

УДК 519.86.5

КП

№ держреєстрації 0111U006120

Інв. №

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Сумський державний університет (СумДУ)

40007, м. Суми, вул. Р.-Корсакова, 2: тел. (0542) 33-41-08, факс (0542) 33-40-49

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи
доктор фіз.-мат. наук, проф.

_____ А.М. Чорноус

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

(заключний)

Начальник НДЧ

к.ф.-м.н., с.н.с.

Д.І. Курбатов

Керівник НДР

к.ф.-м.н., доцент

В.М. Супрун

2015

Рукопис закінчено 15 грудня 2015 р.

Результати цієї роботи розглянуто на засіданні наукової ради СумДУ,
протокол від 2015.12.24 № 5

СПИСОК АВТОРІВ

Доцент

к.ф.-м.н.

(15.12.2015)

В.М. Супрун

(розд. 1, 2)

Асистент

(15.12.2015)

А.М. Заскока

(розд. 1, 2)

Аспірант

(15.12.2015)

Д.С. Трощенко

(розд. 2)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 42 с., 10 рис., 1 табл., 12 джерел.

Об'єкт дослідження – процеси, що відбуваються під час бойового функціонування протидіючих угруповань противника.

Мета роботи – на основі теорії марківських і напівмарківських процесів з дискретною множиною станів і неперервним часом дослідити показники ефективності функціонування складних системв стаціонарному режимі. Застосувати отримані результати до побудови аналітичних моделей практичних задач.

Метод дослідження – теоретичний аналіз, що базується на системі диференціальних рівнянь Колмогорова.

МОДЕЛЬ, СИСТЕМА, ГАРМАТА, ПРОЦЕС, ІМОВІРНІСТЬ, СВОЄЧАСНІСТЬ УРАЖЕННЯ, ЕФЕКТИВНІСТЬ, ПОКАЗНИК

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ БОЮ МІЖ <i>садн</i> І АРТИЛЕРІЙСЬКОЮ БАТАРЕЄЮ ПРОТИВНИКА З УРАХУВАННЯМ ПРОТИДІЇ	8
1.1 Постановка задачі.....	8
1.2 Формалізація задачі.....	9
1.3 Побудова математичної моделі бою	10
1.4 Розв’язок системи диференціальних рівнянь.....	13
1.5 Дослідження основних параметрів моделі, які впливають на результат бою.....	15
1.6 Вихідні дані.....	20
1.7 Розрахунок імовірності накриття цілей зоною рівномірного розсіювання ..	21
1.8 Визначення середніх чисельностей бойових одиниць <i>садн</i> і артилерійської батареї евентуального противника	23
1.9 Висновки до розділу 1	25
2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БОЙОВОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ БАТАРЕЇ САМОХІДНИХ НЕБРОНЬОВАНИХ ГАРМАТ.....	27
2.1 Побудова ймовірнісної моделі функціонування <i>сабатр</i>	27
2.2 Розв’язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова	29
2.3 Визначення інтенсивностей і ймовірностей переходу системи із одного стану в інший	31
2.4 Ймовірність перебування цілі у відповідних станах.....	36
Висновки до розділу 2	38
ВИСНОВКИ.....	39
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	42

ВСТУП

Питання військової справи відносяться до числа найбільш складних, їх дослідження потребує детальної оцінки як якісних, так і кількісних сторін, котрі характеризують процеси підготовки і забезпечення ведення бойових дій.

Одна із специфічних особливостей ведення бойових дій полягає у тому, що їм притаманна висока динамічність, а обставини, у яких доводиться планувати, приймати рішення і діяти, містять в собі невідомі наперед ситуації і елементи випадковості. Окрім цього, рішення багатьох практично важливих питань, таких як конструювання і виготовлення нових зразків озброєння, визначення оптимального співвідношення між видами і родами військ, планування і координація операцій, установлення граничних щільностей бойових порядків, потребують науково–обґрунтованих розробок, які дозволяли б отримати не тільки якісні, але й кількісні рекомендації. Особливу роль для розв'язання цих питань відводиться математичним методам і особливо прикладній математиці, яка на сучасному етапі переходить до безпосереднього математичного моделювання, що дає можливість досліджувати, прогнозувати і оптимізувати різноманітні процеси, які протікають у складних військових системах.

Для опису і оцінки бойових дій між протидіючими угрупованнями (однорідними і різнорідними) у теперішній час розроблена велика кількість математичних моделей, які можна розділити на аналітичні і стохастичні.

При оперативно-тактичних розрахунках широке застосування знайшли аналітичні моделі бою. За допомогою моделей групового бою визначаються основні параметри, які характеризують динаміку бойових дій. До таких параметрів відносяться, наприклад, прогнозування бою, темп втрат протидіючих сторін, їх абсолютна або відносна чисельність і зміна в ході бою, побудова і щільність бойових порядків і т.ін.

Недоліком цих моделей є необхідність проведення великої підготовчої роботи для їх побудови, окрім цього вони не враховують просторового переміщення об'єктів, впливу випадкових факторів.

У цьому випадкові опис бойових дій і врахування факторів, що несуть стохастичну природу, проводять за допомогою стохастичних моделей.

Стохастичні моделі оперують не середніми чисельностями, які є у протидіючих сторін, а ймовірностями їх виживання. В основі цих моделей лежить визначення ймовірності події, яка полягає в тому, що за деякий період часу ведення бою із загальної кількості бойових засобів кожної з сторін залишається неураженою якась їх частка.

Визначення цих імовірностей може бути здійснено в результаті: моделювання за схемою марківських випадкових процесів, застосуванням методу статичних випробувань і т. ін.

Слід відмітити, що стохастичні моделі відрізняються рядом переваг в порівнянні з аналітичними: вони в меншій мірі потребують спрощуваних припущень, дозволяють враховувати фактори якої завгодно природи і, у якій завгодно кількості, будувати алгоритми за модульним принципом і т. ін.

У даній роботі пропонуються підходи до побудови аналітичних моделей, які описують бойове застосування артилерії.

Одним із головних завдань, які розв'язуються в ході вогневого ураження еventуального противника є боротьба з його артилерією. Добре відомо, що більша частина сучасних артилерійських комплексів, які підлягають ураженню, є високоманевровими і здатні в короткі проміжки часу залишити вогневу позицію. В той же час перебування високоманеврових цілей на вогневій позиції визначається багатьма факторами, наприклад, видом об'єкту, характером задачі, які виконуються і т. ін.

Для таких умов величина втрат при нанесенні вогневого удару по високоманевровій цілі еventуального противника залежить від цілого ряду випадкових величин. Такими, наприклад, є час зайняття і час перебування цілі на вогневій позиції, час виявлення об'єкту і виконання ним вогневої задачі, час

залишення вогневої позиції і т. ін. Тому, визначаючи показники ефективності та ступінь ураження високоманеврової цілі, необхідно враховувати ймовірність того, що вогневий наліт по цілі здійснено до того моменту часу, поки вона залишить вогневу позицію.

Досить часто розв'язання цих питань базується на побудові математичних моделей, основою яких є система лінійних диференціальних рівнянь Колмогорова. Розглядаючи високоманеврову ціль, як складну систему S , в якості показників ефективності використовується ймовірність перебування системи S в одному з її можливих станів або в деякій підмножині станів. При обґрунтуванні цих показників широке застосування отримали аналітичні моделі, які описуються марківськими випадковими процесами з дискретною множиною станів і неперервним часом.

При побудові математичних моделей за схемою марківських процесів, як правило, дотримуються наступного алгоритму:

1. Визначається множина можливих станів S : $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$
2. Будується орієнтований граф станів системи, який відповідає умові задачі.
3. Визначаються інтенсивності переходу $\lambda_{ij}(t)$, ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, n$) системи S із стану S_i у стан S_j .
4. Складається система диференціальних рівнянь Колмогорова.

При цьому вважається, що множину можливих станів системи S можна визначити як множину комбінацій станів її елементів або як множину можливих комбінацій числових значень параметрів системи. Будемо вважати також, що перехід системи S із одного стану в інший відбувається у випадковий момент часу миттєво під дією найпростішого пуассонівського потоку подій.

Також функціонування артилерійської батареї евентуального противника (*сабатр*) описується за допомогою напівмарківського процесу. Тобто, на відміну від марківських моделей систем, час перебування системи у відповідних станах є випадковими величинами з довільними функціями розподілу, які залежать тільки від поточного стану системи.

1 АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ БОЮ МІЖ *садн* І АРТИЛЕРІЙСЬКОЮ БАТАРЕЄЮ ПРОТИВНИКА З УРАХУВАННЯМ ПРОТИДІЇ

1.1 Постановка задачі

За даними повітряної розвідки виявлено артилерійську батарею укритих причіпних гармат евентуального противника.

Бойовий порядок батареї противника на вогневій позиції зигзагоподібній. Координати цілі визначені за результатами розвідки двох гармат.

Для ураження артилерійської батареї евентуального противника залучити артилерійський дивізіон 152 – мм СГ2С3. Дальність стрільби 10 км. Визначення установок для стрільби на ураження здійснюється на основі повної підготовки.

Необхідно визначити ефективність ураження батареї противника з урахуванням протидії (рис. 1.1)

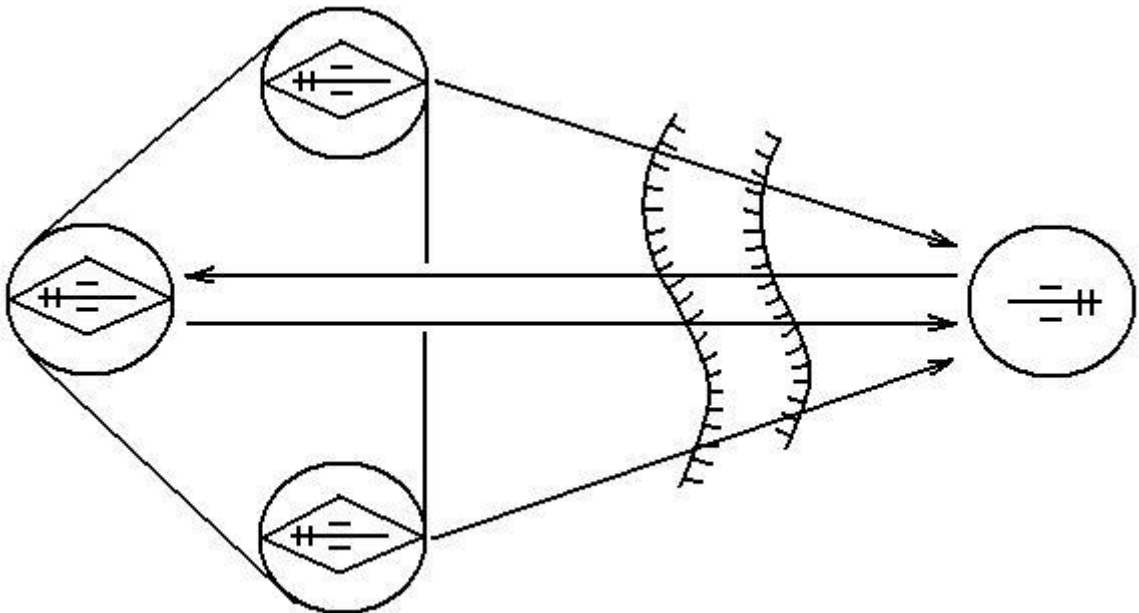


Рисунок 1.1 – Схема вогневої взаємодії *садн* і батареї противника.

1.2 Формалізація задачі

Нехай в бойових діях беруть участь два однорідних протидіючих угруповання (сторони I і II).

Позначимо через N_1 число бойових одиниць (наприклад, гармат що входять до складу *садн* 152 – мм СГ2С3) сторони I, а через N_2 число бойових одиниць (наприклад, гармат, що входять до складу артилерійської батареї противника) сторони II.

Таким чином ми маємо бій між *садн* 152 – мм СГ2С3 (сторона I) і артилерійською батареєю евентуального противника (сторона II).

Припустимо, що має місце наступна організація бою:

1) кожна бойова одиниця сторони I здатна вести вогонь по будь – якій бойовій одиниці сторони II і навпаки;

2) одним пострілом уражається не більше однієї бойової одиниці;

3) уражена бойова одиниця миттєво припиняє вогонь;

4) кожна бойова одиниця сторони I або II спричиняє пуассонівський потік уражальних пострілів з відповідними інтенсивностями причому, в який завгодно момент часу t ведення бою, сумарний потік уражальних пострілів кожної сторони пропорційний математичному сподіванню числа бойових одиниць, що збереглись.

5) Вогонь усіх бойових одиниць (що збереглись) кожної сторони розподіляється рівномірно між усіма бойовими одиницями іншої сторони як уражених, так і неуражених (перенесення вогню не відбувається).

При зроблених вище припущеннях процес динаміки бою між сторонами I і II може бути описаний [1-6] випадковим марківським процесом з дискретною множиною станів і неперервним часом. Це означає, що шукані середні чисельності бойових одиниць, що збереглись на момент часу t ведення бою, можуть бути знайдені [1,2,6], як розв'язок системи диференціальних рівнянь.

Найбільш загальним (і найбільш розповсюдженим) видам аналітичних моделей які описують бій між протидіючими угрупованнями є система диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{cases} \frac{dm_1(t)}{dt} = f_1[m_1(t), m_2(t), u, v, t] \\ \frac{dm_2(t)}{dt} = f_2[m_1(t), m_2(t), u, v, t] \end{cases} \quad (1.1)$$

де m_1, m_2 - середні чисельності бойових засобів протидіючих сторін на момент часу ; u, v - компоненти управління; t – час ведення бою.

Система диференціальних рівнянь (1.1) відповідає схемі протидії однієї сторони на іншу і навпаки.

1.3 Побудова математичної моделі бою

Нехай існує деяка фізична система S , яка описує бій між *садн* і батареєю противника (сторони I і II). Позначимо через $S_i (i=1,2,3,4)$ можливі стани, в яких може перебувати бойова одиниця кожної з сторін, тобто

$S_1(S_2)$ – бойова одиниця сторони I(II) не уражена;

$S_3(S_4)$ – бойова одиниця сторони I(II) уражена.

Будемо вважати також, що в системі $S=(S_1, S_2, S_3, S_4)$ протікає марківський процес $X=X(t)$, $t \geq 0$ з дискретною множиною станів і неперервним часом. Тоді $P_i(t)=P\{X(t)=i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) імовірність того, що в момент часу t система S знаходиться в одному з можливих станів S_1, S_2, S_3, S_4 . Перехід системи S із стану S_i в стан $S_j (i \neq j)$ відбувається миттєво під дією пуассонівського потоку подій з інтенсивністю $\lambda_{ij}(t)$.

Процес переходу системи S із стану в стан покажемо за допомогою графа

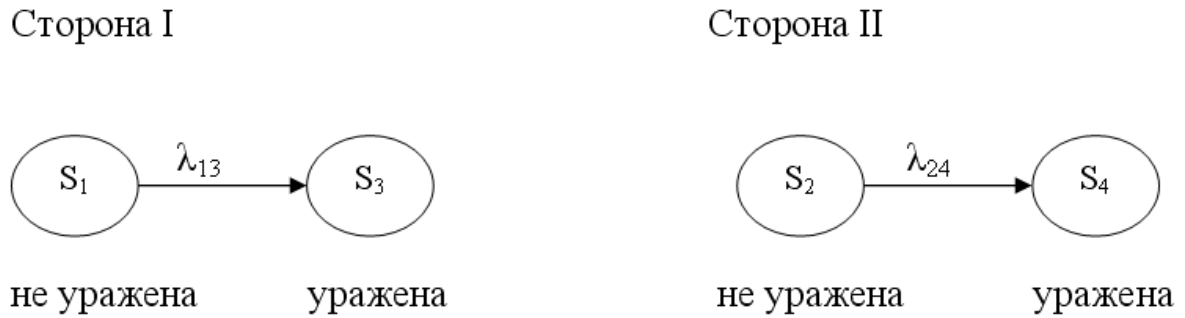


Рисунок 1.2 – Граф станів бойових одиниць сторін I і II

Згідно [5,7], для ймовірностей станів $P_1(t)$ і $P_2(t)$, з якими перебувають бойові одиниці сторін I і II відповідно у станах S_1 і S_2 (при $\lambda_{ij}(t)=\text{const}$) отримуємо слідуочу систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{13}P_1(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{24}P_2(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

де λ_{13} і λ_{24} визначені вище.

Підрахуємо параметри λ_{13} і λ_{24} для довільного моменту часу t ведення бою. Виходячи з фізичного змісту задачі маємо послідовно:

1. У ході бою кожна бойова одиниця сторони II учиняє по стороні I пуассонівський потік уражальних пострілів з інтенсивністю $\lambda_2\theta_2P_2(I/\theta_2)$, де λ_2 – скорострільність, θ_2 – імовірність накрыття цілі сторони I областю розривів, $P_2(I/\theta_2)$ – умовна ймовірність ураження цілі за умови, що вона накрыта зоною рівномірного розсіювання.

2. Позначимо через $m_2(t)$ число бойових одиниць сторони II, що збереглись на момент часу t , тоді середнє число успішних пострілів сторони II по стороні I буде таким: $\lambda_2\theta_2P_2(I/\theta_2)m_2$.

3. Згідно з організацією бою перенесення вогню не відбувається, тобто обстрілюються усі цілі як уражені так і неурражені, тому середнє число цілей що обстрілюється необхідно розділити на загальне число цілей сторони I – на N_1 .

Таким чином, параметр λ_{13} з (1.2) визначається наступним співвідношенням

$$\lambda_{13} = \frac{\lambda_2 \theta_2 P_2 (I/\theta_2)}{N_1} \quad (1.3)$$

аналогічно можна показати, що

$$\lambda_{24} = \frac{\lambda_1 \theta_1 P_1 (II/\theta_1)}{N_2} \quad (1.4)$$

Підставимо (1.3) і (1.4) в (1.2). Скориставшись тепер принципом квазірегулярності [1,5-11] отримуємо аналітичну модель бою між *садн* і батареєю евентуального противника (сторони I і II) у вигляді слідуєчої системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dm_1(t)}{dt} = \frac{-\lambda_2 \theta_2 P_2 (I/\theta_2)}{N_1} m_2(t) m_1(t) \\ \frac{dm_2(t)}{dt} = \frac{-\lambda_1 \theta_1 P_1 (II/\theta_1)}{N_2} m_2(t) m_1(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Система (1.5) дає можливість описувати зміну середніх чисельностей $m_1(t)$ і $m_2(t)$ бойових одиниць протидіючих сторін з урахуванням організації бою на момент часу t .

Перейдемо в (1.5) до відносних середніх чисельностей сторін, поклавши

$$\hat{m}_1(t) = \frac{m_1(t)}{N_1} \text{ і } \hat{m}_2(t) = \frac{m_2(t)}{N_2}$$

Тоді отримаємо аналітичну модель у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\hat{m}_1(t)}{dt} = \frac{-\lambda_2 \theta_2 P_2 (I/\theta_2)}{N_1} \hat{m}_1(t) \hat{m}_2(t), \\ \frac{d\hat{m}_2(t)}{dt} = \frac{-\lambda_1 \theta_1 P_1 (II/\theta_1)}{N_2} \hat{m}_1(t) \hat{m}_2(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

1.4 Розв'язок системи диференціальних рівнянь

Для зручності викладок опустимо в (1.5) параметр t і покладемо $\frac{\lambda_2 \theta_2 P_2 (I/\theta_2)}{N_1} = S_1$, $\frac{\lambda_1 \theta_1 P_1 (II/\theta_1)}{N_2} = S_2$ тоді (1.5) запишеться наступним чином

$$\begin{cases} \frac{dm_1(t)}{dt} = -S_1 m_2 m_1 \\ \frac{dm_2(t)}{dt} = -S_2 m_2 m_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

Розв'язок (1.7) знаходимо в явному вигляді при $S_1 = \text{const}$ і $S_2 = \text{const}$ і початкових умовах $m_1(0) = N_1$, $m_2(0) = N_2$.

Згідно [12] поділимо друге рівняння системи на перше, маємо

$$\frac{dm_2}{dm_1} = \frac{S_1}{S_2} \text{ або } dm_2 = \frac{S_1}{S_2} dm_1 \quad (1.8)$$

Інтегруючи праву і ліву частину рівняння (1.8) отримуємо

$$m_2 = \frac{S_1}{S_2} m_1 + c \quad (1.9)$$

Сталу c знайдемо з умови, що при $t=0$ $m_1(0) = N_1$, $m_2(0) = N_2$ тоді

$$c = N_2 - \frac{S_1}{S_2} N_1 \quad (1.10)$$

Після підстановки (1.10) в (1.9) знаходимо, що

$$m_2 = \frac{S_1}{S_2} m_1 + N_2 - \frac{S_1}{S_2} N_1 \quad (1.11)$$

Покладемо в першому рівнянні системи (1.7) замість m_2 отримане співвідношення (1.11) і приходимо до диференціального рівняння першого порядку з відокремленими змінними відносно шуканої функції $m_1(t)$:

$$\frac{dm_1}{dt} = -S_1 m_1^2 - (S_2 N_2 - S_1 N_1) m_1$$

або

$$\frac{dm_1}{S_1 m_1^2 - (S_2 N_2 - S_1 N_1) m_1} = -dt \quad (1.12)$$

Зведемо (1.12) до зручного для інтегрування вигляду, маємо:

$$\frac{dm_1}{S_1 \left\{ \left[m_1 + \frac{(S_2 N_2 - S_1 N_1)}{2S_1} \right]^2 - \left[\frac{(S_2 N_2 - S_1 N_1)}{2S_1} \right]^2 \right\}} = -dt$$

Після інтегрування і врахування початкових умов, що при $t=0$; $m_1(0)=N_1$, $m_2(0)=N_2$ знаходимо $m_1(t)$:

$$m_1(t) = \frac{N_1(S_2 N_2 - S_1 N_1)}{S_2 N_2 e^{(S_2 N_2 - S_1 N_1)t} - S_1 N_1} \quad (1.13)$$

Аналогічно можна показати, що

$$m_2(t) = \frac{N_2(S_1 N_1 - S_2 N_2)}{S_1 N_1 e^{(S_1 N_1 - S_2 N_2)t} - S_2 N_2} \quad (1.14)$$

Таким чином, при сталих S_1 і S_2 розв'язок системи (1.5) відшукано у явному вигляді:

$$\begin{cases} m_1(t) = \frac{N_1(S_2 N_2 - S_1 N_1)}{S_2 N_2 e^{(S_2 N_2 - S_1 N_1)t} - S_1 N_1}, \\ m_2(t) = \frac{N_2(S_1 N_1 - S_2 N_2)}{S_1 N_1 e^{(S_1 N_1 - S_2 N_2)t} - S_2 N_2}; \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\text{де } S_1 = \frac{\lambda_1 \theta_1 P_1 (II/\theta_1)}{N_2}, S_2 = \frac{\lambda_2 \theta_2 P_2 (I/\theta_2)}{N_1}.$$

В термінах відносних середніх чисельностей розв'язок (1.6) буде таким:

$$\begin{cases} \hat{m}_1(t) = \frac{\hat{S}_2 - \hat{S}_1}{\hat{S}_2 e^{(\hat{S}_2 - \hat{S}_1)t - \hat{S}_1}}, \\ \hat{m}_2(t) = \frac{\hat{S}_2 - \hat{S}_1}{\hat{S}_1 e^{(\hat{S}_2 - \hat{S}_1)t - \hat{S}_2}}; \end{cases} \quad (1.16)$$

де $\hat{S}_1 = S_1 N_1$, $\hat{S}_2 = S_2 N_2$

1.5 Дослідження основних параметрів моделі, які впливають на результат бою

Побудована аналітична модель бою (1.5) дає можливість проаналізувати динаміку бою між двома однорідними протидіючими угрупованнями і спрогнозувати його наслідки з урахуванням різних факторів. Деякі з них ми і розглянемо у даному пункті, це:

1. Функціональна залежність між середніми чисельностями бойових одиниць протидіючих сторін;
2. Умови, при яких одна з сторін має перевагу над іншою;
3. За яким законом розвивається бій у випадку рівних бойових потенціалів;
4. Тривалість бойових дій між сторонами I і II;
5. Залежність між відносними середніми чисельностями протидіючих сторін.

Маємо послідовно:

1. Позначимо через $\hat{m}_1 = \frac{m_1}{N_1}$ і $\hat{m}_2 = \frac{m_2}{N_2}$ відносні середні чисельності бойових одиниць сторін I і II, що збереглись на момент часу t ведення бою, тоді з (1.11) отримуємо

$$\hat{m}_1(t) = 1 - \frac{S_2 N_2}{S_1 N_1} [1 - \hat{m}_2(t)] \quad (1.17)$$

або

$$\hat{m}_1(t) = k\hat{m}_2(t) + b \quad (1.18)$$

де $k = \frac{S_2 N_2}{S_1 N_1}$, $b = 1 - k$.

Тобто між $\hat{m}_1(t)$ і $\hat{m}_2(t)$ існує функціональна залежність $\hat{m}_1(t) = F[\hat{m}_2(t)]$ і при $k = \text{const}$ вона описується лінійною функцією (1.18).

2. У випадкові, коли коефіцієнт $k=1$ у протидії між сторонами I і II має місце момент динамічної рівноваги. Найпростіший варіант при $N_1=N_2$, $\lambda_1=\lambda_2$, $\theta_1=\theta_2$, $P_1(\Pi/\theta_1)=P_2(I/\theta_2)$.

Якщо ж $k<1$, то перемагає сторона I, а при $k>1$ – сторона II.

Таким чином, коефіцієнт k характеризує перевагу однієї сторони над іншою і може виступати в якості характеристичної оцінки бою.

На рис.1.3 наведена графічна ілюстрація цього факту: А – область перемоги сторони I, В – область перемоги сторони II.

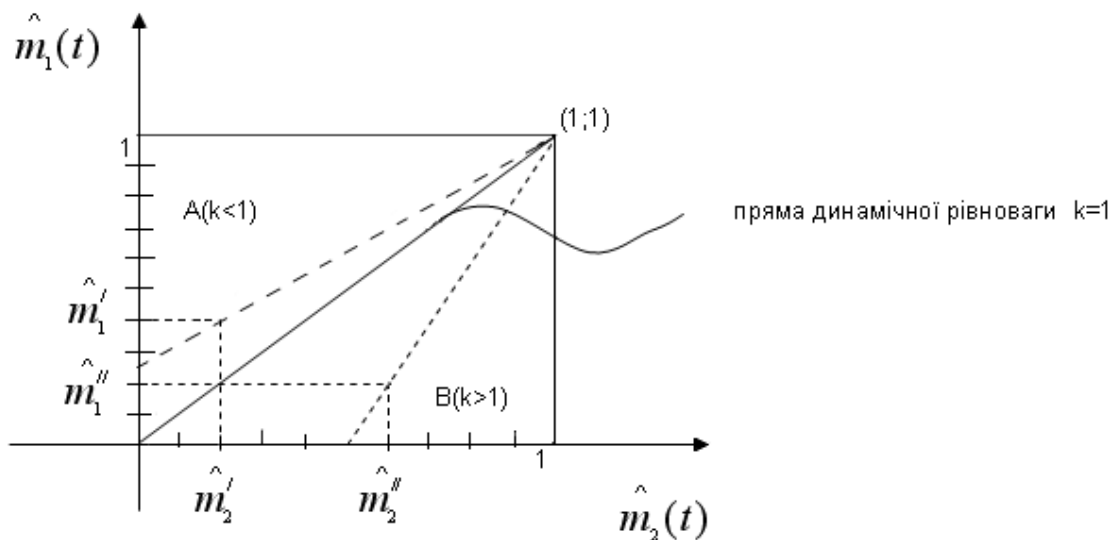


Рисунок 1.3 – Залежність відносних середніх величин чисельностей бойових засобів сторін I і II.

3. Розглянемо ситуацію, коли потенціали сторін I і II рівні ($S_1 N_1 = S_2 N_2$) або наближаються один до одного.

Тоді, наприклад, з (1.16) маємо

$$\lim_{\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2} \hat{m}_1(t) = \lim_{\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2} \hat{m}_2(t) = \lim_{\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2} \frac{\hat{S}_1 - \hat{S}_2}{\hat{S}_1 e^{(\hat{S}_1 - \hat{S}_2)t} - \hat{S}_2} \quad (1.19)$$

Очевидно, що при $\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_1$ в (1.19) має місце невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, тому для знаходження границі скористаємося розкладом в ряд Маклорена функції $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$, тоді

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2} \frac{\hat{S}_1 - \hat{S}_2}{\hat{S}_1 e^{(\hat{S}_1 - \hat{S}_2)t} - \hat{S}_2} &= \lim_{\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2} \frac{\hat{S}_1 - \hat{S}_2}{\hat{S}_1 \left[1 + (\hat{S}_1 - \hat{S}_2)t + \frac{(\hat{S}_1 - \hat{S}_2)^2 t^2}{2!} + \dots \right] - \hat{S}_2} = \\ &= \lim_{\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2} \frac{\hat{S}_1 - \hat{S}_2}{\left(\hat{S}_1 - \hat{S}_2 \right) \left[1 + \hat{S}_1 t + \hat{S}_1 \frac{(\hat{S}_1 - \hat{S}_2) t^2}{2!} + \dots \right]} = \frac{1}{1 + \hat{S}_1 t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Таким чином, якщо $\hat{S}_1 = \hat{S}_2 (\hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2)$, то з (1.20) випливає, що

$$\hat{m}_1(t) = \hat{m}_2(t) = \frac{1}{1 + \hat{S}_1 t} \quad (1.21)$$

або, в термінах (1.15)

$$\hat{m}_1(t) = \hat{m}_2(t) = \frac{N_1}{1 + S_1 N_1 t} \quad (1.22)$$

Тобто у випадку рівної інтенсивності вогневої дії сторін I і II ($S_1 N_1 = S_2 N_2$) середні чисельності бойових одиниць в ході бою спадають за гіперболічним законом (рис. 1.4)

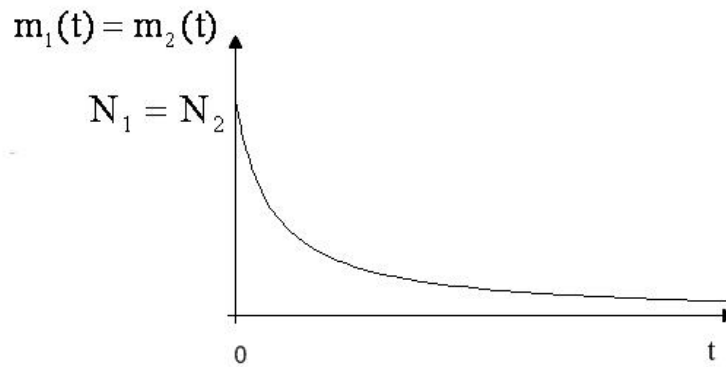


Рисунок 1.4 – Залежність середніх чисельностей бойових засобів сторін I і II при рівних потенціалах ($S_1 N_1 = S_2 N_2$).

4°. Для аналізу бойових дій між протидіючими сторонами важливим є визначення тривалості бою (час від початку бою до того моменту, коли одна з сторін припиняє супротив). Нехай \hat{S}_1^I і \hat{S}_2^{II} відносні критичні значення середніх чисельностей, при яких сторони I і II втрачають боєздатність (припиняють бойові дії). Розглянемо два випадки:

а) перемагає сторона I, тобто $k < 1$, а $\hat{S}_2 = \hat{S}_2^{II}$;

б) перемагає сторона II, тобто $k > 1$, а $\hat{S}_1 = \hat{S}_1^I$,

і знайдемо час тривалості бойових дій.

а) з першого рівняння (1.16) маємо при $\hat{S}_2 = \hat{S}_2^{II}$

$$\hat{m}_1 = \frac{\hat{S}_2^{II} - \hat{S}_1}{\hat{S}_2^{II} e^{(\hat{S}_2^{II} - \hat{S}_1)t} - \hat{S}_1}$$

Звідки, послідовно виконуючи перетворення, отримуємо

$$e^{(\hat{s}_2^{II} - \hat{s}_1)t} = \frac{\hat{m}_1 \hat{S}_1 + \hat{S}_2^{II} - \hat{S}_1}{\hat{m}_1 \hat{S}_2^{II}} \quad (1.23)$$

або, після логарифмування правої і лівої частини рівності (1.23)

$$t = \frac{1}{(\hat{S}_2^{II} - \hat{S}_1)} \ln \left(\frac{\hat{m}_1 \hat{S}_1 + \hat{S}_2^{II} - \hat{S}_1}{\hat{m}_1 \hat{S}_2^{II}} \right)$$

Таким чином, при $k < 1$ і $\hat{S}_2 = \hat{S}_2^{II}$ (перемагає сторона I), час закінчення бойової операції, в термінах коефіцієнта переваги k , визначається співвідношенням:

$$t_I = \frac{\ln \left(\frac{\hat{m}_1 k}{\hat{m}_1 + k - 1} \right)}{\hat{S}_1 (1 - k)} \quad (1.24)$$

б) Аналогічно попередньому з другого рівняння (16) при $\hat{S}_1 = \hat{S}_1^I$ маємо

$$\hat{m}_2 = \frac{\hat{S}_1^I - \hat{S}_2}{\hat{S}_1^I e^{(\hat{S}_1^I - \hat{S}_2)t} - \hat{S}_2}$$

Звідки при $k > 1$ і $\hat{S}_1 = \hat{S}_1^I$ отримуємо формулу для визначення часу закінчення бойових дій стороною II:

$$t_{22} = \frac{\ln \left(\frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_2 k + 1 - k} \right)}{\hat{S}_2 \left(1 - \frac{1}{k} \right)} \quad (1.25)$$

5. Запишемо розв'язок (1.16) системи диференціальних рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} \hat{m}_1(t) = \frac{k-1}{ke^{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\tilde{t}} - 1} \\ \hat{m}_2(t) = \frac{1-k}{e^{-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\tilde{t}} - k} \end{cases} \quad (1.26)$$

де $\tilde{t} = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)t$ - зведений час

Для подальшого аналізу результату протидії між сторонами I і II розглянемо відношення відносних середніх чисельностей \hat{m}_1 і \hat{m}_2 тоді з (1.26), в термінах коефіцієнта k , маємо

$$\omega(t) = \frac{\hat{m}_1(t)}{\hat{m}_2(t)} = e^{-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\tilde{t}} \quad (1.27)$$

Очевидно з (1.27), що при $k < 1$ $e^{-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\tilde{t}} = e^{\alpha} > 1$, тобто $\hat{m}_1(t) > \hat{m}_2(t)$, що означає перемогу сторони I, а при $k > 1$ $e^{\alpha} < 1$, тобто перемагає сторона II.

1.6 Вихідні дані

1. Вихідні дані для *садн*: Ціль – артилерійська батарея укритих причіпних гармат евентуального противника ($n = 6$ г); елемент ураження – укриті причіпні гармати; бойовий порядок противника зигзагоподібний; фронт (Ф) і глибина (Г) вогневої позиції визначені за даними повітряної розвідки $250 \times 200 \text{ м}^2$; розвідано дві гармати.

Для ураження батареї противника залучається артилерійський дивізіон 152-мм СГ2С3 (три батареї * 6 г = 18 г). Скорострільність $\lambda_1 = 2^{\text{п}}/\text{хв}$, дальність стрільби 10 км. Тривалість вогневого нальоту 15 хв.

2. Вихідні дані для батареї противника: Ціль – одна з батареї *садн* 152-мм СГ2С3 ($n = 6$ г); елемент ураження – самохідні гармати; бойовий порядок – уступом назад. Розміри цілі по фронту (Ф) і глибині (Г) визначені засобами

розвідки 200x200 м²; розвідано 3 гармати. Скорострільність $\lambda_2 = 4^{\text{п}}/\text{хв.}$, дальність стрільби – 10 км.

1.7 Розрахунок імовірності накриття цілей зоною рівномірного розсіювання

З урахуванням штучного та технічного розсіювання снарядів, а також наявності помилок підготовки установок для ведення вогню, імовірність накриття цілі областю розривів (θ) залежить від багатьох факторів і в загальному випадку може бути задана у вигляді функціональної залежності:

$$\theta = f(E_{\partial_2}, E_{\text{нз}}, B_{\partial_2}, B_{\delta_2}, n_{\Gamma}, n_{\Phi}, h_x, h_z, \Phi_{\text{зрр}}, \Gamma_{\text{зрр}}) \quad (1.28)$$

Де E_{∂_2} ($E_{\text{нз}}$) – зведені серединні помилки підготовки по дальності (напрямку);

B_{∂_2} (B_{δ_2}) - зведені серединні помилки розсіювання по дальності (напрямку);

n_{Γ} (n_{Φ}) – число установок прицілу (кутоміра);

h_x (h_z) – відстань між точками прицілювання по дальності (напрямку);

$\Phi_{\text{зрр}}$ ($\Gamma_{\text{зрр}}$) – фронт (глибина) зони рівномірного розподілу точок падіння снарядів.

Згідно [4] імовірність накриття цілі зоною рівномірного розсіювання θ_i ($i = 1, 2, 3$) (див. схему протидії рис. 1.1) кожною батареєю визначається за формулою:

$$\theta_i = \frac{1}{2} \left[\widehat{\Phi} \left(\frac{m_{z_i} + 0.5\Phi_{\text{зрр}}}{E'_{\text{нз}}} \right) - \widehat{\Phi} \left(\frac{m_{z_i} - 0.5\Phi_{\text{зрр}}}{E'_{\text{нз}}} \right) \right] \widehat{\Phi} \left(\frac{\Gamma_{\text{зрр}}}{2E'_{\partial_2}} \right) \quad (1.29)$$

Де m_{z_i} ($i = 1, 2, 3$) – віддалення точки прицілювання батареї від центра групової цілі за напрямком;

$\widehat{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\rho^2 t^2} dt$ – зведена функція Лапласа (табульована [2,4,5]).

$$\Phi_{зрр} = \sqrt{26.4B_{\delta_3}^2 + (n_{\phi} - 1)^2 h_z^2}, \quad \Gamma_{зрр} = \sqrt{26.4B_{\delta_3}^2 + (n_r - 1)^2 h_x^2} \quad (1.30)$$

$$E'_{\delta_3} = \sqrt{E_{\delta_3}^2 + 0.038\Gamma_{\psi}^{*2}}, \quad E'_{H_2} = \sqrt{E_{H_2}^2 + 0.038\Phi_{\psi}^{*2}}, \quad (1.31)$$

зведені серединні помилки підготовки під час стрільби по груповій цілі за дальністю (E'_{δ_3}) і напрямком (E'_{H_2});

$$\Phi_{\psi}^* = (1 - \sqrt{\Delta n})\Phi_{\psi} + \Phi_{\psi}, \quad \Gamma_{\psi}^* = (1 - \sqrt{\Delta n})\Gamma_{\psi} + \Gamma_{\psi} \quad (1.32)$$

умовні розміри цілі по фронту і глибині, коли гармати на вогневій позиції розміщені уступом вперед (назад), ромбом та іншими способами, Δn - математичне сподівання частки площі цілі, що накрита зоною ураження для n виявлених гармат [4] обирається з таблиці

Таблиця 1.1 – Математичне сподівання частки площі цілі, що накрита зоною ураження.

n	1	2	3	4	5	6
Δn	0,56	0,71	0,82	0,92	0,98	1

Виходячи з вищесказаного знайдемо параметр θ для кожної з протидіючих сторін.

1.8 Визначення середніх чисельностей бойових одиниць *садн* і артилерійської батареї евентуального противника

Розв'язок (1.16) системи диференціальних рівнянь (1.7) дає можливість дослідити динаміку бою протидіючих сторін і визначити середню чисельність бойових одиниць на момент часу t ведення бою.

Для спрощення розрахунків скористаємося співвідношенням (1.26):

$$\begin{cases} \hat{m}_1(t) = \frac{k-1}{k e^{\frac{(k-1)\hat{t}}{k+1}} - 1}, \\ \hat{m}_2(t) = \frac{k-1}{e^{-\frac{(k-1)\hat{t}}{k+1}} - k}. \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\text{де } \hat{t} = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)t, \quad k = \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1}$$

Враховуючи вихідні дані задачі, підрахуємо зведений час \hat{t} і коефіцієнт k , в результаті маємо, послідовно

$$\hat{S}_1 = \frac{\lambda_1 \theta_1 P_1 \left(\frac{II}{\theta_1} \right) N_1}{N_2} = \frac{2 \cdot 0,5952 \cdot 0,017 \cdot 18}{6} = 0,06199$$

Далі, оскільки батарея противника веде вогонь по одній з батареї *садн*, то при визначенні параметра S_2 покладаємо $N_1 = 6$ г, тоді

$$\hat{S}_2 = \frac{\lambda_2 \theta_2 P_2 \left(\frac{I}{\theta_2} \right) N_1}{N_1} = \frac{4 \cdot 0,3735 \cdot 0,014 \cdot 6}{6} = 0,02135$$

Звідки

$$k = \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} = 0,344, \quad \text{а } \hat{t} = 0,040677t \approx 0,041t.$$

Підставивши ці дані в (1.16), отримуємо розрахункові формули для знаходження середніх відносних чисельностей бойових одиниць кожної з протидіючих сторін на момент часу t ведення бою:

$$\begin{cases} \hat{m}_1(t) = \frac{-0,656}{0,344e^{-0,041t}-1}, \\ \hat{m}_2(t) = \frac{0,656}{e^{0,041t}-0,344}. \end{cases} \quad (1.34)$$

Розглянемо два випадки:

а) бій розпочався одночасно;

б) *сaдн* наніс упереджувальний вогневий наліт по евентуальному противнику.

а) Згідно умови задачі вогневий наліт триває 15 хвилин, тому при $t = 1, 2, \dots, 15$ з (1.34) знаходимо ту кількість вогневих одиниць сторін I і II, які збереглись на відповідний момент часу бою t .

б) З нормативних документів [10] і [4] відомо, що артилерійська батарея противника здатна учиняти протидію через 2-3 хвилини після початку вогневого нальоту (це час, необхідний для визначення координат цілі і підготовки до вогню). З таблиці 1 видно, що за 3 хвилини бою противник втрачає 1 гармату і вступає в бій з *сaдн*, маючи у своєму складі $n_r=5$ гармат.

Як і у випадкові а), аналогічні розрахунки приводять до наступних співвідношень: $k=0,221$, $\tilde{t}=0,0577t$

$$\begin{cases} \hat{m}'_1(t) = \frac{-0,789}{0,211e^{-0,057t}-1}, \\ \hat{m}'_2(t) = \frac{0,789}{e^{0,057t}-0,211}. \end{cases} \quad (1.35)$$

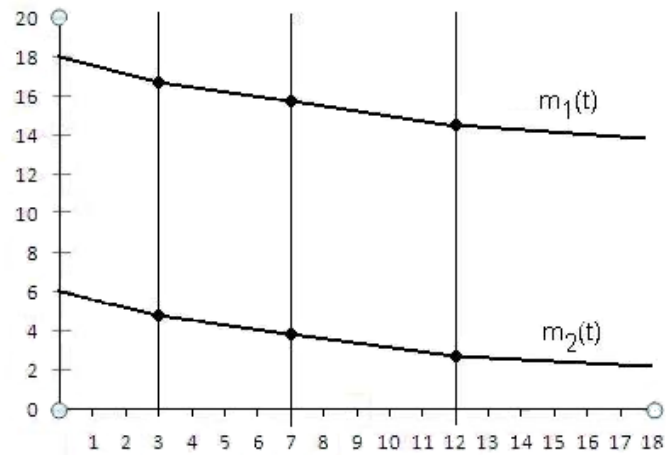


Рисунок 1.5 - Графік зміни середніх чисельностей сторін I і II в залежності від часу (одночасне нанесення вогневого удару).

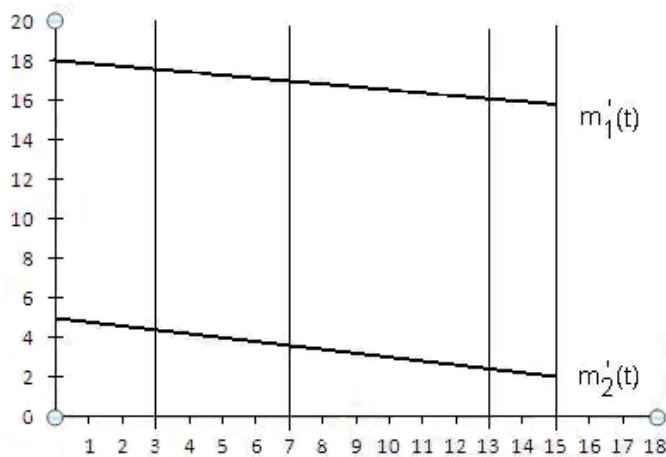


Рисунок 1.6 - Графік зміни середніх чисельностей сторін I і II в залежності від часу (упереджувальний вогневий наліт).

1.9 Висновки до розділу 1

Користуючись результатами отриманих досліджень, в рамках поставленої задачі, приходимо до наступних висновків:

Побудована аналітична модель бою між двома протидіючими артилерійськими угрупованнями у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь з урахуванням часу протікання бою і взаємного ураження.

В моделі урахована протидія противника – основний фактор, котрий потребує визначення в якій завгодно моделі, яка описує бойове застосування артилерії в умовах стрільби з закритих вогневих позицій.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь знайдено у явному вигляді – це дало можливість отримати аналітичні співвідношення для визначення середніх (відносних) чисельностей протидіючих сторін, що збереглись на момент часу t ведення бою, визначити основні параметри системи, які суттєво впливають на результат бою.

Установлена функціональна залежність і наведена геометрична інтерпретація цієї залежності між середніми (відносними) чисельностями бойових одиниць сторін I і II, що збереглись.

Введено коефіцієнт переваги однієї сторони над іншою і в термінах цього параметра досліджені відношення середніх (відносних) чисельностей, які можуть виступити в ролі характеристичної оцінки бою.

Таким чином, розглянута задача і її розв'язок вказують на широкі можливості застосування математичного моделювання у дослідженні різноманітних проблем військової справи. Кількісні оцінки отримані в результаті моделювання дозволяють командирам і штабам раціонально використовувати бойові угруповання в операціях і бойових діях, знаходити оптимальні варіанти їх використання, краще прогнозувати тактичну обстановку і приймати найбільш вірні рішення.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БОЙОВОГО ФУНКЦІОНУВАННЯ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ БАТАРЕЇ САМОХІДНИХ НЕБРОНЬОВАНИХ ГАРМАТ

2.1 Побудова ймовірнісної моделі функціонування *сабатр*

Нехай процес бойового функціонування *сабатр* описується деякою фізичною системою S , яка може перебувати у одному з наступних станів:

S_1 – батарея зайняла вогневу позицію і розгорнулася в бойовий порядок;

S_2 – *сабатр* готова до виконання вогневого завдання (проведена топогеодезична прив'язка, метеорологічна, балістична і технічна підготовка до стрільби);

S_3 – *сабатр* закінчила виконання вогневого завдання;

S_4 – батарея залишила вогневу позицію;

S_5 – батарея знаходиться під вогневим впливом.

Будемо вважати, що в системі $S = \{S_1, S_2, \dots, S_5\}$ протікає марківський процес $X = X(t), t \geq 0$ з дискретною множиною станів і неперервним часом. Позначимо через $p_i(t) = P\{X(t) = i\}$ ймовірність того, що в момент часу $t \geq 0$ система S знаходиться в стані S_i ($i=1, 2, \dots, 5$). Перехід системи S із стану S_i в стан S_j ($i \neq j$) відбувається миттєво під дією пуассонівського потоку подій з інтенсивністю $\lambda_{ij}(t)$. Тоді у випадку, коли $\lambda_{ij}(t) = \text{const}$, імовірність $p_i(t)$ станів системи визначаються системою диференціальних рівнянь Колмогорова з постійними коефіцієнтами [2,5,11]:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji} - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

Систему диференціальних рівнянь (2.1) розв'язують при початкових умовах, які задають імовірності станів при $t=0$:

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0) \quad (2.2)$$

з нормуючою умовою

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1 \quad (2.3)$$

для якого завгодно моменту часу t .

Для отримання (1) скористаємось орієнтованим графом станів системи S , який відповідає нашій задачі (див. рис. 2.1).

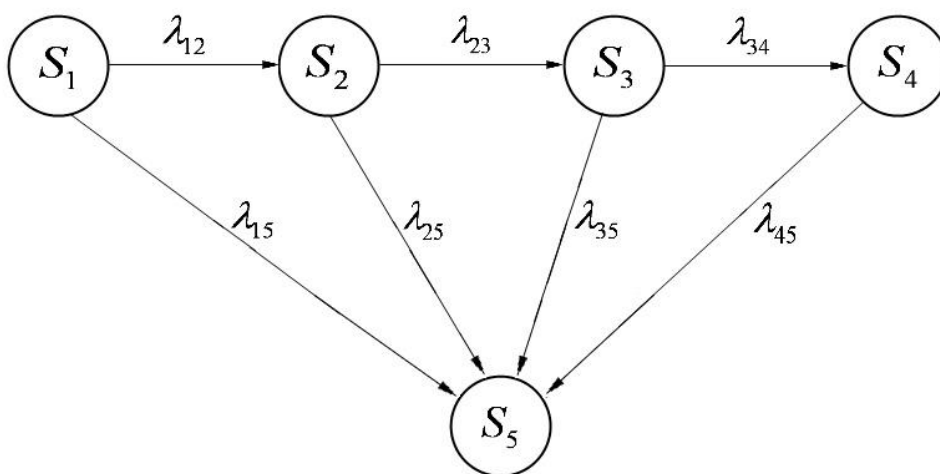


Рисунок 2.1 – Орієнтований граф станів *сабатр*.

Згідно [4,5] математичною моделлю, яка описує процес бойового функціонування артилерійської батареї евентуального противника при виконанні вогневого завдання є система диференціальних рівнянь Колмогорова (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{15})p_1(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{23} + \lambda_{25})p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -(\lambda_{34} + \lambda_{35})p_3(t) + \lambda_{23}p_2(t), \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda_{45}p_4(t) + \lambda_{34}p_3(t), \\ p_5(t) = 1 - \sum_{i=1}^4 p_i(t). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Тоді початкові умови для розв'язку (2.4) будуть такі:

$$p_1(0) = 1, p_i(0) = 0, (i = 2, 3, 4, 5) \quad (2.5)$$

2.2 Розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова

Розв'язок системи диференціальних рівнянь знайдемо, скориставшись методами операційного числення [12]. З цією метою введемо інтеграл Лапласа

$$p_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_i(t) dt, \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

де $p_i(t)$ – імовірність перебування *сабатр* в стані S_i , а $p_i(s)$ – зображення функції $p_i(t)$, яке визначається цим інтегралом.

Тоді, в термінах перетворень Лапласа і при початкових умовах (2.5), замість системи диференціальних рівнянь (2.4) для ймовірностей станів, отримаємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь зі сталими коефіцієнтами для зображення цих станів:

$$\left\{ \begin{array}{l} sp_1(s) - 1 = -(\lambda_{12} + \lambda_{15})p_1(s), \\ sp_2(s) = -(\lambda_{23} + \lambda_{25})p_2(s) + \lambda_{12}p_1(s), \\ sp_3(s) = -(\lambda_{34} + \lambda_{35})p_3(s) + \lambda_{23}p_2(s), \\ sp_4(s) = -\lambda_{45}p_4(s) + \lambda_{34}p_3(s), \\ sp_5(s) = \lambda_{15}p_1(s) + \lambda_{25}p_2(s) + \lambda_{35}p_3(s) + \lambda_{45}p_4(s). \end{array} \right. \quad (2.6)$$

з (2.6) знаходимо $p_1(s), p_2(s), \dots, p_5(s)$. Маємо,

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= \frac{1}{s + (\lambda_{12} + \lambda_{15})}, \\
 p_2(s) &= \frac{\lambda_{12}}{[s + (\lambda_{12} + \lambda_{15})][s + (\lambda_{23} + \lambda_{25})]} = \\
 &= \frac{\lambda_{12}}{s + (\lambda_{23} + \lambda_{25})} \cdot p_1(s), \\
 p_3(s) &= \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{[s + (\lambda_{12} + \lambda_{15})][s + (\lambda_{23} + \lambda_{25})][s + (\lambda_{34} + \lambda_{35})]} = \\
 &= \frac{\lambda_{23}}{s + (\lambda_{34} + \lambda_{35})} \cdot p_2(s), \\
 p_4(s) &= \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{[s + (\lambda_{12} + \lambda_{15})][s + (\lambda_{23} + \lambda_{25})][s + (\lambda_{34} + \lambda_{35})][s + \lambda_{45}]} = \\
 &= \frac{\lambda_{34}}{s + \lambda_{45}} \cdot p_3(s), \\
 p_5(s) &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^4 \lambda_{i5} p_i(s).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Переходячи в (2.7) до оригіналів [12], отримуємо розв'язок (2.4) у явному вигляді:

$$\begin{aligned}
 p_1(t) &= e^{-\alpha_1 t}, \\
 p_2(t) &= \lambda_{12} \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^2 (\alpha_k - \alpha_1) \right]^{-1} e^{-\alpha_1 t} + \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^2 (\alpha_k - \alpha_2) \right]^{-1} e^{-\alpha_2 t} \right\}, \\
 p_3(t) &= \lambda_{12}\lambda_{23} \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^3 (\alpha_k - \alpha_1) \right]^{-1} e^{-\alpha_1 t} + \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^3 (\alpha_k - \alpha_2) \right]^{-1} e^{-\alpha_2 t} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^3 (\alpha_k - \alpha_3) \right]^{-1} e^{-\alpha_3 t} \right\},
 \end{aligned}$$

$$p_4(t) = \lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34} \left\{ \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^4 (\alpha_k - \alpha_1) \right]^{-1} e^{-\alpha_1 t} + \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^4 (\alpha_k - \alpha_2) \right]^{-1} e^{-\alpha_2 t} + \right. \\ \left. + \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^4 (\alpha_k - \alpha_3) \right]^{-1} e^{-\alpha_3 t} + \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 4}}^4 (\alpha_k - \alpha_4) \right]^{-1} e^{-\alpha_4 t} \right\},$$

$$p_5(t) = 1 - \sum_{i=1}^4 p_i(t),$$

де

$$\alpha_1 = \lambda_{12} + \lambda_{15}, \alpha_2 = \lambda_{23} + \lambda_{25}, \alpha_3 = \lambda_{34} + \lambda_{35}, \alpha_4 = \lambda_{45}.$$

2.3 Визначення інтенсивностей і ймовірностей переходу системи із одного стану в інший

Імовірності $p_i(t)$, ($i=1,2,\dots,5$) містять у собі щільності ймовірностей переходу λ_{ij} із стану S_i у стан S_j , для підрахунку яких скористаємось [1,5,7] співвідношенням

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_i(t) p_{ij}(t), \quad (2.8)$$

де $\lambda_i(t)$ – інтенсивність виходу системи S із стану S_i , а $p_{ij}(t) = P\{X\{t+s\} = j / X(s) = i\}$ – імовірності переходу системи S із стану S_i у стан S_j .

Оскільки $\lambda_{ij} = \text{const}$, ($i, j=1,2,\dots,5$, $i \neq j$), то усі потоки подій, які переводять систему S із одного стану в інший є найпростішими і час T_i перебування системи у кожному стані є випадковою величиною і розподілений за показниковим законом з параметром λ_i , тобто

$$P\{T_i < t\} = F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

З'ясуємо фізичний зміст параметра λ_i . З цією метою підрахуємо математичне сподівання часу перебування системи S у одному з можливих станів S_i , маємо

$$M(T_i) = \int_0^{\infty} t dF_i(t) = \lambda_i \int_0^{\infty} t e^{-\lambda_i t} dt = \frac{1}{\lambda_i},$$

Позначивши через $\bar{t}_i = M(T_i)$, отримуємо, що

$$\lambda_i = \frac{1}{\bar{t}_i} \quad (2.10)$$

тобто, це величина обернена до середнього часу перебування системи S у стані S_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).

Відмітимо для подальшого, що ураження цілі залежить від своєчасності розвідки (визначення координат) цілі і, що розвідка організована і ведеться безперервно, тобто батарея противника може бути виявленою в будь-який час з моменту її розгортання в позиційному районі, або з початком вогневої діяльності, або із залишенням вогневої позиції (наприклад, засобами оптичної чи повітряної розвідки).

Позначимо через t_{yp} час необхідний для підготовки і нанесення вогневого удару по *сабатр* (час з моменту виявлення цілі до моменту підриву боєприпасів). Цей час залежить від часу функціонування *сабатр*, часу польоту снаряда, ступеня автоматизації основних операцій процесу бойової роботи і т. ін. Математичне сподівання часу ураження цілі покладемо рівним τ , тобто

$$\tau = M(t_{yp}), \text{ а } \lambda = \frac{1}{\tau} \quad (2.11)$$

Знайдемо тепер імовірності переходу системи S із одного стану в інший, а саме $p_{ij}(t)$, що входять у (2.9).

З фізичного змісту задачі випливає, що перехід *сабатр* із одного стану S_1 в стан S_2 можливий лише при умові, що середній час перебування \bar{t}_1 в стані S_1 буде менше математичного сподівання часу ураження цілі τ .

Тобто,

$$p_{12} = P\{\bar{t}_1 < \tau\} = \int_0^{\infty} f(\tau)F(\bar{t}_1 / \tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)F_1(\tau)d\tau,$$

де $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ – щільність розподілу часу $t_{yp.}$, $F_1(\tau) = F(\bar{t}_1 / \tau)$ – інтегральний закон розподілу випадкової величини $t_{yp.}$, визначений при умові, що $t_{yp.} = \bar{t}_1$: $F_1(\tau) = 1 - e^{-\lambda_1\tau}$.

Звідки,

$$p_{12} = P\{\bar{t}_1 < \tau\} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda_1\tau}) d\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1} \quad (2.12)$$

Імовірність переходу із стану S_2 в стан S_3 буде такою:

$$p_{23} = P\{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 < \tau\} = \int_0^{\infty} f(\tau)F_2(\tau)d\tau \quad (2.13)$$

Функцію розподілу $F_2(z)$ суми незалежних випадкових величин \bar{t}_1 і \bar{t}_2 ($\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = z$), розподілених за законами $f_1(\bar{t}_1)$ і $f_2(\bar{t}_2)$ знайдемо, скориставшись загальною формулою для композиції законів розподілу [5,7], що

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)f_2(x - x_1)dx_1 \quad (2.14)$$

Оскільки у нашому випадку обидва закони визначені для додатних \bar{t}_1 і \bar{t}_2 , то з (2.14) отримуємо:

$$g(z) = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 \bar{t}_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z - \bar{t}_1)} dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) \quad (2.15)$$

Оскільки щільність розподілу $g(z) = F_2'(z)$, то функція розподілу $F_2(z)$ буде такою:

$$F_2(z) = \int_0^z g(u) du = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^z (e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_2 u}) du$$

або, після інтегрування

$$F_2(z) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_2 - \lambda_1} + 1 \quad (2.16)$$

Підставивши (2.16) у (2.13), маємо

$$\begin{aligned} p_{23} &= P\{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 < \tau\} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \tau} \left[\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_2 - \lambda_1} + 1 \right] d\tau = \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda + \lambda_2)\tau} d\tau - \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda + \lambda_1)\tau} d\tau \right] + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} d\tau \end{aligned}$$

інтегруючи, знаходимо шукану ймовірність

$$p_{23} = P\{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 < \tau\} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)} \quad (2.17)$$

Аналогічно можна показати, що

$$p_{34} = P\{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \bar{t}_3 < \tau\} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_3)} \quad (2.18)$$

$$p_{45} = 1 - P\{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \bar{t}_3 + \bar{t}_4 < \tau\} = 1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}{(\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_3)(\lambda + \lambda_4)} \quad (2.19)$$

$$p_{i5} = 1 - P_{i,i+1}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

Отримані співвідношення (2.10) – (2.11) для параметра λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), і (2.12), (2.17) – (2.20) для ймовірностей p_{ij} дозволяють записати розрахункові формули для щільностей імовірності переходу системи p_{ij} із стану S_i у стан S_j

через математичні сподівання часу перебування артилерійської батареї противника у відповідних станах, з (2.8) маємо

$$\lambda_{12} = \lambda_1 p_{12} = \frac{\tau}{\bar{t}_1(\bar{t}_1 + \tau)}, \quad (2.21)$$

$$\lambda_{23} = \lambda_2 p_{23} = \frac{\tau^2}{\bar{t}_2(\bar{t}_1 + \tau)(\bar{t}_2 + \tau)}, \quad (2.22)$$

$$\lambda_{34} = \lambda_3 p_{34} = \frac{\tau^3}{\bar{t}_3(\bar{t}_1 + \tau)(\bar{t}_2 + \tau)(\bar{t}_3 + \tau)}, \quad (2.23)$$

$$\lambda_{15} = \lambda_1 p_{15} = \lambda_1(1 - p_{12}) = \frac{\tau}{\bar{t}_1 + \tau}, \quad (2.24)$$

$$\lambda_{25} = \lambda_2 p_{25} = \lambda_2(1 - p_{23}) = \frac{1}{\bar{t}_2} \left(1 - \frac{\tau^2}{(\bar{t}_1 + \tau)(\bar{t}_2 + \tau)} \right), \quad (2.25)$$

$$\lambda_{35} = \lambda_3 p_{35} = \lambda_3(1 - p_{34}) = \frac{1}{\bar{t}_3} \left(1 - \frac{\tau^3}{(\bar{t}_1 + \tau)(\bar{t}_2 + \tau)(\bar{t}_3 + \tau)} \right), \quad (2.26)$$

$$\lambda_{45} = \lambda_4 p_{45} = \lambda_4(1 - p_{45}) = \frac{1}{\bar{t}_4} \left(1 - \frac{\tau^4}{(\bar{t}_1 + \tau)(\bar{t}_2 + \tau)(\bar{t}_3 + \tau)(\bar{t}_4 + \tau)} \right), \quad (2.27)$$

Підстановка виразів (2.21) – (2.27) для щільностей імовірностей переходу у (2.6), (2.8) дає можливість отримати числові значення ймовірностей $p_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, 5$) для якого завгодно моменту часу t ведення бою і провести аналіз бойового функціонування артилерійської батареї у кожному з відповідних станів системи S , в залежності від часу τ підготовки артилерійського дивізіону до вогневого ураження.

2.4 Ймовірність перебування цілі у відповідних станах

За даними [4,10] час t перебування високоманеврової цілі на вогневій позиції включає в себе час зайняття вогневої позиції і розгортання в бойовий порядок – від 4 до 5 хв., час підготовки і виконання вогневого завдання – від 4 до 6 хв., час залишення вогневої позиції – від 2 до 3 хв. Отже, час перебування *сабатр* на вогневій позиції розглядається як випадкова величина, яка в результаті реалізації може приймати які завгодно значення в інтервалі $t_{\min}=11$ хв., $t_{\max}=14$ хв. Оскільки t є випадковою величиною, очікування значення часу перебування батареї противника у відповідних станах на вогневій позиції будемо оцінювати за формулою

$$\bar{t}_i = \frac{3t_{\min} + 2t_{\max}}{5}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.28)$$

Ми розглянемо три випадки стосовно часу τ виявлення, підготовки і нанесення вогневого удару по цілі і покладемо для визначеності, що цей час складає:

1) $\tau_1 = 2$ хв., тобто час протягом якого батарея противника займає вогневу позицію;

Процес бойового функціонування *сабатр* у цьому випадку описуються системою рівнянь.

$$\begin{cases} p_1(t) = e^{-0,213t}; \\ p_5(t) = 1 - e^{-0,213t}. \end{cases}$$

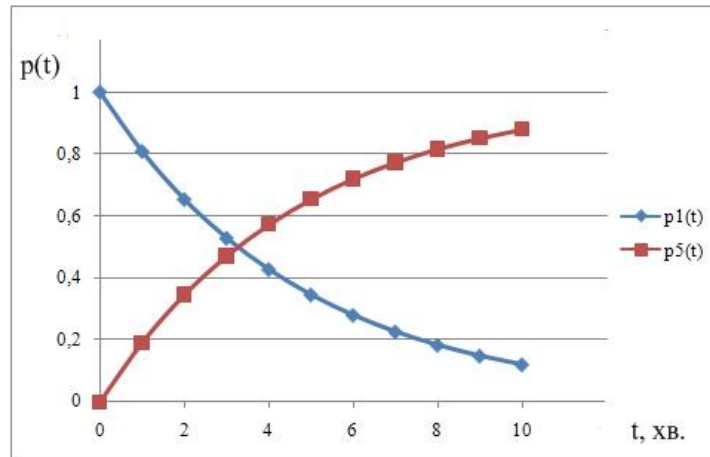


Рисунок 2.2 – Графік імовірностей перебування цілі у станах $p_1(t)$ і $p_5(t)$.

2) $\tau_2 = 6$ хв., час за який *сабатр* готова до виконання вогневого завдання;

Процес бойового функціонування *сабатр* у цьому випадку описуються системою рівнянь.

$$\begin{cases} p_2(t) = 1,76e^{-0,213t} - 0,76e^{-0,37t}; \\ p_5(t) = 1 - 1,76e^{-0,213t} + 0,76e^{-0,37t}. \end{cases}$$

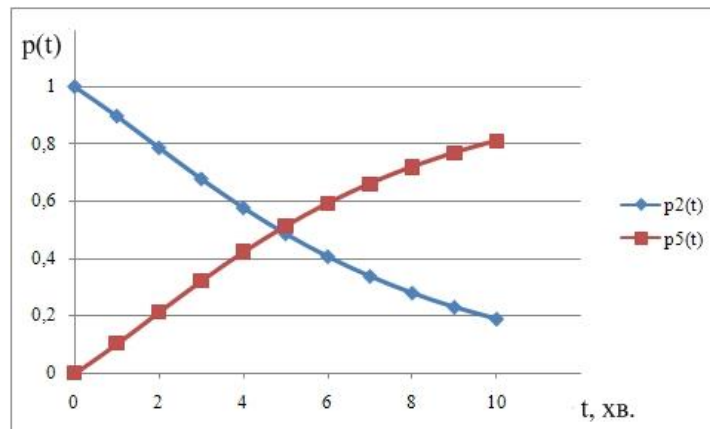


Рисунок 2.3– Графік імовірностей перебування цілі у станах $p_2(t)$ і $p_5(t)$.

3) $\tau_3 = 8$ хв., час за який батарея противника почала виконувати вогневе завдання.

Процес бойового функціонування *сабатр* у цьому випадку описуються системою рівнянь.

$$\begin{cases} p_3(t) = 2,48e^{-0,213t} - 3,96e^{-0,37t} + 2,48e^{-0,417t}; \\ p_5(t) = 1 - 2,48e^{-0,213t} + 3,96e^{-0,37t} - 2,48e^{-0,417t}. \end{cases}$$

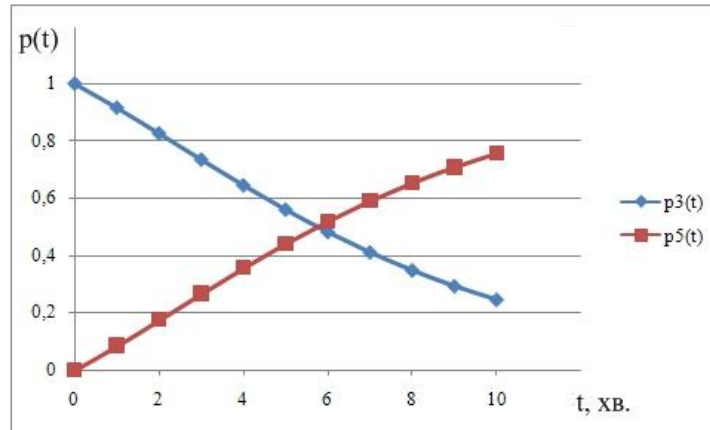


Рисунок 2.4 – Графік імовірностей перебування цілі у станах $p_3(t)$ і $p_5(t)$.

Висновки до розділу 2

Побудована аналітична модель у вигляді системи диференціальних рівнянь, яка моделює процес бойового функціонування *сабатр* евентуального противника у відповідних станах. Аналіз отриманого розв'язку системи і результати розрахунків, в рамках поставленої задачі, дають можливість зробити наступні висновки:

1. Вирішальними факторами при ураженні *сабатр* противника є ймовірність її своєчасного виявлення і час на підготовку вогневого нальоту.

Так, найбільша ефективність вогневого нальоту, при умові, що ціль виявлена в момент зайняття нею вогневої позиції досягається при $\tau = 2\delta$.

2. У випадку, коли *сабатр* виявляється лише технічними засобами розвідки (АРК-1, АЗК-5, АЗК-7) її ураження стає проблематичним, оскільки час підготовки і нанесення вогневого нальоту τ може перевищувати час перебування цілі на ВП.

3. З метою зменшення часу підготовки вогневого нальоту необхідно зменшити час на розвідку, прийняття рішень і передачу даних для вогневих підрозділів. Виникає необхідність комплексування засобів розвідки і управління дозволить зменшити час τ і збільшити ймовірність накриття цілі засобами ураження.

ВИСНОВКИ

Побудовані аналітичні моделі у вигляді системи диференціальних рівнянь, які моделюють процес бойового функціонування *сабатр* евентуального противника у відповідних станах.

В моделі урахована протидія противника – основний фактор, котрий потребує визначення в якій завгодно моделі, яка описує бойове застосування артилерії в умовах стрільби з закритих вогневих позицій.

Розв’язок системи диференціальних рівнянь знайдено у явному вигляді – це дало можливість отримати аналітичні співвідношення для визначення середніх (відносних) чисельностей протидіючих сторін, що збереглись на момент часу t ведення бою, визначити основні параметри системи, які суттєво впливають на результат бою.

Аналіз отриманих розв’язків систем і результати розрахунків, в рамках поставленої задачі, дають можливість зробити наступні висновки:

1. Установлена функціональна залежність і наведена геометрична інтерпретація цієї залежності між середніми (відносними) чисельностями бойових одиниць сторін I і II, що збереглись.

2. Введено коефіцієнт переваги однієї сторони над іншою і в термінах цього параметра досліджені відношення середніх (відносних) чисельностей, які можуть виступити в ролі характеристичної оцінки бою.

3. Вирішальними факторами при ураженні *сабатр* противника є ймовірність її своєчасного виявлення і час на підготовку вогневого нальоту. Так, найбільша ефективність вогневого нальоту, при умові, що ціль виявлена в момент зайняття нею вогневої позиції досягається при $\tau = 2\delta$.

4. У випадку, коли *сабатр* виявляється лише технічними засобами розвідки (АРК-1, АЗК-5, АЗК-7) її ураження стає проблематичним, оскільки час підготовки і нанесення вогневого нальоту τ може перевищувати час перебування цілі на ВП.

5.3 метою зменшення часу підготовки вогневого нальоту необхідно зменшити час на розвідку, прийняття рішень і передачу даних для вогневих підрозділів. Виникає необхідність комплексування засобів розвідки і управління дозволить зменшити час τ і збільшити ймовірність накриття цілі засобами ураження.

6. Наведена математична модель може бути узагальнена на цілий ряд аналогічних задач і з урахуванням часу підготовки вогневого нальоту дає можливість табулювати функцію своєчасності вогню.

Таким чином, розглянута задача і її розв'язок вказують на широкі можливості застосування математичного моделювання у дослідженні різноманітних проблем військової справи. Кількісні оцінки, отримані в результаті моделювання, дозволяють командирам і штабам раціонально використовувати бойові угруповання в операціях і бойових діях, знаходити оптимальні варіанти їх використання, краще прогнозувати тактичну обстановку і приймати найбільш вірні рішення.

В роботі наведена математична модель функціонування *сабатр* евентуального противника на вогневій позиції у відповідних станах. Опис функціонування *сабатр* задається напівмарківським процесом і системою лінійних інтегральних рівнянь. Отримана загальна формула для визначення своєчасності вогню по цілі. За умови, що час перебування цілі на вогневій позиції розподілений за нормальним законом, а час підготовки до ураження — за показниковим, знайдено розрахункові співвідношення.

Аналіз отриманого розв'язку системи і результати розрахунків, в рамках поставленої задачі, дають можливість зробити наступні висновки:

1. Вирішальними факторами при ураженні *сабатр* противника є ймовірність її своєчасного виявлення і час на підготовку вогневого нальоту. Найбільший ступінь ураження *сабатр* спостерігається за умови її виявлення в станах S_1 або S_2 .

2. Необхідно зробити більш жорсткими вимоги до системи управління підрозділами, тобто: з метою зменшення часу підготовки вогневого нальоту необхідно зменшити час на розвідку, прийняття рішень і передачу даних на ВП. Виникає необхідність комплексування засобів розвідки і управління.

3. Наведена математична модель може бути узагальнена на цілий ряд аналогічних задач, наприклад, для дослідження ефективності ураження засобів розвідки, КСП, ПТРК, батарей причіпних гармат і т. д.

Таким чином, розглянута задача і її розв'язок вказують на широкі можливості застосування математичного моделювання у дослідженні різноманітних проблем військової справи. Кількісні оцінки, отримані в результаті моделювання, дозволяють командирам і штабам раціонально використовувати бойові угруповання в операціях і бойових діях, знаходити оптимальні варіанти їх використання, краще прогнозувати тактичну обстановку і приймати найбільш вірні рішення.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Абчук В.А м др. Справочник по исследованию операций- М.: Воениздат, 1979.-368 с.
2. Алексеев О.Г. и др. Управление в системах РАВ (часть I) – Л.: ЛВАА, 1980. - 365 с.
3. Ануреев И. И., Татарченко А.Е. Применение математических методов в военном деле - М. Воениздат, 1979 – 159 с.
4. Барковский А.Ф. Основы оценки эффективности и выработки рекомендаций по поражению целей огнем артиллерии – П.: ВАУ, 2000. - 310 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций - М.: Сов. Радио, 1972. - 550 с.
6. Гордонов В.П. Моделирование боевых действий частей, соединений объединений войск ПВО- Х. АПО, 1987. - 378 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей - М.: Наука - 1988. - 448 с.
8. Карлин С. Основы теории случайных процессов - М.: Мир, 1971 - 535 с.
9. Лебедев В.Д., Мякин Н.И. Вопросы автоматизации управления боевыми действиями артиллерии - М. Воениздат, 1979. - 156 с.
10. Правила стрільби і управління вогнем артилерії – К.: Варта, 1995 – 305 с.
11. Максимов Ю.Д. Вероятностные разделы математики – С.П.: Ив. Федоров, 2001 – 592 с.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений – М.: Наука, 1959. – 465 с.