якому значенні частоти  $\omega$  функція  $W(j\omega)$  буде комплексною а, отже, як будь-яке комплексне число може бути подане у показовій формі

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\Psi(\omega)}. \quad (3.27)$$

Тут модуль  $A(\omega)$  має значення амплітудної частотної характеристики, а аргумент  $\Psi(\omega)$  – фазової частотної характеристики. Як бачимо, частотна передаточна функція в показовій формі поєднує в собі АЧХ і ФЧХ і тому носить назву амплітудної фазочастотної функції (а її графік на комплексній площині – характеристика – АФЧХ). АЧХ і ФЧХ є дійсними функціями частоти і тому легко зображуються графічно (див. рис. 3.9).

Кожному фіксованому значенню частоти  $\omega_i$  відповідає комплексне число  $W(j\omega_i)$ , яке на комплексній площині можна зобразити вектором, що має довжину  $A(\omega_i)$  – модуль і кут

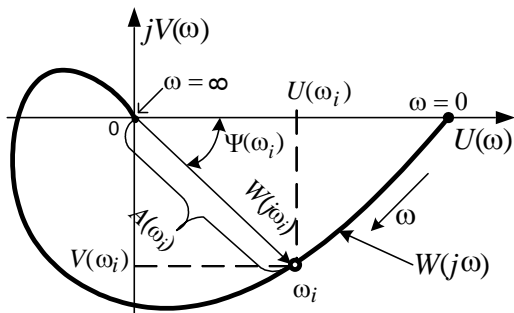


Рисунок 3.9 – Амплітудна фазочастотна характеристика

повороту  $\Psi(\omega_i)$  – зсув фаз. Від'ємні значення зсуву фаз  $\Psi(\omega)$ , які відповідають відставанню вихідного сигналу від вхідного за часом, прийнято відраховувати за годинниковою стрілкою від додатного напрямку дійсної осі.

При зміні частоти від нуля до нескінченності вектор АФЧХ  $W(j\omega)$  повертається навколо початку координат і при цьому одночасно змінюється його довжина. Крива, яку при цьому опише кінець вектора, і є АФЧХ. Кожній точці частотної характеристики відповідає певне значення частоти.

Проекції вектора  $W(j\omega)$  на дійсну і уявну осі називають відповідно *дійсною та уявною частотними характеристиками* і позначають  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$ . З урахуванням цього можна записати АФЧХ в алгебраїчній формі

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (3.28)$$

При цьому  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$  можуть бути одержані з частотної передаточної функції (3.26 в) шляхом нескладних перетворень.

Як і для будь-якого комплексного числа чи функції, зв'язок між АФЧХ у показовій формі запису (3.27) і виразами для дійсної та уявної частотної характеристики може бути поданий у вигляді співвідношень

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (3.29 \text{ а})$$

$$\Psi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (3.29 \text{ б})$$

### 3.14.4 Логарифмічна амплітудна фазочастотна характеристика

Істотним недоліком розглянутих вище частотних характеристик є те, що графічно вони, особливо для систем високого порядку і в області високих частот, є кривими досить складної форми з нерівномірним розподілом частот, що ускладнює їх побудову і використання для аналізу систем. Цього недоліку в значній мірі позбавлені логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ).

Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою (ЛАХ) називається крива, побудована відповідно з виразом

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg |W(j\omega)|, \quad (3.30)$$

побудована у логарифмічному масштабі частот (див. рис. 3.10).

Логарифмічною фазовою частотною характеристикою (ЛФХ) називається фазова частотна характеристика (3.29 б),

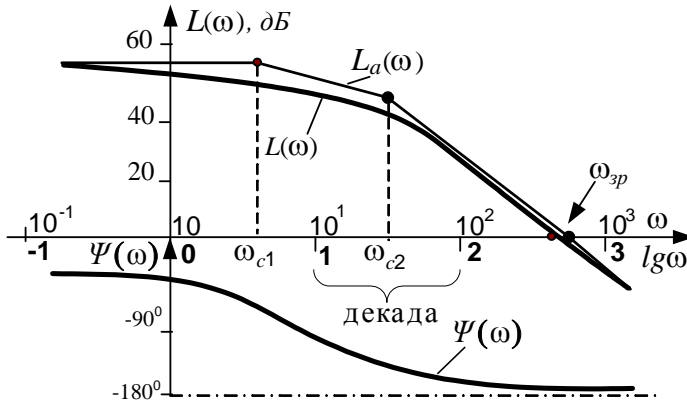


Рисунок 3.10 – Логарифмічна звичайна та асимптотична АФЧХ

побудована в логарифмічному масштабі частот (див. рис. 3.10).

При побудові ЛАХ і ЛФХ на осі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі  $\lg(\omega)$ , але на шкалу наносять фактичні значення частоти, тобто наявні одночасно дві



шкали. Розміщують обидві характеристики таким чином, що вісь ординат ЛАХ і вісь ординат ЛЧХ суміщаються, а вісь частот – спільна, для того, щоб зміну фази легко можна було порівняти зі зміною амплітуди.

Величина  $L(\omega)$  вимірюється в *децибелах*, а  $\Psi(\omega)$  в *градусах або радіанах*. Одиницями вимірювання логарифмічної осі частот є *декади* (рідше *октави*).

*Декадою* називається інтервал частот, що відповідає зміні частоти в десять разів і такий, що дорівнює  $\lg(10) = 1$  (октава – зміна частоти в 2 рази).

*Бел* (Б) – одиниця виміру співвідношення потужностей двох сигналів. *Децибел* (дБ) – 0,1 бел. Якщо потужність одного сигналу більше (менше) потужності іншого сигналу в 10 разів, то ці потужності відрізняються на 1 бел, ( $\lg 10 = 1$ ). Але так як потужність гармонічного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, то при застосуванні цієї одиниці для вимірювання відношення амплітуд перед логарифмом з'являється множник 2. Наприклад, якщо на певній частоті амплітуда  $A(\omega) = 100$ , то це означає, що потужності вхідного і вихідного сигналів відрізняються  $100^2$  разів, тобто на  $2 \cdot \lg 100 = 4$  Б або на 40 дБ, відповідно і  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 40$  дБ.

*Крутизна нахилу АЧХ у напівлогарифмічному масштабі буде вимірюватися в децибелах на декаду* (дБ/дек).

Точка, що відповідає значенню частоти  $\omega = 0$ , лежить зліва в нескінченності, оскільки  $\lg(0) = -\infty$ . Тому на практиці *вісь ординат проводиться через будь-яку точку осі частот* із тих лише міркувань, щоб справа розмістилася та частина ЛЧХ, яку необхідно досліджувати.

Частота  $\omega_{zp}$ , при якій ЛАХ перетинає вісь частот, що відповідає значенню  $A(\omega) = 1$ , називається *частотою зрізу системи*. Іншими словами це частота, на якій амплітуда сигналу на вході дорівнює амплітуді сигналу на виході.

ЛЧХ надає для користувача такі переваги:

- можливість охоплення в одному графіку щонайбільш широкого діапазону частот із однаково наочною зміною властивостей у різних діапазонах частот;
- розтягування графіка вздовж логарифмічної осі частот надає йому *асимптотичну властивість*, тобто значні ділянки ЛАХ із достатньою для інженерних цілей точністю виявляється можливим замінити прямими лініями – асимптотами, які завжди мають нахил, кратний 20 дБ/дек.

### 3.14.5 Асимптотична ЛЧХ

Наближені асимптотичні ЛЧХ (див. характеристику  $L_a(\omega)$  рис. 3.10) в інженерній практиці використовують, перш за все, через простоту їх побудови, що не вимагає значних обчислювальних зусиль.

Асимптотичні властивості можна наочно показати на прикладі побудови ЛАХ простого динамічного елемента, що

описується передаточною функцією виду  $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$ .

Виконавши підстановку  $s = j\omega$ , одержимо вираз частотної

передаточної функції  $W(j\omega) = \frac{k}{1+jT\omega} = \frac{k(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}$  або в

алгебраїчній формі  $U(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2}$ ;  $V(\omega) = -k \frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}$ . Звідси

знаходимо вираз для АЧХ у вигляді  $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$ . Тепер

вираз для логарифмічної характеристики

$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$ . Графік  $L(\omega)$

показаний на рис. 3.11.

Проаналізуємо поведінку останнього виразу при різних

частотах. Не важко помітити, що при  $\omega < \frac{1}{T}$  величина  $T^2\omega^2 \ll 1$

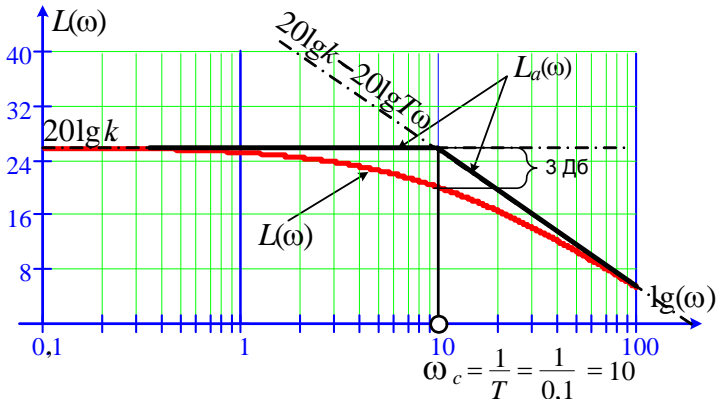


Рисунок 3.11 – Демонстрація асимптотичних властивостей логарифмічної характеристики

і тоді можна взяти  $L(\omega) \approx 20\lg k$ . Це рівняння прямої, паралельної осі частот. При  $\omega > \frac{1}{T}$  величина  $T^2\omega^2 \gg 1$  і тоді  $L(\omega) \approx 20\lg k - 20\lg T\omega$ . Це уже рівняння прямої, яка має нахил до осі частот, що дорівнює  $-20$  дБ/дек і, яка з'єднується (стикується) з попередньою прямою в точці  $\omega_c = 1/T$ . Частота  $\omega_c$ , що відповідає точці стикування (сполучення) відрізків, називається *сполучною*.

Таким чином, ЛАХ отриманої системи  $L_a(\omega)$  може бути наближено побудована у вигляді двох поєднаних відрізків прямих (див. рис. 3.11). Така ЛАХ називається асимптотичною. Можливість заміни кривих звичайної ЛАХ відрізками прямих є важливою перевагою логарифмічних асимптотичних характеристик. Помилка при такій заміні в більшості випадків не велика, наприклад, для розглянутої системи її максимальне значення знаходиться в точці  $\omega = \omega_c$  і не перевищує 3 дБ.

### **Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю**

1. Однією з причин широкого застосування гармонічного впливу є те, що всі реальні впливи можна подати у вигляді ... .

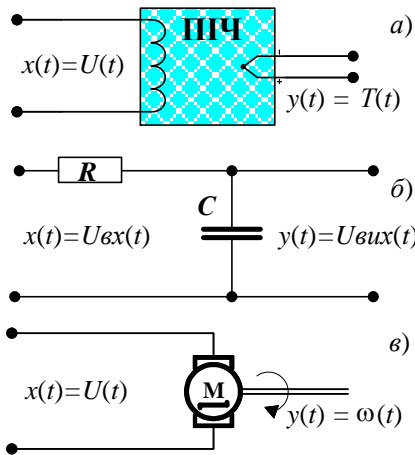
2. Однією з причин широкого застосування гармонічного впливу є те, що в сталому режимі вони передаються системою ... .
3. Однією з причин широкого застосування гармонічного впливу є те, що їх реалізація на практиці ... .
4. Запишіть вираз для гармонічного сигналу  $x(t)$  з амплітудою  $A$  і частотою  $\omega$  без початкового зсуву фаз.
5. На вході елемента гармонічний сигнал. Що не змінюється на виході: амплітуда, частота чи фаза сигналу?
6. На вході елемента гармонічний сигнал. Що змінюється на виході: амплітуда, частота або фаза сигналу?
7. Як називається залежність відношення амплітуд вхідного і вихідного сигналів від частоти?
8. Як називається залежність різниці фаз вхідного і вихідного сигналів від частоти?
9. Що показує амплітудна частотна характеристика?
10. Що показує фазова частотна характеристика?
11. Як одержати частотну передаточну функцію із звичайної?
12. Яке значення має модуль частотної передаточної функції?
13. Яке значення має аргумент частотної передаточної функції?
14. Запишіть комплексну передаточну функцію в алгебраїчній формі.
15. Якій характеристиці відповідає формула  $\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ ?
16. Якій характеристиці відповідає формула  $\arctg \frac{V^2(\omega)}{U^2(\omega)}$ ?
17. Як одержати з амплітудної частотної характеристики ЛАХ?
18. В яких одиницях вимірюється логарифмічна амплітуда в ЛАХ?
19. У чому вимірюється зсув фаз у ЛАХ? Логарифмічна частота?
20. Якому інтервалу частот відповідає декада?
21. Що вимірюється за допомогою одиниці, званої бел (децибел)?
22. Як називається частота, на якій ЛАХ перетинає вісь частот?
23. Які особливості логарифмічних частотних характеристик найбільш корисні для користувача?
24. Що таке частота сполуки для асимптотичних ЛАХ?
25. Яка ЛАХ: звичайна чи асимптотична, є більш точною? Яка простіша в побудові?
26. Де на графіку ЛАХ проводиться, як правило, вісь ординат?
27. В яких одиницях вимірюється крутизна ЛАХ?
28. Який нахил, як правило, мають асимптоти, якими замінюються ділянки кривих звичайної ЛАХ?

# Лекція 6

## 4 Типові динамічні ланки та їх характеристики

### 4.1 Поняття типової динамічної ланки

Часто буває так, що різні за своєю фізичною природою явища (процеси, об'єкти) можуть бути описані диференціальними рівняннями одного і того самого виду (під видом розуміється структура рівняння, тобто зовнішня форма запису рівнянь, а не величини коефіцієнтів). З цієї причини їх можна вважати однаковими динамічними (але не фізичними) елементами (блоками). Так, наприклад, відомо, що процес



а) нагрівання печі з електричним підігрівом (рис. 4.1 а), зміна напруги на конденсаторі електричного RC-ланцюга (рис. 4.1 б) і процес розгону електродвигуна (рис. 4.1 в) у першому наближенні можуть бути описані диференціальним рівнянням першого порядку виду

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t), \quad (4.1)$$

Рисунок 4.1 – Приклади динамічних пристроїв з математичним описом одного виду що де  $T$  – постійна часу,  $K$  – коефіцієнт підсилення (передачі) елемента в статичному режимі;  $u(t)$ ,  $y(t)$  – вхідна і вихідна змінні, які мають, як це бачимо з рис. 4.1, різну фізичну природу.

Такі елементи (об'єкти, процеси, явища), які мають різну фізичну природу, але подібний математичний опис називаються математично подібними (див. лекцію 3).

Незалежність математичного опису математично подібних елементів (об'єктів, процесів, явищ) від їх фізичної природи дозволяє при розгляді (аналізі, дослідженні) абстрагуватися від їх сутності і розглядати їх як деякі абстрактні, ідеальні ланки (іноді кажуть кібернетичні блоки). У зв'язку з цим надалі ми будемо розглядати елемент (явище, процес, об'єкт) як деякий «чорний ящик», для якого встановлені (відомі) пов'язані причинно-наслідковими зв'язками вхідні і вихідні сигнали.

Різноманітність природних явищ тягне за собою і різноманітність ланок – від найпростіших до дуже складних. Однак будь-яка складна система, як правило, може розглядатися як сукупність ряду менш складних, якимось чином з'єднаних між собою. Як приклад розглянемо динамічну систему – генератор постійного струму з незалежним збудженням, який виробляє струм та віддає його в навантаження, яке в загальному випадку має активну і реактивну складові (див. рис. 4.2 а). На рис. 4.2 б показана принципова еквівалентна електрична схема

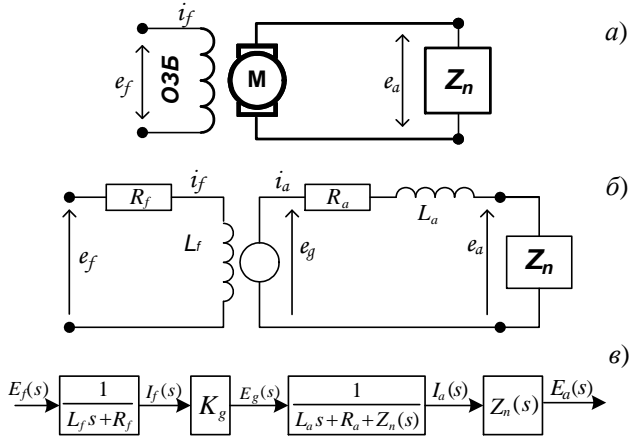


Рисунок 4.2 – Приклад складної динамічної системи генератора, а на рис. 4.2 в – структурна схема. На останній схемі добре бачимо, як пов'язані між собою та математично описуються окремі структурні елементи і процеси динамічної системи (зліва направо): обмотка збудження, процес виникнення

ЕРС (електрорушійної сили) генератора, якірний ланцюг генератора і електричне навантаження, а також зв'язки між ними. Як можна побачити з цього прикладу, виявляється більш вигідним розглядати властивості окремих частин системи порізно; при цьому різноманітність математичних описів ланок неминуче зменшується.

Якщо структура системи та взаємозв'язки між її елементами відомі, то задача виділення окремих елементів не представляє особливих труднощів. Однак іноді відомий лише загальний опис складної системи як самостійної одиниці. Як бути в такому випадку?

Досвід показує, що чим більш детальнішою є математична модель системи, тим вище порядок диференціального рівняння. Передаточні функції систем високого порядку (зазвичай  $n > 4$ ) виявляються громіздкими і незручними для аналізу. Щоб обійти цю проблему, передаточну функцію складної системи подають у вигляді добутку простих співмножників, порядок кожного з яких не перевищує двох ( $n \leq 2$ ).

Нехай динамічна система описується передаточною функцією у вигляді відношення двох поліномів (так найчастіше і буває), тобто у вигляді дробу

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (4.2)$$

Відомо, що будь-який правильний дріб можна подати у вигляді добутку простих співмножників (дробів) із поліномами у чисельнику та знаменнику не вище другого порядку. У такому разі для подання будь-якої передаточної функції можна використовувати обмежений набір елементів із математичним описом у вигляді виразів

$$k, s^v, \frac{1}{Ts+1}, \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}, \tau s + 1, \tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1, \quad (4.3)$$

де  $k, v, T, \tau, \xi$  – постійні величини, причому  $k > 0$ ,  $v$  – позитивне або від'ємне ціле,  $T > 0, \tau > 0, 0 \leq \xi < 1$ .

Таким чином, ми приходимо до розуміння можливості подання будь-якої складної динамічної системи у вигляді сукупності більш простих (елементарних) підсистем (ланок) із обмеженого набору, які певним чином можуть бути пов'язані між собою. *Такі найбільш прості підсистеми у складі будь-якої складної динамічної системи, передаточні функції яких мають вигляд простих дробів, називаються **типовими** (або **елементарними**) динамічними ланками.*

Необхідно звернути увагу на те, що у випадку, продемонстрованому в прикладі на рис. 4.2, кожній типовій ланці відповідає реальний фізичний елемент або процес. У загальному випадку це не є обов'язковою умовою, тобто розділ (або, кажуть, декомпозиція) складної динамічної системи на сукупність типових (елементарних) ланок може носити чисто умовний характер.

У зв'язку з цим, необхідно відзначити, що *при аналізі систем управління можуть виникати задачі двох видів:*

- ✓ *задача структурного аналізу*, тобто отримання передаточної функції системи з типових ланок, певним чином пов'язаних між собою;
- ✓ *задача декомпозиції*, тобто подання складної системи на підставі її передаточної функції у вигляді сукупності більш простих підсистем (елементів, ланок).

*Типові (елементарні) ланки крім зовнішніх ознак (подання передаточної функції у вигляді якогось із найпростіших виразів виду (4.3)) мають такі загальні властивості (див. рис. 4.3):*

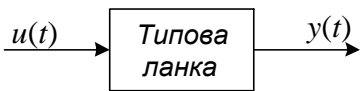


Рисунок 4.3 – Зображення типової ланки

– *властивість одновимірності*, що виражається в наявності лише однієї вхідної та однієї вихідної координати;

– *властивість однонаправленості*, яка полягає в тому, що вихідна величина залежить від вхідних впливів, а зворотний вплив виходу на вхід відсутній. Приєднання до виходу такої



ланки іншої ланки не змінює передаточну функцію першої ланки (ідеалізація).

Відповідно до переліку (4.3) розрізняють такі типові ланки: підсилювальну, інтегруючу, реальну й ідеальну, таку, що диференціює, таку, що лише форсує та з інерційними властивостями, чистого запізнювання, аперіодичну першого і другого порядку, коливальну, які з урахуванням деяких загальних властивостей можна поділити на такі групи:

1. *Статичні ланки*, у яких статична характеристика відмінна від нуля. До них відносяться підсилювальні, аперіодичні, коливальні ланки, які (окрім підсилювальної ланки) є фільтрами низької частоти і вносять від'ємний фазовий зсув.

2. *Ланки, що диференціюють*, у яких статична характеристика дорівнює нулю. До них відносяться ідеальні і реальні ланки, що диференціюють. В їх передаточну функцію завжди входить співмножник  $s$  (у чисельнику), вони є фільтрами високої частоти і вносять додатний фазовий зсув.

3. *Астатичні ланки*, які не мають статичної характеристики. До них відносяться ланки з інтегруючими властивостями. В їх передаточну функцію завжди входить хоча б один співмножник виду  $1/s$ , вони є фільтрами низької частоти і вносять від'ємний фазовий зсув.

Крім вищеназаних, при побудові структурних схем складних систем управління використовуються також:

- *арифметичні ланки*, що здійснюють одну з арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення або ділення та інше;
- *логічні ланки*, що здійснюють операції логічного додавання або множення та інше.

## **4.2 Характеристики типових динамічних ланок**

### **4.2.1 Ідеальна підсилювальна ланка**

Підсилювальна ланка є єдиною з усіх типових ланок, у якій відсутні інерційні (динамічні) властивості. Альтернативні назви цієї ланки: пропорційна або безінерційна. Як приклади реалізації

підсилювальної ланки (з певною мірою ідеалізації, так як в природі в чистому вигляді вони не зустрічаються) можна назвати такі пристрої: електронний підсилювач, «дитячу гойдалку», важільні механізми, зубчасті та інші передачі (редуктори) та ін.

Підсилювальна ланка миттєво і без спотворень передає вхідний сигнал з входу на вихід і описується простим лінійним рівнянням  $y(t) = ku(t)$ , з якого бачимо, що вихідний сигнал змінюється прямо пропорційно вхідному сигналу з коефіцієнтом посилення  $k$ .

Передаточна функція такої ланки є константа  $W(s) = k$ .

Частотні характеристики:

- амплітудна фазочастотна характеристика (АФЧХ)  $W(j\omega) = k$  (див. рис. 4.4 а);
- дійсна та уявна амплітудні фазочастотні характеристики відповідно:  $U(\omega) = k$ ;  $V(\omega) = 0$ ;
- амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна характеристики (ФЧХ):  $A(\omega) = k$ ;  $\psi(\omega) = 0$ ;
- логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20 \lg k$  (див. рис. 4.4 б).

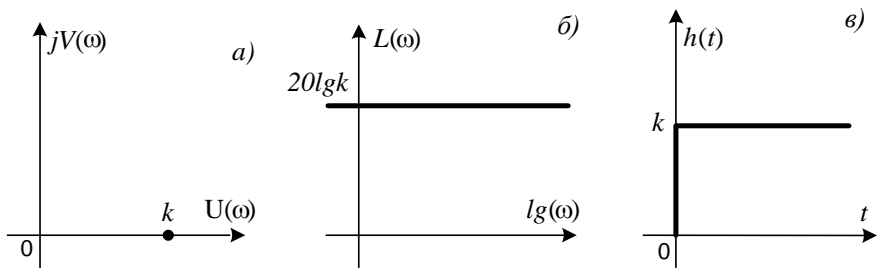


Рисунок 4.4 – Характеристики ідеальної підсилювальної ланки

Частотні характеристики підсилювальної ланки не залежать від частоти, причому ФЧХ тотожно дорівнює нулю, тобто в гармонійних коливаннях, поданих на вхід ланки, на виході змінюється лише амплітуда в  $k$  раз, а фазовий зсув

відсутній. АФЧХ підсилювальної ланки є додатнім дійсним числом і її графік являє собою точку на позитивній дійсній півосі (рис. 4.4 а).

Часові характеристики:

- перехідна характеристика  $h(t) = k \cdot 1(t)$  (див. рис. 4.4 в);
- імпульсна перехідна (вагова) функція  $w(t) = \delta(t)$ .

#### 4.2.2 Інтегруюча ланка (ідеальна)

Інтегруючі ланки характеризуються тим, що при постійному вхідному впливі величина вихідного сигналу необмежено зростає. Подібних ланок у природі (оскільки будь-який сигнал є обмеженим) не існує. Як приклади реальних пристроїв чи процесів, які з деякими припущеннями можна вважати інтегруючими ланками, можна назвати: лічильники, що підсумовують витрату речовини або енергії, процес заряду конденсатора, процес заповнення ємності рідиною, електричний двигун, якщо як вихідну величину взяти число обертів вала і т. п.

Математичний опис інтегруючої ланки  $y(t) = \frac{1}{T_i} \int u(t) dt$  (в

операторній формі запису  $py(t) = \frac{1}{T_i} u(t) = ku(t)$ ), де  $T_i$  –

постійна часу інтегрування, яка визначає швидкість наростання вихідного сигналу. З математичного опису видно, що вихідний сигнал інтегруючої ланки є інтегралом від вхідного.

Передаточна функція інтегруючої ланки  $W(s) = \frac{k}{s}$ .

Частотні характеристики:

- амплітудна фазочастотна характеристика  $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} =$

$= -j \frac{k}{\omega}$  (АФЧХ) (див. рис. 4.5 а);

- дійсна та уявна амплітудні фазочастотні характеристики

відповідно:  $U(\omega) = 0$ ;  $V(\omega) = -\frac{k}{\omega}$ ;

- амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна (ФЧХ) характеристики  $A(\omega) = \frac{k}{\omega}$ ;  $\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ ;

- логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg(\omega)$  (див. рис. 4.5 б).

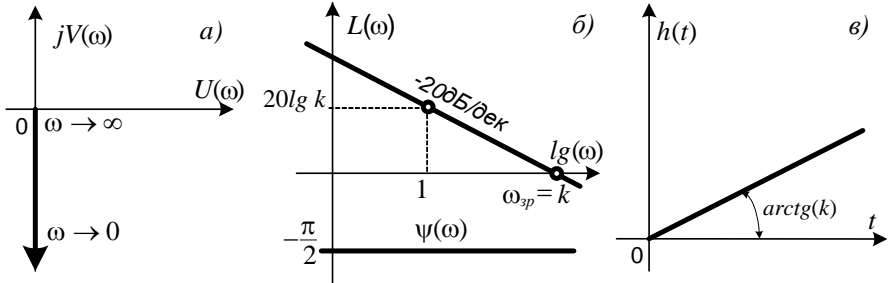


Рисунок 4.5 – Характеристики ідеальної інтегруючої ланки

АЧХ інтегруючої ланки є гіперболічною функцією частоти, а ФЧХ від частоти не залежить, тому АФЧХ ланки являє собою уявну функцію частоти і її графік збігається для додатних значень частоти з від'ємною уявною піввіссю (рис. 4.5 а).

Розглядаючи ЛАЧХ (рис. 4.5 б), потрібно відзначити дві характерні точки характеристики, які використовуються в процесі побудови графіка:

- ✓ значення логарифмічної амплітуди на частоті 1 Гц визначається постійною часу інтегрування ланки (часто говорять *коефіцієнтом добротності за швидкістю k*), а саме  $L(1) = 20 \lg k$ ;
- ✓ частота зрізу ланки  $\omega_{sp}$  (точка перетину ЛАЧХ з віссю частот) чисельно дорівнює коефіцієнту добротності за швидкістю.

Часові характеристики:

- перехідна характеристика  $h(t) = k \cdot t$  (див. рис. 4.5 в);

– імпульсна перехідна (вагова) функція  $w(t) = k$ .

Як бачимо з рис 4.5 в, при подачі на вхід інтегруючої ланки постійного незникаючого сигналу (функції Хевісайда) вихідний сигнал збільшується до нескінченності з постійною швидкістю, тобто перехідна функція при  $t \rightarrow \infty$  не має усталеного кінцевого значення. Такі ланки (і системи, до складу яких входять такі ланки) називаються ланками без самовирівнювання. Ця властивість є причиною принципової відмінності астатичних систем управління, що містять в собі інтегруючі ланки, від статичних систем, які інтегруючих ланок не містять, а перехідна функція завжди є обмеженою за величиною.

### **Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю**

1. Що об'єднує математично подібні об'єкти?
2. Від чого ми абстрагуємося, коли розглядаємо процеси або явища як деякі абстрактні, ідеальні ланки?
3. Що для нас важливо і що неважливо, коли ми розглядаємо процес або об'єкт як «чорний ящик»?
4. Із точки зору ТАУ що важливіше: встановлення причинно-наслідкових відносин між входом і виходом ланки чи встановлення фізичної природи явища?
5. Сукупністю чого можна подати будь-яку складну систему?
6. Чому з точки зору математики відповідає передаточна функція типової, елементарної ланки?
7. Чого ми досягаємо в результаті визначення поняття типова елементарна ланка?
8. Чи завжди типовій ланці у складі складної системи відповідає реальне фізичне явище або об'єкт?
9. Що означає декомпозиція складної системи?
10. Яка задача, протилежна задачі декомпозиції, виникає при аналізі систем управління?
11. Назвіть загальні характерні властивості типових ланок.
12. Запишіть рівняння математичного опису ідеальної підсилювальної ланки.
13. Що собою являє логарифмічна АФЧХ ідеальної підсилювальної ланки?

14. Що собою являє звичайна АФЧХ ідеальної підсилювальної ланки?
15. Чи залежить АЧХ підсилювальної ланки від частоти?
16. Який зсув фаз дає ідеальна підсилювальна ланка?
17. Запишіть рівняння математичного опису ідеальної інтегруючої ланки.
18. Якщо на вхід інтегруючої ланки подати сигнал постійного рівня, то вихідний сигнал ... . Як він себе поведе?
19. Що собою являє логарифмічна АФЧХ інтегруючої ланки?
20. Який зсув фаз дає ідеальна інтегруюча ланка?
21. Як називаються системи, перехідні функції яких не мають усталеного кінцевого значення?
22. Яка типова ланка обов'язково повинна бути у складі системи управління, що називається астатичною?

# Лекція 7

## 4.2.3 Аперіодична ланка першого порядку

Аперіодична ланка першого порядку поєднує в собі властивості підсилювальної та інтегруючої ланок. Інтегруюча складова зумовлює динаміку або інерційні властивості аперіодичної ланки, тому її ще називають інерційною. Прикладом таких ланок може служити будь-який електричний RC-ланцюжок, теплові об'єкти та багато інших.

Математичний опис аперіодичної ланки в операторній формі запису  $(Tp+1)y(t) = ku(t)$ . Як бачимо, ланка характеризується двома параметрами:  $T$  – постійною часу, яка характеризує його інерційні властивості, і  $k$  – коефіцієнтом підсилення (передачі) в усталеному режимі роботи.

$$\text{Передаточна функція } W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Частотні характеристики:

– амплітудна фазочастотна функція (АФЧХ)  $W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(-Tj\omega+1)}{(Tj\omega+1)(-Tj\omega+1)} = \frac{k(1-jT\omega)}{(T\omega)^2+1}$  (див. рис. 4.6 а

та приклад з лекції 5);

– дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції (характеристики)  $U(\omega) = \frac{k}{(T\omega)^2+1}$ ;  $V(\omega) = \frac{-kT\omega}{(T\omega)^2+1}$

відповідно;

– амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна (ФЧХ) характеристики  $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}$ ;  $\psi(\omega) = -\arctg(T\omega)$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{(T\omega)^2+1}$  (див. рис. 4.6 б).

АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку (рис. 4.6 а) являє собою (завжди!) півколо, яке починається на додатній

дійсної півосі в точці, що дорівнює коефіцієнту підсилення  $k$ , має характерну точку  $\omega_c = \frac{1}{T}$  у своїй нижній частині і закінчується в початку координат.

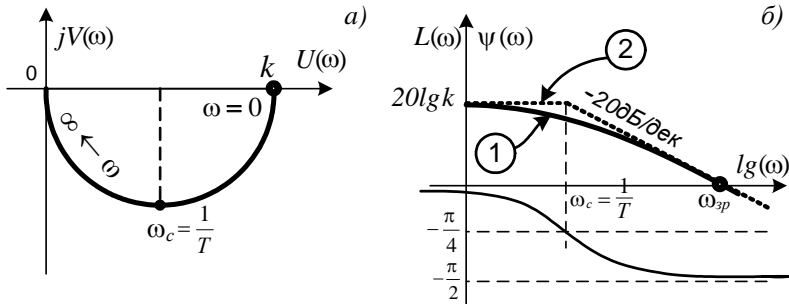


Рисунок 4.6 – Частотні характеристики аперіодичної ланки першого порядку

Звичайна ЛАЧХ подана на рис. 4.6 б кривою **1**. На практиці, як правило, обмежуються побудовою асимптотичної ЛАЧХ, показаної на рисунку пунктирною лінією **2**. Методика побудови асимптотичної ЛАЧХ аперіодичної ланки першого порядку була викладена в лекції 5 (п. 3.14.5).

Логарифмічна частотна характеристика на частоті сполюки  $\omega_c = \frac{1}{T}$  дорівнює  $(-\frac{\pi}{4})$  і асимптотичне наближається при  $\omega \rightarrow \infty$  до  $(-\frac{\pi}{2})$  і при  $\omega \rightarrow 0$  до нуля. Ці характеристики однотипні для всіх аперіодичних ланок і при зміні постійної часу можуть бути одержані паралельним зсувом уздовж осі частот.

Часові характеристики:

- перехідна характеристика  $h(t) = k(1 - e^{-t/T})$  (див. рис. 4.7 а);
- імпульсна перехідна (вагова) функція

$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-t/T}$ . Відповідна їй характеристика подана на рис. 4.7 б.



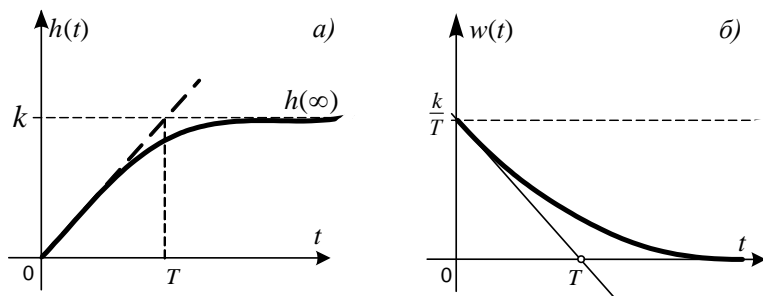


Рисунок 4.7 – Часові характеристики аперіодичної ланки першого порядку

Перехідна та імпульсна перехідна характеристики аперіодичної ланки – експоненти, отже, по закінченні певного часу (теоретично в нескінченності) вихідна величина з певною точністю досягає нового усталеного значення для перехідної характеристики або нульового для вагової характеристики. Такі ланки (системи) називаються *ланками з самовирівнюванням*. Як бачимо з графіка рис. 4.7 а усталене значення вихідної змінної залежить від коефіцієнта підсилення  $k$ , а час перехідного процесу – від величини постійної часу  $T$ .

За перехідною характеристикою легко визначаються параметри аперіодичної ланки першого порядку, такі як:

- коефіцієнт підсилення  $k$ , такий, що дорівнює  $h(\infty)$ ;
- постійна часу  $T$ , за часом від точки перетину дотичної до перехідної характеристики в початковий момент часу (або в будь-який інший) із лінією усталеного значення (побудова дотичної вкрай наближена операція, проте дає хороші результати при оцінці інерційних властивостей системи).

Аперіодичні ланки в теорії автоматичного управління мають особливе значення з таких причин:

- ✓ вони знаходять широке поширення в природі та техніці;
- ✓ значне число процесів більш складного характеру вдається з достатньою для практики точністю апроксимувати аперіодичною ланкою першого порядку, що істотно спрощує подальші дослідження.

#### 4.2.4 Аперіодична, коливальна і консервативна ланки другого порядку

Ланки, що розглядаються нижче, мають однаковий математичний опис у вигляді диференціального рівняння другого порядку  $(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1)y(t) = ku(t)$ , поданого в операторній формі. В такому рівнянні завжди можна виконати заміну змінних  $T = T_0$  і  $\xi = \frac{T_1}{2T}$ , у результаті чого одержимо

$$(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)y(t) = ku(t). \quad (4.4)$$

Вид ланки (аперіодична, коливальна або консервативна), а також вигляд перехідного процесу при такому записі повністю визначається величиною  $\xi$  – коефіцієнтом демпфування:

$\xi \geq 1$  – аперіодична ланка першого порядку;

$0 < \xi < 1$  – коливальна ланка;

$\xi = 0$  – консервативна ланка ( $T \neq 0$ ).

Передаточна функція ланки (4.4) в загальному вигляді

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}. \quad (4.5)$$

#### Аперіодична ланка другого порядку ( $\xi \geq 1$ )

При  $\xi \geq 1$  характеристичне рівняння (знаменник виразу (4.5)) має два дійсних корені  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , тому передаточну функцію ланки (4.5) можна завжди перетворити до вигляду

$$W(s) = \frac{k}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (4.5 a)$$

де  $T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$ , тобто аперіодична ланка другого

порядку, по суті, не є елементарною, а складається з двох аперіодичних ланок першого порядку.

АФЧХ аперіодичної ланки другого порядку в показовій формі

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{((T_1\omega)^2 + 1)((T_2\omega)^2 + 1)}} e^{j(-\arctg(T_1\omega) - \arctg(T_2\omega))}, \quad (4.5 \text{ б})$$

звідки бачимо, що загальний граничний зсув фаз збільшується в два рази (до мінус  $180^\circ$ ) і годограф характеристики буде знаходитися в 4 і 3 квадрантах. У цілому додавання кожної чергової аперіодичної ланки першого порядку збільшує інерційність системи і негативний зсув фаз на  $90^\circ$ .

### Коливальна ланка ( $0 < \xi < 1$ )

При  $0 < \xi < 1$  характеристичне рівняння (знаменник рівняння (4.5)) має два комплексно спряжених корені  $\alpha \pm j\beta$ . Із цієї причини подальше розкладання на прості множники стає (в області дійсних чисел) неможливим і тому ланка розглядається як елементарна.

Частотна передаточна функція (АФЧХ) після підстановки в (4.5)  $s = j\omega$  і нескладних перетворень має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2T\xi\omega}, \quad \text{звідки можна одержати інші}$$

частотні характеристики:  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$ ,  $\Psi(\omega)$  і  $A(\omega)$ . Через їх громіздкість вони тут не наводяться (див. наприклад [23]).

Приблизний графік АФЧХ коливальної ланки показаний на рис. 4.8 а. Порівнюючи АФЧХ коливальної ланки і АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку (рис. 4.6 а) можна помітити, що для обох графіків характерне зменшення амплітуди з ростом частоти від значення, рівного коефіцієнта підсилення аж до нуля (тобто це фільтри низьких частот) і наявність від'ємного фазового зсуву (динамічне запізнювання).

Разом з тим спостерігається дві істотні відмінності:

✓ граничний від'ємний фазовий зсув коливальної ланки в два рази більший і становить  $-\pi$ . Можна помітити зв'язок граничного фазового зсуву з порядком полінома в знаменнику передаточної функції: збільшення порядку на одиницю збільшує зсув на  $\frac{\pi}{2}$  (при незмінному поліномі у чисельнику).

✓ АФЧХ коливальної ланки має ділянку, на якій амплітуда має величину більшу, ніж початкове значення (явище резонансу).

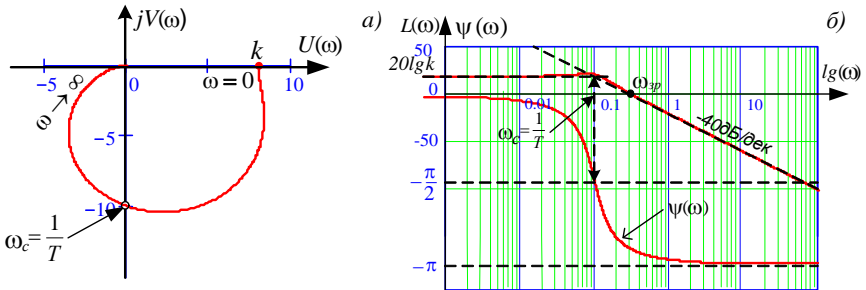


Рисунок 4.8 – Частотні характеристики коливальної ланки

Характерна точка  $\omega_c = \frac{1}{T}$  АФЧХ коливальної ланки

знаходиться на перетині характеристики з уявною віссю.

Логарифмічна АФЧХ подана на рис. 4.8 б). Вираз для логарифмічної амплітудної частотної характеристики має вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}. \quad (4.6)$$

Міркуючи аналогічно тому, як це було в лекції 5 (п. 3.13.5) можна одержати вираз для асимптотичної ЛАЧХ у вигляді

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega < \omega_c; \\ 20 \lg k - 40 \lg T\omega & \text{при } \omega \geq \omega_c, \end{cases} \quad (4.6 a)$$

де  $\omega_c$  - так як і для аперіодичної ланки першого порядку має значення частоти сполюки. Як бачимо, побудова асимптотичної ЛАЧХ майже не відрізняється від побудови ЛАЧХ аперіодичної ланки першого порядку окрім нахилу другої асимптоти, який у цьому випадку становить мінус 40дБ/Дек.

Як і для аперіодичної ланки першого порядку, найбільша відмінність (похибка) асимптотичної ЛАЧХ від точної спостерігається в області частоти сполюки  $\omega_c$ , причому вона збільшується із зменшенням коефіцієнта демпфування  $\xi$  і стає істотною при  $\xi < 0,3$ .

Часові характеристики:

- перехідна функція  $h(t) = k(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0))$ , де  
 $\alpha = \frac{\xi}{T}$ ;  $\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$ ;  $\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ . Характерний вигляд  
 перехідної характеристики коливальної ланки показаний  
 на рис. 4.9 а;
- характерний вигляд імпульсної перехідної (вагової)  
 характеристики поданий на рис. 4.9 б.

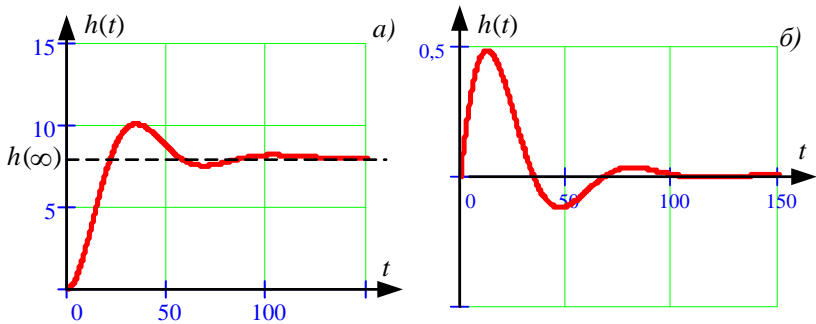


Рисунок 4.9 – Часові характеристики коливальної ланки

### Консервативна ланка ( $\xi = 0$ )

Це, за суттю, вироджений випадок коливальної ланки. Якщо  $\xi = 0$ , то передаточна функція (4.5) набуває вигляду

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}.$$

Частотні характеристики:

- амплітудна фазочастотна характеристика (АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{k}{1 - (T\omega)^2} \quad (\text{див. рис. 4.10 а});$$

- дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції (характеристики) відповідно:  $U(\omega) = \frac{k}{1 - (T\omega)^2}$ ;  $V(\omega) = 0$ .

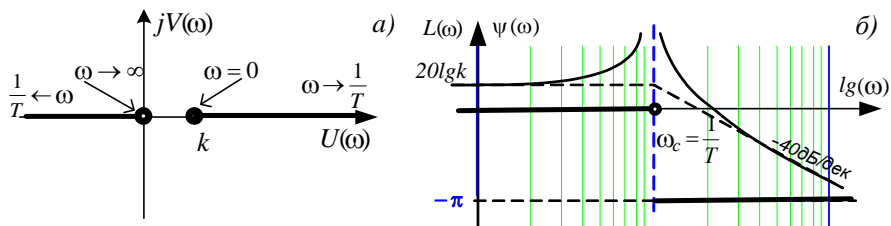


Рисунок 4.10 – Частотні характеристики консервативної ланки – амплітудно-частотна і фазочастотна функції (характеристики)  $A(\omega) = \frac{k}{1-(T\omega)^2}$ ;  $\psi(\omega) = 0$ ;

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{1-(T\omega)^2}$  (див. рис. 4.10 б).

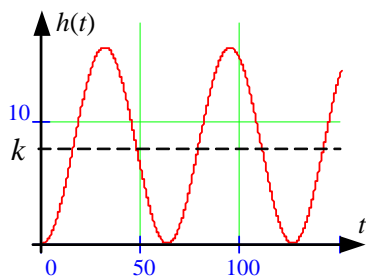


Рисунок 4.11 – Перехідна характеристика консервативної ланки

сполуки.

Необхідно відмітити, що на частоті сполуки  $\omega_c = \frac{1}{T}$  частотна характеристика консервативної ланки має розрив.

Перехідна характеристика являє собою графік гармонічних коливань (див. рис. 4.11), описуваних перехідною функцією  $h(t) = k(1 - \cos(\omega_c t))$ , з частотою  $\omega_c$ , такою, що дорівнює частоті

### Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю

1. Властивості яких ланок поєднує в собі аперіодична ланка першого порядку?
2. Що характеризує постійна часу  $T$  аперіодичної ланки першого порядку?
3. Яку геометричну фігуру являє собою графік АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку?

4. В якому місці починається (на нульовій частоті) графік АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку?
5. На якій частоті поєднуються асимптоти асимптотичної логарифмічної АЧХ аперіодичної ланки першого порядку?
6. В якій точці асимптотична логарифмічна АЧХ аперіодичної ланки першого порядку має максимальну розбіжність із звичайною?
7. Зі скількох і яких асимптот складається асимптотична логарифмічна АЧХ аперіодичної ланки першого порядку?
8. Який граничний зсув фаз аперіодичної ланки першого порядку?
9. Графік якої кривої являє собою перехідна та імпульсна перехідна характеристики аперіодичної ланки першого порядку?
10. Передаточний коефіцієнт посилення аперіодичної ланки першого порядку дорівнює значенню перехідної характеристики ... . В який момент часу?
11. Яка ланка описується диференціальним рівнянням в операторній формі  $(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)y(t) = ku(t)$  ?
12. Коефіцієнт демпфування аперіодичної ланки другого порядку більший одиниці. Як називається така ланка?
13. Коефіцієнт демпфування аперіодичної ланки другого порядку дорівнює 0,6. Як називається така ланка?
14. Коефіцієнт демпфування аперіодичної ланки другого порядку дорівнює 0. Як називається така ланка?
15. Залежно від коефіцієнта демпфування ланки другого порядку поділяються на аперіодичні, коливальні і консервативні. Які з названих ланок не є елементарними, типовими?
16. Який граничний зсув фаз коливальної ланки?
17. Чим принципово відрізняється графік АФЧХ коливальної ланки від АФЧХ аперіодичної ланки першого порядку?
18. На якій частоті поєднуються асимптоти асимптотичної логарифмічної АЧХ коливальної ланки?
19. Зі скількох і яких (за нахилом) асимптот складається асимптотична логарифмічна АЧХ коливальної ланки?
20. Що являє собою графік перехідної характеристики консервативної ланки?
21. Чому дорівнює частота гармонійних коливань консервативної ланки?
22. На якій частоті логарифмічна АЧХ консервативної ланки має розрив безперервності?

## Лекція 8

### 4.2.5 Ланка, що диференціює (ідеальна)

Ланки, що диференціюють, це такі, які реагують лише на швидкість зміни вхідного сигналу, а не на його величину (відхилення). Наприклад, якщо вхідний сигнал є постійною величиною, або наростає з постійною швидкістю, то вихідний сигнал відсутній або має постійне значення. Як і ідеальних інтегруючих, ідеальних ланок, що диференціюють, у чистому вигляді в природі не існує. Класичним прикладом наближення моделі ланки, що диференціює, може служити послідовно включений в електричний ланцюг конденсатор, проте в реальному конденсаторі завжди існують струми витоку, які спотворюють ідеалізовану передаточну функцію.

Математичний опис ланки має вигляд: у формі диференціального рівняння  $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$  і в операторній формі запису  $y(t) = kpu(t)$ , з яких бачимо, що вихідний сигнал прямо пропорційний швидкості (тобто першій похідній) зміни вхідного сигналу.

Передаточна функція ланки  $W(s) = ks$ .

Частотні характеристики:

- амплітудна фазочастотна функція (АФЧХ)  
 $W(j\omega) = jk\omega = k\omega e^{+j\pi/2}$  (див. рис. 4.12 а);
- дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції відповідно:  $U(\omega) = 0$ ;  $V(\omega) = k\omega$ ;
- амплітудно-частотна (АЧХ) і фазочастотна (ФЧХ) функції  $A(\omega) = k\omega$ ;  $\psi(\omega) = +\frac{\pi}{2}$ ;
- логарифмічна амплітудно-частотна функція (ЛАЧХ)  
 $L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg(\omega)$  (див. рис. 4.12 б).

Часові характеристики:

- перехідна функція  $h(t) = \delta(t)$  (див. рис. 4.13);



- імпульсна перехідна (вагова) функція  $w(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ .

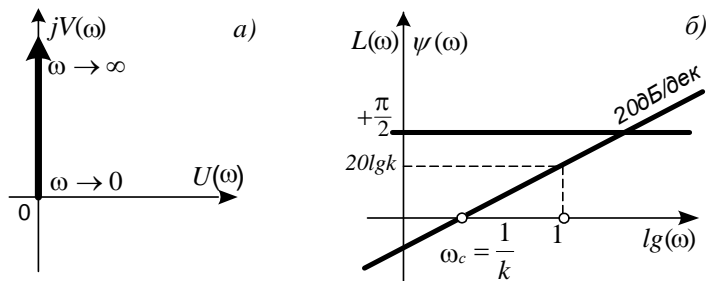


Рисунок 4.12 – Частотні характеристики ідеальної ланки, що диференціює

Аналізуючи АФЧХ (див. рис. 4.12 а), можна помітити, що

при  $\omega \rightarrow \infty$  амплітуда вихідного сигналу нескінченно наростає, але будь-який реальний об'єкт на практиці фільтрує (не пропускає) високі частоти. Це є також підтвердженням того, що в природі ідеальних ланок, що диференціюють, не може існувати. Нездійсненність ідеальної ланки, що диференціює, бачимо також з виразу для імпульсної перехідної функції, що дорівнює похідній від дельта-функції.

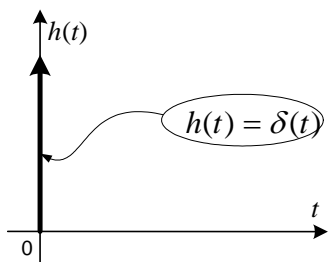


Рисунок 4.13 – Перехідна характеристика ланки, що диференціює

#### 4.2.6 Реальна ланка, що диференціює

Якщо ланка реагує на похідну вхідного сигналу, але при цьому має і інерційні властивості, то маємо реальну ланку, що диференціює, математичний опис якої в операторній формі запису  $(Tp+1)y(t) = kpu(t)$ . Подібні ланки вже зустрічаються в природі. Як приклад можна вже без припущень назвати реальний електричний RC-ланцюг із конденсатором, включеним послідовно.

Передаточна функція такої ланки  $W(s) = \frac{ks}{Ts+1}$ .

Частотні характеристики:

– амплітудна фазочастотна функція (АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{k \cdot j\omega}{Tj\omega + 1} = \frac{k\omega}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} e^{j(\pi/2 - \arctg T\omega)} \quad (\text{див. рис. 4.14 а});$$

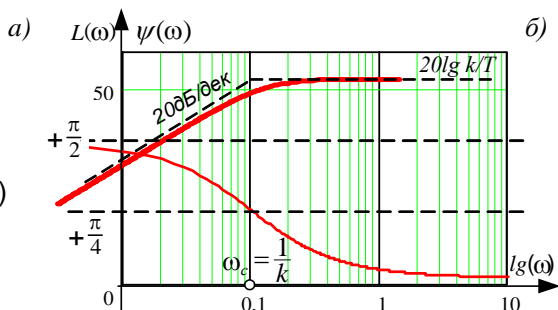
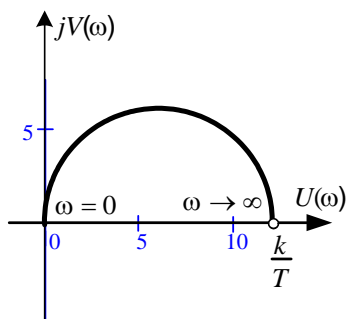


Рисунок 4.14 – Частотні характеристики реальної ланки, що диференціює

– дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції

$$\text{відповідно } U(\omega) = \frac{kT\omega^2}{(T\omega)^2 + 1}; \quad V(\omega) = \frac{k\omega}{(T\omega)^2 + 1};$$

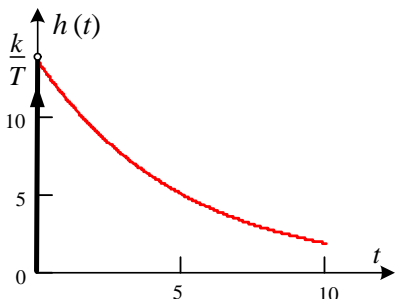


Рисунок 4.15 – Перехідна характеристика реальної ланки, що диференціює

$$\text{АЧХ і ФЧХ: } A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}};$$

$$\Psi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T);$$

– логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20\lg \frac{k}{T} + 20\lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

(див. рис. 4.14 б).

Часові характеристики:

– перехідна функція

$h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$  має стрибок у початковий момент часу, такий, що дорівнює  $k/T$ , після чого сигнал затухає по експоненті (див. рис. 4.15).

- імпульсна перехідна функція  $w(t) = -\frac{k}{T^2} e^{-t/T}$ .

#### 4.2.7 Ланка першого порядку, що форсує (ідеальна)

Ланкою, що форсує, називають ланку, що диференціює, з властивостями підсилювальної ланки з математичним описом в операторній формі запису  $y(t) = k(Tp+1)u(t)$ , вихідний сигнал якої пропорційний як самому вхідному сигналу, так і його похідній.

Передаточна функція  $W(s) = k(Ts + 1)$ .

Частотні характеристики:

- амплітудна фазочастотна характеристика (АФЧХ)  
 $W(j\omega) = k(Tj\omega + 1)$  (рис. 4.16 а);

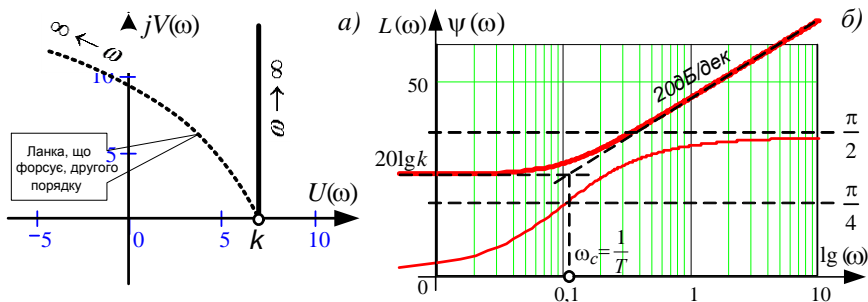


Рисунок 4.16 – Частотні характеристики ланки, що форсує, першого порядку

- дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції відповідно  $U(\omega) = k$ ;  $V(\omega) = kT\omega$ ;
- амплітудно-частотна і фазочастотна характеристики  
 $A(\omega) = k\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$ ;  $\psi(\omega) = \arctg(\omega T)$ ;

- логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20\lg k + 20\lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$  (рис. 4.16 б).

Розглядаючи частотні характеристики ланки, що форсує, можна помітити, що ця ланка в деякій мірі є повною протилежністю аперіодичній ланці першого порядку, а саме: граничний зсув фаз  $90^0$ , але зі знаком «плюс», нахил асимптоти в області високих частот 20дБ/дек, але знову ж таки з протилежним знаком.

Часові характеристики:

- перехідна функція  $h(t) = k(T\delta(t) + 1(t))$  являє собою суму масштабованої дельта-функції і одиничного ступінчастого сигналу;
- імпульсна перехідна функція, як похідна від перехідної функції, не має фізичної реалізації.

Частотні характеристики ланки що форсує, другого порядку в якійсь мірі нагадують розглянуті вище (рис. 4.16 а), однак додатний зсув фаз збільшується до  $180^0$ , а додатний нахил логарифмічної АЧХ в області високих частот стає таким, що дорівнює 40дБ/дек.

Ідеальних ланок, що форсують, (як і таких, що диференціюють) в природі не існує – всі вони мають певною мірою інерційні властивості, що виражається в наявності інтегруючої складової. Прикладом може слугувати так звана ізодромна ланка, що широко використовується в промислових регуляторах (ПІ-регулятор), з математичним описом в операторній формі запису:  $py(t) = k(\tau p + 1)u(t)$ .

### 4.3 Немінімально-фазові ланки

Поняття мінімально-фазових і немінімально-фазових ланок тісно пов'язане з поняттям стійкості (це поняття буде розглянуто пізніше) і з розміщенням нулів і полюсів передаточної функції.

Коротко нагадаємо (див. лекцію 4, п. 3.12):

- нулі передаточної функції – це корені полінома від  $s$  у чисельнику;

- полюси передаточної функції – це корені полінома від  $s$  у знаменнику.

При нулях передаточна функція перетворюється в нуль, а при полюсах – у нескінченність.

*Мінімально-фазові ланки* – це такі ланки, всі нулі і полюси передаточних функцій яких мають від’ємні або нульові дійсні частини. Всі вищерозглянуті елементарні типові ланки є мінімально-фазовими.

Якщо хоча б один нуль або полюс передаточної функції ланки має додатну дійсну частину – це *немінімально-фазова ланка*.

Немінімально-фазові ланки створюють більший від’ємний фазовий зсув порівняно з подібними мінімально-фазовими ланками і з цієї причини є нестійкими (перехідна характеристика таких ланок із часом прямує до нескінченності).

*Мінімально-фазові елементи мають важливу для практичних розрахунків властивість*: їх частотна передаточна функція повністю визначається однією з трьох складових  $A(\omega)$ ,  $U(\omega)$  або  $V(\omega)$ . Це істотно спрощує завдання аналізу та синтезу мінімально-фазових систем.

Як приклад наведемо передаточні функції немінімально-фазових (нестійких) ланок першого і другого порядку:

- нестійка аперіодична ланка першого порядку  $W(s) = \frac{k}{Ts-1}$ ;

- нестійка аперіодична ланка другого порядку

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s - 1} \text{ або } \left( \frac{k}{T_2^2 s^2 - T_1 s + 1} \right).$$

На рис. 4.17 як приклад наводяться логарифмічна амплітудна і фазочастотна характеристики нестійкої аперіодичної ланки першого порядку (на графіку суцільними лініями). Там само для порівняння пунктирною лінією показана фазочастотна характеристика аперіодичної ланки першого порядку (звичайної).

Як бачимо, амплітудні характеристики цих ланок

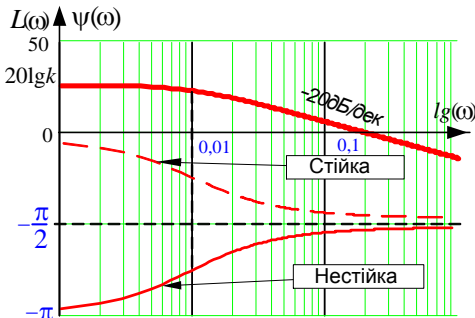


Рисунок 4.17 – Логарифмічні частотні характеристики немінімально-фазової ланки

збігаються, а зсув фаз нестійкої ланки істотно більший – він досягає мінус  $180^{\circ}$ .

У природі не мінімально-фазових ланок практично не існує – це більшою мірою математична абстракція або часто штучно створені елементи (або комп'ютерні програми). Однак у ряді випадків із ними

доводиться стикатися при декомпозиції складних систем.

#### 4.4 Трансцендентні та ірраціональні ланки. Ланка чистого запізнювання

Системи, що включають у свій склад ланки з трансцендентними та ірраціональними передаточними функціями, не є лінійними. Проте для їх дослідження в ряді випадків можуть бути використані логарифмічні частотні характеристики.

Найбільш поширеним прикладом трансцендентної ланки є ланка чистого (транспортного) запізнювання.

Це така ланка, сигнал на виході якої з'являється без зміни з деяким запізненням  $\tau$ . Як приклади таких ланок можна навести переміщення матеріалу по транспортеру, переміщення газів і рідин по довгих трубопроводах і т. п. Враховуючи їх фізичну сутність, такі ланки часто називають ланками транспортного запізнювання.

$$\text{Математичний опис ланки } y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < \tau; \\ ku(t) & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Передаточна функція  $W(s) = ke^{-\tau s}$ , де  $\tau$  – час запізнювання.

Частотні характеристики:

- амплітудна фазочастотна функція (АФЧХ)  $W(s) = ke^{-j\tau\omega} = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)$  (рис. 4.18 а);
- дійсна та уявна амплітудні фазочастотні функції відповідно  $U(\omega) = k \cos \omega\tau$ ;  $V(\omega) = -k \sin \omega\tau$ ;
- амплітудно-частотна і фазочастотна функції (характеристики)  $A(\omega) = k$ ;  $\psi(\omega) = -\omega\tau$ ;
- логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L(\omega) = 20 \lg k$  (рис. 4.18 б).

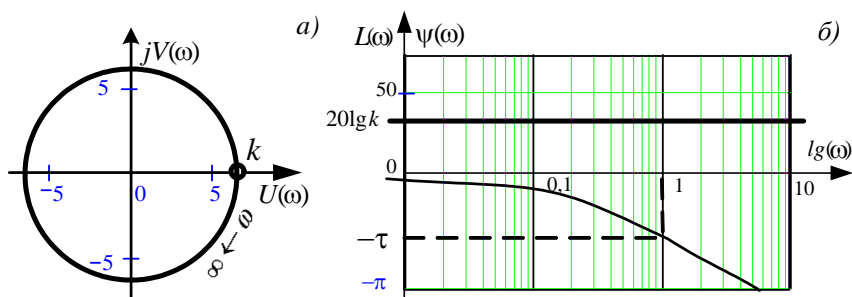


Рисунок 4.18 – Частотні характеристики ланки чистого запізнювання

Часові характеристики:

- перехідна функція  $h(t) = k \cdot 1(t - \tau)$  (рис. 4.19);

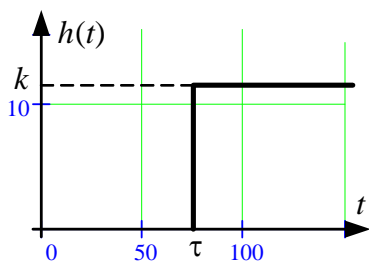


Рисунок 4.19 – Перехідна характеристика ланки чистого запізнювання

- імпульсна перехідна (вагова) функція  $w(t) = k\delta(t - \tau)$ .

У складі передаточних функцій ірраціональних ланок наявні нелінійні ірраціональні операції, наприклад, взяття квадратного кореня. Як приклад наведемо передаточну функцію напівінерційної ланки першого порядку  $W(s) = \frac{k}{\sqrt{Ts + 1}}$ .

## ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Запишіть рівняння, яке описує ідеальну ланку, що диференціює.
2. На що реагує ідеальна ланка, що диференціює: на величину вхідного сигналу, швидкість його відхилення чи прискорення?
3. Якщо на вхід ланки, що диференціює, подати сигнал, що наростає з постійною швидкістю, то вихідний сигнал ... . Як себе поведе?
4. Що собою являє логарифмічна АФЧХ ланки, що диференціює?
5. Який зсув фаз дає ідеальна ланка, що диференціює?
6. Як себе веде амплітуда при зміні частоти від нуля до нескінченності інтегруючої ланки і ланки, що диференціює?
7. Запишіть рівняння, яке описує реальну ланку, що диференціює.
8. В чому різниця поведінки амплітуди при зміні частоти від нуля до нескінченності ідеальної і реальної ланок, що диференціюють?
9. Як веде себе фазочастотна характеристика реальної ланки, що диференціює при зміні частоти від нуля до нескінченності?
10. Що собою являє АФЧХ реальної ланки, що диференціює?
11. Як веде себе перехідна характеристика реальної ланки, що диференціює?
12. Чому є пропорційним вихідний сигнал ланки, що форсує, першого порядку?
13. Який граничний зсув фаз ланки, що форсує, першого порядку?
14. Яка із зазначених ланок: ідеальна чи реальна ланка, що диференціює, чи ланка, що форсує, існує у ч природі?
15. Яка різниця між ланкою, що форсує, і аперіодичною ланкою першого порядку?
16. У чому принципова різниця між логарифмічними характеристиками ланки, що форсує, першого і другого порядку?
17. Що характерно для мінімально-фазових ланок порівняно з аналогічними мінімально-фазовими?
18. Які мають бути нулі і полюси передаточної функції мінімально-фазової ланки?
19. Наведіть приклад реалізації ланки чистого запізнювання.
20. Який вигляд має АФЧХ ланки чистого запізнювання?
21. Частота вхідного сигналу ланки чистого запізнювання збільшилася в два рази. Як зміниться амплітуда і фаза на виході?
22. Ланка транспортного запізнювання є трансцендентною чи ірраціональною?



## Лекція 9

# 5 Структурні схеми систем управління та методи їх перетворень

## 5.1 Поняття структурної схеми та її складові

При виконанні аналізу і синтезу систем автоматичного управління широко використовують структурний аналіз, основними завданнями якого є:

- ✓ вивчення впливу ланок і способів їх поєднання на властивості системи в цілому;
- ✓ перетворення багатоконтурних структурних схем до еквівалентних одноконтурних схем з метою визначення передаточних функцій для подальшого аналізу їх стійкості та якості перехідних процесів.

**Структурна схема** – це умовне графічне зображення САУ (або її частини), на якому наносяться умовними знаками всі ланки, зовнішні впливи і зв'язки ланок між собою. Структурна схема створюється на підставі аналізу передаточної функції або функціональної схеми системи. В останньому випадку назва кожного елемента схеми замінюється його математичним описом (передаточною функцією). Елемент структурної схеми не завжди відповідає елементу функціональної схеми – він може відповідати декільком елементам і навпаки.

Головна перевага структурної схеми, як і будь-якого графічного зображення – висока ступінь наочності.

Елементи структурної схеми є ланками (див. лекцію 6, п. 4.1) і зображуються у вигляді прямокутників (рис. 5.1 а), всередині яких записують передаточну функцію ланки (рідше диференціальне рівняння). Взаємозв'язки впливу на схемі зазначаються лініями зв'язку зі стрілками, над якими вказують фізичну величину  $y_i(t)$  (змінну) або її зображення за Лапласом  $Y_i(s)$  як це показано на рис. 5.1 б. Оскільки на ланку може впливати лише одна величина, то, коли їх в дійсності декілька,

використовують: арифметичну ланку – *суматор* (рис. 5.1 в) для додавання сигналів однакової фізичної природи і *елемент порівняння* (рис. 5.1 з) для віднімання. Точки на схемі, де відбувається розгалуження сигналу, називаються *вузлами* (рис. 5.1 д). У кожній ланці, як уже зазначалося, сигнал поширюється лише від входу до виходу.

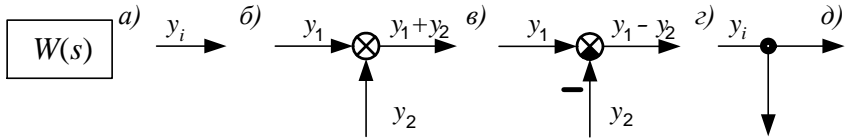


Рисунок 5.1 – Елементи структурної схеми САУ

Структурна схема показує будову САУ, наявність зовнішніх впливів і точки їх прикладання, шляхи поширення сигналів і вихідну величину. За структурною схемою можна скласти математичний опис САУ, тобто її передаточну функцію, спираючись на передаточні функції ланок. Наприклад, нехай є структурна схема деякої системи, показана на рис. 5.2.

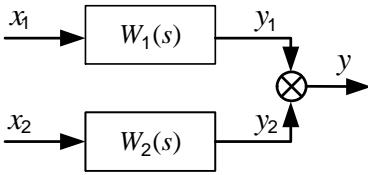


Рисунок 5.2 – Приклад структурної схеми

Зображення вихідного сигналу за Лапласом, враховуючи наявність суматора, дорівнює  $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$ . Зображення сигналів на виході кожної з динамічних ланок системи може бути визначено як  $Y_1(s) = W_1(s) \cdot X_1(s)$  і  $Y_2(s) = W_2(s) \cdot X_2(s)$ . Підставивши ці

останні вирази у перший, одержуємо співвідношення для визначення зображення вихідного сигналу через зображення вхідних та передаточні функції  $Y(s) = W_1(s) \cdot X_1(s) + W_2(s) \cdot X_2(s)$ .

При складанні структурних схем САУ необхідно додержуватися деяких елементарних правил. Починати складання структурної схеми необхідно із зображення сигналу завдання, і розміщувати динамічні ланки, з яких складається прямий ланцюг системи, зліва направо до вихідної величини.

Тоді зворотні зв'язки будуть спрямовані навпаки – справа наліво.

## 5.2 Правила перетворення структурних схем

### 5.2.1 Послідовне з'єднання ланок

Знайдемо передаточну функцію  $W(s)$  ланки (рис. 5.3 б), що є еквівалентною послідовному з'єднанню ланок (рис. 5.3 а).

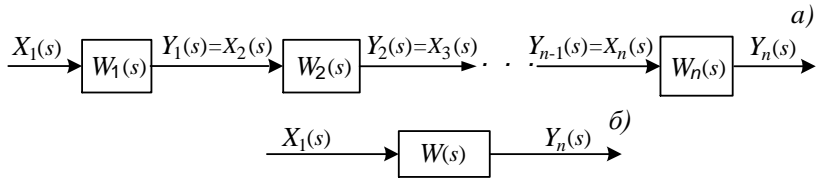


Рисунок 5.3 – Еквівалентне перетворення послідовного поєднання ланок

Зображення вихідних сигналів кожної ланки відповідно:

$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= W_1(s) \cdot X_1(s); \\
 Y_2(s) &= W_2(s) \cdot X_2(s); \\
 &\dots \\
 Y_n(s) &= W_n(s) \cdot X_n(s).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Вихідний сигнал останньої ланки є вихідним сигналом всієї системи, а еквівалентна передаточна функція всієї системи за визначенням  $W(s) = \frac{Y_n(s)}{X_1(s)}$ . При послідовному з'єднанні

вихідний сигнал кожної попередньої ланки є вхідним для наступної. Виконуючи послідовну підстановку виразів (5.1) у вираз для передаточної функції еквівалентної ланки, одержимо шукану передаточну функцію

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{Y_n(s)}{X_1(s)} = \frac{W_n(s) \cdot X_n(s)}{X_1(s)} = \frac{W_n(s) \cdot Y_{n-1}(s)}{X_1(s)} = \\
 &= \dots = W_n(s) \cdot W_{n-1}(s) \cdot \dots \cdot W_1(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Таким чином, *передаточна функція системи послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передаточних функцій ланок, що входять у це з'єднання.*

### 5.2.2 Паралельне з'єднання ланок

Знайдемо передаточну функцію  $W(s)$  ланки (рис. 5.4 б), що є еквівалентною паралельному з'єднанню ланок (рис. 5.4 а).

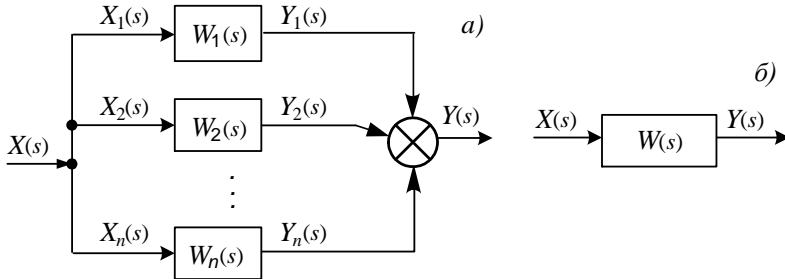


Рисунок 5.4 – Еквівалентне перетворення паралельного з'єднання ланок

Зображення вихідних сигналів кожної ланки паралельного з'єднання (рис. 5.4 а) з урахуванням  $X(s) = X_1(s) = \dots = X_n(s)$ :

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= W_1(s) \cdot X(s); \\ Y_2(s) &= W_2(s) \cdot X(s); \\ &\dots \\ Y_n(s) &= W_n(s) \cdot X(s). \end{aligned} \tag{5.3}$$

При паралельному з'єднанні вхідні сигнали всіх ланок однакові, а вихідний сигнал дорівнює сумі вихідних сигналів окремих ланок. Тоді з урахуванням (5.3)

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s) = \\ &= W_1(s)X(s) + W_2(s)X(s) + \dots + W_n(s)X(s) = \\ &= X(s)(W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s)) = X(s) \sum_{i=1}^n W_i(s). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Звідси *передаточна функція паралельного з'єднання ланок дорівнює сумі передаточних функцій окремих ланок.*

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (5.5)$$

### 5.2.3 Зустрічно-паралельне з'єднання ланок (ланка, охоплена зворотним зв'язком)

Знайдемо передаточну функцію  $W(s)$  ланки (рис. 5.5 б), що є еквівалентною зустрічно-паралельному з'єднанню ланок (рис. 5.5 а)

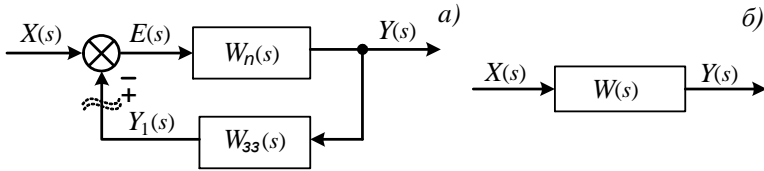


Рисунок 5.5 — Еквівалентне перетворення зустрічно-паралельного з'єднання ланок

*Зворотним зв'язком* називають передачу сигналу з виходу ланки на її вхід, де він алгебраїчно складається із вхідним сигналом або віднімається від вхідного сигналу. Система, охоплена зворотним зв'язком, називається *замкненою системою*. Елементи системи від входу до виходу являють *прямий ланцюг* із загальною передаточною функцією  $W_n(s)$ . Якщо зворотний зв'язок розірвати, як це умовно показано на рис. 5.5 а, то ланцюжок елементів від входу до точки розриву становлять *розімкнений ланцюг* системи  $W_p(s) = W_n(s)W_{33}(s)$ .

Якщо сигнал зворотного зв'язку  $Y_1(s)$  віднімається від вхідного впливу (тобто надходить на суматор зі знаком «мінус»)  $E(s) = X(s) - Y_1(s)$  – *такий зворотний зв'язок називається від'ємним*. В іншому випадку, якщо  $E(s) = X(s) + Y_1(s)$  – це *додатний зворотний зв'язок*.

Для одержання передаточної функції зустрічно-паралельного з'єднання з від'ємним зворотним зв'язком запишемо вирази для зображень вихідних сигналів кожної ланки:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= W_n(s)E(s); \\
 Y_1(s) &= W_{33}(s)Y(s); \\
 E(s) &= X(s) - Y_1(s).
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Останнє рівняння в системі (5.6) часто називають *рівнянням замикання системи*.

Виключивши проміжні величини методом підстановки, одержимо

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= W_n(s) \cdot (X(s) - W_{33}(s) \cdot Y(s)); \\
 (1 + W_n(s) \cdot W_{33}(s)) \cdot Y(s) &= W_n(s) \cdot X(s).
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Оскільки передаточна функція еквівалентної ланки  $W(s)$  це відношення зображення вихідного сигналу за Лапласом  $Y(s)$  до вхідного  $X(s)$ , то остаточно одержуємо

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s) \cdot W_{33}(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_p(s)}. \tag{5.8}$$

Якщо зворотний зв'язок додатний, то в результаті аналогічних перетворень можна одержати вираз

$$W(s) = \frac{W_n(s)}{1 - W_p(s)}, \tag{5.8a}$$

який відрізняється знаком у знаменнику. У випадку *одиночного зворотного зв'язку*, тобто, коли  $W_{33}(s) = 1$ , передаточна функція замкнутої системи визначається як

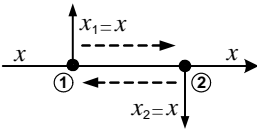
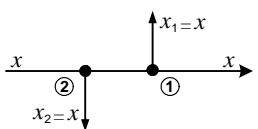
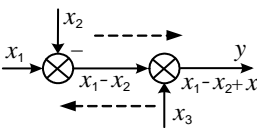
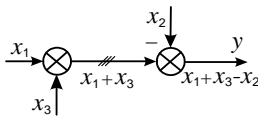
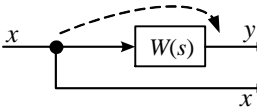
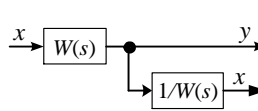
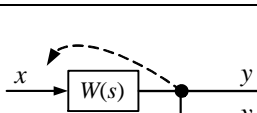
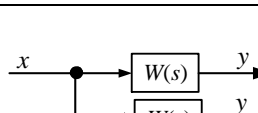
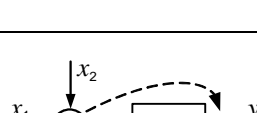
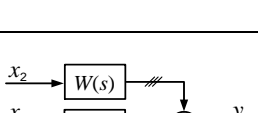
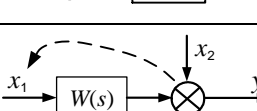
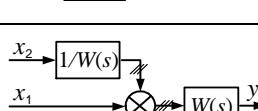
$$W(s) = \frac{W_n(s)}{1 \pm W_n(s)}. \tag{5.9}$$

### 5.2.4 Допоміжні правила перетворення структурних схем

Часто при перетворенні структурної схеми складної системи за допомогою нескладних допоміжних перетворень – перестановок, вдається звести її (або її частини) до однієї з типових схем-з'єднань елементів: послідовного, паралельного або зустрічно-паралельного. Такі операції підпорядковуються нескладним правилам і зведені в таблицю 5.1.

Основний принцип перестановки елементів структурних схем полягає в тому, щоб усі вхідні і вихідні величини вихідної і перетвореної ділянок залишалися незмінними (тотожними). При цьому можуть утворюватися ділянки нееквівалентності, що на кінцевий результат перетворення ніяк не впливає.

Таблиця 5.1 – Допоміжні правила перетворення структурних схем

Номер пор.	Операція	Вихідна схема	Перетворена схема
1	Перестановка вузлів розгалуження		
2	Перестановка суматорів		
3	Перенесення вузла розгалуження через ланку вперед		
4	Перенесення вузла розгалуження через ланку назад		
5	Перенесення суматора через ланку вперед		
6	Перенесення суматора через ланку назад		

### 5.3 Формула Мейсона

При одержанні передаточних функцій складних систем не завжди зручно користуватися правилами перетворення структурних схем. Мейсоном (англ. *Mason*) в 1953 році було запропоновано правило обчислення передаточної функції між двома вузлами  $m$  і  $n$ , яке виражається у вигляді формули

$$W_{mn}(s) = \frac{[(\sum_{j=1}^r W_{np_j}(s)) \prod_{i=1}^b (1 + W_{nk_i}(s))]^\circ}{[\prod_{i=1}^b (1 + W_{nk_i}(s))]^\circ}, \quad (5.10)$$

де  $W_{mn}(s)$  – передаточна функція між точками  $m$  і  $n$ ;

$\sum_{j=1}^r W_{np_j}(s)$  – сума  $r$  передаточних функцій різних прямих шляхів

з вузла  $m$  в  $n$ ;  $W_{nk_i}(s)$  – передаточна функція розімкнутого контура, взята зі знаком, що відповідає від'ємному зворотному зв'язку;  $\prod_{i=1}^b$  – добуток, що включає всі замкнуті контури

системи;  $^\circ$  – знак, що означає виключення з дужок всіх членів, що містять добуток передаточних функцій одних і тих самих ланок, включаючи і ланки  $W(s) = 1$ .

### 5.4 Передаточна функція типової одноконтурної САУ

Під *типовою одноконтурною системою автоматичного управління* розуміють систему, узагальнена структурна схема якої наведена на рис. 5.6. *Замкнута система називається одноконтурною*, якщо при її розмиканні одержується ланцюжок з послідовно з'єднаних ланок без наявності паралельних з'єднань і зворотних зв'язків.

Розглянемо об'єкт управління з передаточною функцією  $W_o(s)$ , який характеризується однією керованою вихідною змінною  $Y(s)$ , яку необхідно стабілізувати на заданому рівні



$X_3(s)$ . На вихідну змінну  $Y(s)$  через об'єкт управління впливає

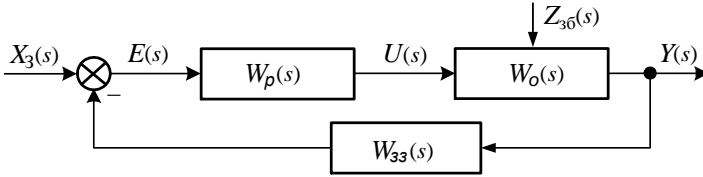


Рисунок 5.6 – Структурна схема типової одноконтурної САУ

збурення  $Z_{36}(s)$ . Відхилення змінної  $Y(s)$ , що викликається цим збуренням компенсується в системі цілеспрямованою зміною керуючого впливу  $U(s)$ , який створюється регулятором (керуючим пристроєм) із передаточною функцією  $W_p(s)$ . На вході регулятора діє сигнал неузгодженості (помилки)  $E(s)$ , що формується в результаті порівняння (алгебраїчного підсумовування) завдання  $X_3(s)$  і керованої величини  $Y(s)$ , перетвореної в ланцюгові зворотного зв'язку відповідно до передаточної функції  $W_{33}(s)$ .

Для типової одноконтурної САУ, поданої на рис. 5.6, може бути складено кілька передаточних функцій: *за завданням*, *за збуренням* і *по відхиленню* (за неузгодженням).

*Передаточна функція за завданням* (за каналом впливу завдання) визначається як відношення зображення за Лапласом вихідного сигналу  $Y(s)$  до зображення сигналу завдання  $X_3(s)$  при відсутності впливу збурення  $Z_{36}(s) = 0$  і, з урахуванням правил структурних перетворень зустрічно-паралельних з'єднань та від'ємності зворотного зв'язку, подається у вигляді

$$W_{XY}(s) = \frac{Y(s)}{X_3(s)} = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1 + W_p(s)W_o(s)W_{33}(s)}. \quad (5.10)$$

У випадку *одиночного* від'ємного зворотного зв'язку ( $W_{33}(s) = 1$ ) вираз (5.10) спрощується

$$W_{XY}(s) = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1+W_p(s)W_o(s)} = \frac{W_n(s)}{1+W_n(s)}, \quad (5.10 a)$$

де  $W_n(s)$  – передаточна функція прямого ланцюга САУ.

*Передаточна функція за неузгодженням* (за помилкою) визначається як відношення зображення за Лапласом вихідного сигналу  $Y(s)$  до зображення сигналу неузгодженості  $E(s)$  при відсутності впливу збурення  $Z_{3\sigma}(s) = 0$  і подається у вигляді (без доказу)

$$W_{EY}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1+W_p(s)W_o(s)W_{33}(s)}. \quad (5.11)$$

*Передаточна функція за збуренням*, що визначається як відношення зображення за Лапласом вихідного сигналу  $Y(s)$  до зображення сигналу збурення  $Z_{3\sigma}(s)$  при відсутності впливу завдання  $X_3(s)$ , істотно залежить від місця прикладання дії збурення і не може бути визначена в загальному вигляді.

*Багатоконтурні системи управління* (або системи підпорядкованого управління) при розмиканні утворюють паралельні з'єднання або мають зворотні зв'язки, які називаються *місцевими* (внутрішніми) і можуть бути перехресними.

Для одержання передаточної функції складної багатоконтурної системи управління необхідно, насамперед, перестановкою вузлів і суматорів домогтися виключення перехресних зв'язків, а потім, використовують три основні правила перетворення структурних схем, перетворити її в типову одноконтурну.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Що наноситься умовними знаками на структурну схему САУ?
2. У чому головна перевага структурної схеми?
3. Чим на структурній схемі зображуються динамічні елементи?

4. Який елемент використовується в структурній схемі для підсумовування двох сигналів?
5. Який елемент використовується в структурній схемі для порівняння двох сигналів?
6. Як називається точка на структурній схемі, де відбувається розгалуження сигналу на декілька напрямів?
7. Чому дорівнює передаточна функція послідовно з'єднаних ланок?
8. Чому дорівнює передаточна функція паралельно з'єднаних ланок?
9. Чому дорівнює передаточна функція ланки, охопленої зворотним зв'язком?
10. Що таке зворотний зв'язок у системі управління?
11. Які елементи включаються в прямий ланцюг системи управління?
12. Які елементи включаються в ланцюг розімкненої системи управління?
13. Чим відрізняється додатний зворотний зв'язок від від'ємного?
14. Що таке одиничний зворотний зв'язок?
15. У чому полягає основний принцип, якого необхідно дотримуватися при перестановці елементів структурних схем?
16. Які дії необхідно виконати при перестановці вузлів структурної схеми?
17. Перенесення суматора через ланку вперед супроводжується ... . Чим?
18. Перенесення суматора через ланку назад супроводжується ... . Чим?
19. Перенесення вузла через ланку вперед супроводжується ... . Чим?
20. Перенесення вузла через ланку назад супроводжується ... . Чим?
21. Що таке ділянка нееквівалентності на перетвореній структурній схемі?
22. Чим відрізняється багатоконтурна САУ від типової одноконтурної?
23. Яке допущення робиться при одержанні передаточної функції одноконтурної системи за завданням?
24. Що роблять, щоб структурну схему багатоконтурної системи перетворити в структурну схему одноконтурної?

## Лекція 10

### 6 Методи одержання математичного опису елементів і систем

Раніше (див. лекцію 3) було надане загальне поняття математичної моделі та моделювання, а також класифікація моделей із позицій теорії управління. У всіх наступних лекціях усі міркування були ґрунтовані на припущенні про наявність математичного опису об'єкта управління в одній із форм: у вигляді системи диференціальних рівнянь, у вигляді передаточної функції або перехідної (рідше, вагової) характеристики. Таким чином ми переконалися, наскільки важливою і необхідною для аналізу та синтезу систем управління є наявність математичного опису її елементів.

Разом із тим при проектуванні систем автоматичного управління (САУ) можуть виникати ситуації, коли математичної моделі (насамперед об'єкта управління) немає або вона не відповідає вимогам. У такому разі неминуче першим етапом проектування САУ стає розроблення математичного опису одним з існуючих методів: *аналітичним або експериментальним*.

#### 6.1 Аналітичний метод одержання математичного опису

Як уже згадувалося (див. лекцію 3, п. 3.3), аналітичний метод побудови математичних моделей базується на використанні фундаментальних теоретичних законів природи. Особливістю методу є те, що він вимагає серйозної теоретичної підготовки фахівців, причому часто в декількох прикладних галузях знань, і, на жаль, немає єдиної інструкції або алгоритму, дотримуючись яких, можна було б досить просто розробити математичну модель будь-якого процесу або об'єкта. Створення кожного математичного опису – процес суто індивідуальний, творчий, та вимагає серйозних знань і досвіду. Можна навіть

сказати, що розроблення математичних моделей більшою мірою є мистецтвом, ніж інженерною діяльністю.

Разом з тим вдалось сформулювати деякі загальні підходи і формалізувати принципи, покладені в основу процесу побудови математичних моделей аналітичним методом.

*Увесь процес створення математичного опису може розглядатися як сукупність трьох аспектів:*

- *сміслового*, що полягає в дослідженні і описі фізичної природи явищ і процесів в об'єкті моделювання, результатом чого є *формалізований опис*;
- *аналітичного*, що полягає в представленні формалізованого опису мовою математики у вигляді системи рівнянь і функціональних співвідношень між вихідними і вхідними змінними, результатом чого є *математичний опис*;
- *обчислювального*, що полягає у визначенні послідовності операцій, які необхідно виконати з математичним описом (системою рівнянь), щоб визначити невідомі вихідні змінні, результатом чого є створення *моделюючого алгоритму*.

Враховуючи сучасний рівень розвитку обчислювальної техніки і чисельних методів, у більшості випадків практики можна обмежитися розглядом двох перших аспектів; створення моделюючого алгоритму потрібно у відносно нечастих випадках відносно складних об'єктів моделювання.

*Найбільш складним аспектом аналітичного методу розроблення математичного опису є смисловий, який в загальному випадку включає такі етапи:*

– *виділення «елементарних» процесів*, що відбуваються в об'єкті моделювання. Поняття «елементарного» процесу досить складне, умовне і часто абстрактне. Для його виділення на тлі всіх явищ потрібен певний досвід і запас знань. У найпростіших випадках «елементарний» процес відповідає самому об'єкту (ємність із рідиною, нагрівання газу тощо), у більш складних випадках в об'єкті моделювання сплітаються разом безліч

«елементарних» процесів. Перелік «елементарних» процесів у природі дуже великий: гідродинаміка потоків, хімічні перетворення, процеси тепло- і масообміну та інше;

– *визначення сукупності змінних* (координат), що відображають стан кожного елементарного процесу (вихідні змінні чи змінні стану) або впливають на нього (вхідні змінні);

– *формулювання системи припущень, гіпотез або ідеалізація механізмів процесів*, що відбуваються в об'єкті. Повнота і точність математичного опису «елементарних» процесів залежить від складності взаємозв'язків у об'єкті, що моделюється. У разі якщо взаємозв'язки дуже складні або недостатньо вивчені, доводиться робити різні припущення щодо їх характеру або виду, що дозволяє у багатьох випадках спростити модель при збереженні її точності.

Найбільш загальним прийомом складання математичного опису є так званий *блочний принцип*, згідно з яким послідовно проводять аналіз окремих «елементарних» процесів в умовах максимально наближених до реальних із подальшим їх об'єднанням. Ця процедура складається з таких етапів:

– досліджується гідродинамічна модель процесу як основа структури математичного опису і приймається рішення щодо вибору моделі гідродинаміки або її ідеалізації;

– вивчаються кінетика хімічних реакцій, процеси масо- і теплопередачі та інші «елементарні» процесів з урахуванням прийнятої гідродинамічної моделі і складається математичний опис кожного з них окремо. Необхідно зазначити, що у разі відсутності теоретичного (аналітичного) виразу (закону) для якогось з «елементарних» процесів можуть бути використані емпіричні або напівемпіричні залежності, одержані дослідним шляхом, які, хоча і встановлюють функціональні зв'язки між змінними процесу, але не відображають фізичної суті явища (або відображають її частково);

– об'єднання всіх математичних описів «елементарних» процесів у єдину систему рівнянь математичного опису об'єкта.

У загальному випадку математична модель, одержана аналітичним методом, включає такі групи рівнянь:

- рівняння балансу мас, енергії, імпульсу тощо;
- рівняння «елементарних» процесів для локальних елементів потоку (закони масо- і теплопередачі, кінетики хімічних реакцій та інше);
- теоретичні, емпіричні та напівемпіричні співвідношення між різними змінними процесу (наприклад, закон газового стану Бойля–Маріотта, залежність теплоємності від температури та інше);
- рівняння обмежень на змінні процесу, базовані на фізичній сутності поняття фізичної реалізованості (наприклад, температура не може бути негативною величиною, сума концентрацій компонентів дорівнює одиниці та інше).

При створенні математичного опису допускається використання будь-яких типів рівнянь: кінцевих (алгебраїчних і трансцендентних), диференціальних (звичайних і в часткових похідних), інтегральних, кінцево-різницевих, логічних та ін.

*Загальною і необхідною умовою правильності складання математичного опису є те, що число рівнянь і різних співвідношень у його складі, які зв'язують між собою вхідні (незалежні) і вихідні (залежні) змінні, має дорівнювати кількості вихідних змінних (так звана умова розв'язку або замкнутості).*

Чим складніший об'єкт моделювання, тим більше «елементарних» процесів входять до його складу і тим складніші взаємозв'язки між ними. Разом із тим аналіз цих процесів часто дозволяє виділити з усього їх різноманіття ті, які є найбільш значущими, і знехтувати впливом інших. Так формується система припущень та ідеалізацій об'єкта моделювання, яка визначається безліччю факторів: особистістю і теоретичною підготовкою дослідника, вивченістю об'єкта, поставленими завданнями та ін. Як результат одному й тому ж самому об'єкту моделювання може бути поставлено у відповідність безліч варіантів математичних описів, що відрізняються деталізацією (глибиною моделювання). *Ступінь*

глибини деталізації математичного опису (не беручи до уваги об'єктивні фактори) визначається, насамперед, кінцевою метою використання математичної моделі і трьома основними вимогами:

- ✓ *необхідною точністю* математичної моделі (ступенем збігу значень вихідних змінних, передбачених за допомогою моделі, їх фактичним значенням);
- ✓ *економічністю моделі* (витратами на створення математичної моделі, які залежать від кількості вихідних змінних і складності процесу);
- ✓ *ступенем універсальності моделі* (можливістю використання математичної моделі для групи однотипних об'єктів).

Як би ґрунтовно не розроблялася математична модель, вона завжди відображає фізичну дійсність із більшою або меншою точністю. *Основними причинами неточностей*, які виникають у ході розроблення моделі, є:

- помилки, наявні в законах (порівняйте, наприклад, класичну механіку і теорію відносності);
- принципова неможливість врахування всіх «елементарних» процесів;
- свідомі спрощення і система прийнятих допущень;
- ідеалізація процесів (модель ідеального перемішування, витіснення тощо);
- помилки обчислювального алгоритму та помилки округлення ЕОМ.

Ступінь відповідності математичної моделі реальному об'єкту визначається за ідентичністю зміни вихідних змінних моделі і об'єкта при однакових вхідних впливах. Якщо ці зміни добре узгоджуються, то, кажуть, що *математична модель адекватна* (адекватно відображає) *фізичному об'єкту*.

Через неминучу неточність розроблюваної аналітичної математичної моделі *останнім етапом розробки завжди є перевірка адекватності* (встановлення ступені відповідності математичної моделі реальному об'єкту), результатом чого може



бути внесення коректив і повторення попередніх кроків. Перевірка виконується на діючому об'єкті або на його фізичній моделі.

## **6.2 Експериментальний метод одержання математичного опису**

Незважаючи на велику привабливість аналітичного методу складання математичного опису, яка виражається, насамперед, у більш чи менш точному відображенні фізичної сутності процесів, що відбуваються в об'єкті моделювання, у багатьох практичних випадках застосування цього методу являє собою або вкрай складну, або економічно невиправдану задачу. У таких випадках вдаються до *експериментального методу одержання математичного опису*, суть якого полягає в одержанні у результаті проведення комплексу експериментів на діючому об'єкті його часових або частотних характеристик і подальшому відновленні (відтворенні) за ними математичного опису, найчастіше у вигляді передаточної функції. Задача визначення структури та параметрів систем за спостереженнями вхідних і вихідних змінних є однією з основних у сучасній теорії та практиці автоматичного управління і відома як *задача ідентифікації систем*.

Залежно від ступеня впливу на хід проходження процесу при проведенні експериментів розрізняють *активні і пасивні методи ідентифікації*.

При використанні *пасивних методів ідентифікації* математична модель об'єкта знаходиться за результатами спостережень за природними змінами вхідних і вихідних величин у процесі нормального проходження технологічного процесу *без будь-якого спеціального втручання ззовні*. Саме ця обставина робить цей метод вкрай привабливим порівняно з активними методами.

*Активні методи ідентифікації* допускають проведення на діючому об'єкті спеціальних експериментів, які порушують певною мірою режим нормального функціонування, що,

безсумнівно, створює ряд труднощів технічного і організаційного характеру. Разом із тим активні методи дозволяють одержувати більш надійні й точні результати при обмеженому часі досліджень.

Процес експериментального одержання математичної моделі об'єкта як за допомогою активного, так і пасивного експериментів, складається з таких етапів:

1. *Планування та підготовка експериментів.* На цьому етапі дослідник повинен прийняти рішення про вибір методу ідентифікації та виконати комплекс технічних заходів, пов'язаних із підбором і підготовкою вимірювальної апаратури, а також забезпечити організаційну сторону проведення експерименту. Останнє набуває особливого значення у випадку планування активного експерименту.
2. *Проведення експерименту.*
3. *Попередня обробка результатів.* Тут необхідно виділити дві задачі:
  - трудомістка задача переведення результатів у цифрову форму виникає у разі використання контрольно-вимірювальних приладів із реєстрацією вимірювань на паперових носіях (діаграмах). Сучасні засоби вимірювання на базі мікропроцесорної техніки дозволяють зберігати або реєструвати результати вимірювань безпосередньо в цифровому вигляді.
  - задача виключення з результатів експерименту випадкових несистематичних помилок (задачі фільтрування або згладжування). Для цих цілей використовуються такі методи згладжування експериментальних даних, як метод ковзної медіани (ковзного середнього), метод четвертих різниць та ін.
4. *Одержання математичного опису* в результаті апроксимації одержаних експериментально даних.

### **6.2.1 Пасивний метод ідентифікації**

*У результаті проведення пасивних експериментів можна*

одержати оцінку вагової характеристики стаціонарної лінійної системи, на вихідну величину якої накладається випадкова неконтрольована стаціонарна завада (рис. 6.1).

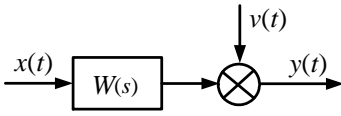


Рисунок 6.1 – Схема експерименту

Для цього можна скористатися рівнянням Вінера-Хопфа

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) r_{xx}(\tau - \xi) d\xi, \quad (6.1)$$

де  $r_{xy}(\tau), r_{xx}(\tau)$  – взаємна кореляційна функція вхідного і вихідного сигналів і автокореляційна функція вхідного впливу відповідно;  $w(\xi)$  – вагова функція системи, що досліджується.

Обмежений на практиці час реєстрації сигналів  $x(t)$  і  $y(t)$  дозволяє одержати не справжні кореляційні функції вхідних і вихідних сигналів, а їхні статистичні оцінки, тому в результаті замість істинної вагової функції одержують лише її оцінку.

Успішне застосування пасивних методів ідентифікації можливо при виконанні як мінімум двох умов:

- 1) випадкові завади  $v(t)$ , які спотворюють реакцію об'єкта на вхідний вплив, повинні бути незалежні від цього впливу, інакше у складі похибки оцінки динамічної характеристики крім випадкової складової (з нульовим математичним очікуванням!) буде наявна ще одна важко оцінювана складова, що спотворює результат. На жаль, ситуація, яка виникає при ідентифікації реальних об'єктів управління, складається так, що найчастіше зазначена умова не виконується. Причиною тому є наявність зворотного зв'язку з виходу об'єкта на його вхід за відомим алгоритмом за наявності систем автоматизації або через дії людини-оператора, які важко формалізувати, при відсутності САУ. В результаті вхідний вплив формується не незалежно, а під впливом вихідного сигналу, який є реакцією системи на зовнішні збурення;
- 2) вхідний вплив, за яким ведеться ідентифікація, повинна мати достатньо широкий частотний спектр, не менший,

принаймні, ніж ширина смуги пропускання частот самого об'єкта. Відомо, що вагова характеристика є реакцією системи на вплив (імпульс) із нескінченно широкою смугою спектра частот, у той час як будь-який реальний сигнал має обмежений спектр. Тому задачу (6.1) взагалі можна вважати некоректно поставленою, так як наявність малих похибок обчислення кореляційних функцій  $r_{xy}(\tau)$ ,  $r_{xx}(\tau)$  призводить до появи будь-яких великих похибок в оцінці вагової характеристики.

Зазначені вище труднощі ідентифікації на основі пасивного експерименту зростають у разі багатовимірною і нелінійного об'єкта. Тому метод пасивної ідентифікації на практиці відіграє допоміжну роль як засіб одержання динамічних характеристик лише по каналах зовнішніх збурень (при відомих характеристиках каналів управління) лише для лінійних об'єктів і, незважаючи на активне використання в теоретичних роботах, поки що не знайшов широкого практичного застосування.

### **6.2.2 Активний метод ідентифікації**

*У результаті проведення активних експериментів одержують оцінки:*

- ✓ перехідної характеристики об'єкта («криву розгону») подачею на його вхід ступінчастого сигналу, що наближається за формою до одиничного ступінчастого;
- ✓ вагової характеристики об'єкта (значно рідше) подачею на його вхід сигналу, що нагадує дельта-функцію;
- ✓ частотної характеристики об'єкта подачею на його вхід сигналів синусоїдальної форми (іноді трапецеїдальної або прямокутної).

Найбільш важливим із точки зору одержання кінцевого результату при використанні активного методу ідентифікації є останній, завершальний етап – апроксимація одержаної часової або частотної характеристики. За своєю суттю задача апроксимації відноситься до так званих зворотних задач і тому

допускає необмежену безліч рішень. Процес її рішення, незалежно від використовуваного методу, як правило, складається з двох етапів:

- вибір виду апроксимуючої аналітичної залежності, оснований на аналізі зовнішнього вигляду одержаної характеристики і наявному досвіді (тобто визначення структури математичного опису);
- обробка експериментальних даних за певним алгоритмом (визначення параметрів математичного опису за умови мінімізації прийнятого критерію наближення характеристик).

На теперішній час запропоновано значну кількість методів апроксимації, методика застосування яких, як правило, досить складна і громіздка для викладу в одній лекції, але добре представлена в спеціальній літературі. Тому обмежимося лише переліченням деяких із них:

1. Одержання передаточної функції по кривій розгону методом площ (метод Сімою).
2. Одержання передаточної функції по кривій розгону методом додаткових членів.
3. Одержання передаточної функції по кривій розгону методом послідовного логарифмування.
4. Одержання передаточної функції по кривій розгону методом визначення постійних часу за допомогою графічних побудов (цілий ряд методів).
5. Одержання передаточної функції по асимптотичній логарифмічній амплітудній фазочастотній характеристиці.
6. Оцінка вагової характеристики об'єкта за допомогою псевдовипадкового сигналу.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. З яких причин при проектуванні САУ з'являється необхідність створення математичної моделі?

2. Які два методи створення математичного опису ви знаєте?
3. Що покладено в основу побудови математичної моделі аналітичним способом?
4. Чи існує алгоритм, дотримуючись якого, можна розробити будь-яку математичну модель?
5. Що є результатом виконання смислового аспекту розробки математичної моделі?
6. Що є результатом виконання аналітичного аспекту розробки математичної моделі?
7. Назвіть етапи смислового аспекту розробки математичного опису.
8. Як називається принцип розробки математичного опису, який полягає в послідовному аналізі «елементарних» процесів із подальшим їх об'єднанням?
9. Назвіть кілька груп рівнянь, із яких складається аналітична модель.
10. У чому полягає умова можливості розв'язання математичної моделі?
11. Скільки варіантів математичного опису може бути поставлено у відповідність одному об'єкту?
12. Якщо математична модель відповідає об'єкту, то, кажуть, математична модель ... .
13. У чому суть (коротко) експериментального методу одержання математичної моделі?
14. Як називається задача відтворення структури і параметрів систем за спостереженнями вхідних і вихідних змінних?
15. Що є привабливим для дослідника в пасивному методі ідентифікації?
16. У чому головна перевага активного методу ідентифікації?
17. Навіщо потрібна попередня обробка результатів експериментів?
18. Яку характеристику можна одержати при проведенні пасивного експерименту?
19. Наскільки широко використовуються на практиці пасивні методи ідентифікації?
20. Які характеристики об'єкта можна одержати при проведенні активного експерименту?
21. Скільки розв'язків має задача апроксимації динамічних характеристик об'єкта?
22. Звідки дослідник бере вид аналітичної апроксимуючої залежності?

# Лекція 11

## 7 Аналіз систем автоматичного управління

У теорії автоматичного управління розрізняють дві основні задачі: *задача аналізу* і *задача синтезу систем*.

При вирішенні *задачі аналізу* вважається, що система управління існує і працездатна. Потрібно лише оцінити параметри якості процесу управління, які характеризують точність і плавність проходження перехідного процесу. Через деякі особливості *задача аналізу відноситься до так званих прямих задач і завжди має лише одне рішення*.

*Задача синтезу* системи автоматичного управління є *зворотною задачею* і полягає у визначенні алгоритму управління і виборі структури, що реалізує цей алгоритм, і параметрів, що задовольняють заданим показникам якості. *Задача синтезу на відміну від задачі аналізу має, як правило, безліч рішень*.

Робота будь-якої системи автоматичного управління оцінюється *стійкістю* і *якістю управління*. Питання стійкості системи автоматичного управління будуть розглянуті дещо пізніше (розділ 8, частина 2).

Поняття якості системи автоматичного управління охоплює оцінки її *статичних* та *динамічних властивостей*, виражених у кількісній формі, які одержали назву показників якості процесу управління. Такими показниками якості є *точність в усталеному режимі* (статична точність) і *якість перехідного процесу* (динамічна точність).

Розглянемо структурну схему найпростішої типової системи автоматичного управління (див. рис. 7.1). При довільній зміні сигналу завдання на вході  $g(t)$  сигнал на виході системи  $y(t)$  являє собою загальне рішення диференціального рівняння, що описує динаміку системи, і буде

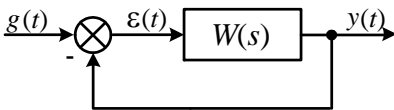


Рисунок 7.1 – Типова САУ

складатися з двох доданків

$$y(t) = y_{вн}(t) + y_{вм}(t), \quad (7.1)$$

де  $y_{вн}(t)$  – вільна складова рішення, яка прямує для працездатних (стійких) систем із часом до нуля і  $y_{вм}(t)$  – вимушена складова рішення, вигляд і величина якої визначається сигналом завдання  $g(t)$ . Відповідно до цього розрізняють дві групи показників якості роботи системи:

- ✓ *точність в усталеному режимі*, яка оцінюється наявністю і величиною помилки неузгодженості між заданим  $g(t)$  і фактичним усталеним значенням вихідної змінної  $y_{вм}(t)$ .
- ✓ *група показників якості перехідного процесу*, які одержуються за зовнішнім виглядом  $y_{вн}(t)$ . Єдиного показника якості перехідного процесу не існує. Для її оцінювання використовують або деяку множину окремих показників чи критеріїв, або формують узагальнені, інтегровані показники.

## **7.1 Статична точність систем автоматичного управління**

Розглянемо показники якості, що характеризують вимушену складову помилки слідкування  $\varepsilon_{вм}(t)$  стійкої системи (рис. 7.1) при порівняно повільній зміні сигналу  $g(t)$ , що характерно для слідкуючих систем і систем програмного управління. Усталена похибка неузгодження системи  $\varepsilon_{вм}(t) = g(t) - y_{вм}(t)$ .

Передаточна функція замкнутої системи по відношенню до помилки неузгодженості, викликаной впливом завдання, одержується у вигляді (див. лекцію 9, п. 5.4)

$$W_{ge}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1+W(s)}. \quad (7.2)$$

Вираз (7.2) завжди можна подати у вигляді відношення поліномів



$$W_{ge}(s) = \frac{R(s)}{s^N Q(s)}, \quad (7.2a)$$

де поліноми  $R(s)$  і  $Q(s)$  ніколи не перетворюються в нуль при  $s = 0$ , а  $N$  – це кількість вільних інтеграторів (інтегруючих ланок, що не входять в який-небудь внутрішній контур), яка визначає тип системи управління, як це буде показано нижче.

З урахуванням рівняння (7.2) зображення за Лапласом сигналу помилки неузгодженості

$$E(s) = \frac{1}{1+W(s)} G(s) = W_{ge}(s) \cdot G(s). \quad (7.3)$$

Передаточну функцію  $W_{ge}(s)$  в (7.3) можна розкласти в ряд Тейлора за зростаючими ступенями  $s$  поблизу точки  $s = 0$ , що відповідає великим значенням часу ( $t \rightarrow \infty$ ), тобто значенню усталеної помилки при заданому значенні  $g(t)$ . Тоді (7.3) набере вигляд

$$E(s) = (C_0 + C_1 s + \frac{1}{2!} C_2 s^2 + \dots + \frac{1}{m!} C_m s^m) \cdot G(s). \quad (7.4)$$

Якщо  $W_{ge}(s)$  є дробово-раціональною функцією (тобто має вигляд відношення двох поліномів, що частіше всього і буває на практиці), то розкладання можна виконати діленням чисельника на знаменник, розміщуючи члени за зростанням ступенів.

Перейшовши в (7.4) від зображень до оригіналів, одержимо вираз для помилки як функцію вхідного сигналу завдання

$$\varepsilon_e(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m g(t)}{dt^m}. \quad (7.5)$$

Коефіцієнти  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$  називаються **коефіцієнтами помилок**. Вони визначаються за формулами розкладання функції  $W_{ge}(s)$  в ряд Тейлора як часткові похідні виду

$$C_0 = [W_{ge}(s)]_{s=0}, C_1 = \left[ \frac{W_{ge}(s)}{\partial s} \right]_{s=0}, \dots, C_m = \left[ \frac{\partial^m W_{ge}(s)}{\partial s^m} \right]_{s=0}. \quad (7.6)$$

Якщо  $g(t) = 1(t)$  (тобто **постійний сигнал**), то всі похідні  $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \dots = \frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0$  і тоді  $C_0 = W_{ge}(0)$ , а  $C_1 \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \dots = \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0$ . З урахуванням (7.5)  $C_0$  набуває значення усталеної помилки в замкнутій системі (так як  $g(t) = 1(t)$ ).

Якщо  $g(t) = t$  (тобто **лінійний сигнал**), то  $\frac{dg(t)}{dt} = 1$ , а всі інші похідні дорівнюють нулю. Тоді  $C_0 = W_{ge}(0)$ ,  $C_1 = \left[ \frac{\partial W_{ge}(s)}{\partial s} \right]_{s=0}$ , а  $\frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \dots = \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0$  і т. д.

*Коефіцієнт  $C_0$  називають коефіцієнтом статичної або позиційної помилки; коефіцієнт  $C_1$  – коефіцієнтом швидкісної помилки;  $C_2$  – коефіцієнтом помилки щодо прискорення.*

**Зауваження 1.** Часто передаточна функція замкнутої системи є складною для диференціювання, тоді коефіцієнти помилок можна визначити за рекурентною формулою

$$C_k = \frac{1}{a_0} (b_k - \sum_{r=1}^k C_{k-1} \cdot a_r), \quad (7.7)$$

де  $a_r$  – коефіцієнти полінома в знаменнику ( $a_0$  – вільний член), причому при  $r > n$ , де  $n$  – порядок полінома,  $a_r \equiv 0$ ;  $b_k$  – коефіцієнти полінома в чисельнику, причому при  $k > m$ , де  $m$  – порядок полінома,  $b_k \equiv 0$ .

**Зауваження 2.** Використовуючи наведену вище методику можна одержати коефіцієнти помилок і по відношенню до зовнішнього збурення. При цьому змінитися лише вид передаточної функції системи.

**Зауваження 3.** Величину усталеної помилки можна визначити також, використовуючи теорему про кінцеве значення (граничну теорему) з властивостей перетворень Лапласа

$$\varepsilon_\sigma(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (7.8)$$

за умови, що межа існує, тобто похибка  $\varepsilon_\sigma(t)$  має кінцеве значення (обмежена).

*Система, в якій будь-який (навіть постійний) зовнішній вплив  $g(t)$  створює помилку в усталеному режимі, називається статичною. У статичних системах коефіцієнт  $C_0$  (а також, можливо, і інші) відмінний від нуля і відсутні інтегруючі ланки.*

*Система, яка постійний зовнішній вплив  $g(t) = \text{const}$  (або додатково ще і лінійний, квадратичний і т. д.) відтворює без помилки в усталеному режимі, називається астатичною. Зовнішньою ознакою астатичної системи є наявність у її складі інтегруючих ланок. Кількість інтегруючих ланок визначає порядок астатизму. У системах з астатизмом 1-го порядку є одна інтегруюча ланка; коефіцієнт  $C_0 = 0$ , а всі інші відмінні від нуля. У системах з астатизмом 2-го порядку дві інтегруючі ланки; коефіцієнти  $C_0 = C_1 = 0$ , а інші відмінні від нуля. Зі збільшенням порядку астатизму (числа інтегруючих ланок) збільшується число коефіцієнтів помилок таких, що дорівнюють нулю, тобто все більш складніші вхідні сигнали відтворюються системою без помилки, але при цьому все важче стає забезпечити її стійкість і якість управління в динаміці.*

Якщо на систему крім завдання діє і збурення, то астатизм системи істотно залежить від місця включення інтегруючої ланки. При цьому система астатична за каналом завдання може бути статичною за збуренням або навпаки.

## 7.2 Динамічна точність систем автоматичного управління

Точність систем автоматичного управління в перехідному режимі оцінюють за допомогою прямих і непрямих показників (критеріїв) якості.

*Прямі показники якості* визначають за кривою перехідного процесу, що виникає в системі при типовому зовнішньому

впливі (як правило, за перехідною характеристикою).

*Непрямі показники якості* визначають, використовуючи частотні характеристики системи або розміщення коренів характеристичного рівняння.

### 7.2.1 Прямі показники якості систем автоматичного управління

Перехідний процес у динамічній системі залежить не лише від її властивостей, але і від характеру прикладеного зовнішнього впливу. Для можливості порівняння динамічних характеристик різних систем управління використовують типові впливи: одиничний східчастий, імпульсний або гармонійний. *На практиці для аналізу найчастіше використовують одиничний східчастий вплив*, що забезпечує найбільш важкі умови випробування системи: знаючи показники якості системи в таких умовах можна бути впевненими, що в інших, більш легких умовах, якість її роботи буде кращою.

В останній час роль прямих показників якості значно зросла. Це пов'язано з тим, що розроблені і одержали широке поширення потужні засоби комп'ютерного моделювання систем управління, які дозволяють просто, точно і швидко розрахувати перехідні характеристики практично будь-якої системи, і тому непрямі показники якості нині більшою мірою відіграють ілюстративну роль.

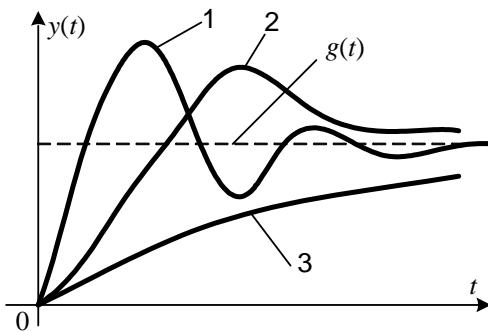


Рисунок 7.2 – Типи перехідних процесів

На рис. 7.2 продемонстровані різні типи перехідних процесів системи управління, що являють собою реакцію на зміну сигналу завдання у вигляді ступінчастого впливу  $g(t) = 1(t)$ . Розрізняють коливальні (1), аперіодичні (2) і монотонні (3) перехідні

процеси.

Розглянемо основні прямі показники якості управління щодо типової одноконтурної системи управління (див. рис. 7.1) при ступінчастій зміні впливу завдання  $g(t)$  (див. рис. 7.3). За

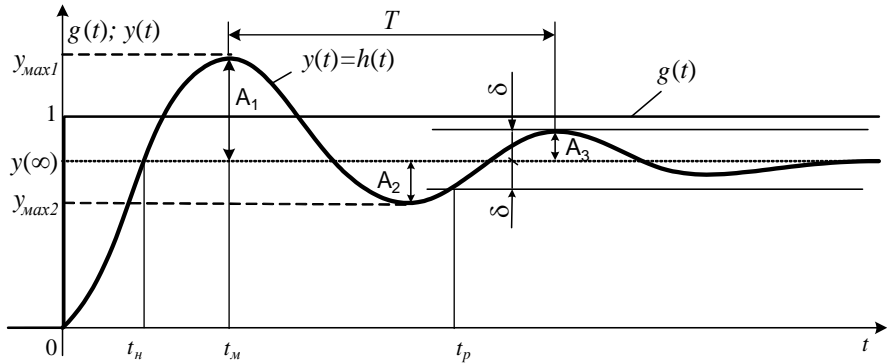


Рисунок 7.3 – Перехідний процес системи управління за каналом впливу завдання

початок відліку для керованої величини  $y(t)$  взято значення  $y(-0)$ , тобто те, яке було до подачі ступінчастого впливу. Використовують такі показники якості:

1. **Перерегулювання  $\sigma$**  – величина, що дорівнює відношенню першого максимального відхилення  $y_{max1}$  керованої величини  $y(t)$  від її усталеного значення  $y(\infty)$  до усталеного значення

$$\sigma = \frac{y_{max1} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100 \% . \quad (7.9)$$

Якість управління вважається задовільною, якщо перерегулювання не перевищує 30 – 40 %. Однак у деяких системах перерегулювання може бути взагалі неприпустиме.

2. **Тривалість перехідного процесу** (час регулювання)  $t_p$  – інтервал часу від моменту початку дії ступінчастого впливу до моменту, після якого відхилення керованої (вихідної) величини  $y(t)$  від нового усталеного значення  $y(\infty)$  стане меншим

деякого заданого числа  $\delta$ , тобто до того моменту, після якого виконується умова

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \delta. \quad (7.10)$$

На практиці величину  $\delta$ , як правило, беруть такою, що дорівнює 5% (для особливо точних систем може бути менше) від усталеного значення  $y(\infty)$  [ $\delta = 0,05 \cdot y(\infty)$ ]. Необхідно пам'ятати, що в статичних системах (як це, наприклад, показано на рис. 7.3) нове усталене значення не досягає заданого, тобто існує статична помилка.

Розглянути вище два показники якості перехідних процесів прийнятні для будь-якого типу перехідних процесів. Для коливальних процесів крім цього іноді застосовуються такі показники:

3. **Ступінь згасання**, що визначається за формулою

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}, \quad (7.11)$$

визначає інтенсивність згасання коливального процесу в системі. Інтенсивність згасання вважається задовільною, при  $\psi = 0,75 - 0,95$ .

Застосовувати формулу (7.11) для визначення ступеня загасання перехідного процесу безпосередньо за виглядом перехідної характеристики для систем, що описуються диференціальними рівняннями вище другого порядку, необхідно з обережністю, так як в таких системах не зберігається постійною різниця двох сусідніх амплітуд коливань. Однак, як показує досвід, з практичної точки зору системи з однаковою величиною  $\psi$  мають подібні перехідні процеси, незалежно від виду математичного опису.

4. **Коливальність  $N$**  – число переходів керованої величини  $y(t)$  через її усталене значення  $y(\infty)$  за час перехідного процесу  $t_p$ . Припустимо значення на практиці 3 – 4 коливання.

5. **Частота коливань  $\omega = \frac{2\pi}{T}$** , де  $T$  – період коливань.

6. **Час наростання** перехідного процесу  $t_n$  – час до перетину графіка  $y(t)$  з лінією усталеного значення  $y(\infty)$ .

7. **Час досягнення першого максимуму**  $t_m$ .

Для перехідних процесів, викликаних зовнішнім впливом збурення  $f(t)$  на

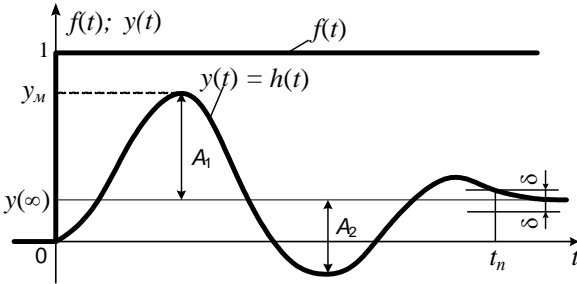


Рисунок 7.4 – Перехідний процес системи управління за каналом збурення

об'єкт управління (див. рис. 7.4), тобто для таких перехідні процеси, в яких із плином часу вертаються до початкового стану, вводяться такі показники якості:

1. **Тривалість перехідного процесу** (час регулювання)  $t_n$  визначається за методикою, аналогічною розглянутій вище.

2. **Перерегулювання**  $\sigma$  (коливання) – визначається як величина, рівна відношенню другого (від'ємного) максимального відхилення  $A_2$  керованої величини  $y(t)$  від усталеного значення  $y(\infty)$  до першого максимального відхилення  $A_1$ .

$$\sigma = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{A_2}{y_m - y(\infty)} \cdot 100 \% \quad (7.12)$$

3. **Динамічний коефіцієнт регулювання**  $R_D$  – величина, що дорівнює відношенню першого максимального відхилення  $y_m$  до передаточного коефіцієнта підсилення об'єкта управління  $k_0$

$$R_D = \frac{y_m}{k_0} \cdot 100 \% \quad (7.13)$$

Коефіцієнт  $R_D$  показує, наскільки ефективна дія регулятора на об'єкт управління.

Два головних показники якості – перерегулювання  $\sigma$  і тривалість перехідного процесу  $t_p$  тісно пов'язані між собою. Обидва вони залежать від параметрів системи, але найбільш сильно – від передаточного коефіцієнта  $k$  розімкнутої системи. Причому, із збільшенням цього коефіцієнта *максимальне відхилення вихідної змінної* (перерегулювання) *за каналом збурення завжди зменшується*, а *максимальне відхилення за каналом завдання завжди збільшується* (рис. 7.5) також, як

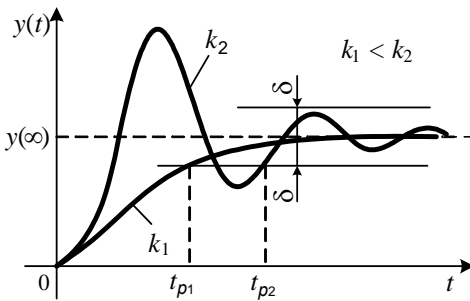


Рисунок 7.5 – Вплив параметрів системи на перехідні процеси

правило, *збільшується і тривалість перехідного процесу*. Знаходження оптимального компромісу між цими двома суперечливими тенденціями є однією із задач синтезу САУ.

Прямі показники якості найбільш зручно використовувати в тих випадках, коли перехідну характеристику («криву розгону») можна одержати експериментально на реальному об'єкті управління або шляхом імітаційного моделювання на ЕОМ на підставі наявної математичної моделі.

### **Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю**

1. Які дві основні задачі ТАУ ви знаєте?
2. За якими двома основними показниками оцінюється робота будь-якої САУ?
3. Які дві групи показників якості процесу управління використовують для стійких систем?
4. Чим оцінюється точність САУ в усталеному режимі?
5. За якою складовою рішення диференціального рівняння визначається якість перехідного процесу САУ?
6. Як називаються коефіцієнти, одержані за формулами розкладання



- передаточної функції в ряд Тейлора?
7. Як називається коефіцієнт  $C_0$  розкладання передаточної функції в ряд Тейлора?
  8. Як називається коефіцієнт  $C_1$  розкладання передаточної функції в ряд Тейлора?
  9. Який зміст має коефіцієнт  $C_0$  розкладання передаточної функції в ряд Тейлора?
  10. Як називається система, в якій постійний зовнішній вплив створює помилку в усталеному режимі?
  11. Чому дорівнює коефіцієнт помилки  $C_0$  для статичних систем?
  12. Як називається система, в якій постійний зовнішній вплив відтворюється без помилки в усталеному режимі?
  13. Чому дорівнює коефіцієнт помилки  $C_0$  для астатичних систем першого порядку?
  14. Як називається система, в якій є хоча б одна інтегруюча ланка?
  15. Як називається система, в якій відсутні інтегруючі ланки?
  16. У яких системах: статичних чи астатичних відсутня помилка при постійному впливі завдання на вході?
  17. Які наслідки спостерігаються при збільшенні порядку астатизму системи?
  18. Чому дорівнює коефіцієнт помилки  $C_1$  для астатичних систем першого порядку?
  19. Яку характеристику використовують для визначення прямих показників якості управління?
  20. Назвіть причину зростання ролі прямих показників якості в теперішній час.
  21. Як визначається перерегулювання (формула)?
  22. З якого моменту відраховується час перехідного процесу?
  23. Який відсоток від усталеного значення керованої величини при визначенні часу регулювання береться за коридор допуску?
  24. При якому значенні перерегулювання якість управління вважається задовільною?

## Лекція 12

### 7.2.2 Непрямі показники якості систем автоматичного управління

Найбільш вичерпне уявлення про якість перехідного процесу дає перехідна характеристика. Однак іноді при розробленні систем автоматичного управління буває необхідно мати уявлення про деякі показники якості перехідного процесу без побудови перехідної характеристики, а за якимись непрямими ознаками, які визначаються більш просто і, крім того, дозволяють зв'язати прямі показники якості безпосередньо зі значеннями параметрів системи управління. Такі ознаки називають *непрямими показниками якості перехідного процесу*, серед яких широке поширення одержали *частотні і кореневі*.

#### 7.2.2.1 Частотні показники якості перехідного процесу

Застосування частотних показників якості базоване на можливості оцінки якості перехідного процесу за частотними характеристиками завдяки наявності прямої аналітичної залежності між перехідною характеристикою  $h(t)$  і дійсною  $U(\omega)$  або уявною  $V(\omega)$  частотною характеристикою для *мінімально-фазових систем*.

Відомо [18], що розкладання в ряд Фур'є одиничного ступінчастого впливу може бути подане у вигляді суми постійної складової і нескінченного числа синусоїд частотою  $\omega$

і амплітудою  $\frac{d\omega}{\pi\omega}$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7.14)$$

Якщо такий сигнал подати на вхід динамічної системи, то кожній частоті вхідних синусоїдальних коливань

$x_{ex_i}(t) = \frac{d\omega}{\pi\omega_i} \sin \omega_i t$  буде відповідати гармонічне коливання на

виході з тією самою частотою, але зі зміненими амплітудою та

фазою, залежними від властивостей системи та вираженими в їх амплітудно-частотній  $A(\omega)$  і фазочастотній  $\varphi(\omega)$  характеристиках, тобто

$$x_{\text{вих}_i}(t) = \frac{A(\omega)d\omega}{\pi\omega_i} \sin(\omega_i t + \varphi(\omega)). \quad (7.15)$$

Результуюче значення вихідної величини (підсумовування вихідних сигналів за всіма частотами) являє собою перехідну характеристику (властивість суперпозиції)

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \sin(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \quad (7.16)$$

і з урахуванням того, що  $\sin(\omega t + \varphi(\omega)) = \sin(\omega t) \cos(\varphi(\omega)) + \cos(\omega t) \sin(\varphi(\omega))$ , а  $A(\omega) \cos(\varphi(\omega)) = U(\omega)$ ;  $A(\omega) \sin(\varphi(\omega)) = V(\omega)$ , одержуємо

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \quad (7.17)$$

Так як ступінчастий вплив  $1(t)$  подається в момент часу  $t = 0$  при  $t < 0$ , то маємо

$$h(t) = 0; \quad \sin(-\omega t) = -\sin(\omega t); \quad \cos(-\omega t) = \cos(\omega t). \quad (7.18)$$

Рівняння (7.17) при підстановці ( $t = -t$ ) набере вигляд

$$0 = \frac{A(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \quad (7.19)$$

Віднімаючи від (7.17) вираз (7.19) одержимо рівняння для визначення вихідного сигналу при  $t > 0$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega. \quad (7.20)$$

Аналогічним способом можна виразити перехідну характеристику і через уявну частотну функцію  $V(\omega)$

$$h(t) = U(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \quad (7.20 a)$$

На практиці для одержання перехідної характеристики частіше використовується формула (7.20). Вираз для дійсної частотної характеристики  $U(\omega)$  (ДЧХ) часто являє собою складну функцію, інтегрування якої можливо лише наближено: за допомогою чисельних методів на ЕОМ або з використанням попередньої апроксимації  $U(\omega)$  у вигляді суми трапецій або трикутників (так званий графоаналітичний метод побудови перехідного процесу).

Разом із тим наявність функціонального зв'язку (7.20) дозволяє за виглядом дійсної частотної характеристики (див. рис. 7.6) скласти попереднє наближене уявлення про якість

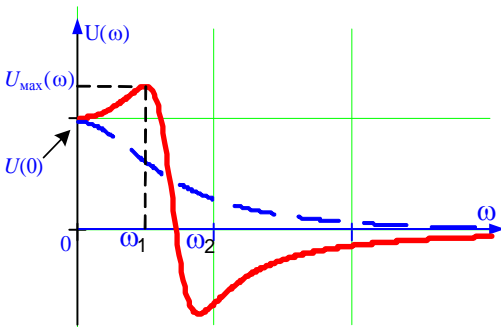


Рисунок 7.6 – Дійсна амплітудно-частотна характеристика

перехідного процесу, що можна виразити у вигляді таких властивостей:

**1. Властивість**

**лінійності.** Якщо ДЧХ можна подати у вигляді суми  $U_i(\omega)$ , тобто

$$U(\omega) = \sum_{j=1}^n U_i(\omega), \text{ то } i$$

перехідний процес також можна подати сумою

$$\text{складових } h(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} \frac{U_i(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega.$$

**2. Усталене значення перехідної характеристики**

$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty)$  визначається початковим значенням ДЧХ, тобто

$$U(0) = h(\infty).$$

**3. Початкове значення перехідної характеристики**

визначається кінцевим значенням ДЧХ, тобто

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U(\omega).$$

**4. Відповідність масштабів по осі ординат для  $U(\omega)$  і  $h(t)$ .** Якщо помножити значення  $U(\omega)$  на постійний множник  $\alpha$  (рис. 7.7 а), то значення  $h(t)$  теж множиться на  $\alpha$  (рис. 7.7 б).

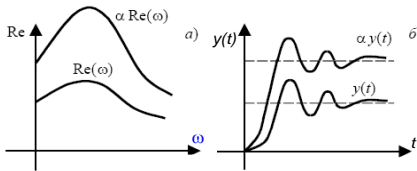


Рисунок 7.7 – Відповідність масштабів по осі ординат

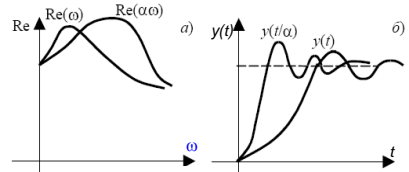


Рисунок 7.8 – Відповідність масштабів по осі абсцис

**5. Відповідність масштабів по осі абсцис для  $U(\omega)$  і  $h(t)$ .** Якщо аргумент  $\omega$  ДЧХ  $U(\omega)$  помножити на постійний множник  $\alpha$  (рис. 7.8 а), то аргумент перехідної характеристики  $t$  змінюється у зворотній пропорції ( $t/\alpha$ ) (рис. 7.8 б).

**6. Розрив безперервності ДЧХ.**

Розрив безперервності ДЧХ свідчить про те, що система знаходиться на межі стійкості, зокрема:

- якщо розрив безперервності відбувається на частоті  $\omega = 0$  - це аперіодична межа стійкості, яка відповідає наявності нульового полюса;
- якщо розрив безперервності відбувається на частоті  $\omega \neq 0$  - це коливальна межа стійкості, що відповідає наявності чисто уявних коренів характеристичного рівняння системи.

**7. Гострий пік ДЧХ на частоті  $\omega_1$**  свідчить про наявність на перехідній характеристиці повільно загасаючих коливань із частотою  $\omega_1$  (рис. 7.6).

**8. Умовою монотонного проходження перехідного процесу** є додатність, безперервність і неопуклість ДЧХ, тобто

$$U(\omega) > 0, \left| \frac{dU(\omega)}{d\omega} \right| < 0 \text{ (пунктирна крива на рис. 7.6).}$$

**9. Наявність на перехідній характеристиці перерегулювання**  $\sigma \leq 18\%$  відповідає додатній не зростаючій ДЧХ, тобто  $U(\omega) > 0$ ,  $\frac{dU(\omega)}{d\omega} \leq 0$ .

**10. Наявність на ДЧХ максимуму**  $U_{max}(\omega)$  відповідає перехідному процесу з перерегулюванням  $\sigma \leq \sigma_{max}$ , де величина  $\sigma_{max}$  визначається за формулою

$$\sigma_{max} = \frac{1,18 \cdot U_{max}(\omega) - U(0)}{U(0)} \cdot 100\% . \quad (7.21)$$

Якщо на ДЧХ крім того є і мінімум  $U_{min}(\omega)$ , то перерегулювання

$$\sigma_{max} = \frac{1,18 \cdot U_{max}(\omega) + 0,277 \cdot U_{min}(\omega) - U(0)}{U(0)} \cdot 100\% . \quad (7.21 a)$$

Для ДЧХ із максимумом розроблені спеціальні номограми, за допомогою яких за частотою  $\omega_2$  й максимальним значенням  $U_{max}(\omega)$  (рис. 7.6) можна оцінити величину перерегулювання  $\sigma$  і час перехідного процесу  $t_p$ .

**11. Оцінка часу регулювання.** Якщо ДЧХ за виглядом близька до трапецеїдальної з параметрами: максимальна частота  $\omega_2$  і коефіцієнт нахилу  $\chi = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ , то час перехідного процесу може

бути оцінено як  $\frac{\pi}{\omega_2} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_2}$  (див. рис. 7.6).

### 7.2.2.2 Кореневі показники якості перехідного процесу

*Кореневі показники якості використовуються для аналізу тих динамічних властивостей систем автоматичного управління, які прямо пов'язані з вільним рухом системи, на основі аналізу значень полюсів і нулів її передаточної функції (розміщення їх на комплексній площині).*

Відомо (див. лекцію 3, п. 3.9), що розв'язок однорідного диференціального рівняння, яке описує вільний рух системи, і

зображення якого являє собою дрібно-раціональну функцію, може бути одержано за допомогою формул розкладання Хевісайда. Запишемо вираз для перехідної характеристики системи з передаточною функцією  $W(s)$  для випадку простих (не кратних) коренів

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} W(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{R(s)}{sQ(s)} \right\} = \frac{R(0)}{Q(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R(s_i)}{s_i \cdot Q'(s_i)} e^{s_i t}, \quad (7.22)$$

де  $n$  – порядок характеристичного рівняння;  $s_i$  – корені характеристичного рівняння ( $s_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ ;  $i = \overline{1, n}$ );  $Q'$  – похідна від полінома в знаменнику передаточної функції.

В окремому і дуже поширеному на практиці випадку *передаточна функція не має нулів* (чисельника передаточної функції – константа) і тоді динаміка системи повністю визначається розміщенням полюсів. Розглянемо саме цей випадок.

Перехідний процес у стійкій (працездатній) системі управління повинен бути згасаючим, з цієї причини всі складові виразу (7.22) повинні мати множник  $e^{s_i t}$ , що являє собою експоненту, в якій дійсна складова кореня  $\alpha_i$  має від'ємне значення, тобто корені характеристичного рівняння повинні знаходитися в лівій півплощині комплексної площини коренів.

а) **Ступінь стійкості**  $\eta$  характеризує інтенсивність згасання тієї складової перехідного процесу (7.22), що найбільш повільно змінюється. Нехай, наприклад, характеристичне рівняння системи має два від'ємних дійсних корені  $s_1 = -\alpha_1$  і  $s_2 = -\alpha_2$ , причому  $|\alpha_1| < |\alpha_2|$  (див. рис. 7.8 а). Їм відповідають дві складові вільного руху  $y_1(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t}$  і  $y_2(t) = C_2 e^{-\alpha_2 t}$  (див. рис. 7.8 б).

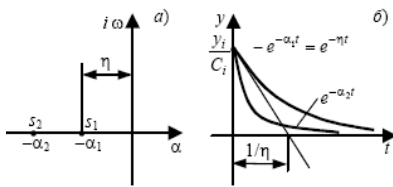


Рисунок 7.8 – До поняття ступені стійкості монотонних процесів

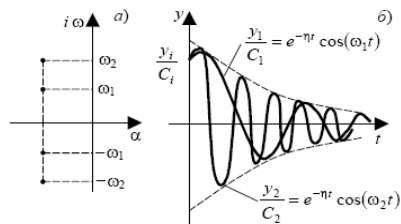


Рисунок 7.9 – До поняття ступені стійкості коливальних процесів

Як бачимо з графіків перехідних процесів, чим менше абсолютне значення кореня, тим повільніше загасає відповідна йому складова. Оскільки результуючий перехідний процес можна одержати як суму перехідних характеристик, і при цьому складові, що більш швидко змінюються, чинять вплив на нього лише в області малих значень часу, то інтенсивність загасання в цілому визначається складовою, яка найбільш повільно затухає, чи то найменшим за абсолютним значенням коренем характеристичного рівняння, тобто  $\eta = \min_i |\alpha_i|, i = 1, 2, \dots$ .

Якщо характеристичне рівняння має комплексно зв'язані корені (рис. 7.9 а), то складові перехідного процесу будуть мати коливальний характер  $y_i(t) = C_i e^{-\alpha_i t} \cos(\omega t)$  (рис. 7.9 б), і дійсна частина кореня, що є фактично показником ступеня стійкості  $\eta = \alpha$ , характеризує експоненту, що огинає коливальний процес.

Ступінь стійкості можна використовувати для оцінки часу тривання монотонних перехідних процесів. Дотична до експоненти  $\frac{y}{C} = e^{-\eta t}$  у точці  $t = 0$  відсікає на осі абсцис відрізок

$\frac{1}{\eta}$  (рис. 7.8 б). При цьому час регулювання визначається як

$t_p \leq \frac{3}{\eta}$  при прийнятій угоді про величину коридору  $\delta = 5\%$ .



Як бачимо з рис. 7.9, два коливальних процеси з однаковою дійсною частиною комплексного кореня мають різну частоту коливань, але однакову криву огинання, тобто при однаковій ступені стійкості якість перехідних процесів істотно відрізняється. Це вказує на те, що одного цього показника для оцінки якості виявляється недостатньо.

б) **Ступінь** (показник) **коливальності**  $\mu$  дає кількісну оцінку коливальних властивостей системи. Виділимо на комплексній площині коренів характеристичного рівняння (див. рис. 7.10) сектор розміром  $2\psi$ , в якому будуть розміщені всі полюси системи і розглянемо ті з них, які розміщуються в межах (обмежені сектором)  $s_i = -\alpha \pm j\beta$ .

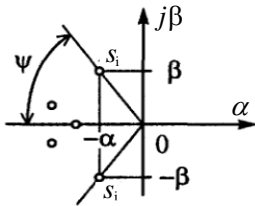


Рисунок 7.10 — До поняття ступені коливальності

Ступенем коливальності називається додатне число, що чисельно дорівнює тангенсу кута, утвореного від'ємною дійсною піввіссю і прямою, що проходить через початок координат і максимально віддалений від дійсної півосі полюс

$$\mu = \operatorname{tg} \psi = \max_i \left\{ \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right| \right\}. \quad (7.24)$$

Ступінь коливальності  $\mu$  пов'язана з оцінкою загасання перехідного процесу  $\psi$  (див. лекцію 11. ф. (7.11)) таким співвідношенням  $\psi = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{\mu}\right)$ , яке легко одержати підстановкою в (7.11) відповідних значень амплітуд.

Таким чином, динамічні властивості стійкої системи пов'язані з розміщенням її полюсів на комплексній площині. При цьому необхідно зауважити, що, як правило, не потрібно знати точні значення всіх полюсів системи, а достатньо визначити межі області розміщення коренів: за найближчим «лівим» коренем і за максимально віддаленим від дійсної осі.

У загальному випадку на якість перехідного процесу впливають і нулі системи. Зокрема, додатні корені многочлена в чисельнику передаточної функції призведуть до збільшення коливальності, а від'ємні - до затягування перехідних процесів.

**Поняття кореневого годографа.** Корневим годографом називається сукупність траєкторій, описуваних на комплексній площині коренями характеристичного рівняння системи при зміні одного з параметрів (коефіцієнтів) від 0 до  $\infty$ . Кореневі годографи використовуються для оцінки впливу параметрів системи (насамперед параметрів налаштувань регуляторів) на якість перехідних процесів, а також покладені в основу деяких методів синтезу систем управління.

### 7.3 Інтегральні оцінки якості САУ

Кожен із розглянутих вище прямих і непрямих показників якості характеризує лише одну ознаку (показник якості) перехідного процесу. При цьому всі показники пов'язані з параметрами регулятора (чи системи) складними залежностями, які мають, як правило, суперечливий характер: зміна будь-якого з параметрів призводить до покращання одних показників якості та погіршення інших. Ця обставина істотно ускладнює вибір параметрів регулятора. Тому в інженерній практиці широко використовуються інтегральні показники (оцінки) якості, що відображають (або інтегрують у собі) одночасно багато з розглянутих вище показників.

**Інтегральна оцінка якості** – визначений інтеграл за часом (від 0 до  $\infty$ ) від деякої функції керованої величини  $x(t)$ , або, частіше, сигналу помилки  $\varepsilon(t)$

$$J = \int_0^{\infty} f[x(t), t] dt. \quad (7.25)$$

Підінтегральна функція  $f[x(t), t]$  вибирається таким чином, щоб інтеграл (7.25) якнайкраще характеризував якість і щонайпростіше виражався через коефіцієнти передаточної функції замкнутої системи. Щоб інтеграл був таким, що

сходиться, тобто мав обмежене значення, у функцію  $f[x(t),t]$  вводять не абсолютні значення  $x(t)$  або  $\varepsilon(t)$ , а їх відхилення від кінцевих, усталених значень.

Інтегральна оцінка (7.25) враховує як величину динамічного відхилення, так і тривалість перехідних процесів. Чим менша за величиною оцінка, тим краща якість перехідного процесу.

Найпростішою інтегральною оцінкою є **лінійна інтегральна оцінка**  $J_{\text{л}}$ . Якщо перехідна характеристика є монотонною, то можна очікувати, що якість перехідного процесу тим краща, чим менша площа, обмежена кривою перехідного процесу і усталеним значенням керованої величини (див. рис. 7.11 а). У цьому сенсі лінійна інтегральна оцінка

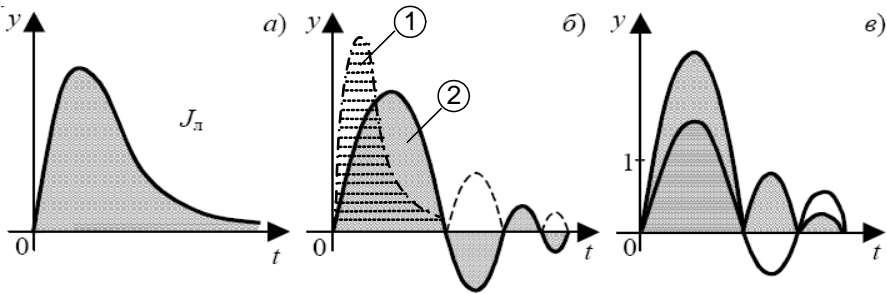


Рисунок 7.11 – Інтегральні оцінки якості перехідних процесів:

а) лінійна; б) модульна; в) квадратична

чисельно дорівнює площі, що обмежена кривою зміни вільної складової керованої величини і лінією рівня нового усталеного значення  $x(\infty)$ .

$$J_{\text{л}} = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)] dt \quad (7.26)$$

Недоліком лінійної інтегральної оцінки  $J_{\text{л}}$  є те, що її можна застосовувати лише для аперіодичних перехідних процесів. Інтеграл (7.26), обчислений для аперіодичної кривої **1** (на рис. 7.11 б горизонтальне штрихування) явно менший за інтеграл, обчислений для знакозмінної кривої **2** (хоча якість перехідного процесу **2** за перерегулюванням краща). Більш того,

для незатухаючого гармонійного процесу, який відповідає вкрай незадовільному перехідному процесу,  $J_D = 0$ , що дає мінімальну оцінку якості (якнайкращу якість перехідного процесу).

У зв'язку з цим для коливальних перехідних процесів бажано застосовувати такі інтегральні оцінки, знаковмінність підінтегральної функції яких тим чи іншим чином усунуто. Такою оцінкою є, наприклад, **модульна інтегральна оцінка** (див. рис. 7.11 б, пунктирна крива) виду

$$J_M = \int_0^{\infty} |x(\infty) - x(t)| dt. \quad (7.27)$$

На практиці застосування модульної інтегральної оцінки обмежено труднощами аналітичного обчислення інтеграла від модуля. Тому більшого поширення через її вибірковість і відносну простоту визначення одержала **квадратична інтегральна оцінка** виду

$$J_{20} = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)]^2 dt, \quad (7.28)$$

геометрична інтерпретація якої показано на рис. 7.11 в. Як можна побачити, різні за величиною ординати перехідного процесу входять у критерій з різною вагою (через піднесення в квадрат), у результаті чого вигляд початкової ділянки перехідної характеристики значно більше впливає на величину інтеграла, ніж її «хвіст». Меншому значенню квадратичного критерію тепер будуть відповідати перехідні процеси з меншим перерегулюванням, однак при цьому спостерігається повільне згасання. З метою усунення цього недоліку використовують різні покращені модифікації квадратичного критерію, які використовують інформацію не лише про змінну, а й про її похідні, наприклад, виду

$$J_{21} = \int_0^{\infty} \Delta x(t)^2 + \theta \Delta x'(t)^2 dt, \quad (7.29)$$

де  $\theta$  – ваговий коефіцієнт, який вибирається відповідно до бажаного часу наростання перехідного процесу.

Як лінійну, так і квадратичну оцінку якості можна обчислити і без побудови перехідного процесу за частотною характеристикою системи та перетворенням Фур'є вхідного сигналу з використанням формули Релея. Однак цей метод дуже трудомісткий і в даний час не знаходить застосування.

Необхідно зазначити, що абсолютні значення будь-якої інтегральної оцінки самі по собі не становлять інтересу. Вони, перш за все, *служать для зіставлення якості перехідних процесів при різних варіантах налаштувань* однієї і тієї самої або подібних за структурою систем.

Усі розглянуті інтегральні показники використовують, крім того, *для визначення оптимальних значень параметрів регульовальних пристроїв систем автоматичного управління*. Оптимальними параметрами при цьому вважають такі, які відповідають мінімуму значення інтегрального показника.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Які групи непрямих показників якості перехідних процесів ви можете назвати?
2. За якими характеристиками можуть бути одержані частотні показники якості?
3. За яким показником дійсної частотної характеристики можна оцінити усталене значення перехідної характеристики?
4. За яким показником дійсної частотної характеристики можна оцінити початкове значення перехідної характеристики?
5. Ординати двох перехідних характеристик відрізняються в два рази. Як між собою співвідносяться ординати дійсних частотних характеристик?
6. Час перехідного процесу 1 більше в два рази часу перехідного процесу 2. Яка дійсна частотна характеристика ширша: перша чи друга?
7. Про що свідчить наявність розриву на дійсній частотній характеристиці?

8. Яка повинна бути дійсна частотна характеристика для монотонного перехідного процесу?
9. Яка повинна бути дійсна частотна характеристика, щоб перерегулювання не перевищувало 18 %?
10. Чим гостріший пік на дійсній частотній характеристиці, тим ... . Що?
11. За якою частотою дійсної частотної характеристики знаходять оцінку часу перехідного процесу? Зобразіть і покажіть приклад.
12. Якщо перехідний процес у системі згасає, то яким значенням коренів характеристичного рівняння це відповідає?
13. За яким із коренів характеристичного рівняння визначають ступінь стійкості?
14. Чому чисельно дорівнює кореневий показник ступеня стійкості перехідного процесу?
15. Що характеризує кореневий показник якості – ступінь стійкості?
16. Що характеризує кореневий показник якості – ступінь коливальності?
17. Чому чисельно дорівнює показник якості – ступінь коливальності перехідного процесу?
18. Як називається траєкторія, яку описують корені характеристичного рівняння на комплексній площині при зміні одного з параметрів системи?
19. Чим викликана необхідність застосування інтегральних оцінок якості?
20. Чому чисельно дорівнює лінійна інтегральна оцінка для незатухаючого перехідного процесу?
21. Який основний недолік лінійних інтегральних оцінок усувають модульна і квадратична оцінки?
22. Для яких систем доцільно використовувати інтегральні оцінки якості?

## Лекція 13

### 8 Стійкість систем автоматичного управління

Практична придатність систем автоматичного управління визначається стійкістю (тобто працездібністю) і прийнятною якістю управління в умовах різних зовнішніх збурень, що можуть порушувати хід її нормальної роботи. Правильно спроектована система повинна стійко працювати при всіх або, принаймні, досить великих зовнішніх збуреннях, тому при дослідженні системи управління, насамперед, з'ясовують її стійкість, як мінімум «так чи ні», а в кращому випадку визначають запас стійкості. При цьому часто виникає окрема задача визначення областей стійкості, тобто тих значень параметрів системи (найчастіше параметрів регулятора), при яких вона буде, безумовно, стійкою.

#### 8.1 Загальне поняття стійкості

У найпростішому випадку *поняття стійкості системи пов'язане з її здатністю з певною точністю повертатися у початковий стан після припинення зовнішнього впливу*. Як правило при цьому мають на увазі, що система піддається управлінню (керована), тобто вона буде завжди передбачуваним чином реагувати на вхідний вплив. Якщо *система нестійка*, вона ніколи не повертається до стану рівноваги, з якої з якихось причин вийшла. Прикладом нестійкої фізичної системи може бути автомобіль, що рухається по слизькій дорозі.

Щодо стійкості розрізняють три типи систем:

- *стійкі* – це системи, які завжди після зняття збурення повертаються в початковий стан рівноваги;
- *нейтральні* – це системи, які після зняття збурення повертаються в стан рівноваги, який відрізняється від початкового стану рівноваги;
- *нестійкі* – це системи, у яких після зняття збурення не встановлюється новий стан рівноваги.

Подібна класифікація систем добре ілюструється прикладом механічної системи «куля – поверхня» (рис. 8.1).

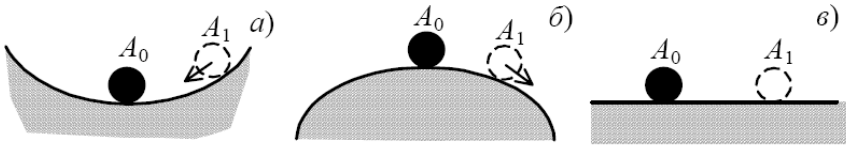


Рисунок 8.1 – Ілюстрація поняття стійкості систем:

а) стійка ; б) нестійка; в) нейтральна

Тут положення рівноваги кулі характеризується точкою  $A_0$ . При відхиленні в положення  $A_1$  у випадку а) куля безумовно намагається повернутися в початковий стан; у випадку б) не повертається в початковий стан ніколи і у випадку в) стан кулі байдужий. Більш складний випадок стану рівноваги ілюструє рис. 8.2, на якому у випадку а) тип системи визначається величиною початкового відхилення, а у випадку б) – напрямом відхилення.

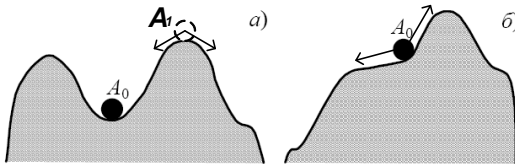


Рисунок 8.2 – Напівстійкий стан рівноваги

Подібні стани рівноваги носять назву напівстійких і характерні для нелінійних систем.

У зв'язку з цим для нелінійних систем

вводяться такі поняття, пов'язані зі стійкістю:

- система стійка «в малому», коли лише констатується факт наявності стійкості (рис. 8.2 а), але межі області стійкості не визначені;
- система стійка «в великому», коли межі стійкості визначені (рис. 8.2 а), тобто відомі величини початкових відхилень, за яких система повертається в початковий стан;
- система стійка «в цілому», коли вона повертається у вихідний стан при будь-яких початкових відхиленнях (рис. 8.1 а). Для деяких класів систем стійкість «у цілому» називається абсолютною стійкістю.



## 8.2 Стійкість руху системи за Ляпуновим

### 8.2.1 Поняття фазового простору

При розгляді стійкості руху дуже корисним виявилось введення деяких наочних понять та уявлень геометричного характеру, основним з яких є поняття фазового простору, введене академіком Андроновим.

*Фазовим простором* називається такий простір, в якому прямокутними координатами точки є величини, що визначають миттєвий стан системи, і називаються *фазовими координатами*.

Метод фазового простору може бути ефективно застосованим як для лінійних, так і для нелінійних систем.

Будь-яке диференціальне рівняння  $n$ -го порядку можна записати у вигляді системи  $n$  лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (в нормальній формі Коші)

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m); \quad i = \overline{1, n}; \quad y \in R^n, \quad x \in R^m,$$

що описує перехідний процес при наявності збурень  $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , та деякого початкового стану  $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ .

Фазовими координатами, як правило, вибирають вихідну координату системи  $y_1$  та її похідні.

Точка фазового простору, що відповідає стану системи в даний момент часу  $t$ , називається *точкою, що зображує*.

Зміна стану системи в часі буде відповідати руху точки, що зображує, в фазовому просторі по певній траєкторії, яку називають *фазовою траєкторією*.

Кожному перехідному процесу в системі, який визначається конкретними початковими умовами, а отже координатами початкової точки, відповідає певна фазова траєкторія у фазовому просторі і навпаки.

Сукупність фазових траєкторій для всіх можливих у даній системі початкових умов називають *фазовим портретом*.

Метод фазового простору одержав найбільше поширення при дослідженні систем другого порядку. У цьому випадку

фазовим простором є площина.

## 8.2.2 Поняття стійкості руху систем

Поняття стійкості можна поширити і на випадок руху системи (під рухом розуміється зміна вихідної координати) вздовж деякої заданої траєкторії. Аналогом стану рівноваги в цьому випадку виступає *незбурений рух*  $y(t)$ , викликаний лише керуючим впливом та властивостями системи (рис. 8.3).

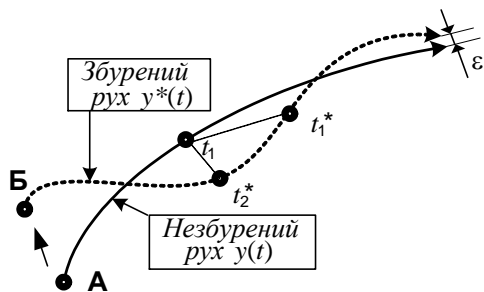


Рисунок 8.3 – Збурений та незбурений рух системи

Зовнішнє збурення, що діє на систему, може викликати в якийсь момент відхилення від заданої траєкторії руху (переміщення з точки А в точку Б). Фактичний рух системи з цього моменту  $y^*(t)$  буде називатися *збуреним рухом*.

*Незбурений рух*  $y(t)$

*буде називатися стійким*, якщо після короткочасної дії зовнішніх сил збурений рух  $y^*(t)$  по закінченні деякого часу увійде в задану область  $|y(t) - y^*(t)| \leq \epsilon$ , де  $\epsilon$  – будь-яка мала величина. Потрібно мати на увазі, що близькість траєкторій не є достатньою умовою досягнення стійкості. Це ілюструється на рис. 8.3, де точки траєкторії  $t_1$  і  $t_2^*$ , незважаючи на близькість у просторі, відповідають різним моментам часу.

Нехай вільний рух системи (тобто такий, що залежить лише від властивостей системи) описується системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad (8.1)$$

де  $y_i$  – узагальнені координати системи, що

характеризують її поточний стан, і які однозначно визначаються початковим станом у момент часу  $t_0$  – початковими умовами  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ . Кожній сукупності початкових умов відповідає єдине (окреме) рішення системи рівнянь (8.1) для всіх  $t > t_0$  (теорема Коші)

$$y_i(t) = y_i(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, t). \quad (8.2)$$

З іншого боку рішення (8.2) описує деякий рух системи, який визначається лише початковим станом. Це і є *незбурений рух системи*.

Щоб одержати *збурений рух*, необхідно змінити початкові значення змінних  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ , надавши їм невеликі за модулем прирости  $\varepsilon_i$ , тобто  $y_{i0}^* = y_{i0} + \varepsilon_i$ . Таким чином, будь-який інший рух системи, відмінний від незбуреного, є збуреним.

Введемо нові змінні, що дорівнюють різниці між вихідними координатами системи в збуреному і незбуреному стані, які називають *відхиленнями* або *варіаціями*,

$$x_i(t) = y_i^*(t) - y_i(t). \quad (8.3)$$

У цьому випадку початкове значення відхилень  $\varepsilon_i$  (хоча б одне з них) називається *збуренням*  $\varepsilon_i = x_{i0}$ .

З урахуванням введених понять можна сформулювати **визначення стійкості руху системи за Ляпуновим**: незбурений рух називається стійким по відношенню до варіацій  $x_i(t)$ , якщо для всякого довільно заданого додатного  $\varepsilon$ , яким би малим воно не було, можна знайти інше таке додатне число

$\delta(\varepsilon)$ , що при будь-яких збуреннях  $x_{i0}$ , коли  $\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 \leq \delta$ , та при

будь-якому  $t \geq t_0$  буде виконуватися нерівність  $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) \leq \varepsilon$ ,

інакше рух нестійкий.

Практично це означає, що якщо при дії на систему досить малих початкових збурень, збурений рух, у підсумку, буде як

завгодно мало відрізняться від незбуреного, то це означає, що незбурений рух стійкий. В іншому випадку, якщо будь-які, скільки завгодно малі збурення призводять до великих неузгоджень між збуреним і незбуреним рухом, то незбурений рух – нестійкий.

*Іншими словами, система стійка, якщо її реакція на обмежені за величиною збурення теж є обмеженою.*

Якщо, крім цього, виконується умова  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ , то незбурений рух називається *асимптотично стійким*.

### **8.3 Загальна математична умова стійкості лінійних систем**

Як було зазначено на початку лекції, стійкість визначається характером руху системи після припинення дії зовнішнього збурення, що вивело її із стану рівноваги. Такий рух системи називають вільним. Він відбувається за рахунок внутрішньої енергії системи і залежить лише від її властивостей (параметрів).

*Вільний рух лінійної або лінеаризованої системи автоматичного управління описується в загальному випадку однорідним диференціальним рівнянням (з нульовою правою частиною) виду*

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = 0, \quad (8.4)$$

де  $y(t)$  – вільна складова вихідної (керованої) величини системи, при початкових умовах  $y(0) = y_0; y'(0) = y'_0; \dots; y^{n-1}(0) = y_0^{n-1}$ .

*Вимушена складова вихідної величини, що залежить від вигляду зовнішнього впливу і відповідно від виду правої частини рівняння (8.4) на стійкість системи не впливає.*

Розглядаючи вільний рух із математичної точки зору, можна дати такі визначення поняття стійкості з урахуванням поведінки вільної складової  $y(t)$ :

- **система стійка**, якщо вільна складова  $y(t)$  з часом наближається до нуля;
- **система нестійка**, якщо вільна складова  $y(t)$  з часом необмежено зростає;
- **система знаходиться на межі стійкості**, якщо вільна складова  $y(t)$  з часом не прагне ні до нуля, ні до нескінченності.

Загальним рішенням диференційного рівняння (8.4) є сума доданків, які повністю визначаються значеннями коренів його характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (8.5)$$

де коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  залежать лише від параметрів елементів системи і способу їх з'єднання, і записується у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}, \quad (8.6)$$

де  $C_k$  – постійні (константи), які залежать від початкових умов;  $p_k$  – корені характеристичного рівняння (8.5), які можуть бути дійсними ( $p_k = \alpha_k$ ), уявними ( $p_k = j\beta_k$ ) або комплексно зв'язаними ( $p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$ ).

Перехідна складова рівняння (8.6) при часі  $t \rightarrow \infty$  наближається до нуля лише в тому випадку, якщо **кожний** доданок  $C_k e^{p_k t} \rightarrow 0$ . Характер кожної  $k$ -тої функції часу (експоненти) повністю залежить від виду кореня  $p_k$ . На рис. 8.4 зображені можливі випадки розміщення коренів  $p_k$  на комплексній площині, а графіки відповідних їм функцій показано всередині кіл.

Аналіз рис. 8.4 дозволяє сформулювати **загальну математичну умову стійкості**: для стійкості лінійної системи автоматичного управління необхідно і достатньо, щоб дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння системи були від'ємними (інакше, щоб усі корені

характеристичного рівняння системи розміщувалися в лівій частині комплексної площини, часто кажуть були «лівими»).

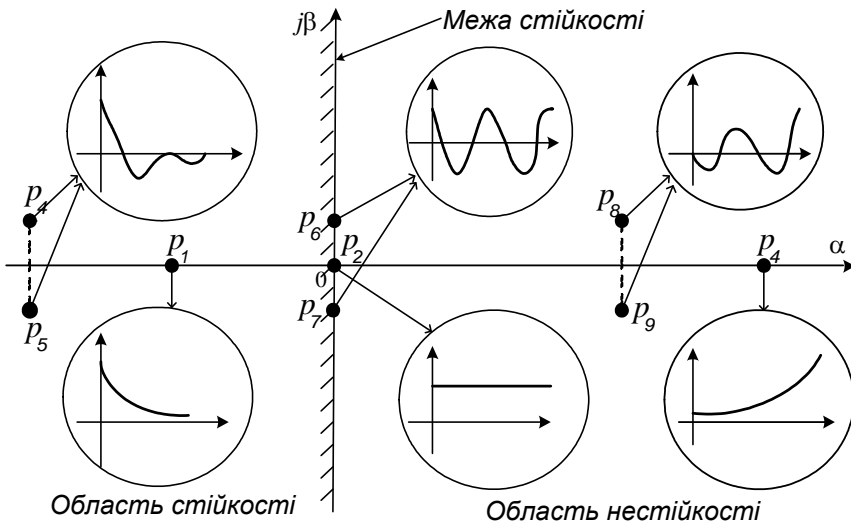


Рисунок 8.4 – Вплив коренів характеристичного рівняння на складові його вільного руху

Стійкість системи залежить лише від виду і розміщення коренів характеристичного рівняння і не залежить від характеру зовнішніх впливів на систему, тобто *стійкість – це внутрішня властивість системи, що не залежить від зовнішніх умов.*

Так як будь-який доданок розв'язку (8.6) при додатних коренях характеристичного рівняння необмежено зростає, то якщо хоча б один корінь має додатну дійсну частину (тобто розміщується в правій частині комплексної площини), то система в цілому буде нестійкою.

Уявна вісь  $j\beta$  є межею стійкості на комплексній площині коренів. Якщо характеристичне рівняння має пару чисто уявних коренів ( $p_{k,k+1} = \pm j\beta_k$ ), а всі інші корені знаходяться в лівій частині комплексної площини, то в системі встановлюються незатухаючі гармонійні коливання з круговою частотою  $\omega = |\beta_k|$ .

При цьому кажуть, що система знаходиться на *коливальній межі стійкості*.

Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь ( $p_k = 0$ ), то система знаходиться на *аперіодичній межі стійкості*. Якщо таких коренів два, то система нестійка.

Застосовуючи сформульовану вище умову для оцінки стійкості реальних систем автоматичного управління, не потрібно забувати, що лінійні диференціальні рівняння виду (8.4), як правило, одержуються в результаті спрощень і лінеаризації вихідних нелінійних рівнянь. Виникає питання: якою мірою оцінка стійкості за лінеаризованим рівнянням буде справедлива для реальної системи, і чи не вплинуть суттєво на результат аналізу відкинуті при лінеаризації члени розкладання? Відповідь на нього була дана російським математиком А. М. Ляпуновим в 1892 р. у роботі «Загальна задача про стійкість руху». Він сформулював і довів таку теорему: якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має хоча б один нульовий корінь або одну пару уявних коренів, то зробити висновки про стійкість реальної системи спираючись на лінеаризоване рівняння не можна. Відкинуті при лінеаризації малі члени можуть зробити систему нестійкою, і тому судити про стійкість реальної системи в подібних випадках необхідно лише на основі аналізу початкового нелінійного рівняння. У всіх інших випадках загальна умова стійкості справедлива як для лінійних, так і для лінеаризованих систем.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Що насамперед необхідно з'ясувати при дослідженні САУ?
2. У найпростішому випадку, стійкість – це здатність системи з певною точністю ... . Закінчіть фразу.
3. Яка основна ознака, в найпростішому випадку, нестійкої системи?
4. Як веде себе після припинення дії збурення нейтральна система?
5. Якщо стійкість системи залежить від величини зовнішнього збурення або напряму його відхилення, то такий стан системи

називається ... .

6. З яким із понять: стійкість у «малому», у «великому» або в «цілому» пов'язане поняття абсолютної стійкості?
7. Аналогом чого для простих статичних систем служить поняття незбуреного руху?
8. Якщо рух САУ незбурений, то які впливи діють на систему?
9. Через що в системі управління виникає збурений рух?
10. До чого буде прагнути з плином часу збурений рух системи, якщо система стійка?
11. Яка складова загального розв'язку диференціального рівняння руху системи описує незбурений рух?
12. Що необхідно змінити, з точки зору математики, щоб одержати збурений рух?
13. Яке диференціальне рівняння описує вільний рух системи?
14. Від чого залежить характер вільного руху системи?
15. Як веде себе вільна складова вихідної величини системи, якщо система нестійка? А якщо система стійка?
16. Який вигляд має графік функції складової рішення диференціального рівняння для комплексно зв'язаних коренів із від'ємною дійсною частиною?
17. Який вигляд має графік функції складової рішення диференціального рівняння для комплексно зв'язаних коренів з додатною дійсною частиною?
18. Який вигляд має графік функції складової рішення диференціального рівняння для комплексно зв'язаних коренів із нульовою дійсною частиною?
19. Який вигляд має графік функції складової рішення диференціального рівняння для від'ємного дійсного кореня?
20. Який вигляд має графік функції складової рішення диференціального рівняння для додатного дійсного кореня?
21. Який вигляд має графік функції складової рішення диференціального рівняння для нульового кореня?
22. Необхідна і достатня математична умова стійкості системи. Коротко!
23. Чи залежить властивість лінійної системи бути стійкою від характеру і величини зовнішніх збурень?
24. Яким кореням характеристичного рівняння відповідає коливальна межа стійкості? А яким кореням – аперіодична?



## Лекція 14

### 8.4 Критерії стійкості лінійних систем

Основним недоліком використання загальної математичної умови стійкості є необхідність визначення всіх коренів (точніше сказати, їх знаків) характеристичного рівняння досліджуваної системи. У разі нескладного виразу або при наявності сучасних засобів обчислювальної техніки це, в цілому, нескладне завдання. Разом із тим на практиці можуть виникати випадки (до деяких часів це було основною причиною), коли можливість використання ЕОМ відсутня чи немає математичного опису системи, а є лише результати експериментальних досліджень.

Для таких випадків були розроблені численні методи, які дозволяють відносно простими способами і не рідко, що важливо, без допомоги ЕОМ, із мінімальними витратами праці встановлювати факт стійкості системи, а в деяких випадках навіть з'ясувати, як впливають на стійкість ті чи інші параметри системи, не вдаючись до обчислення коренів. Такі методи одержали назву *критеріїв стійкості*.

Необхідно відзначити, що історія становлення критеріїв стійкості бере свій початок ще в 18 столітті і пов'язана не з теорією автоматичного управління, а з математикою, а точніше з питаннями дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Залежно від того, за якими характеристиками здійснюється оцінка стійкості, всі критерії стійкості поділяються на дві групи:

- *алгебраїчні*, базовані на аналізі характеристичного рівняння досліджуваної системи;
- *частотні*, які дозволяють дати оцінку стійкості системи за виглядом частотних характеристик.

З математичної точки зору всі критерії є еквівалентними. Вибір і використання якогось з них – це питання доцільності в конкретних умовах.

### 8.4.1 Алгебраїчні критерії стійкості

Ця група критеріїв дозволяє робити висновки про стійкість системи за коефіцієнтами її характеристичного рівняння (поліном у знаменнику передаточної функції)

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (8.7)$$

#### Необхідна умова стійкості

Необхідною умовою стійкості системи будь-якого порядку є позитивність (однаковість) усіх коефіцієнтів її характеристичного рівняння (8.7), тобто  $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0, a_n > 0$ .

Доведення цієї умови впливає з теореми Безу про можливість подання будь-якого многочлена виду (8.7) у вигляді добутку співмножників

$$D(s) = a_0 (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0, \quad (8.8)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – корені многочлена (полюси передаточної функції).

Якщо система стійка, то всі корені повинні бути, або дійсними від'ємними, або комплексно зв'язаними з від'ємною дійсною частиною (див. лекцію 13, п. 8.3). У першому випадку  $\lambda_i = -\alpha$ , тоді  $s - \lambda_i = s + \alpha$ ; у другому випадку  $\lambda_{i,i+1} = -\alpha \pm j\omega$  і тоді  $(s - \lambda_i)(s - \lambda_{i+1}) = (s + \alpha + j\omega)(s + \alpha - j\omega) = (s + \alpha)^2 + \omega^2$ . Нескладно помітити, що після розкриття дужок у (8.8) всі одержані коефіцієнти будуть додатними. Із цих міркувань випливає, що наявність хоча б одного від'ємного коефіцієнта можлива лише за умови наявності коренів із додатною дійсною частиною.

*Позитивність (однаковість) усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння є в загальному випадку необхідною умовою стійкості. І лише для систем 1-го і 2-го порядку вона є одночасно і достатньою умовою.*

Для одержання необхідних і достатніх умов стійкості систем будь-якого порядку розроблені такі алгебраїчні критерії, як: Рауса, Гурвіца, Лъенара-Шіпара, Неймарка.

## Критерій стійкості Рауса (англ. математик, 1877 рік).

Критерій запропоновано у вигляді деякого правила або алгоритму формування з коефіцієнтів характеристичного рівняння (8.7) таблиці, як це показано на рис. 8.5.

$r_i$	$i \setminus k$	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	...
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} = c_{21} -$ $- r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} -$ $- r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} -$ $- r_3 c_{42}$	...
$r_4 = c_{12}/c_{13}$	4	$c_{14} = c_{22} -$ $- r_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} -$ $- r_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} -$ $- r_4 c_{43}$	...
...	...	...	...	...	...

Рисунок 8.5 – Правила заповнення таблиці коефіцієнтів Рауса

*Критерій формується так:* щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots$  були однакового знака з  $a_0$ . Якщо ця умова не виконується, то система нестійка, а кількість змін знака в першому стовпці дорівнює числу прaviх коренів.

*Перевагою критерію є простота застосування незалежно від порядку характеристичного рівняння. Він також зручний для програмування на ЕОМ. Недоліки:* мала наочність, складність аналізу ступенів стійкості системи.

## Критерій стійкості Гурвіца (швейц. математик, 1895 р.).

Критерій базований на аналізі визначників, складених певним чином із коефіцієнтів характеристичного рівняння системи (8.7).

Спочатку будується головний визначник Гурвіца за таким правилом (рис. 8.6):

- 1) по головній діагоналі зліва направо виставляються всі коефіцієнти характеристичного рівняння, починаючи з  $a_1$  по  $a_n$  (важливо: не з  $a_0$ , а з  $a_1$ !);

$$\Delta_n = \begin{array}{c} \uparrow + \\ \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_3 & a_5 & - & 0 & \\ a_0 & a_2 & a_4 & - & 0 & \\ 0 & a_1 & a_3 & - & 0 & \\ - & - & - & - & - & \\ 0 & 0 & 0 & - & a_n & \end{array} \right| \\ \downarrow - \end{array}$$

Рисунок 8.6 – Головний визначник Гурвіца

- 2) від кожного елемента діагоналі вгору і вниз добудовуються стовпці визначника так, щоб індекси зменшувалися зверху вниз;
- 3) на місце коефіцієнтів з індексами менше нуля або більше  $n$  ставляться нулі.

Виділяючи в головному визначнику діагональні мінори, як це показано на рис. 8.6, одержуємо визначники Гурвіца

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

нижчих порядків:

і т. д. Число визначників Гурвіца дорівнює порядку характеристичного рівняння  $n$ , а номер визначається старшим коефіцієнтом на діагоналі.

*Критерій формулюється так:* щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб всі визначники Гурвіца мали знак, що збігається зі знаком першого коефіцієнта характеристичного рівняння, тобто щоб при  $a_0 > 0$  вони всі були додатні

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \dots, \Delta_n > 0. \quad (8.9)$$

Якщо всі визначники більше нуля, а  $\Delta_n = 0$ , то система знаходиться на межі стійкості (якщо  $a_n = 0$  – аперіодична межа стійкості;  $\Delta_{n-1} = 0$  – коливальна межа стійкості).

Критерій Гурвіца застосовують при порядку  $n \leq 5$ . При великих порядках зростає число визначників, і процес розрахунків стає трудомістким. *Недолік критерію Гурвіца* – мала наочність; *перевага* – зручність для реалізації на ЕОМ і можливість одержання аналітичних виразів для визначників, що

дозволяє використовувати критерій для дослідження впливу параметрів системи на стійкість.

### Області стійкості

Часто при проектуванні і налаштуванні САУ виникає окрема задача аналізу стійкості – визначення допустимих (за умовою стійкості) меж зміни деяких параметрів системи. Такими параметрами, як правило, розглядаються коефіцієнти і постійні часу керуючого пристрою (параметри регулятора), які можна цілеспрямовано змінювати при налаштуванні системи. Ці параметри однозначно пов'язані з коефіцієнтами характеристичного рівняння системи і тому можуть служити параметрами варіювання.

Допустимі межі варіювання параметрів системи визначають шляхом побудови *областей стійкості* – областей у просторі варійованих параметрів системи управління, кожній точці якої відповідають лише ті корені характеристичного рівняння, що розміщені в лівій частині комплексної площини.

Поверхня, що обмежує область стійкості, називається *межею області стійкості*. Вид області стійкості і вид її межі визначається числом варійованих параметрів. Так, при одному параметрі варіювання  $\alpha$  область стійкості – відрізок прямої, а кордон – точки  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  на кінцях цього відрізка (рис. 8.7 а). При двох варійованих параметрах  $\alpha$  і  $\beta$  область стійкості – частина

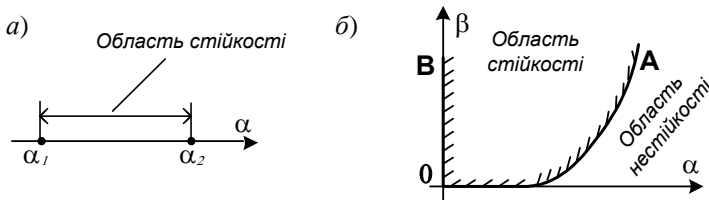


Рисунок 8.7 – Приклади областей стійкості:

а) при одному параметрі; б) при двох параметрах

площини, а межа – наприклад, лінія ОА і додатна вісь параметра  $\beta$  (рис. 8.7 б). Межа зі сторони області стійкості штрихується.

Для знаходження межі області стійкості зручно користуватися критерієм Гурвіца (хоча можна й іншими способами, наприклад, методом  $D$ -розбиття). Для прикладу розглянемо систему з характеристичним поліномом

$$p^3 + 3p^2 + \beta p + \alpha = 0. \quad (8.10)$$

Згідно з критерієм Гурвіца для стійкості цієї системи повинні виконуватися умови (8.9), які в даному випадку можуть бути подані (з урахуванням  $a_0 = 1 > 0$ ) у вигляді виразів:

$$\Delta_1 = a_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3\beta - 1 \cdot \alpha > 0, \quad (8.11)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Аналіз одержаних виразів показує, що визначник  $\Delta_1$  завжди буде більше нуля, а визначник  $\Delta_3$ , маючи на увазі додатні значення коефіцієнтів рівняння, визначається величиною визначника  $\Delta_2$  і лише знак  $\Delta_2$  залежить від значень варійованих параметрів. У цьому випадку межа стійкості буде визначатися рівнянням  $\Delta_2 = 0$ , звідки легко одержати залежність  $\beta = \alpha/3$ . Графічне представлення області стійкості показано на рис. 8.8.

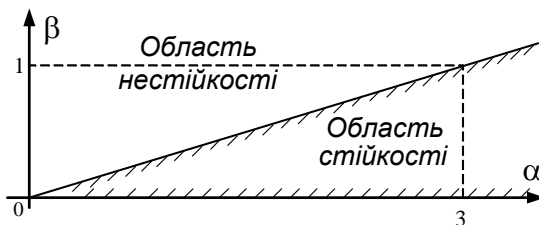


Рисунок 8.8 — Область стійкості системи

### 8.4.2 Частотні критерії стійкості

Частотні методи дослідження стійкості базуються на

зв'язку розміщення коренів характеристичного рівняння  $D(s)$  з графіком комплексної функції  $D(j\omega)$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$ . Це графоаналітичні методи, що дозволяють за виглядом частотних характеристик САУ зробити висновки про їх стійкість. Їх перевага в простоті геометричної інтерпретації, наочності і у відсутності обмежень на порядок диференціального рівняння.

В основу всіх частотних критеріїв покладено наслідок із відомого в теорії функцій комплексної змінної принципу аргумента.

### Принцип аргумента

Нехай  $\epsilon$  комплексний поліном  $n$ -го ступеня (8.7). Згідно з теоремою Безу його можна надати у вигляді

$$D(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n) = 0, \quad (8.12)$$

де  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$  – корені рівняння (8.12);  $s$  – довільна точка на комплексній площині.

Кожен  $i$ -й корінь на комплексній площині (рис. 8.9) геометрично зображується вектором, що виходить з початку координат і закінчується в точці  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ . Його довжина – це модуль комплексного числа  $|s_i|$ , а кут з додатним напрямком дійсної осі – аргумент або фаза  $\arg s_i$ .

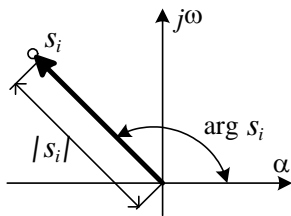


Рисунок 8.9 –  
Зображення вектра  
кореня

Оскільки довільна точка  $s$  на комплексній площині являє собою вектор з довільним, не фіксованим положенням кінця, то в такому випадку будь-яка різниця  $s - s_i$  являє собою різницю векторів і зображується на комплексній площині так, як це показано на рис. 8.10. Якщо змінювати значення  $s$  довільним чином, то кінець вектора  $s - s_i$  буде переміщатися по комплексній площині, а його початок буде залишатися нерухомим, так як  $s_i$  – це конкретне незмінне

значення (один із коренів рівняння). В окремому випадку, якщо на вхід системи подавати гармонійні коливання з частотою  $\omega$ , то  $s = j\omega$ , а характеристичний поліном (8.12) набере вигляду

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\dots(j\omega - s_n) = 0. \quad (8.13)$$

При цьому кінці різниць векторів  $j\omega - s_i$  будуть перебувати на уявній осі (рис. 8.11). Якщо змінювати частоту  $\omega$

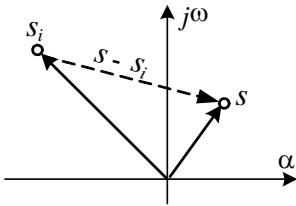


Рисунок 8.10 –  
Геометричне зображення  
різниці векторів

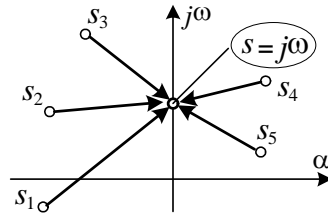


Рисунок 8.11 –  
Ілюстрація різниць  
векторів рівняння

від  $-\infty$  до  $+\infty$ , то кожен елементарний вектор  $j\omega - s_i$  буде повертатися щодо свого початку  $s_i$  на кут  $+\pi$  для «лівих» і  $-\pi$  для «правих» коренів (рис. 8.12).

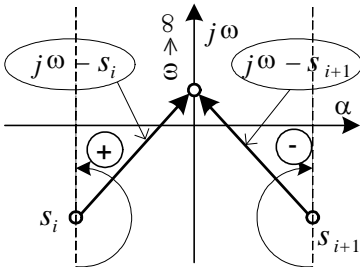


Рисунок 8.12 – До  
пояснення принципу  
аргумента

Нехай із  $n$  коренів  $m$  – знаходяться в правій півплощині, а  $n - m$  – у лівій, тоді кут повороту вектора  $D(j\omega)$  при зміні  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ , враховуючи фактор додавання аргументів при перемноженні векторів, дорівнює

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (8.14)$$

Цей вираз і визначає **принцип аргумента**: зміна аргумента вектора характеристичного полінома  $D(j\omega)$  при зміні частоти від  $-\infty$  до  $+\infty$  дорівнює різниці між числом  $(n - m)$  коренів рівняння  $D(j\omega) = 0$ , що лежать у лівій півплощині, і



числом  $m$  коренів цього самого рівняння, що лежать в правій півплощині, помноженій на  $\pi$ .

Якщо змінювати частоту від 0 до  $+\infty$ , то зміна аргумента буде вдвічі меншою.

Оскільки число коренів рівняння  $D(j\omega) = 0$  і те, які вони за знаком, апріорі невідомо, то частотні критерії використовують висновки з принципу аргумента для аналізу зовнішнього вигляду частотних характеристик систем.

**Частотний критерій стійкості Михайлова** (радянський вчений, 1938 р.)

Це є, по суті, геометрична інтерпретація принципу аргумента (8.14), згідно з яким маємо, що якщо всі  $n$  коренів характеристичного рівняння системи знаходяться у лівій півплощині, тобто  $m = 0$ , то

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2} (n - 2m) = \frac{\pi}{2} n. \quad (8.15)$$

*Критерій формулюється так:* для того щоб система була стійкою необхідно, щоб вектор  $D(j\omega) = 0$  при зміні частоти від 0

до  $+\infty$  повернувся на кут  $\frac{\pi}{2} n$ , ніде не обертаючись на нуль. При

цьому кінець вектора опише на площині криву, яка називається *годографом Михайлова*. Для побудови годографа вираз (8.7) записується із заміною  $s$  на  $j\omega$  у вигляді

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n = \\ &= X(\omega) + jY(\omega), \end{aligned} \quad (8.16)$$

де  $n$  – порядок полінома  $D(s)$ ;  $X(\omega), Y(\omega)$  – дійсна та уявна частини функції Михайлова відповідно.

*Для стійкої системи* годограф починається на додатній півосі при  $D(0) = a_n$ , і при зміні частоти від 0 до  $+\infty$  послідовно проходить проти годинникової стрілки по спіралі  $n$  квадрантів комплексної площини, з переходом у нескінченність в  $n$ -му

квадранті. Приклади годографів Михайлова для стійких систем 1-4-го порядків наведені на рис 8.13 а.

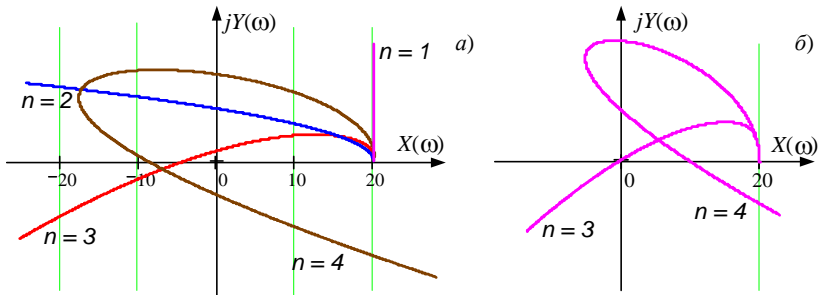


Рисунок 8.13 – Приклади годографів Михайлова:  
 а) стійких систем 1 - 4-го порядків; б) нейтральної системи 3-го порядку і нестійкої системи 4-го порядку

Якщо це правило порушується (наприклад, кількість квадрантів, які проходить крива не дорівнює  $n$ , або порушується послідовність проходження квадрантів (рис. 8.13 б)), то така система нестійка. Якщо годограф проходить через початок координат, то система знаходиться на межі стійкості (рис. 8.13 б).

Критерій зручний своєю наочністю і використовується, якщо можливо одержати математичний опис замкнутої системи автоматичного управління.

Аналіз поведінки годографа Михайлова для стійких систем показує, що при послідовному проходженні його через квадранти координатної площини дійсна і уявна осі перетинаються їм по черзі (послідовно). Точки перетину (рис. 8.14) є коренями рівнянь

$$X(\omega) = 0; \quad Y(\omega) = 0. \quad (8.17)$$

З цієї причини *варіант формулювання критерію Михайлова* звучить так: система буде стійка тоді, коли дійсна  $X(\omega)$  та уявна  $Y(\omega)$

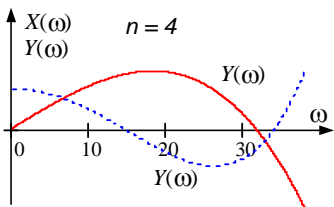


Рисунок 8.14 – Корені, що перемежуються

частини функції Михайлова, прирівняні до нуля, будуть мати всі корені дійсні і такі, що перемешуються, загальне число яких дорівнює  $n$  (рис. 8.14). При  $\omega = 0$  повинна виконуватись умова  $X(0) > 0$ ;  $Y(0) = 0$ .

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Який основний недолік загальної математичної умови стійкості систем?
2. На які два основні види поділяються критерії стійкості?
3. На аналізі чого засновані алгебраїчні критерії стійкості?
4. У чому полягає необхідна умова стійкості з точки зору алгебраїчного критерію?
5. Теорема Безу свідчить: будь-який многочлен можна подати у вигляді ... . Чого?
6. Вільний член характеристичного рівняння системи від'ємний. Що можна сказати про стійкість системи?
7. В яких випадках додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння системи є не лише необхідною, але й достатньою умовою стійкості?
8. На аналізі чого заснований алгебраїчний критерій Гурвіца?
9. Які коефіцієнти характеристичного рівняння виписуються по діагоналі головного визначника Гурвіца?
10. Як змінюються індекси стовпців головного визначника Гурвіца?
11. Які за знаком повинні бути всі визначники Гурвіца для стійкої системи?
12. Визначники Гурвіца низьких порядків одержуються з головного визначника ... . Як?
13. У чому переваги алгебраїчного критерію Гурвіца?
14. В координатах яких змінних будуються області стійкості систем?
15. Яким кореням характеристичного рівняння відповідає будь-яка точка, взята в області стійкості?
16. Який принцип покладено в основу використання частотних критеріїв?
17. На який кут повернеться годограф вектора на комплексній площині при зміні частоти від  $0$  до  $+\infty$ , якщо корінь розміщений у лівій півплощині?

18. На який кут повернеться годограф вектора на комплексній площині при зміні частоти від 0 до  $+\infty$ , якщо корінь розміщений у правій півплощині?
19. Система 5-го порядку стійка. На який кут повинен повернутися годограф Михайлова?
20. Система 3-го порядку стійка. В якому квадранті повинен закінчитися годограф Михайлова?
21. Система 4-го порядку. Годограф Михайлова проходить через початок координат. Що можна сказати про стійкість цієї системи?
22. Де повинен починатися, і в якому напрямку повертатися годограф Михайлова?
23. У чому важлива перевага критерію Михайлова?
24. Система 4-го порядку. Годограф Михайлова послідовно проходить через 1, 2, 1 і закінчується на 4-му квадранті? Що можна сказати про стійкість цієї системи?

## Лекція 15

*Частотний критерій стійкості Найквіста* (ам. вчений, 1932 рік)

Цей критерій заснований на зв'язку властивості стійкості замкнутої системи з поведінкою амплітудної фазочастотної характеристики (АФЧХ) розімкнутої системи, в яку входять послідовно з'єднані ланки від входу системи до точки замикання зворотного зв'язку (рис. 8.15), тобто дозволяє робити висновок

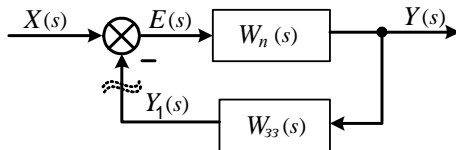


Рисунок 8.15 – Структурна схема замкнутої системи

про стійкість замкнутої системи за поведінкою АФЧХ розімкнутої системи. Цим критерій Найквіста принципово відрізняється від частотного критерію Михайлова, який, як відомо, дає ознаки стійкості власне

досліджуваної системи. І в цьому його *головна перевага*, так як дослідження розімкнутої системи автоматичного управління більш просте, ніж замкнутої, і його можна проводити експериментально.

Разом із тим на застосування критерію Найквіста накладаються такі *обмеження*:

- ступінь чисельника передаточної функції розімкнутої системи не повинен перевищувати ступеня знаменника (для реальних фізичних систем це виконується завжди);
- система повинна бути охоплена одиничним зворотним зв'язком.

Нехай передаточна функція розімкнутої системи при одиничному від'ємному зворотному зв'язку  $W_{oc}(s)=1$  має вигляд співвідношення двох поліномів виду

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{R(s)}{Q(s)}, \quad n \geq m. \quad (8.18)$$

Передаточна функція замкнутої системи по каналу управління

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{R(s)/Q(s)}{1+R(s)/Q(s)} = \frac{R(s)}{R(s)+Q(s)}. \quad (8.19)$$

Характеристичне рівняння розімкнутої системи (яке має порядок  $n$ ) визначається як  $Q(s) = 0$ , а замкнутої системи як  $R(s) + Q(s) = 0$ . При цьому характеристичне рівняння замкнутої системи буде мати той самий порядок  $n$ , що і у розімкнутої, в силу умови  $n \geq m$ , що випливає з (8.18).

Розглядаючи вираз  $1+W(s)$  у знаменнику передаточної функції замкнутої системи, можна побачити, що він, по суті, являє собою відношення характеристичних поліномів замкнутої і розімкнутої систем

$$1+W(s) = 1 + \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{Q(s)+R(s)}{Q(s)} = \frac{D_3(s)}{D_p(s)} = D(s). \quad (8.20)$$

Таким чином вектор частотної характеристики виразу  $D(j\omega) = 1+W(j\omega)$ , який іноді називають вектором Найквіста, включає в себе властивості розімкнутої та замкнутої системи. З іншого боку - це є фактично АФЧХ розімкнутої системи, яка зміщена на одиницю вправо по дійсній осі.

Нехай характеристичне рівняння замкнутої системи має  $m$  «правих» і  $(n-m)$  «лівих» коренів, а характеристичне рівняння розімкнутої системи  $k$  «правих» і  $(n-k)$  «лівих» коренів.

При зміні частоти  $\omega$  від  $\infty$  до  $+\infty$  зміна кута повороту вектора відповідно до принципу аргумента

$$\begin{aligned} \Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} &= \Delta \arg D_3(j\omega) - \Delta \arg D_p(j\omega) = \\ &= \pi(n-2m) - \pi(n-2k) = 2\pi(k-m). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Так як для стійкої замкнутої системи  $m=0$ , то в цьому випадку сумарний поворот вектора  $D(j\omega)$  навколо початку координат дорівнює

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi k, \quad (8.22)$$

де  $k$  – кількість «правих» коренів характеристичного

рівняння розімкнутої системи.

При зміні частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  маємо

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi k = 2\pi \frac{k}{2}. \quad (8.23)$$

Із рівняння (8.23) бачимо, що поведінка вектора Найквіста  $D(j\omega)$  буде суттєво залежати від стійкості розімкнутої системи.

**Загальне формулювання критерію:** щоб після замикання одиничним зворотним зв'язком система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб *вектор Найквіста* (8.23) при зміні частоти від 0 до  $+\infty$  повернувся навколо початку координат (кажуть охопив початок координат!) у додатному напрямку (за годинниковою стрілкою)  $k/2$  разів. В окремому випадку, якщо розімкнена система стійка, то сумарний кут повороту вектора Найквіста повинен становити 0 (так як  $k = 0$ ).

На практиці досліджують поведінку не вектора Найквіста  $D(j\omega)$ , а АФЧХ розімкнутої системи  $W(j\omega)$ , враховуючи те, що згідно з (8.20)  $W(j\omega) = D(j\omega) - 1$ . На рис. 8.16 а показана крива,

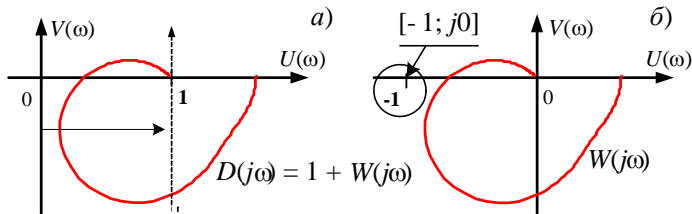


Рисунок 8.16 – Перетворення годографа вектора Найквіста

яку описує кінець вектора Найквіста при зміні частоти від 0 до  $+\infty$  для стійкої в розімкнутому стані системи. Неважко переконатися, що вектор Найквіста опише кут, рівний нулю лише в тому разі, якщо його годограф не охоплює початок координат. Перенесемо умовно початок координат у точку з координатами  $[1; j0]$  (рис. 8.16 б). У цьому випадку зміна аргумента вектора Найквіста буде дорівнювати нулю, якщо АФЧХ розімкненої системи не буде охоплювати точку з координатами  $[-1; j0]$ , яку називають *критичною точкою*.

З урахуванням умови (8.23) розрізняють *три випадки застосування критерію Найквіста*:

**А. Розімкнена система є стійкою.**

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi k = 0. \quad (8.24)$$

*Формулювання критерію*: для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкнутої стійкої системи при зміні частоти від 0 до  $+\infty$  **НЕ** охоплювала критичну точку з координатами  $[-1; j0]$ .

Різні варіанти поведінки АФЧХ системи, яка є стійкою в розімкнутому стані, після замикання її одиничним зворотним зв'язком показані на рис. 8.17. Тут:

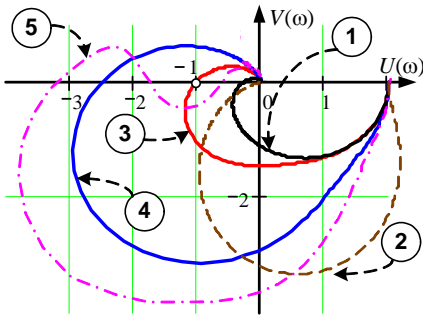


Рисунок 8.17 – Варіанти поведінки АФЧХ стійкої в розімкнутому стані системи

- 1) замкнута система буде стійкою;
- 2) замкнута система буде абсолютно стійкою при будь-яких змінах параметрів системи;
- 3) замкнута система буде на межі стійкості (АФЧХ проходить через критичну точку з координатами  $[-1; j0]$ );
- 4) замкнута система буде нестійкою.

**Б. Розімкнена система на межі стійкості** (наявність нульових або чисто уявних коренів).

Цей випадок характерний особливостями, які виникають у зв'язку з появою нульових полюсів. Подамо передаточну функцію розімкнутої системи у вигляді

$$W(s) = \frac{D(s)}{s^v Q(s)}, \quad (8.25)$$

де  $v$  – порядок астатизму (число нульових полюсів), а  $Q(s)$  має всі корені на лівій півплощині. При  $\omega=0$  АФЧХ



розімкненої системи  $W(j\omega) = \infty$  і простежити поведінку кривої АФЧХ в околі цієї точки неможливо. При зміні частоти від  $-\infty$  до  $+\infty$  спостерігається рух годографа кривої вздовж уявної осі

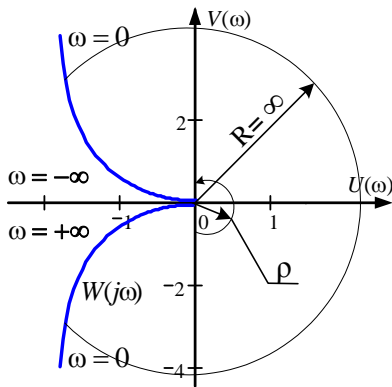


Рисунок 8.18 – Обхід разриву АФЧХ

знизу вгору, а при  $\omega = 0$  відбувається нескінченний розрив. У процесі такого руху обійдемо нульовий корінь (рис. 8.18) по півколу нескінченно малого радіуса  $\rho$  так, щоб цей корінь залишився ліворуч, тобто уявно віднесемо його до лівої півплощини. При русі по цьому півколу в додатному напрямку незалежна змінна змінюється за законом (для випадку  $\nu = 1$ )

$$s = \rho e^{j\psi(\omega)}, \quad (8.26)$$

де фаза  $\psi(\omega)$  змінюється від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ . Підставивши цей вираз у передаточну функцію замість множника  $s$  в знаменнику, одержимо

$$W(s) = \frac{D(s)}{\rho Q(s)} e^{j\psi(\omega)} = R \frac{D(s)}{Q(s)} e^{j\psi(\omega)}, \quad (8.27)$$

де  $R \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ , а фаза  $\psi(\omega)$  змінюється від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ .

Отже, в околиці нульового кореня годограф  $W(j\omega)$  являє собою частину кола (дугу) нескінченно великого радіуса, рух по якому відбувається при збільшенні частоти у від'ємному напрямку.

*Формулювання критерію:* для оцінки стійкості замкнутої системи, у разі якщо розімкнена система нейтрально стійка, необхідно АФЧХ  $W(j\omega)$  розімкнутої системи доповнити дугою нескінченно великого радіуса на ділянці розриву, починаючи з менших частот, у від'ємному напрямку (проти годинникової стрілки) і, після одержання замкнутої кривої, для визначення

стійкості скористатися варіантом критерію Найквіста для систем, стійких у розімкнутому стані.

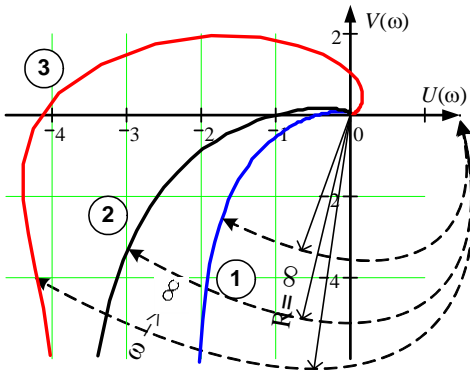


Рисунок 8.19 – Варіанти поведінки АФЧХ нейтральної в розімкнутому стані системи

На рис. 8.19 показано варіанти використання критерію Найквіста для нейтральних в розімкнутому стані систем. Після замикання система буде: 1 – стійка; 2 – на межі стійкості; 3 – нестійка.

**В. Розімкнена система нестійка** (наявність  $k$  «правих» коренів).

У цьому випадку сумарний поворот вектора годографа розімкнутої системи

$$\Delta \arg W(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (n-2k) \frac{\pi}{2}. \quad (8.28)$$

Якщо замкнута система стійка, то відповідно (8.23) АФЧХ розімкнутої системи охоплює критичну точку в додатному напрямку  $k/2$  разів.

*Формулювання критерію:* система, нестійка в розімкнутому стані, буде стійкою в замкненому стані, якщо АФЧХ  $W(j\omega)$  розімкнутої системи при зміні частоти від 0 до  $+\infty$  охоплює критичну точку в додатному напрямку  $k/2$  разів, де  $k$  число правих полюсів розімкнутої системи.

Визначення числа обхватів критичної точки непросто завдання, особливо у випадку систем високого порядку. Тому в практичних додатках знайшло застосування інше формулювання критерію Найквіста, засноване на аналізі переходів характеристики через дійсну вісь.

*Система, нестійка в розімкнутому стані, буде стійкою в замкненому стані, якщо різниця між числом додатних і*

від'ємних переходів АФЧХ розімкнутої системи через дійсну вісь дорівнює  $k/2$ .

*Правило визначення переходів* (за Ципкіним). Перехід годографа  $W(j\omega)$  через відрізок дійсної півосі  $(-\infty; -1)$ , тобто лівіше критичної точки, при збільшенні частоти зверху вниз вважається додатним, а знизу вгору – від'ємним.

Якщо годограф  $W(j\omega)$  починається на відрізку  $(-\infty; -1)$  при  $\omega=0$  або закінчується при  $\omega=\infty$ , то це вважається як половина переходу.

### 8.4.3 Аналіз стійкості за логарифмічними характеристиками

Частотний критерій Найквіста можна використовувати і щодо логарифмічних характеристик (ЛАЧХ). Привабливість даного способу полягає в тому, що побудова логарифмічної АЧХ, зокрема асимптотичної, значно простіша, ніж звичайної АФЧХ.

Як було показано вище, стійкість замкнутої системи тісно пов'язана з числом переходів АФЧХ розімкнутої системи  $W(j\omega)$  через відрізок  $(-\infty; -1)$  від'ємної дійсної півосі. Ця піввісь відповідає у звичайній АФЧХ фазовому зсуву  $(-\pi i)$ ,  $i=1,2,\dots$ . Тому момент переходу звичайної АФЧХ через відрізок  $(-\infty; -1)$  відповідає перетину ЛФЧХ однієї з ліній  $\pm\pi(2i+1)$ ,  $i=0,1,2,\dots$  (див. рис. 8.20).

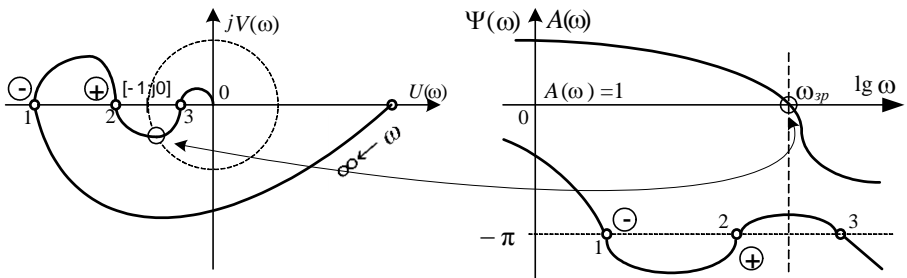


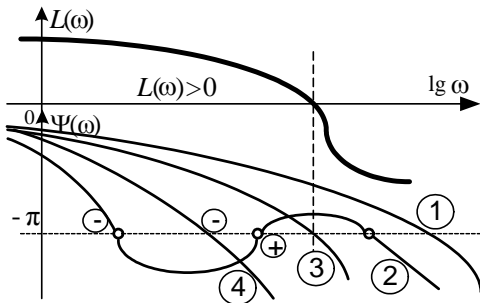
Рисунок 8.20 – Відповідність між звичайною та логарифмічною АФЧХ

Із точки зору стійкості ці переходи безпечні, якщо

відбуваються праворуч від точки  $[-1; j0]$ , тобто коли модуль амплітуди АФЧХ менше одиниці  $|W(j\omega)| < 1$ . При цьому ординати ЛАЧХ від'ємні ( $A(\omega) < 1$ ). Отже, для дослідження стійкості досить побудувати ЛАЧХ в діапазоні додатних значень  $A(\omega)$  (тобто менше частоти зрізу  $\omega_{zp}$ ).

**Формулювання критерію:** якщо розімкнена система стійка або нейтральна (на межі стійкості), то для її стійкості в замкнутому стані необхідно і достатньо, щоб число переходів ЛФЧХ через лінію  $-\pi$  при додатних значеннях ЛАЧХ було парним (у тому числі і таким, що дорівнює нулю).

Варіанти логарифмічних частотних характеристик розімкнутої системи показано на рис. 8.21. Тут частотна характеристика:



1 – відповідає абсолютно стійкій системі в замкнутому стані, так як число переходів ЛФЧХ через лінію в межах додатних значень ЛАЧХ дорівнює нулю; 2 – умовно відповідає стійкій системі в замкнутому стані (число переходів 2); 3 – відповідає знаходженню

Рисунок 8.21 – Визначення стійкості за логарифмічною АФЧХ

замкнутої системи на межі стійкості; 4 – відповідає нестійкій системі в замкнутому стані.

При цьому перехід ЛФЧХ через лінію  $-\pi$  знизу вгору вважається додатним, а навпаки – від'ємним.

У випадку нестійкої розімкнутої системи ( $k$  «правих» коренів), необхідно і достатньо, щоб різниця між числом додатних і від'ємних переходів через лінію  $-\pi v, v=1, 2, \dots$  дорівнювала  $k/2$ .

При наявності нульових коренів (нейтральна в розімкнутому стані система) ЛФЧХ доводять до рівня  $0^0$  дугою

нескінченно великого радіуса, після чого використовують формулювання критерію для стійкої розімкненої системи.

## 8.5 Поняття і визначення запасу стійкості системи

Для нормальної роботи будь-яка система управління повинна мати достатній запас стійкості, для того щоб компенсувати можливі похибки розрахунків її налаштувань, викликані такими факторами:

- ідеалізація і спрощення рівнянь математичного опису;
- лінеаризація рівнянь математичного опису;
- помилки визначення параметрів математичної моделі (коефіцієнтів) та їх технологічний розкид;
- зміна параметрів реальних систем через старіння та ін.

Щодо запасу стійкості можна судити за розміщенням коренів характеристичного рівняння – чим далі вони знаходяться в лівій півплощині від уявної осі, тобто від межі стійкості, тим більший запас. Разом із тим для визначення запасу стійкості можна використати також і критерії стійкості. Форма кількісної оцінки запасу стійкості залежить від того, який із критеріїв використовується.

Найчастіше в інженерних цілях для визначення запасу стійкості використовують критерій Найквіста (у звичайному та логарифмічному варіантах).

Про величину запасу стійкості при використанні критерію Найквіста судять за віддаленням кривої годографа АФЧХ розімкненої системи від критичної точки з координатами  $[-1; j0]$  за двома показниками (див. рис. 8.22):

- запас стійкості за фазою  $\gamma$ ;
- запас стійкості за модулем  $h$ .

*Запас стійкості за фазою* визначають як величину кута (фазового зсуву)  $\gamma = \pi - |\psi(\omega_{zp})|$  на частоті зрізу системи  $\omega_{zp}$ , при якій  $|W(j\omega)| = 1$ .

*Запас стійкості за амплітудою* – це величина відрізка на осі абсцис  $h$  між критичною точкою з координатами  $[-1; j0]$  і

годографом АФЧХ розімкнутої системи.

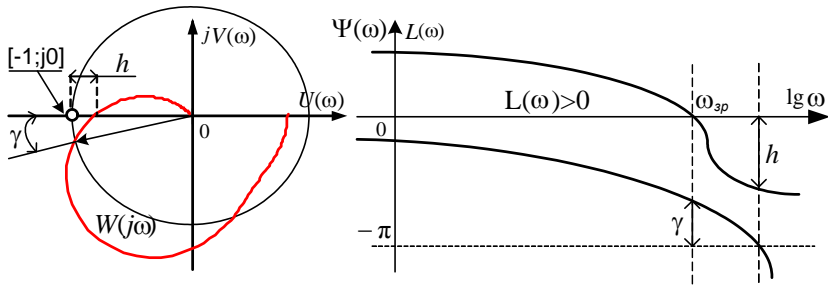


Рисунок 8.22 – До визначення запасу стійкості

На вигляд графіка АФЧХ, а отже і на величину запасу стійкості різні параметри системи впливають по-різному. Разом із тим вплив коефіцієнта підсилення розімкнутої системи  $K$ , безумовно, однозначний – зміна  $K$  ніяк не впливає на фазу, а лише на величину амплітуди (модуль). Із цієї причини на практиці часто для зміни величини запасу стійкості використовують саме цей параметр.

*Критичний коефіцієнт підсилення* – коефіцієнт посилення розімкнутої системи  $K$ , при якому АФЧХ пройде через критичну точку з координатами  $[-1; j0]$ , тобто вийде на межу стійкості.

Для деяких систем управління (як правило, з внутрішніми зворотними зв'язками) втрата стійкості може відбутися як при збільшенні коефіцієнта підсилення, так і при його зменшенні (див. рис. 8.23). Це системи управління з так званими

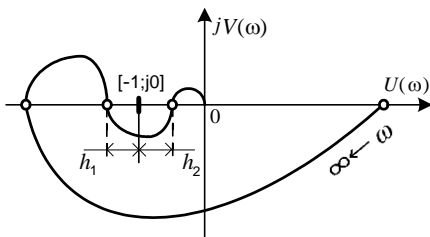


Рисунок 8.23 – Ключовоподібна АФЧХ

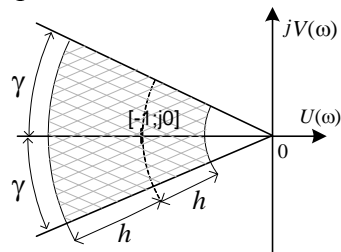


Рисунок 8.24 – «Заборонена зона»

ключовоподібними частотними характеристиками.

Щоб система мала необхідний запас стійкості за заданими значеннями  $\gamma$  і  $h$ , навколо критичної точки з координатами  $[-1; j0]$  будується деяка «заборонена зона» у вигляді сектора (рис. 8.24), куди АФЧХ розімкнутої проектованої системи не повинна заходити.

## 8.6 Стійкість систем управління з запізненням

Як вже згадувалося раніше (див. лекцію 8, п. 4.4), передаточна функція ланки чистого (транспортного) запізнювання має вигляд  $W(s) = ke^{-\tau s}$ , де  $\tau$  – час запізнювання. Системи, які містять такі ланки, називаються *системами із запізнюванням*.

Розглянемо систему (див. рис. 8.15), у прямий ланцюг якої включено ланку чистого запізнювання. Передаточна функція розімкнутої системи

$$W_{\text{рт}}(s) = W(s)W_{\tau}(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} e^{-\tau s}, \quad (8.29)$$

а передаточна функція замкнутої системи

$$W_{\text{ст}}(s) = \frac{W_{\text{рт}}(s)}{1 + W_{\text{рт}}(s)} = \frac{R(s)e^{-\tau s}}{Q(s) + R(s)e^{-\tau s}} = \frac{R_{\tau}(s)}{D_{\tau}(s)}. \quad (8.30)$$

Як бачимо, характеристичне рівняння системи через наявність множника  $e^{-\tau s}$  є не поліномом, а трансцендентною функцією оператора  $s$  і має безліч коренів, що добре видно при розкладанні останнього в нескінченний ряд

$$e^{-\tau s} = 1 - s\tau + \frac{s^2\tau^2}{2!} - \frac{s^3\tau^3}{3!} + \dots \quad (8.31)$$

Знаходження коренів виразу з таким множником є важким і тому критерії Рауса і Гурвіца в їх звичайній формі непридатні. Більш того, додатні значення коефіцієнтів рівнянь навіть 1-го і 2-го порядку вже не є достатньою умовою стійкості системи в цілому.

У таких випадках можна використати частотні критерії, але з урахуванням деяких особливостей. Так, зокрема, умова

стійкості Найквіста для подібних систем справедлива, але вигляд АФЧХ значно складніший. Розглянемо АФЧХ системи з запізненням

$$W_{\tau}(j\omega) = W(j\omega)e^{-\tau j\omega} = A(\omega)e^{j\Psi(\omega)}e^{-j\tau\omega} = A(\omega)e^{j(\Psi(\omega)-\tau\omega)}. \quad (8.32)$$

Із (8.32) бачимо, що наявність ланки запізнювання не змінює модуля системи, а лише вносить додатковий від'ємний фазовий зсув, пропорційний частоті  $\tau\omega$ .

Це дозволяє спочатку побудувати АФЧХ системи без запізнювання, і потім кожен вектор модуля  $A(\omega_i)$  повернути на кут  $\tau\omega_i$ , як це показано на рис. 8.25. Тут спостерігається ефект

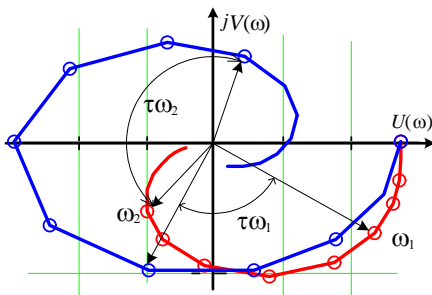


Рисунок 8.25 – Побудова АФЧХ системи з запізнюванням

закручування спіралі, що в цілому погіршує умови стійкості.

У зв'язку з цим можна визначити *поняття* «критичного» запізнювання  $\tau_{кр}$ , як такого, при якому система виходить на межу стійкості.

### ***Питання для самоконтролю і підготовки до тестового контролю***

1. Про стійкість якої системи судять за критерієм Найквіста?
2. Яка основна перевага критерію Найквіста?
3. Які два обмеження необхідно враховувати при застосуванні критерію Найквіста?
4. Чи можна використовувати критерій Найквіста при замиканні системи одиничним зворотним зв'язком?
5. Як називають вектор частотної характеристики вигляду  $D(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ , де  $W(j\omega)$  – АФЧХ розімкнутої системи?
6. Яким чином із годографа вектора Найквіста одержати АФЧХ розімкнутої системи?
7. Які координати так званої «критичної точки», що застосовується в критерії Найквіста?



8. Розімкнена система стійка і її АФЧХ *не охоплює* критичну точку  $[-1; j0]$ . Що можна сказати про стійкість цієї системи в разі її замикання?
9. Розімкнена система стійка і її АФЧХ *охоплює* критичну точку  $[-1; j0]$ . Що можна сказати про стійкість цієї системи в разі її замикання?
10. Розімкнена система стійка і її АФЧХ *проходить через* критичну точку  $[-1; j0]$ . Що можна сказати про стійкість цієї системи в разі її замикання?
11. Розімкнена система нейтральна і має перший порядок астатизму. Що необхідно зробити перед застосуванням критерію Найквіста?
12. Розімкнена система нейтральна і її АФЧХ *не охоплює* критичну точку  $[-1; j0]$ . Чи буде стійка ця система в разі її замикання?
13. Скільки разів повинна АФЧХ нестійкою розімкнутої системи з числом «правих» коренів 2 охопити критичну точку  $[-1; j0]$ , щоб в замкнутому стані система стала стійкою.
14. На якому відрізку дійсної осі визначають знак переходу за правилом Ципкіна?
15. Яким чином визначають переходи за правилом Ципкіна на звичайній АФЧХ?
16. Яким чином визначають переходи за правилом Ципкіна на логарифмічній АФЧХ?
17. Запас стійкості за фазою на звичайній АФЧХ це ... . Намалуйте приблизно.
18. Запас стійкості за модулем на звичайній АФЧХ це ... . Намалуйте приблизно.
19. Запас стійкості за фазою на логарифмічній АФЧХ це ... . Намалуйте приблизно.
20. Запас стійкості за модулем на логарифмічній АФЧХ це ... . Намалуйте приблизно.
21. Через яку точку проходить АФЧХ розімкнутої системи при критичному коефіцієнті підсилення?
22. Якими параметрами визначається «заборонена зона» для забезпечення необхідного запасу стійкості?
23. Як впливає включення ланки запізнювання на стійкість системи?
24. Як зміниться фазовий зсув системи після включення ланки чистого запізнювання?

## Список використаної літератури

1. Комиссарчик В. Ф. Автоматическое регулирование технологических процессов: учебное пособие. (изд. 2-е, расш.) / В. Ф. Комиссарчик, Тверской государственный технический университет. – Тверь, 2001. – 248 с.
2. Артамонов Д. В. Основы теории линейных систем автоматического управления: учеб. пособие / Д. В. Артамонов, А. Д. Семёнов. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 135 с.
3. Бобцов А. А. Операторный метод анализа и синтеза линейных систем управления. Учебно-методическое пособие / А. А. Бобцов, А. В. Лямин, М. С. Чежин. – СПб. : СПбГИТМО, 2001. – 52 с.
4. Давыдов А. В. Основы теории управления. Тематические лекции: учебное пособие в электронной форме. – Екатеринбург, УГГУ, ИГиГ, каф. ГИН. – <http://www.prodav.narod.ru/otu/index.html>.
5. Дядик В. Ф. Теория автоматического управления: учебное пособие / В. Ф. Дядик, С. А. Байдали, Н. С. Криницын; Национальный Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 196 с.
6. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. – М. : Машиностроение, 1973. – 606 с.
7. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков – СПб. : Наука, 2000. – 475 с.
8. Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Выща шк. 1989. – 431 с.
9. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М. : Мир, 1972. – 650с.
10. Красовский А. А. Основы автоматике и технической

- кибернетики / А. А. Красовский, Г. С. Поспелов. – М.-Л. : Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.
11. Клиначёв Н. В. Теория систем автоматического регулирования и управления: учебно-методический комплекс. - Offline версия 4.4. – Челябинск, 2011. – 680 файлов; <http://model.exponenta.ru/lectures/0090.htm>.
  12. Клавдиев А. А. Теория автоматического управления в примерах и задачах: учеб. пособ. – СПб. : СЗТУ, 2005. – 74 с.
  13. Литюга А. М. Теоретические основы построения эффективных АСУ ТП: конспект лекций / А. М. Литюга, Н. В. Клиначёв, В. М. Мазуров. – Offline версия 1.1. – Тула, Челябинск, 2002. – 703 файла, ил.
  14. Лазарева Т. Я. Линейные системы автоматического регулирования: учебное пособие / Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. – 264 с.
  15. Лазарева Т. Я. Основы теории автоматического управления: учеб. пособ. / Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. 2-е изд., перераб. и доп. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 352 с.
  16. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И. В. Мирошник – СПб. : Питер, 2005. – 336 с.
  17. Макаров И. М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал) / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1982. – 504 с.
  18. Математические основы теории автоматического регулирования: учебное пособие для вузов / под ред. Б. К. Чемоданова. – 2-е изд. – М. : «Высш. школа», 1977.
  19. Певзнер Л. Д. Теория систем управления. – М. : Изд-во Московского гос. горного университета. 2002. – 472 с.
  20. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления: учеб. пособие / А. А. Первозванский – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – 616 с.

21. Подчукаев В. А. Теория автоматического управления (аналитические методы) / В. А. Подчукаев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 392 с.
22. Поляков К. Ю. Теория автоматического управления для «чайников». 2008. – <http://www.razym.ru/>.
23. Попович М. Г. Теорія автоматичного керування: підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 1997. – 544 с.
24. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В. А. Бесекерского. – М. : Наука, 1978. – 512с.
25. Сенигов П. Н. Теория автоматического управления: конспект лекций. – Челябинск : ЮУрГУ, 2001. – 93 с.
26. Страшинин Е. Э. Основы теории автоматического управления: учебное пособие. Ч. 1. Линейные непрерывные системы управления. – Екатеринбург : УГТУ, 2000. – 217 с.
27. Туманов М. П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: учебное пособие. – М. : Изд. МГИЭМ, 2005. – 82 с.
28. Теория автоматического управления: учебн. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика»: в 2 ч. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; под ред. А. А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – 367 с.
29. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.
30. Федосов Б. Т. Подборка методических статей о задачах теории систем автоматического регулирования. [http://model.exponenta.ru/bt/bt\\_00117.html](http://model.exponenta.ru/bt/bt_00117.html).
31. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1977. – 560 с.
32. [http://texnic.ru/tools/lekci/tau\\_kl/tau0g4.htm](http://texnic.ru/tools/lekci/tau_kl/tau0g4.htm).

Додаток А  
(обов'язковий)

**Історичний огляд становлення теорії  
автоматичного управління**

Слово «автоматизація» походить від грецького слова «автомат», що означає «самодіючий». У Древній Греції так називалися механізми і пристрої, що могли самостійно, без видимої участі людини виконувати які-небудь дії.

Перші автомати використовувалися в основному жерцям для показу «чудес», які творилися нібито божественною силою. Пізніше автомати–іграшки з'явилися в будинках знаті і служили для розваги гостей. Наприклад, є відомості про «залізну людину» феодала Альберта Великого, яка виконувала функції швейцара – відкривала та закривала двері. У Середньовіччя неодноразово створювалися механічні птахи (Леонардо да Вінчі), звірі і різні фантастичні тварини, що могли рухатися і ричати. Звичайно користі від таких «автоматів» було небагато, але саме вони стали попередникам сучасних автоматів.

Першим автоматом, який зробив помітний вплив на розвиток цивілізації, був годинник, механізм, який вимагав великої точності ходу. Для її підвищення були придумані «регулятори»: поплавковий – для водяних годинників і маятниковий (в 1675 р. голландським фізиком і математиком Х. Гюйгенсом) – для механічних.

Інтенсивний розвиток автоматики почався з XVIII ст. у зв'язку з промисловим переворотом в Європі, пов'язаним із початком використанням енергії пари.

Уже з самого початку застосування автоматичних пристроїв для технологічних цілей почали розвиватися два основних їх принципи, що використовуються і до нині: прямого розімкнутого управління і управління зі зворотним зв'язком. На першому принципі були засновані винайдені в середині XVIII століття копіювальні станки. Другий принцип був вперше

застосований французьким фізиком Д. Паленом у винайденій ним каstrулі-скороварці в 1680 р. та покладений в основу винаходу І. Ползуновим автоматичного регулятора живлення казана (див. рис. А.1), який він побудував в 1765 р. у м. Барнаулі, а також автоматичного регулятора швидкості парової машини (див. рис. А.2), запатентованого Дж. Уаттом у 1784 р.,

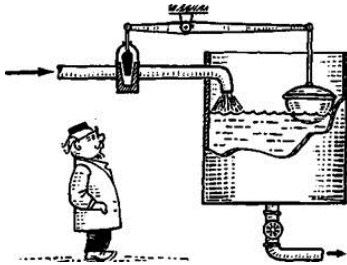


Рисунок А.1 – Ідея дії поплавкового регулятора

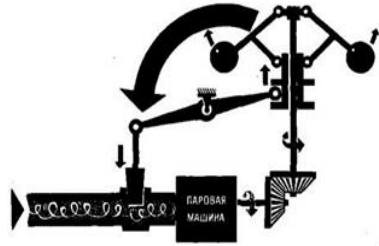


Рисунок А.2 – Ідея дії відцентрового регулятора

якому і дісталася слава винахідника відцентрового регулятора, що забезпечував регулювання технологічних змінних залежно від відхилення їх від заданого значення. Заради справедливості необхідно відмітити, що перший відцентровий регулятор був створений ще в XVII столітті голландським інженером Х. Гюйгенсом для управління вітряними і водяними млинами (генії часто випереджають свій час, а їх досягнення забуваються).

Принцип управління за відхиленням величини від заданого значення, відомий як принцип Ползунова-Уатта, дістав значного поширення в сучасній автоматиці. У перший період розвитку автоматичного управління він розвивається переважно для механічних пристроїв. Тоді ж, крім автоматичних регуляторів Уатта, що діяли за принципом відхилення, з'являються регулятори, засновані на безпосередньому урахуванні зміни навантаження (1830 р.) (принцип Понселе, або регулювання за збуренням), а також метод управління за похідними (принцип Сіменса, 1845 р.), названий інерційним принципом.

Парова машина не випадково стала першим об'єктом для використання техніки та теорії регулювання. Причина в тому, що вона не мала властивості стійко працювати без втручання зовні. Такі не дуже сприятливі динамічні властивості часто приводили до того, що підключений до машини регулятор працював зовсім не так, як цього бажав конструктор, тобто замість стабілізувати «розгойдував» машину або взагалі виявлявся нездатним керувати. Це давало поштовх до проведення теоретичних пошуків. Однак до 60-х років ХХ століття теоретичні дослідження мали недолік, який у наш час називають «відсутністю системного підходу». Дослідники ще не бачили, що в техніці народжується новий напрямок, вони створювали регулятор як деякий допоміжний придатак до машини і при цьому часто досягали задовільного заспокоєння коливань регулятором, вважаючи що цього достатньо для його нормальної роботи на машині. При такому підході теоретичні дослідження не могли стати основою для нової науки.

У 1871 році математик П. Л. Чебишев своєю працею про відцентровий регулятор започаткував теоретичні дослідження автоматичних регуляторів.

У перших автоматичних регуляторах для переміщення виконавчого механізму використовувалось зусилля, яке створювалось самим чутливим елементом. Із збільшенням потужності парових машин цього зусилля виявилось недостатньо. У 70-х роках ХІХ століття був винайдений підсилювач – сервомотор, який значно збільшував потужність, що подається на виконавчий механізм. Ускладнення систем автоматичного регулювання і необхідність точного вибору їх параметрів привели до розвитку теорії автоматичного управління. Засновником теорії управління як науки став Джеймс Максвелл. У роботах Максвелла (1867 р.) та І. Вишнеградського (1872 – 1878 рр.) були вперше розглянуті проблеми, що виникають при автоматичному регулюванні парових машин, і закладені основи теорії лінійних автоматичних систем. У 1877 р. Раус, математик із Кембриджського

університету, під впливом Максвелла розробив перший критерій стійкості розв'язань диференціальних рівнянь будь-якого порядку, поклавши початок роботам з аналізу стійкості. А. Стодола на основі робіт Вишнеградського проаналізував співвідношення в складній системі регулювання турбін, що включає розподілену ланку у вигляді трубопроводу. На його прохання А. Гурвіц у 1893 р. розв'язав задачу про стійкість систем автоматичного регулювання, сформулювавши умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти характеристичного рівняння системи (критерій стійкості Гурвіца), і побудувавши критерій стійкості, що збігався з результатами Рауса.

Велике значення для розвитку теорії автоматичного управління мали дослідження академіка О. М. Ляпунова, який у 1892 році у своїй праці «Загальна задача про стійкість руху» заклав основи теорії стійкості нелінійних динамічних систем, а також обґрунтував вихідні положення лінійної теорії автоматичного управління.

Важливою подією в історії управління було опублікування М. Є. Жуковським у 1909 році першого російського підручника «Теорія регулювання ходу машин», в якому, крім узагальнення відомих положень, було наведено нові дослідження регулятора з сухим тертям, основи теорії переривчастого регулювання.

У кінці XIX на початку XX століття енергія пари дедалі більше змінювалась електричною енергією, і питанням автоматизації різних електроустановок приділялося все більше уваги. У цей період виникають автоматичні електростанції, автоматизуються окремі промислові ділянки, цехи та цілі підприємства. Ставляться і вирішуються завдання комплексної автоматизації цілих промислових процесів і виробництв.

Принципове значення для удосконалення методів автоматичного управління мав розвиток електротехніки, який дозволив використовувати нові технічні засоби і розширив межі дії пристроїв автоматичного управління. Винахід електричного реле П. Шиллінгом (1832 р.) поклав початок розвитку складних релейних систем автоматики. Перші електричні регулятори були



винайдені В. Чиколевим і П. Яблочковим у 70-х рр. XIX століття у зв'язку з появою електричного дугового освітлення. Тоді ж А. Давидов запропонував автоматичну систему управління стрільбою, яка застосовувалася на бойових кораблях російського флоту в кінці XIX століття. Істотними етапами розвитку релейних систем автоматичного управління вважається період, коли в США була винайдена система автоматичного блокування на залізничному транспорті (У. Робінзон, 1872); розроблена в 90-х рр. XIX століття автоматична телефонна станція; відбувся запуск в США автоматичної тягової підстанції (1914), автоматизованої ГЕС (1917) і автоматизованого заводу автомобільних рам (1920), що був першою автоматизованою системою. До цього самого періоду відноситься поява перших систем телемеханіки як засобів автоматичного управління на відстані, що були вперше застосовані в США у 1921 р. для централізації управління тяговими підстанціями, а надалі набули широкого поширення для централізованого управління енергосистемами, диспетчерського управління на залізниці та ін.

Автоматика як самостійна область техніки вперше одержала визнання на 2-й Міжнародній енергетичній конференції у 1930 р., на якій була створена секція з питань автоматичного і телемеханічного управління і захисту.

30-ті роки XX століття ознаменувалися початком бурхливого розвитку радіоелектроніки. Електронні лампи швидко починають знаходити застосування в техніці автоматичного управління. Створюються електронні автоматичні регулятори, пристрої релейного управління, що використовують електронні лампи, і так далі. Величезну роль відіграла поява і початок масового застосування під час Другої світової війни лампових операційних підсилювачів. На їх базі створюються лампові аналогові обчислювальні машини, які дозволили вперше вести попереднє імітаційне моделювання систем регулювання, що привело до створення перших автоматичних систем управління з прогнозуванням, таких як системи управління зенітним вогнем і бомбометанням. Аж до

наших часів операційні підсилювачі у вигляді інтегральних схем залишаються основним засобом обробки аналогових сигналів.

У 1944 р. з'явилися перші цифрові електронні обчислювальні машини, що дали початок новому напрямку - автоматизації обчислень. Із того часу розвиток автоматичного управління і обчислювальної техніки нерозривно пов'язані. Одночасно значно розширилось коло об'єктів автоматичного регулювання і управління. Теорія регулювання механічних і теплових процесів почала поширюватися і на електричні процеси. Викристалізувалася загальна теорія автоматичних систем. Роботи Г. Найквіста (1932 р.) і А. Михайлова (1938 р.) сприяли впровадженню в теорію автоматичного управління нової могутньої зброї – операційного обчислення і частотних методів аналізу і синтезу автоматичних систем управління. Засновники цих методів – великі математики Жан Фур'є і П'єр Лаплас. Останній, відкривши своє знамените перетворення диференційних рівнянь в алгебраїчні, не вважав це відкриття важливим (так само як Х. Гюйгенс – винахід регулятора). На межі XIX і XX століть, зіткнувшись із проблемою розрахунку передачі електричних сигналів по довгих лініях, О. Хевісайд «повторно відкрив» перетворення Лапласа в дещо іншій формі. З тих пір воно стало основним апаратом аналізу перехідних процесів в електричних ланцюгах і системах управління. О. Андронов та його учні збагатили теоретичні основи автоматики методами фазового простору і точкового перетворення поверхонь, що дало можливість точного вирішення деяких завдань автоматичного управління, поставлених ще Вишнеградським, але які залишались не вирішеними, впродовж 70 років. Були зроблені важливі кроки в розвитку теорії інваріантних автоматичних систем. Серйозний розвиток отримала теорія імпульсних і дискретних систем автоматичного регулювання.

Великою подією у розвитку теорії автоматичного керування була поява в 1948 і 1952 роках праць американського вченого Н. Вінера, які стали основою нового напрямку –

кібернетики. Академік А. М. Колмогоров визначив кібернетику як вчення про способи добування, збереження, перетворення і використання інформації в машинах, живих організмах та їх об'єднаннях. Принципи кібернетики як науки про управління в найрізноманітніших умовах (системах) покладено в основу сучасних термінів і понять теорії автоматичного управління.

Швидкий прогрес обчислювальної техніки в другій половині ХХ століття став базою для подальшого розвитку систем управління. Розвиваються оптимальне управління, самоналагоджувальні (адаптивні) системи і методи ідентифікації об'єктів управління. Особливу роль почала відігравати теорія випадкових процесів і засновані на ній методи розрахунків, що виникли ще під час Другої світової війни у зв'язку з проблемою управління зенітним вогнем за даними, що надходили від радіолокаторів. Фундаментальну роль у постановці і вирішенні цих завдань, названих задачами фільтрації і прогнозування, зіграли досягнення А. М. Колмогорова, Н. Вінера і Дж. фон Неймана.

Важливим етапом становлення теорії управління став бурхливий розвиток методів оптимального управління динамічними системами і нестационарними об'єктами, які виникли у зв'язку з освоєнням космосу. Найважливішими досягненнями в цьому напрямку стала розробка в 1959 році Л. С. Понтрягіним і його учнями принципу максимуму, а Р. Беллманом методу динамічного програмування – методу рішення задач шляхом вибору оптимальної послідовності дій (1953 р.). Ці методи відразу знайшли застосування в розробці алгоритмів управління нестационарними процесами.

Нині в умовах науково-технічної революції автоматичні системи знаходять широке застосування в промисловості, на транспорті, у дослідницьких лабораторіях. Автомати стали безцінними помічниками людини. Автоматичні верстати і технологічні лінії допомагають різко підвищити продуктивність праці, звільнили людину від роботи у важкодоступних і небезпечним для життя умовах.

Навчальне видання

Худолей Георгій Михайлович

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ**  
*КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ*

для студентів напряму підготовки  
6.050201 «Системна інженерія»  
усіх форм навчання

*У двох частинах*

*Частина 1*

*Аналіз лінійних систем автоматичного управління*

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей  
Редактор Н. М. Мажуга  
Комп'ютерне верстання Г. М. Худолея

Підписано до друку 29.04.2016, поз. 147.  
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 10,46. Обл.-вид. арк. 8,25. Тираж 20 пр. Зам. №  
Собівартість видання      грн    к.

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.