

УДК 539.3

КП

№ держреєстрації 0115U000683

Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
(СумДУ)
40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи,
д.ф.-м.н., професор

_____ А.М. Черноус
2016.12.29

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РАБОТУ
МЕХАНІКА РУЙНУВАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ АВІАЦІЙНОЇ ТА РАКЕТНО-
КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ ТИПУ КОМПОЗИЦІЙНИХ ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК З
СИЛОВИМ НАБОРОМ
(проміжний)

Начальник НДЧ

к.ф.-м.н., с.н.с

2016.12.29

Д.І. Курбатов

Керівник НДР

д.ф.-м.н., професор

2016.12.28

Л.А. Фильштинський

2016

Рукопис закінчено 26 грудня 2016 р.

Результати роботи розглянуто науковою радою СумДУ
протокол № 4 від 23 грудня 2016 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР головний науковий співробітник д.ф.-м.н., професор 2016.12.26	Л.А. Фильштинський (розділ 3, висновки)
провідний науковий співробітник д.т.н., професор 2016.12.26	С.М. Верещака (розділ 1, 2 висновки)
старший науковий співробітник к.ф.-м.н., доцент 2016.12.26	Ю.В. Шрамко (розділ 3)
старший науковий співробітник к.ф.-м.н., ст.викладач 2016.12.26	Т.С. Сушко (розділ 3, висновки)
старший науковий співробітник к.т.н., доцент 2016.12.26	Д.О. Жигилій (розділ 2, висновки)
науковий співробітник ст. викладач 2016.12.26	О.И. Оглоблина (розділ 3)
молодший науковий співробітник зав.навч. лабораторією 2016.12.26	А.В. Барсук (розділ 3)
лаборант студент 2016.12.26	Ю.О. Шевченко (розділ 3)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР. 89 с., 8 рис., 1 табл., 179 джерел.

Об'єкт дослідження — Механічні поля напружень і температур в околі підкріплень та концентраторів напружень, статистичні характеристики параметрів руйнування. Властивості функціональних композитних матеріалів.

Мета роботи – розробка методики розрахунку багатошарових оболонок обертання при дії статичних і температурних навантажень; побудова структурної математичної моделі магнетоелектропружного композитного матеріалу.

Методи дослідження: використовується узагальнений варіаційний принцип Рейснера, дискретно-структурна теорія багатошарових оболонок, метод штрафних функцій; метод інтегральних рівнянь та метод механічних; метод регулярних структур.

Актуальність теми дослідження: актуальність обумовлена відсутністю типових методик для розрахунку на міцність клейових з'єднань труб зі склопластикових матеріалів, рішення теоретичних й експериментальних завдань; побудова математичних моделей функціональних композитних матеріалів.

Основні отримані результати: Проведено аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових елементів конструкцій.

Структуровані і узагальнені рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок і пластин з дефектами структури матеріалу по товщині.

Показана фізична коректність розрахункової моделі багатошарових тонкостінних конструкцій.

Складена повна система розв'язувальних рівнянь дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок для розв'язання контактної крайової задачі в змішаній формі.

Отримані розв'язувальні рівняння термопружності теорії багатошарових оболонок в змішаній формі.

Побудовано структурну математичну модель магнетоелектропружного композитного матеріалу.

БАГАТОШАРОВІ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ, МІЖФАЗНИЙ ШАР, ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК, ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП РЕЙСНЕРА, МЕТОД ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ, КОМПОЗИТНИЙ МАТЕРІАЛ, МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ОСЕРЕДНЕННЯ, МЕТОД РЕГУЛЯРНИХ СТРУКТУР

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ І МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ	8
1.1 Розрахункові моделі багатошарових конструкцій	8
1.2 Чисельне моделювання напруженого стану і експериментальні дослідження шаруватих конструкцій	13
1.3 Деформація композиційних матеріалів при дії температурного навантаження	14
1.4 Розрахунки на міцність конструкцій з композиційних матеріалів.....	18
1.5 Висновки по першому розділу	21
2 ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ БАГАТОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ.....	22
2.1 Геометрично нелінійна деформація криволінійного шару за уточненою теорією Тимошенко	23
2.2 Розв'язувальні рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок.....	28
2.3 Модель дискретно-структурної теорії багатошарових тонкостінних конструкцій з неідеальним контактом між шарами	44
2.4 Рівняння незв'язаної задачі термопружності багатошарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами	49
2.5 Висновки по другому розділу.....	54
3 СТРУКТУРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ	56
3.1 Постановка задачі. Комплексні подання	56
3.2 Інтегральні рівняння магнетоелектропружного композитного матеріалу	61
3.3 Осереднення фізичних властивостей магнетоелектропружного композита	62
3.4 Результати чисельних розрахунків	65
3.5 Висновки по третьому розділу	71
Висновки	73
Перелік посилань.....	75

ВСТУП

Інтенсивне впровадження нових композиційних матеріалів у різні галузі сучасної техніки, насамперед, викликано високими техніко-економічними показниками конструкцій, створених на їхній основі.

Більша частина випадків руйнування конструкцій, наприклад, склопластикових труб (СПТ) пов'язана з низькою міцністю механічних і адгезійних (клейових) з'єднань їхніх окремих елементів. Труби і деталі сполучень зі склопластику виготовляються під стикові з'єднання наступних типів: фланцеві, бугельні, бандажні або муфтові, раструбні, різьбові.

Аналіз ефективності різних типів з'єднань доводить, що до основних переваг адгезійних з'єднань у порівнянні з їхніми механічними аналогами варто віднести: меншу концентрацію напружень, зниження маси з'єднання, мала ймовірність поширення тріщин. Основний недолік клейових з'єднань – низька міцність клейового шару при деформаціях зсуву та трансверсального відриву.

Під час виготовлення і експлуатації багатошарових конструкцій, до яких можна віднести СПТ, на міжшарових поверхнях контакту жорстких армованих шарів утворюється тонкий клейовий прошарок, а також різного роду структурні недосконалості, наприклад, ділянки непроклею або відшарувань. Специфічними особливостями багатошарових конструкцій з композитних матеріалів є різко виражена анізотропія їх властивостей, відносно низький опір поперечним та трансверсальним деформаціям, істотна відмінність механічних і теплофізичних характеристик шарів.

З урахування наведених особливостей деформування багатошарових елементів конструкцій можна стверджувати, що традиційно використовувані в розрахункових моделях оболонки і пластин із композиційних матеріалів умови неперервності переміщень і напружень (ідеального контакту) при переході від одного сусіднього жорсткого армованого шару до іншого не виконуються.

Із-за складності чисельної реалізації розглянутих задач, отримані теоретичні результати потребують експериментальної перевірки, особливо, якщо досліджується

несуча здатність багат шарових тонкостінних елементів конструкцій з урахуванням різного роду початкових дефектів структури матеріалу.

Тому розробка нових методик розрахунку напружено-деформованого стану багат шарових конструкцій з дефектами структури на основі уточненої дискретно-структурної теорії, коли враховуються адекватні кінематичні та статичні умови контактної взаємодії суміжних поверхонь сполучених шарів під час дії як статичного, так і температурного навантаження визначає актуальність проведених досліджень. Через відсутність типових методик для розрахунку на міцність клейових з'єднань труб зі склопластикових матеріалів, рішення теоретичних й експериментальних завдань, які можуть виникнути при їхньому створенні, також уявляється актуальною проблемою.

1 РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ І МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ

1.1 Розрахункові моделі багат шарових конструкцій

Теорія тонкостінних конструкцій з композиційних матеріалів є одним з важливих розділів сучасної механіки деформованого твердого тіла. Як і раніше важливими залишаються задачі створення достовірних математичних моделей та розробка надійних і високоефективних методів розрахунку багат шарових конструкцій. Аналіз цілого ряду оглядів [1 – 6] показує, що всі дослідження з питань механіки тонкостінних армованих елементів конструкцій проводяться в таких основних напрямках. Перший напрям пов'язаний з вибором математичних моделей тонкостінних елементів конструкцій. Прийнята математична модель порівнюється з її класичним аналогом за рівнем обліку тих чи інших внутрішніх силових факторів, щодо адекватності постановки крайових задач неоднорідній структурі композиційного матеріалу. Для другого напрямку характерне обґрунтування запропонованих моделей, встановлення зв'язку між ними і просторовими задачами теорії пружності. По третьому напрямку проводиться аналіз методів вирішення різних класів задач і дослідження впливу геометричних і механічних параметрів і навантажень на поля напружень і переміщень, пропонуються варіанти використання отриманих результатів розрахунку при проектуванні тонкостінних елементів конструкцій різного призначення.

Основи класичної теорії анізотропних оболонок отримали детальне відображення в монографіях С. А. Амбарцумяна [7, 8], Я. М. Григоренко [9], В. І. Корольова [10] і С.Г. Лехніцького [11]. Детальна бібліографія з класичної теорії анізотропних пластин і оболонок є в огляді Е.І. Гріголюка і Ф. А. Когана [12]. Підкреслюється, що ця теорія “є коректною для тонких ізотропних і слабо анізотропних оболонок, у яких жорсткості шарів одного порядку (розрахункові схеми шарів еквівалентні)”.

Як відомо, втрата несучої здатності шаруватих систем при дії стискаючого навантаження через слабкий опір поперечному відриву і міжшаровому зсуву

відбувається задовго до досягнення напруженнями граничних значень. Тому при розрахунках на міцність і стійкість тонкостінних елементів, що мають шари зниженої жорсткості, класична теорія виявляється неприйнятною. Зазначені невідповідності класичної моделі і реальних умов деформування матеріалу шаруватих конструкцій стали основною причиною створення уточнених теорій анізотропних пластин і оболонок, які враховують поперечні деформації зсуву та обтиснення.

Перший варіант уточненої некласичної теорії належить С.П. Тимошенко [13]. При вирішенні задачі згинальних коливань балки він вводить додатковий кут повороту поперечного перерізу, що виникає через деформації поперечного зсуву. Модель, запропонована С.П. Тимошенко, отримала широке узагальнення в теорії однорідних і анізотропних пластин і оболонок.

Некласична теорія пластин вперше побудована Е. Рейснером [14]. При її побудові в якості вихідних гіпотез взято основні розрахункові напруження – тангенціальні компоненти тензора напружень. Для них прийнятий лінійний закон, який відповідає допущенню про лінійну зміну тангенціальних переміщень – гіпотеза прямої лінії. Отримано систему з двох рівнянь. Перше рівняння четвертого порядку характеризує вигин пластини. Друге рівняння другого порядку описує напружений стан, яке носить місцевий характер і швидко згасає при видаленні від краю пластини.

Розвиток некласична теорія оболонок і пластин отримала в працях: С.А.Амбарцумяна [7, 8, 15], В. В. Васильєва [16], Я. М. Григоренка [17 – 19], А. Н. Гузя, І. Ю. Бабича, Я. М. Григоренка [46], Л. Г. Донелла [21], П.М.Нагді [22] та інших вчених. Особливо ефективними при побудові уточнених теорій пластин і оболонок виявилися методи, в основу яких покладені узагальнені варіаційні принципи теорії пружності.

Аналізу і зіставлення моделей пластин типу Тимошенко і Рейснера присвячені роботи В. В. Васильєва [23] і В. Г. Піскунова, А. О. Рассказова [25]. Відзначається, що в розглянутих варіантах безперервно-структурних моделей теорії шаруватих пластин і оболонок має місце спадкоємність некласичних теорій

однорідних конструкцій. Зберігається загальне протиріччя, властиве цим теоріям: невідповідність між геометричною моделлю, яка враховує викривлення нормалі, і системою внутрішніх зусиль, яка відповідає гіпотезі прямої лінії. Це протиріччя вносить похибку у результати розв'язків і скорочує область застосування теорії.

Узагальнення моделі Тимошенко для розрахунку багат шарових оболонок виконано Е. І. Гріголюком і Г. М. Куликовим [25]. Тут, зокрема, розроблений енергетичний критерій визначення коефіцієнта зсуву для шаруватої структури. У роботі В. В. Пікуля [26] пропонується варіант фізично коректної прикладної уточненої теорії оболонок, де на основі методу мінімізації нев'язок врахована підвищена податливість оболонки в поперечних напрямках. Метод зважених нев'язок використовується при побудові уточненої теорії анізотропних оболонок в [27].

Некласичні теорії пластин і оболонок останнім часом активно розвиваються. Так вектор переміщень i , відповідно, тензори деформацій і напруг повинні включати складові, які враховують поперечне обтиснення від безпосереднього докладання зовнішніх навантажень.

Є класи задач механіки деформованого твердого тіла, в яких врахування поперечного обтиснення справляє визначальний вплив на результат. Це задачі контакту пластин і оболонок з жорсткими тілами (штампами), а також задачі взаємного контакту оболонок. Для таких задач облік поперечного обтиснення необхідний для того, щоб встановити реальну картину розподілу напружень по області контакту, тобто контактних напружень. Проблема обліку напружень і деформацій поперечного обтиснення проаналізована в [28].

Обґрунтування припущень некласичних моделей неоднорідних оболонок здійснюється, як правило, двома різними способами. Один з них полягає в зіставленні отриманих на їх основі значень напружень і переміщень з даними точних або досить точних рішень окремих класів задач тривимірної теорії пружності. Огляд по аналітичним методам розв'язання тривимірних задач статички анізотропних тіл представлений в роботі Ю. Н. Неміша [29]. Для другого підходу характерно, що відповідне обґрунтування проводиться асимптотичними методами.

Ці методи побудови двовірних моделей пружного деформування тонкостінних тіл, що враховують вплив поперечних деформацій, засновані на розкладанні в ряди по системам функцій деякого малого параметра переміщень і напружень. Як правило, передбачається, що товщина оболонки значно менше інших характерних геометричних розмірів оболонки. Аналіз по асимптотичним методам приведення тривимірних задач теорії пружності до двовимірних моделей містяться в роботах [55, 56].

А.С.Сахаровим і його співавторами [31] запропонована математична модель деформування багатошарових композитних оболонкових систем, що є узагальненням моделі Тимошенко. Переміщення мають два ступені апроксимації. Перша заснована на гіпотезі прямої лінії, а друга вводить цю гіпотезу пошарово, тобто гіпотезу ламаної для пакета шарів. Перевага моделі полягає в простоті реалізації, тому система розв'язуючих рівнянь включає тільки диференціальні оператори другого порядку.

Співвідношення пружності в розглянутих вище варіантах уточнених теорій анізотропних тонкостінних конструкцій включають інтегральні (приведені) жорсткісні характеристики, що не дозволяє в достатньо повній мірі оцінювати вплив неоднорідності механічних параметрів по товщині. Зазвичай в теорії тонких багатошарових пластин і оболонок з ідеальним зчепленням між шарами застосовуються два різні підходи до побудови уточнених двовимірних теорій: структурно-безперервний (феноменологічний) і дискретно-структурний.

При феноменологічному підході частково-неоднорідна по товщині шарувата пластина або оболонка розглядається як квазіоднородна з наведеними пружними характеристиками. Порядок вихідних при цьому рівнянь не залежить від числа шарів. При дискретно-структурному підході враховується неоднорідність оболонки по товщині введенням кінематичних або статичних (або кінематичних і статичних) гіпотез для кожного окремого шару. Порядок вихідних при цьому рівнянь залежить від числа шарів, ці рівняння дозволяють враховувати локальні ефекти на границях контакту шарів. Тому саме дискретно-структурний підхід виявився придатним, зокрема, для розрахунку багатошарових конструкцій з різного роду

недосконалостями поверхонь контакту шарів.

Окремо слід виділити клас задач, пов'язаних з розрахунком тришарових пластин і оболонок [32]. Такі конструкції включають в себе два несучих шара і заповнювач, що забезпечує їхню спільну роботу. Для виведення рівнянь тришарових конструкцій кінематичні гіпотези застосовуються для кожного окремого шару. У цьому зв'язку порядок таких рівнянь буде визначатися кількістю шарів. Огляд результатів досліджень напружено-деформованого стану, стійкості і коливань тришарових оболонок і пластин можна знайти в роботах Л. Лібреску, Т. Хаузі [59], А. Нура [34].

Рівняння багатошарових пластин з довільною кількістю шарів були побудовані В. В. Болотіним [35, 36] стосовно армованих шаруватих середовищ. Тут багатошарові пластини представлені як системи жорстких і м'яких шарів, що чергуються. М'які шари визначаються властивостями зв'язуючого і сприймають поперечні дотичні напруження. Для жорстких шарів справедлива гіпотеза прямої нормалі. Як граничний варіант загальної моделі запропонована теорія шаруватих композиційних матеріалів дрібно шаруватої структури.

Слід зазначити, що при постановці, яка враховує тривимірний характер роботи кожного шару, пошаровому задоволенні умов на торцях, дискретно-структурна теорія дозволяє з високим ступенем точності описати як загальний напружено-деформований стан, так і локальні ефекти в шарах, наприклад, місцеву втрату стійкості.

При розрахунках шаруватих оболонок часто доводиться враховувати різного роду недосконалості, тобто початкові прогини серединної поверхні несучих шарів, непоклеї, тощо. У цьому зв'язку кращою виявляється дискретно-структурна теорія багатошарових оболонок, вихідна математична модель якої враховує специфіку роботи кожного окремого шару. Трудомісткість задач значно зростає, якщо на ділянці розшарування враховується контакт шарів.

1.2 Чисельне моделювання напруженого стану і експериментальні дослідження шаруватих конструкцій

Найбільш ефективний і універсальний чисельний метод механіки деформованого твердого тіла – метод скінчених елементів (МСЕ). В [37] прийнята наступна класифікація скінчених елементів (СЕ) кусково-неоднорідної (шаруватої) структури: просторові або тривимірні СЕ; спеціалізовані двовимірні СЕ для розрахунку тришарових конструкцій; двовимірні СЕ для розрахунку шаруватих систем з довільною кількістю шарів [38 – 40].

Інший напрямок чисельно-аналітичних підходів покладено роботами Я.М.Григоренко і його співавторами [9, 17 – 18, 41], де за допомогою різних аналітичних прийомів співвідношення розглянутої математичної моделі оболонки або пластини зводяться до системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Крайові задачі при цьому вирішуються стійким чисельним методом, як правило, методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [42].

Наявність локальних і крайових ефектів, які викликані неоднорідною структурою нових конструкційних матеріалів, високою змінюваністю зовнішнього навантаження, способом кріплення країв конструкції, накладає певні умови на розглянуті крайові задачі, коли має місце нестійкість рахунку в процесі їх чисельної реалізації завдання. Останнім часом для таких задач широко використовується математичний апарат сплайн-функцій [43], перевага якого полягає у високій стійкості сплайнових апроксимацій щодо різного роду локальних збурювань, швидкої збіжності, простотою і зручністю реалізації алгоритмів. Огляд робіт з теорії пластин і оболонок з використанням методу сплайнової апроксимації наведений в [44]. До чисельно-аналітичних підходів також варто віднести методи, у яких на основі гібридного підходу використовується комбінація методів кінцевих різниць і граничних елементів, а також методу рядів Фур'є і методу граничних елементів.

Для наукового обґрунтування теорії шаруватих систем був виконаний ряд експериментальних досліджень, ціль яких складалася у виявленні особливостей деформування цих систем і обґрунтування положень теорії. Дані про

експериментальні роботи порівняно не чисельні [45 – 53]. Спочатку експерименти були поставлені і проведені для тришарових конструкцій.

Несуча здатність склопластикових трубчастих зразків при осьовому розтяганні залежно від величини кута укладання шарів перехресно армованого композита теоретично і експериментально вивчалася авторами роботи [48].

Випробування тонкостінних труб зі склопластику [51 – 52] проводилися на деформації розтягання з крученням та внутрішній і зовнішній тиск, також вивчався напружено-деформований стан зразків при дії на них різного роду сполучень зазначених видів навантаження. Всі зразки труб випробовувалися до руйнування. Експериментальна перевірка найпоширеніших критеріїв міцності Мізеса-Хілла, Фішера, Прагера, Верена, Нориса, Ашкеназі для композиційних матеріалів проведена в [51].

Методика визначення масштабних коефіцієнтів подібності фізико-механічних характеристик конструкцій зі склопластику запропонована в роботі [52]. Для експериментальної перевірки цієї методики зі склопластику були виготовлені зразки різних розмірів у вигляді пластинок, призм і кілець. Результати випробувань серії великомасштабних і дрібномасштабних зразків показали, що існує проста статистична подібність в межах 12%. Зразки [54], отримані спіральним намотуванням просоченого смолою базальтового джгута на циліндричне металеве оправлення, випробовувалися на розрив і зсув армованого шару до його руйнування. Попередньо розриву армованого шару під час розтягання зразка відбулося руйнування поверхні розділу метал – армований шар внаслідок поширення міжфазної тріщини.

1.3 Деформація композиційних матеріалів при дії температурного навантаження

Ефективність роботи композиційних матеріалів в сучасних виробках забезпечується поєднанням в композитах наступних властивостей: малої щільності, високої жорсткості і високої міцності при можливості управління цими властивостями раціональним армуванням; високою теплоізоляційною і

теплозахисною здатністю; об'єднанням в одному конструктивному елементі силових, теплоізоляційних і теплозахисних функцій.

Але реалізація переваг композиційних матеріалів у порівнянні з традиційними матеріалами можлива лише на основі глибокого розуміння їхньої роботи в конструктивних елементах при реальній експлуатації.

У число завдань, вирішення яких необхідне для більш широкого впровадження композиційних матеріалів в техніці, входить: експериментальне вивчення теплового деформування, в'язкопружних і міцностних властивостей композиційних матеріалів при постійних і змінних підвищених або високих температурах, так як температура є чинником, який дуже сильно впливає на фізичні і механічні властивості композитів; розробка математичних моделей фізико-механічної поведінки композитів і конструкцій з них, і створення на їх основі програм оптимізаційних розрахунків на ЕОМ параметрів багат шарових конструкцій з композиційних матеріалів, що дозволяють враховувати силові і теплові впливи; розробка чисельних методів розрахунку конструкцій з композиційних матеріалів при підвищених і високих температурах, а також розробка методів експериментального підтвердження міцності конструкцій з композитів.

Існують два шляхи визначення ефективних характеристик композитів. Перший напрямок є чисто феноменологічним, причому фізико-механічні сталі визначаються на основі лабораторних випробувань зразків із шаруватих матеріалів. Другий підхід базується на елементах структурного аналізу і припускає вираз фізико-механічних характеристик шаруватого середовища через фізико-механічні характеристики матеріалів шарів, через їх питомий об'ємний зміст, товщину шарів і інші макроскопічні параметри. Другий шлях являється кращим як з теоретичної, так і практичної точки зору. В силу актуальності проблеми визначення ефективних термомеханічних характеристик композитів за останні роки запропоновано безліч структурних моделей механіки шаруватих тонкостінних конструкцій [7, 16, 55 – 60]. Автори роботи [55] розглядають композиційний матеріал, що складається з шарів з різними теплофізичними характеристиками. Якщо їх товщина досить мала у

порівнянні з розмірами оболонки і відстанями, на яких температура і тепловий потік змінюються на помітну величину, то розрахунок теплофізичних характеристик пакету можна виконувати, приймаючи моношар анізотропним і квазіоднорідним з осередненими коефіцієнтами теплопровідності, температуропровідності та лінійного теплового розширення.

Визначенню ефективної теплопровідності в односпрямованому композиті присвячені роботи В.С.Зарубіна, Г.Н.Кувиркіна та ін. [61 – 68]. Односпрямований волокнистий композит по відношенню до властивості теплопровідності є анізотропним матеріалом, що характеризується тензором другого рангу ефективної теплопровідності. Компоненти цього тензора залежать від ряду параметрів, які входять в математичну модель процесу переносу теплової енергії в такому композиті.

Основна особливість всіх цих теорій полягає в тому, що вони базуються на співвідношеннях і рівняннях симетричної теорії пружності. Визначення ефективних термомеханічних характеристик шаруватих композитів в рамках несиметричної теорії пружності розглядається в роботі [69].

Існує достатня кількість гіпотез і припущень, а також і розрахункових співвідношень механіки деформованого твердого тіла, які використовують в механіці композиційних матеріалів. Так, напружено-деформований і температурний стан конструкцій з композиційних матеріалів характеризується [60, 67, 69 – 73] переміщеннями $u_j(x_k, t)$, деформаціями $\varepsilon_{ij}(x_k, t)$, напруженнями $\sigma_{ij}(x_k, t)$ при $i, j = 1, 2, 3$ і температурою $T(x_k, t)$ в усіх точках тіла x_k , $k = 1, 2, 3$ в кожен момент часу t .

Але, на відміну від традиційної механіки деформованого твердого тіла, розгляд конструкції з композиційних матеріалів, особливо при підвищених і високих температурах, призводить до більш складних задач.

Багато в чому це пов'язано з інтенсивною повзучістю полімерних композитів [65, 74 – 77], коли навіть при незмінних температурах, граничних умовах і зовнішніх силах поля u_i , ε_{ij} , σ_{ij} змінюються в часі.

Перший етап розв'язання задач термопружності – визначення температурних полів [46, 78 – 81] за допомогою рівнянь теплопровідності. При цьому, як правило,

вважається, що напружено-деформований стан не впливає на розподіл температур в конструкції, тобто розглядається незв'язана задача термопружності. Розрив зазначеного зв'язку істотно спрощує розв'язання задач термопружності. Другий етап – визначення напружено-деформованого стану конструкції з урахуванням вже відомого розподілу температурного поля в конструкції [7, 16, 48, 53, 60, 68, 77, 81 – 92].

Системи нелінійних тривимірних динамічних рівнянь зв'язаної задачі термопружності для опису поведінки багатошарових оболонок вперше були отримані В.В. Бакуліним і І.Ф. Зразковим [93]. Також були розроблені методи їх вирішення. В.В. Бакулін розробив ефективний підхід для побудови уточнених чисельно-аналітичних моделей шаруватих, в тому числі тришарових оболонок, при адекватному моделюванні геометрії конструкцій, їх умов закріплення та навантаження, деформацій, анізотропії, змінних фізико-механічних властивостей і параметрів напружено-деформованого стану по товщині шаруватого пакету і окремих шарів, що дозволило значно розширити клас розв'язуваних задач із розрахунку оболонкових конструкцій [94, 95].

Під час оцінки граничного стану конструкцій із композиційних матеріалів значна увага має приділятися вивченню закономірностей їх теплового деформування. Це пов'язано з тим, що теплова деформація композиційних матеріалів залежить як від складу і структури матеріалу, так і характеру розподілу температурного навантаження в часі [59, 64, 96 – 97].

Складна багатофакторна залежність коефіцієнта теплового деформування композиційних матеріалів ускладнює його вивчення як в експериментальному, так і в теоретичному плані. Тому на цей час ця фізична характеристика для більшості композиційних матеріалів ще недостатньо вивчена.

Експерименти доводять [64, 97], що для багатьох композиційних матеріалів при температурах нижче 150 °С процеси термодеструкції полімерного сполучного мало помітні, внаслідок чого в даному температурному діапазоні при зростанні температури матеріал розширюється. Зі збільшенням температури вище 150 °С деформація зменшується.

Досить глибокий аналіз особливостей теплового деформування вугле- і склопластиків з полімерною матрицею, представлений в роботі [97], де вивчено ряд основних закономірностей теплового деформування полімерних композиційних матеріалів. Тут наголошується, що при високотемпературному нагріві композитів в них відбуваються фізико-хімічні перетворення, при яких матеріал типу склопластиків, вугле-, вуглеметалопластиків, зв'язуючими в яких є фенольні, фенолоформальдегідні або інші смоли, перетворюються в пористу композицію, що складається з коксу, зміцненого азбестовими, кремнеземними, вугільними, металевими або іншими волокнами.

Для виявлення особливостей теплового деформування теплозахисних склопластиків в реальних виробках, експериментально вивчалось теплове деформування склопластиків в умовах максимально наближених до умов експлуатації. Отримані результати представлені в роботах [76, 98 – 99].

При всьому різноманітті експериментальних і теоретичних досліджень теплового навантаження композиційних матеріалів ще рано говорити, що дана проблема повністю вирішена.

1.4 Розрахунки на міцність конструкцій з композиційних матеріалів

Різні сторони сучасної механіки композитів відображені в монографіях [100 – 103] та оглядах [104 – 108]. Дослідження в області теорії шаруватих композитних систем показали, що при впливі на них силових полів, змінюваність яких описується довжинами хвиль, істотно перевищуючі розміри структурних елементів, композит можна розглядати як однорідний анізотропний матеріал. Специфіка полягає тільки в тому, що коефіцієнти рівнянь стану еквівалентного анізотропного матеріалу будуть залежати від властивостей складових компонент композиту.

На цей час достатньо повно розроблені і обґрунтовані методи визначення ефективних характеристик композита, якщо його деформований стан описується узагальненим законом Гука [100], і значно в меншому ступені, якщо він деформується нелінійно або пластично [101, 109]. Такий підхід дозволяє здійснювати розрахунок конструкцій з композитів методами теорії пружності

анізотропного тіла [110 – 113].

Однак варто відзначити, що модель композита як анізотропного тіла є наближеною, тому що вона не враховує ефектів мікромеханічного характеру [100]. Але вона виявилася досить обґрунтованою під час визначення таких інтегральних характеристик як переміщення, зусилля і моменти, а також критичних навантажень і частот коливань оболонок.

Експериментально і теоретично доведено [109, 114], що шаруваті композиційні матеріали через високу анізотропію фізико-механічних характеристик елементарних шарів, починаючи з деякого рівня навантаження, проявляють властивості не пружної деформації. Шари, для яких критерій міцності виконуються раніше під час зростання навантаження, вже не можуть сприймати додаткове навантаження. Відбувається перерозподіл навантаження на не зруйновані шари. У цілому шаруватий пакет зберігає несучу здатність, однак його жорсткість змінюється в процесі навантаження. Прояв не пружної деформації волокнистих композитів на макрорівні може бути також наслідком стійкого процесу нагромадження або розвитку мікротріщин у структурі матеріалу.

У роботі [100] запропоновані методи визначення ефективних характеристик матеріалу при наявності тріщин на границі волокно – в'язуче. Ці методи можна використати для визначення модулів матеріалу на кожному етапі навантаження, якщо відомі розміри тріщин при досягнутому рівні навантаження.

Різні критерії міцності з'єднання шарів при наявності розшарувань, види й моделі руйнування, а також експериментальні методи визначення опору композитів розшаруванню розглядаються в [115 – 122].

Прогнозування характеристик міцності композиційного матеріалу методами структурного моделювання в ряді випадків приводить до невірних результатів не тільки в кількісному, але і у якісному відношенні. Це доводиться тим, що руйнування композита є багатофакторним фізично неоднорідним процесом [123], де фізико-механічні характеристики елементів композиту грають важливу, але не визначальну роль. Процесу макроруйнування композита, що звичайно приводить до повної втрати його функціональних якостей як конструкційного матеріалу, передують

більш-менш тривалий період зародження, взаємодії і розвитку в обсязі композита різних мікрodefektів, про що свідчать дані сейсмоакустичних, рентгеноструктурних та інших методів дослідження [124].

На міцність конструкції з композиційного матеріалу істотний вплив роблять його розміри, форма і характер навантаження (швидкість та тип навантаження, взаємодія різних типів навантаження між собою, а також такі супутні фактори, як температура, вологість, радіація тощо) [125 – 128].

Структурний підхід до оцінки макроміцності композита складається у визначенні залежності характеристик макроруйнування композита, так званих границь міцності [101, 129 – 132], від характеристик міцності структурних елементів і параметрів макроструктури композита. При цьому характеристики міцності структурного елемента визначаються експериментально або теоретично під час врахування спільної роботи його вихідних елементів.

Критерії початкового руйнування, що враховують умови виникнення дефектів структури композита, запропоновані в роботах А. М. Скудри і Ф.Я.Булавса [133 – 134].

Для композитів із пластичною матрицею початок руйнування зв'язують із виникненням в матриці пластичних деформацій. Як критерій початкового руйнування для таких матеріалів вибирається одна з умов пластичності [101], при цьому поверхня початкового руйнування композита буде збігатися з поверхнею плинності матеріалу матриці.

У випадках, коли ранні стадії руйнування конструкційного матеріалу за умовами експлуатації конструкції припустимі або руйнування матеріалу розглядається на більш високих структурних рівнях, початок руйнування композита зв'язують із руйнуванням окремих структурних елементів відповідного порядку. Так для шаруватих композитів застосовується пошаровий аналіз руйнування [114, 135].

Ідея пошарового аналізу руйнування шаруватого композита складається в оцінці несучої здатності кожного моношару пакета з наступним виключенням з розгляду зруйнованих і перерахуванні граничного навантаження. Процедура

припиняється після виконання критерію макроруйнування шаруватого пакета.

1.5 Висновки по першому розділу

Проведено аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багат шарових елементів конструкцій з дефектами структури від дії статичних та температурних навантажень. Результатом аналізу став висновок, що в даний час проводиться активна робота по створенню ефективних методик розрахунку багат шарових конструкцій на основі дискретно-структурної теорії, коли враховується анізотропія термопружних властивостей матеріалу, схеми армування, особливості спільної роботи та умови контакту шарів, температурні навантаження. Актуальними також залишаються питання експериментальної перевірки різних моделей, які враховують дефекти структури композиційного матеріалу, вплив температури.

2 ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНА ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ БАГАТОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ

Даний розділ присвячений розробці методики розрахунку багат шарових оболонок обертання при дії статичних і температурних навантажень, згідно якої реалізуються як ідеальні, так і ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу. Основні результати цього розділу викладені в роботі [136].

На основі запропонованого в [136] варіанта дискретно-структурної теорії розроблена одна з моделей, згідно з якою враховуються ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу.

Внаслідок того, що між жорсткими шарами в процесі виготовлення анізотропних оболонок утворюється міжфазний м'який клейовий шар, товщину цього шару, як правило, вважають рівною нулю. Тоді відповідно до допущень розглянутого варіанта моделі передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту рівні між собою.

Для оцінки достовірності результатів, отриманих по першій і другій моделі, розроблений варіант нелінійної теорії анізотропних оболонок з урахуванням поперечного зсуву та обтиснення із залученням варіаційного принципу Рейснера і безперервно-структурної моделі теорії пластин і оболонок.

Крім того, запропоновано варіант рівнянь теплопровідності для багат шарової оболонки, яка складається з n анізотропних криволінійних шарів з різними теплофізичними властивостями. Наведена задача теплопровідності розв'язується без урахування впливу деформування конструкції на зміну поля температур і відноситься до класу незв'язаних задач теорії термопружності.

На основі узагальненого варіаційного рівняння принципу Рейснера і дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок складені рівняння

термопружності в змішаній формі.

2.1 Геометрично нелінійна деформація криволінійного шару за уточненою теорією Тимошенко

Нехай багат шарова оболонка складається з анізотропних криволінійних шарів, об'єм яких $V = \sum_{k=1}^n V^{(k)}$. Для позначення площі нижньої і верхньої лицьових поверхонь багат шарової оболонки в цілому застосовуються символи S^0 і S^n ; $\tilde{A} = \sum_{k=1}^n \tilde{A}^{(k)}$ бокова поверхня, що є об'єднанням лінійчатих поверхонь, перпендикулярних серединним поверхням кожного k -го шару. Вважається, що k -й шар недеформованої оболонки віднесений до ортогональної криволінійної системи гаусових координат $(i=1,2)$, $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ спрямована по загальній нормалі $\vec{m}^{(k)}$ до серединної поверхні $S^{(k)}$ і еквідистантної поверхні $S_z^{(k)}$ k -го шару. Індекс “ z ” при введенні інших символів вказує, що відповідні величини відносяться до точки $(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, z^{(k)})$ еквідистантної поверхні $S_z^{(k)}$. Положення точки недеформованої поверхні $S_z^{(k)}$ буде визначатися радіус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}, \left(-\frac{h^{(k)}}{2} \leq z^{(k)} \leq \frac{h^{(k)}}{2} \right) \quad (2.1)$$

базисні вектори в точці $\alpha_i^{(k)}$, $z^{(k)}$ поверхні $S_z^{(k)}$

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)} (\delta_i^j - z^{(k)} \delta_i^{j(k)}) = \vec{r}_j^{(k)} Z_i^{(k)j} = \vec{r}_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}, \quad \vec{\rho}_i^{(k)} = \vec{m}^{(k)}, \quad (2.2)$$

де $\vec{r}^{(k)}$ радіус-вектор точки серединної поверхні $S^{(k)}$; $\vec{m}^{(k)}$ – нормаль одиничної довжини до поверхні $S^{(k)}$; δ_i^j – тензорний запис символу Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)} = \vec{r}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)}, \quad b_{ij}^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)} = \vec{m}_j^{(k)} \vec{r}_i^{(k)}, \quad b_i^{(k)j} \vec{r}_j^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)}, \quad (i=1,2, j=1,2) \quad (2.3)$$

коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні $S^{(k)}$; $\vec{m}^{(k)} = \frac{\partial \vec{m}^{(k)}}{\partial a_i^{(k)}} -$

похідна нормалі $\vec{m}^{(k)}$.

Вектор повного переміщення $\vec{u}_z^{(k)}$ точки k -го жорсткого шару згідно з уточненою теорією оболонок Тимошенка можна представити у вигляді

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z) \vec{\psi}^{(k)}, \quad (2.4)$$

де $\vec{u}^{(k)}$ – вектор переміщення точок серединної поверхні $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функція кутів повороту і обтиснення волокон, перпендикулярних недеформованій серединній поверхні $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелінійна безперервна функція розподілу тангенціальних переміщень по товщині k -го шару, аналіз і апроксимація якої наведені в [137 – 138]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ – вектор функцій зсуву.

Тут для врахування деформацій поперечних зсувів і обтиснень вводиться припущення про те, що перпендикулярний недеформованій (вихідній) координатній поверхні оболонки прямолінійний елемент після деформації виявляється вже не перпендикулярним недеформованій поверхні і змінює свою довжину. При цьому вираз (2.4) визначає нелінійний характер зміни тангенціальних переміщень по товщині k -го шару. Коваріантні компоненти векторів $\vec{u}^{(k)}$, $\vec{\gamma}^{(k)}$, $\vec{\psi}^{(k)}$ записуються за допомогою наступних виразів:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}, \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}, \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (2.5)$$

Тоді радіус-вектор точки k -го шару оболонки після деформації буде мати вигляд:

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \quad (2.6)$$

а відповідні йому базисні вектори:

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}}, \quad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}}. \quad (2.7)$$

Коваріантні компоненти тензора кінцевих деформацій у точці $(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, z^{(k)})$ визначаються як напіврізниці компонентів метричних тензорів до і після деформації

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \quad (2.8)$$

де

$$g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_j^{(k)}, \quad g_{ij}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_j^{(k)*}, \quad g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)}, \quad g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*},$$

$$g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)} \vec{m}^{(k)} = 1, \quad g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*} \quad (i=1,2, j=1,2). \quad (2.9)$$

Підставляючи в (2.8), (2.9) значення базисних векторів (2.2), (2.7), неважко знайти геометричні залежності між деформаціями і переміщеннями в векторній формі

$$\varepsilon_{i3}^{(k)z} = \frac{1}{2} \left[\vec{\rho}_3^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \vec{\rho}_i^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \right],$$

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \frac{1}{2} \left[\vec{\rho}_j^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \vec{\rho}_i^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_j^{(k)}} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_j^{(k)}} \right], \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \vec{\rho}_3^{(k)} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} \right)^2.$$

Використовуючи операції тензорного аналізу і теорію середнього згину [137], співвідношення (2.10) можна привести до вигляду:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z^{(k)} \chi_{ij}^{(k)}, \quad (2.11)$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = \omega_i^{(k)} + \theta_i^{(k)}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \varepsilon_{33}^{(k)} = \gamma^{(k)}, \quad (2.13)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)} \omega_j^{(k)}, \quad (2.14)$$

$$2\chi_{ij}^{(k)} = \nabla_i \beta_j^{(k)} + \nabla_j \beta_i^{(k)} - B_i^{(k)\gamma} e_{j\gamma}^{(k)} - B_j^{(k)\gamma} e_{i\gamma}^{(k)}. \quad (2.15)$$

Величини $\beta_i^{(k)}$ і $\theta_i^{(k)}$ визначаються залежностями:

$$\beta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + f^{(k)}(z) \psi_i^{(k)}, \quad \theta_i^{(k)} = \gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)\prime}(z) \psi_i^{(k)}, \quad (2.16)$$

У наведених співвідношеннях (2.11) – (2.15) нехтують впливом нелінійних членів на величини $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\chi_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{i3}^{(k)}$, $\varepsilon_{33}^{(k)}$, за винятком доданків, добутки яких містять компоненти $w^{(k)}$. Це викликано, насамперед, тим, що тангенціальні переміщення $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, оболонки істотно менші переміщень $w^{(k)}$ в напрямку нормалі до серединної поверхні. Застосовуючи правило коваріантного диференціювання і вирази символів Крістофеля 2-го роду, компоненти співвідношень (2.11) – (2.15) в ортогональних координатах, які збігаються з лініями головних кривизн, запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(k)} &= \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} - \Gamma_{11}^{(k)1} u_1^{(k)} - \Gamma_{11}^{(k)2} u_2^{(k)} - \Gamma_{11}^{(k)3} u_3^{(k)} = \\ &= \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} u_1^{(k)} + \frac{A^{(k)}}{(B^{(k)})^2} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} u_2^{(k)} + k_1^{(k)} (A^{(k)})^2 w^{(k)} \end{aligned}$$

або з урахуванням фізичних компонент тензорів $u_1^{(k)} = A^{(k)} u_{(1)}^{(k)}$, $u_2^{(k)} = B^{(k)} u_{(2)}^{(k)}$, $w^{(k)} = u_{(3)}^{(k)}$, $e_{11}^{(k)} = (A^{(k)})^2 e_{(11)}^{(k)}$, (після перетворень дужки у індексів були прибрані)

$$e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{1}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} u_2^{(k)} + k_1^{(k)} w^{(k)}, \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}). \quad (2.17)$$

Символ $(1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)})$ означає, що інші формули виходять з наведених перестановкою індексів 1, 2 і параметрів Ламе $A^{(k)}, B^{(k)}$. Аналогічно отримані інші співвідношення:

$$e_{12}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{u_1^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.18)$$

$$\omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - k_1^{(k)} u_1^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.19)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\beta_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.20)$$

$$2\chi_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left(\frac{\beta_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left(\frac{\beta_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}. \quad (2.21)$$

Співвідношення (2.20), (2.21) можна перетворити, якщо замінити в них $\beta_1^{(k)}$ і $\beta_2^{(k)}$ виразом –

$$\beta_i^{(k)} = \theta_i^{(k)} + g^{(k)}(z)\psi_i^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)} - \omega_i^{(k)} + g^{(k)}(z)\psi_i^{(k)}. \quad (2.22)$$

Тоді співвідношення (2.20) і (2.21) приймають вигляд:

$$\chi_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)0} + 2\beta_{11}^{(k)} + g^{(k)}(z)\psi_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.23)$$

$$\chi_{12}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)0} + 2\beta_{12}^{(k)} + g^{(k)}(z)\psi_{12}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.24)$$

де

$$\chi_{11}^{(k)0} = \frac{\partial \omega_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\omega_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.25)$$

$$2\chi_{12}^{(k)0} = -\frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left(\frac{\omega_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) - \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left(\frac{\omega_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}, \quad (2.26)$$

$$\beta_{11}^{(k)} = \frac{\partial \varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - \frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.27)$$

$$2\beta_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{23}^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left(\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}}{A^{(k)}} \right), \quad (2.28)$$

$$\psi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \psi_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\psi_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.29)$$

$$2\psi_{12}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left(\frac{\psi_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left(\frac{\psi_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right), \quad (2.30)$$

де $\chi_{ij}^{(k)0}$ – компоненти тензора зміни кривизни серединної поверхні k -го шару згідно лінійної теорії оболонок за гіпотезою Кірхгофа-Лява.

Співвідношення (2.12), (2.20) і (2.21) можна представити в дещо іншому вигляді в порівнянні з формулами (2.23) і (2.24):

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)'}(z)\Psi_i^{(k)}, \quad (2.31)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \chi_{11}^{(k)\gamma} + f^{(k)}(z)\Psi_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.32)$$

$$\chi_{12}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)\gamma} + f^{(k)}(z)\Psi_{12}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.33)$$

де

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)} = \omega_i^{(k)} + \gamma_i^{(k)},$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{\partial \gamma_1^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\gamma_2^{(k)}}{A^{(k)} B^{(k)}} \cdot \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} + k_1^{(k)} e_{11}^{(k)} \quad (1 \Leftrightarrow 2, A^{(k)} \Leftrightarrow B^{(k)}), \quad (2.34)$$

$$2\chi_{12}^{(k)\gamma} = \frac{B^{(k)}}{A^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1^{(k)}} \left(\frac{\gamma_2^{(k)}}{B^{(k)}} \right) + \frac{A^{(k)}}{B^{(k)}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2^{(k)}} \left(\frac{\gamma_1^{(k)}}{A^{(k)}} \right) + k_1^{(k)} e_{21}^{(k)} + k_2^{(k)} e_{12}^{(k)}. \quad (2.35)$$

Компоненти $\psi_{ij}^{(k)}$ визначаються залежностями (2.29) і (2.30).

2.2 Розв'язувальні рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок

Теорія багатошарових оболонок і пластин займає проміжне місце між теорією анізотропних оболонок і точними підходами, заснованими на тривимірних рівняннях теорії пружності. Слід зазначити, що існує загальна методологія побудови теорій тришарових і багатошарових оболонок. Остання з них узагальнюється таким чином, що дозволяє вирішувати задачі з урахуванням дискретного характеру роботи кожного окремо взятого анізотропного шару оболонки, тому порядок розв'язувальних рівнянь тут буде визначатися кількістю розглянутих шарів.

В якості розглянутої тут математичної моделі приймається модель багатошарової оболонки, яка складається з n тонких анізотропних шарів (рисунк2.1). Тонкою вважається оболонка (шар), якщо відносно товщиною h/R_{\min} (R_{\min} – мінімальне значення одного з головних радіусів кривизни) такої оболонки можна знехтувати в порівнянні з одиницею.

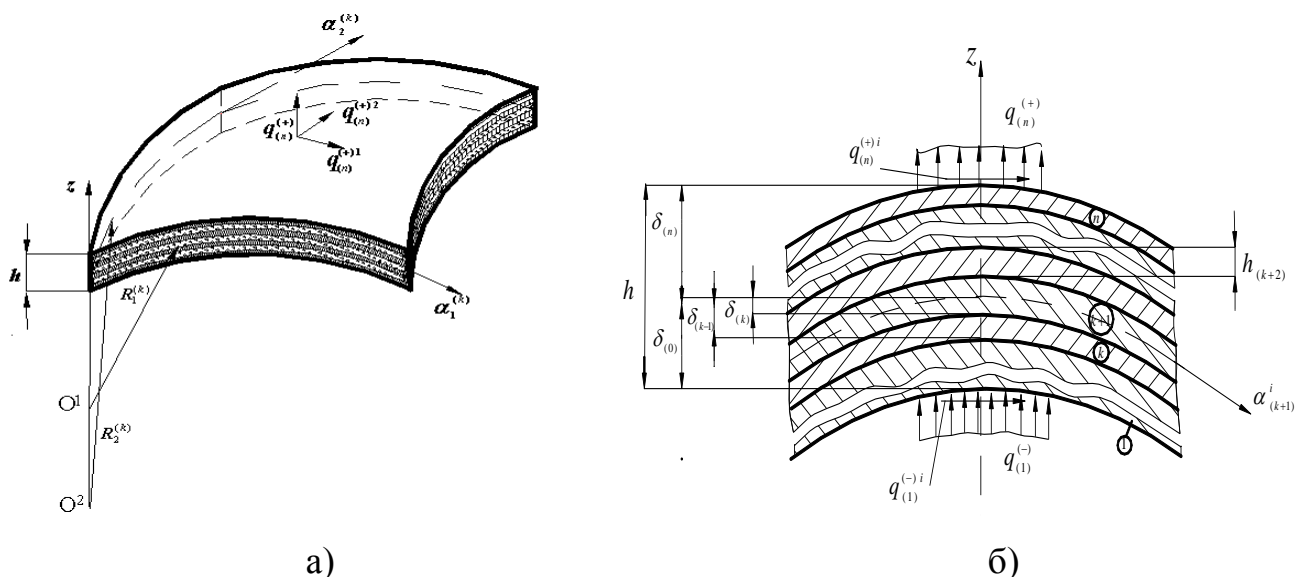


Рисунок 2.1 – Розрахункова модель багатошарової оболонки.

Нехай анізотропна оболонка розбита на n тонких дискретних шарів. При цьому прийняті позначення і гіпотези підрозділу 2.1 щодо розподілу поперечних деформацій по товщині кожного дискретного шару, що розглядається як окремо взята оболонка із заданою локальною системою координат. Задавши напрямок поверхневого навантаження (рисунок 2.1), слід визначити властивості локальних систем координат $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, z^{(k)}$ кожного k -го шару і загальної системи гаусових координат (α_1, α_2, z) . Вважається, що поперечні координатні лінії загальної і локальних систем суміщені, крім того, локальні координатні поверхні поєднані зі серединними поверхнями шарів. Нумерація шарів починається з боку від'ємних значень координати z від одиниці до n .

Варіаційне рівняння принципу Рейснера для багатошарової оболонки запишеться таким чином:

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}) dV = 0, \quad (2.36)$$

де $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$ – контраваріантні компоненти тензора напружень (перший індекс " α " вказує на те, що ці напруження віднесені до одиниці площі недеформованої координатної поверхні $x^\alpha = const$ і діють на площадку на деформованій поверхні $x^\alpha = const$, в яку переходить первісна координатна поверхня; другий індекс " β "

вказує на базисні вектори недеформованого тіла, щодо яких обчислюються компоненти тензора напружень); $\eta_{\alpha\beta}^{(k)}$ – тензор деформацій Гріна; $F^{(k)}$ – функція додаткової енергії деформації.

Якщо для k -го шару оболонки використовуються наступні умови ідеального контакту між шарами (рисунок 2.1):

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}, \quad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \quad (2.37)$$

або у векторному вигляді –

$$\begin{aligned} \vec{u}_z^{(k)} \left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2} \right) &= \vec{u}_z^{(k-1)} \left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2} \right), \\ \vec{X}_{(k)} \left(\alpha_i^{(k)}, -\frac{h^{(k)}}{2} \right) &= \vec{X}_{(k-1)} \left(\alpha_i^{(k-1)}, \frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \quad (i=1,2), \end{aligned} \quad (2.38)$$

тоді варіація елементарної роботи зовнішніх сил $\delta \dot{A}_R$ запишеться в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \delta \dot{A}_R &= \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \iint_{S_{(n)}} \left(\vec{X}_{(n)} \delta \vec{u}^{(n)} + M_{(n)}^i \vec{r}_{i^*}^{(n)} \cdot \delta \vec{\gamma}^{(n)} + B_{(n)}^i \vec{r}_{i^*}^{(n)} \cdot \delta \vec{\psi}^{(n)} + M_{(n)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(n)z} \right) dS + \\ &+ \iint_{S_{(-)}} \left(\vec{X}_{(1)} \delta \vec{u}^{(1)} + M_{(1)}^i \vec{r}_{i^*}^{(1)} \cdot \delta \vec{\gamma}^{(1)} + B_{(1)}^i \vec{r}_{i^*}^{(1)} \delta \vec{\psi}^{(1)} + M_{(1)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(1)z} \right) dS + \sum_{k=2}^{n-1} \iint_{S_{(k)}} \left(\vec{X}_{(k)} \delta \vec{u}^{(k)} + \right. \\ &+ M_{(k)}^i \vec{r}_{i^*}^{(k)} \delta \vec{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \vec{r}_{i^*}^{(k)} \delta \vec{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(k)z} \left. \right) dS + \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} \left(\vec{O}_{(k)}^S \delta \vec{u}^{(k)} + \vec{G}_{(k)}^S \delta \vec{\gamma}^{(k)} + \right. \\ &+ \vec{L}_{(k)}^S \delta \vec{\psi}^{(k)} \left. \right) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} \left(\vec{O}_{(k)} \delta \vec{u}^{(k)} + G_{(k)} \delta \vec{\gamma}^{(k)} + \vec{L}_{(k)} \delta \vec{\psi}^{(k)} + \left(\vec{u}^{(k)} - \vec{u}_S^{(k)} \right) \delta \vec{O}_{(k)} + \right. \\ &+ \left. \left(\vec{\gamma}^{(k)} - \vec{\gamma}_S^{(k)} \right) \delta \vec{G}_{(k)} + \left(\vec{\psi}^{(k)} - \vec{\psi}_S^{(k)} \right) \delta \vec{L}_{(k)} \right) dl, \end{aligned} \quad (2.39)$$

де $S_{(n)}, S_{(1)}$ – серединні поверхні граничних шарів оболонки, $S_{(k)}$ – серединна поверхня k -го шару; $l_1^{(k)}, l_2^{(k)}$ – частини контуру $l^{(k)}$ k -го шару, де виконуються статичні та геометричні граничні умови відповідно. Елемент площі бічної лінійчатої

поверхні $d\Gamma_{(k)}$ k -го шару з контуром $l_{(k)}$ дорівнює

$$d\Gamma_{(k)} = dl_{(k)} dz^{(k)}, \quad (2.40)$$

а елемент об'єму –

$$dV^{(k)} = t^{(k)} dS_{(k)} dz^{(k)}. \quad (2.41)$$

Вектори зовнішніх зусиль $\vec{O}_{(k)}$, моментів $\vec{M}_{(k)}$ і додаткових моментів $\vec{B}_{(k)}$, які діють в точках деформованої серединної поверхні k -го шару, будуть визначатися рівностями:

$$\begin{aligned} \vec{X}_{(1)} &= t_{(1)}^{(+)} \vec{X}_{(1)}^{(+)} + t_{(1)}^{(-)} \vec{q}_{(1)}^{(-)} + \int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2} t^{(1)} \vec{P}^{(1)} dz, & \vec{M}_{(1)} &= \frac{h^{(1)}}{2} \left(t_{(1)}^{(+)} \vec{X}_{(1)}^{(+)} - t_{(1)}^{(-)} \vec{q}_{(1)}^{(-)} \right) + \int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2} t^{(1)} \vec{P}^{(1)} z^{(1)} dz, \\ \vec{B}_{(1)} &= \frac{h^{(1)}}{2} f^{(1)} \left(\frac{h^{(1)}}{2} \right) \left(t_{(1)}^{(+)} \vec{X}_{(1)}^{(+)} - t_{(1)}^{(-)} \vec{q}_{(1)}^{(-)} \right) + \int_{-h^{(1)}/2}^{h^{(1)}/2} t^{(1)} \vec{P}^{(1)} \varphi^{(1)}(z) dz, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_{(k)} &= t_{(k)}^{(+)} \vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)} \vec{X}_{(k)}^{(-)} + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)} \vec{P}^{(k)} dz, & \vec{M}_{(k)} &= \frac{h^{(k)}}{2} \left(t_{(k)}^{(+)} \vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)} \vec{X}_{(k)}^{(-)} \right) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)} \vec{P}^{(k)} z^{(k)} dz, \\ \vec{B}_{(k)} &= \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \left(t_{(k)}^{(+)} \vec{X}_{(k)}^{(+)} - t_{(k)}^{(-)} \vec{X}_{(k)}^{(-)} \right) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} t^{(k)} \vec{P}^{(k)} \varphi^{(k)}(z) dz, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_{(n)} &= t_{(n)}^{(+)} \vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)} \vec{X}_{(n)}^{(-)} + \int_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)} \vec{P}^{(n)} dz, & \vec{M}_{(n)} &= \frac{h^{(n)}}{2} \left(t_{(n)}^{(+)} \vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)} \vec{X}_{(n)}^{(-)} \right) + \int_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)} \vec{P}^{(n)} z^{(n)} dz, \\ \vec{B}_{(n)} &= \varphi^{(n)} \left(\frac{h^{(n)}}{2} \right) \left(t_{(n)}^{(+)} \vec{q}_{(n)}^{(+)} - t_{(n)}^{(-)} \vec{X}_{(n)}^{(-)} \right) + \int_{-h^{(n)}/2}^{h^{(n)}/2} t^{(n)} \vec{P}^{(n)} \varphi^{(n)}(z) dz, \end{aligned} \quad (2.44)$$

де вектори $\vec{X}_{(k)}^{(+)}$, $\vec{X}_{(k)}^{(-)}$ визначають контактні напруження відповідно на верхній (індекс «+») і нижній (індекс «-») обмежувачих лицьових поверхнях k -го шару.

Контраваріантні компоненти вектора контактних напружень $\vec{X}_{(k)}$ і векторів зовнішнього навантаження $\vec{q}_{(n)}^{(+)}$, $\vec{q}_{(1)}^{(-)}$ будуть визначатися наступними залежностями:

$$\begin{aligned}\vec{O}_{(k)}^{(+)} &= \sigma_{(+)}^{(k)i3} \vec{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(+)}^{(k)33} \vec{m}^{(k)*}, & \vec{O}_{(k)}^{(-)} &= \sigma_{(-)}^{(k)i3} \vec{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(-)}^{(k)33} \vec{m}^{(k)*}, \\ \vec{q}_{(n)}^{(+)} &= q_{(+)}^{(n)i3} \vec{\rho}_i^{(n)*} + q_{(+)}^{(n)33} \vec{m}^{(n)*}, & \vec{q}_{(1)}^{(-)} &= q_{(-)}^{(1)i3} \vec{\rho}_i^{(1)*} + q_{(-)}^{(1)33} \vec{m}^{(1)*} \quad (i=1,2).\end{aligned}\quad (2.45)$$

Першу варіацію другого доданка рівняння (2.36) можна представити таким чином:

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^n \left(\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)} \right) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta}} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) \delta\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (2.46)$$

де

$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} \left(\sigma_{(k)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)z} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right) dV; \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{2R}^{(k)} &= -\iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = -\iiint_{V^{(k)}} \left\{ \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)z} \right) \delta\sigma_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{i3}} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta\sigma_{(k)}^{i3} + \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial \sigma_{(k)}^{33}} - \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) \delta\sigma_{(k)}^{33} \right\} dV.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Підставляючи співвідношення (2.11) – (2.13) в (2.47) і враховуючи, що елемент недеформованого об'єму $dV^{(k)}$ дорівнює

$$dV^{(k)} = \sqrt{g^{(k)}} d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} \approx \sqrt{a^{(k)}} d\alpha_1 d\alpha_2 dz^{(k)} = dS_{(k)} dz^{(k)}, \quad (2.49)$$

можна отримати наступний вираз:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{1R}^{(k)} &= \iint_{S_{(k)} - h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \int \left\{ \sigma_{(k)}^{ij} \left[\delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + z\delta\chi_{ij}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)}(z) \nabla_i \delta\psi_i^{(k)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{(k)}^{i3} \left(2\delta\varepsilon_{i3}^{(k)} + z\nabla_i \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right) + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} \right\} dS dz\end{aligned}\quad (2.50)$$

При виведенні рівняння (2.50) розглядався випадок середнього згину тонкого k -го шару оболонки. Якщо в (2.50) ввести віднесені до одиниці довжини координатних ліній недеформованої серединної поверхні k -го шару контраваріантні компоненти тензорів тангенціальних зусиль $T_{(k)}^{ij}$, згинальних і крутних моментів $M_{(k)}^{ij}$, додаткового згинального і крутного моменту $L_{(k)}^{ij}$, а також контраваріантні компоненти вектора поперечних сил і додаткових поперечних сил деформацій зсуву і обчислення $Q_{(k)}^i, Q_{(k)}^3, L_{(k)}^i, M_{(k)}^{i3}$ щодо базисних векторів $\vec{r}^{(k)*}, \vec{\rho}_3^{(k)*}$:

$$\begin{aligned}
 T_{(k)}^{ij} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} dz, & M_{(k)}^{ij} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} z dz, \\
 L_{(k)}^{ij} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} \varphi^{(k)}(z) dz, & Q_{(k)}^i &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} dz, & L_{(k)}^{i3} &= \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} \varphi^{(k)'}(z) dz, \\
 Q_{(k)}^3 &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{33} dz, & M_{(k)}^{i3} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} z dz,
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

то рівняння (2.50) переписуться так:

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi_{1R}^{(k)} &= \iint_{S^{(k)}} (T_{(k)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)} + M_{(k)}^{ij} \delta\chi_{ij}^{(k)\gamma} + L_{(k)}^{ij} \nabla_i \delta\psi_i^{(k)} + 2Q_{(k)}^i \delta\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + L_{(k)}^{i3} \delta\psi_i^{(k)} + \\
 &+ M_{(k)}^{i3} \nabla_i \delta\varepsilon_{33}^{(k)z} + Q_{(k)}^3 \delta\varepsilon_{33}^{(k)z}) dS.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Ввівши інтеграл для додаткової роботи деформації k -го шару

$$\int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} F^{(k)} dz^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - W_{(k)}) dz = F_p^{(k)} (T_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{ij}, L_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{i3}, Q_{(k)}^i, L_{(k)}^{i3}, Q_{(k)}^3), \tag{2.53}$$

який у разі малих деформацій можна вважати квадратичною функцією від напружень

$$F_p^{(k)} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} - \frac{1}{2} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) dz = \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dz,$$

вираз (2.48) переписеться так:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{2R}^{(k)} = & - \iint_{S_{(k)}} \left\{ \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \Gamma_{(k)}^{ij}} - \varepsilon_{ij}^{(k)} \right) \delta\Gamma_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{ij}} - \chi_{ij}^{(k)\gamma} \right) \delta M_{(k)}^{ij} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{ij}} - \nabla_i \psi_i^{(k)} \right) \delta L_{(k)}^{ij} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^i} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} \right) \delta Q_{(k)}^i + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{i3}} - \psi_i^{(k)} \right) \delta L_{(k)}^{i3} + \\ & \left. + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{i3}} - \nabla_i \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) \delta M_{(k)}^{i3} + \left(\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^3} - \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) \delta Q_{(k)}^3 \right\} dS. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Опускаючи цілий ряд громіздких перетворень варіаційних рівнянь, наданих в [136], та переходячи до фізичних компонент, рівняння рівноваги, віднесені до недеформованого стану k -го шару оболонки, запишуться

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{A}^{(k)} R_{11}^{(k)0})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)} R_{21}^{(k)0})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + R_{12}^{(k)0} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - R_{22}^{(k)0} \frac{\partial \hat{A}^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\ + A^{(k)} \hat{A}^{(k)} (k_1^{(k)} R_{13}^{(k)0} + X_1^{(k)0}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow \hat{A}^{(k)}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\hat{A}^{(k)} R_{13}^{(k)0})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)} R_{23}^{(k)0})}{\partial \alpha_2^{(k)}} - A^{(k)} \hat{A}^{(k)} (k_1^{(k)} R_{11}^{(k)0} + k_2^{(k)} R_{22}^{(k)0} - X_3^{(k)0}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{A}^{(k)} M_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)} M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)} \frac{\partial \hat{A}^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\ + A^{(k)} \hat{A}^{(k)} (M_1^{(k)} - Q_1^{(k)}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow \hat{A}^{(k)}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\hat{A}^{(k)} L_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)} L_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)} \frac{\partial \hat{A}^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} +$$

$$+A^{(k)}\hat{A}^{(k)}\left(\hat{A}_1^{(k)}-L_{13}^{(k)}\right)=0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow \hat{A}^{(k)}). \quad (2.55)$$

При врахуванні обчислення k -го шару до системи (2.55) необхідно додати восьме рівняння рівноваги

$$H_3^{(k)} = \frac{\partial\left(\hat{A}^{(k)}M_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial\left(A^{(k)}M_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}} - \\ - A^{(k)}\hat{A}^{(k)}\left(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)}L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)} - M_3^{(k)}\right) = 0. \quad (2.56)$$

Граничні умови для пружного анізотропного шару.

На контурі $l_{(k)}$ k -го шару оболонки мають місце вісім рівнянь рівноваги (2.55), (2.56) і статичні граничні умови:

$$\Phi_{(k)0}^{nS} = R_{(k)0}^n, \quad \Phi_{(k)0}^{\tau S} = R_{(k)0}^\tau, \quad \Phi_{(k)0}^{mS} = R_{(k)0}^m, \quad G_{(k)0}^{nS} = G_{(k)0}^n, \quad H_{(k)0}^{\tau S} = H_{(k)0}^\tau, \\ L_{(k)0}^{nS} = L_{(k)0}^n, \quad L_{(k)0}^{\tau S} = L_{(k)0}^\tau, \quad M_{(k)S}^{3n} + L_{(k)S}^{3n} = M_{(k)}^{i3}n_i^{(k)}. \quad (2.57)$$

Крім граничних умов (2.57), з варіаційних рівнянь виходять геометричні граничні умови і граничні умови змішаного типу:

а) жорстко закріплений контур

$$u_n^{(k)} = u_\tau^{(k)} = w^{(k)} = \gamma_n^{(k)} = \gamma_\tau^{(k)} = \psi_n^{(k)} = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)\neq} = 0, \quad (2.58)$$

б) шарнірний, нерухомий в тангенціальному і нормальному напрямках контур,

$$u_n^{(k)} = u_\tau^{(k)} = w^{(k)} = G_{(k)0}^n = \gamma_\tau^{(k)} = L_{(k)0}^n = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)\neq} = 0, \quad (2.59)$$

в) шарнірний, нерухомий в тангенціальному напрямку контур,

$$u_n^{(k)} = u_\tau^{(k)} = R_{(k)0}^m = G_{(k)0}^n = \gamma_\tau^{(k)} = L_{(k)0}^n = \psi_\tau^{(k)} = M_{(k)}^{i3}n_i^{(k)} = 0, \quad (2.60)$$

г) шарнірний, вільний в тангенціальній площині контур,

$$R_{(k)0}^n = R_{(k)0}^\tau = w^{(k)} = G_{(k)0}^n = \gamma_\tau^{(k)} = L_{(k)0}^n = \psi_\tau^{(k)} = \varepsilon_{33}^{(k)\neq} = 0. \quad (2.61)$$

Співвідношення пружності для анізотропного шару.

Нехай розглянутий анізотропний шар має одну площину пружної симетрії, дотичну до координатної поверхні, і напрямок осі $z^{(k)}$ перпендикулярний до цієї площини. Тоді число пружних постійних відповідно зводиться до 13, тобто вісім з 21 пружних сталих узагальненого закону Гука повинні дорівнювати нулю:

$$a_{(k)}^{14} = a_{(k)}^{24} = a_{(k)}^{34} = a_{(k)}^{46} = a_{(k)}^{15} = a_{(k)}^{25} = a_{(k)}^{35} = a_{(k)}^{56} = 0,$$

$$\hat{a}_{14}^{(k)} = \hat{a}_{24}^{(k)} = \hat{a}_{34}^{(k)} = \hat{a}_{46}^{(k)} = \hat{a}_{15}^{(k)} = \hat{a}_{25}^{(k)} = \hat{a}_{35}^{(k)} = \hat{a}_{56}^{(k)} = 0.$$

Рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії, приймають вигляд:

$$\sigma_{(k)}^{11} = a_{(k)}^{11} \varepsilon_{11}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{12} \varepsilon_{22}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{13} \varepsilon_{33}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{16} \varepsilon_{12}^{(k)\mp},$$

$$\sigma_{(k)}^{22} = a_{(k)}^{21} \varepsilon_{11}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{22} \varepsilon_{22}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{23} \varepsilon_{33}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{26} \varepsilon_{12}^{(k)\mp},$$

$$\sigma_{(k)}^{33} = a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{36} \varepsilon_{12}^{(k)\mp},$$

$$\sigma_{(k)}^{23} = a_{(k)}^{44} \varepsilon_{23}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{45} \varepsilon_{13}^{(k)\mp}, \quad \sigma_{(k)}^{13} = a_{(k)}^{54} \varepsilon_{23}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\mp},$$

$$\sigma_{(k)}^{12} = a_{(k)}^{61} \varepsilon_{11}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{62} \varepsilon_{22}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{63} \varepsilon_{33}^{(k)\mp} + a_{(k)}^{66} \varepsilon_{12}^{(k)\mp}. \quad (2.62)$$

або

$$\varepsilon_{11}^{(k)z} = \hat{a}_{11}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + \hat{a}_{12}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + \hat{a}_{13}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + \hat{a}_{16}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12}, \quad \varepsilon_{22}^{(k)z} = \hat{a}_{21}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + \hat{a}_{22}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + \hat{a}_{23}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + \hat{a}_{26}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12},$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \hat{a}_{31}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + \hat{a}_{32}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + \hat{a}_{33}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + \hat{a}_{36}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12},$$

$$\varepsilon_{23}^{(k)z} = \hat{a}_{44}^{(k)} \sigma_{(k)}^{23} + \hat{a}_{45}^{(k)} \sigma_{(k)}^{13}, \quad \varepsilon_{13}^{(k)z} = \hat{a}_{54}^{(k)} \sigma_{(k)}^{23} + \hat{a}_{55}^{(k)} \sigma_{(k)}^{13},$$

$$\varepsilon_{12}^{(k)z} = \hat{a}_{61}^{(k)} \sigma_{(k)}^{11} + \hat{a}_{62}^{(k)} \sigma_{(k)}^{22} + \hat{a}_{63}^{(k)} \sigma_{(k)}^{33} + \hat{a}_{66}^{(k)} \sigma_{(k)}^{12}. \quad (2.63)$$

Підставляючи співвідношення (2.62) з урахуванням формул (2.31) – (2.33) в (2.51), нескладно отримати залежності між компонентами тензорів внутрішніх зусиль і моментів k -го шару анізотропної оболонки з площиною пружної симетрії, дотичною до координатної поверхні, і компонентами тензора деформацій в

матричній формі:

$$T_{(k)} = A_{(k)} \varepsilon_{(k)}, \quad (2.64)$$

$$M_{(k)} = D_{(k)} \chi_{(k)} + K_{(k)} \psi_{(k)}, \quad L_{(k)} = K_{(k)} \chi_{(k)} + F_{(k)} \psi_{(k)}, \quad (2.65)$$

$$Q_{(k)}^\gamma = C_{(k)} \varepsilon_{(k)}^\gamma + R_{(k)} \psi_{(k)}^\gamma, \quad L_{(k)}^\gamma = R_{(k)} \varepsilon_{(k)}^\gamma + G_{(k)} \psi_{(k)}^\gamma. \quad (2.66)$$

Тут прийняті позначення матриць стовпців зусиль і деформацій:

$$\begin{aligned} T_{(k)} &= [T_{(k)}^{11}, T_{(k)}^{22}, Q_{(k)}^3, T_{(k)}^{12}]^T, \quad \varepsilon_{(k)} = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T, \quad M_{(k)} = [M_{(k)}^{11}, M_{(k)}^{22}, M_{(k)}^{12}]^T, \\ \chi_{(k)} &= [\chi_{11}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}]^T, \quad L_{(k)} = [L_{(k)}^{11}, L_{(k)}^{22}, L_{(k)}^{12}]^T, \quad \psi_{(k)} = [\psi_{11}^{(k)}, \psi_{22}^{(k)}, \psi_{12}^{(k)}]^T, \\ Q_{(k)}^\gamma &= [Q_{(k)}^2, Q_{(k)}^1]^T, \quad \varepsilon_{(k)}^\gamma = [\varepsilon_{23}^{(k)\gamma}, \varepsilon_{13}^{(k)\gamma}]^T, \\ L_{(k)}^\gamma &= [L_{(k)}^{23}, L_{(k)}^{13}]^T, \quad \psi_{(k)}^\gamma = [\psi_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}]^T \end{aligned} \quad (2.67)$$

і матриць жорсткості k -го шару оболонки:

$$\begin{aligned} A_{(k)} &= \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{13}^{(k)} & A_{16}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{23}^{(k)} & A_{26}^{(k)} \\ A_{31}^{(k)} & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} & A_{36}^{(k)} \\ A_{61}^{(k)} & A_{62}^{(k)} & A_{63}^{(k)} & A_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad D_{(k)} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(k)} & D_{12}^{(k)} & D_{16}^{(k)} \\ D_{21}^{(k)} & D_{22}^{(k)} & D_{26}^{(k)} \\ D_{61}^{(k)} & D_{62}^{(k)} & D_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{(k)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} & K_{12}^{(k)} & K_{16}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} & K_{22}^{(k)} & K_{26}^{(k)} \\ K_{61}^{(k)} & K_{62}^{(k)} & K_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ F_{(k)} &= \begin{bmatrix} F_{11}^{(k)} & F_{12}^{(k)} & F_{16}^{(k)} \\ F_{21}^{(k)} & F_{22}^{(k)} & F_{26}^{(k)} \\ F_{61}^{(k)} & F_{62}^{(k)} & F_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad C_{(k)} = \begin{bmatrix} C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} \\ C_{54}^{(k)} & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ R_{(k)} &= \begin{bmatrix} R_{44}^{(k)} & R_{45}^{(k)} \\ R_{54}^{(k)} & R_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad G_{(k)} = \begin{bmatrix} G_{44}^{(k)} & G_{45}^{(k)} \\ G_{54}^{(k)} & G_{55}^{(k)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

де

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} a_{(k)}^{ij} dz, & D_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z^2 a_{(k)}^{ij} dz, & \hat{E}_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} z \varphi^{(k)}(z) a_{(k)}^{ij} dz, \\
F_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi_{(k)}^2(z) a_{(k)}^{ij} dz, & C_{ij}^{(k)} &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} a_{(k)}^{ij} dz, \\
R_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \varphi'_{(k)}(z) a_{(k)}^{ij} dz, & G_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{4} \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} [\varphi'_{(k)}(z)]^2 a_{(k)}^{ij} dz.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Вважається, що функція $\varphi_{(k)}(z)$, яка визначає нелінійний характер розподілу тангенціальних переміщень (2.4) по товщині k -го шару оболонки.

Розв'язуючи лінійні системи рівнянь (2.64) – (2.66), нескладно знайти наступні залежності:

$$\varepsilon_{(k)} = A_{(k)}^{-1} T_{(k)}, \tag{2.70}$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{(k)} \\ \psi_{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{(k)} & K_{(k)} \\ K_{(k)} & F_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{(k)} \\ L_{(k)} \end{bmatrix}, \tag{2.71}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{(k)}^\gamma \\ \psi_{(k)}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{(k)} & R_{(k)} \\ R_{(k)} & G_{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{(k)}^\gamma \\ L_{(k)}^\gamma \end{bmatrix}. \tag{2.72}$$

Виведення співвідношень (2.70) – (2.72) у формі аналітичних залежностей досить проблематичне, тому значно простіше отримати такий розв'язок одним з чисельних методів на ЕОМ.

Рівняння дискретно - структурної теорії з ідеальним контактом шарів анізотропного тіла.

Відповідно до загальної та місцевої систем координат, які були введені в підрозділі 2.1 для розглянутої багатошарової оболонки (рисунок 2.1), кінематичні умови ідеального контакту k -го шару оболонки з $k+1$, і $k-1$ -им шарами в тензорній формі запишуться таким чином:

$$\bar{z}^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} : u_i^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2} \gamma_i^{(k)} + \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \psi_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} - \varphi^{(k+1)} \left(\frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)}$$

($i=1,2$),

$$w^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2} \gamma^{(k)} = w^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)}; \quad (2.73)$$

$$\bar{z}^{(k)} = -\frac{h^{(k)}}{2} : u_i^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} \gamma_i^{(k)} - \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \psi_i^{(k)} = u_i^{(k-1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} + \varphi^{(k-1)} \left(\frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}$$

($i=1,2$),

$$w^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} \gamma^{(k)} = w^{(k-1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}. \quad (2.74)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (2.73) – (2.74), переміщення серединної поверхні k -го шару можна записати через переміщення серединних поверхонь $k+1$ $k-1$ -го шарів оболонки:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)} \left(\frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)} \left(\frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}$$

($i=1,2$),

$$2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}. \quad (2.75)$$

Вирази (2.73) – (2.74) дещо змінюються для першого і n -го шарів:

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} - \frac{h^{(2)}}{2} \gamma_i^{(2)} - \frac{h^{(1)}}{2} \gamma_i^{(1)} - \varphi^{(2)} \left(\frac{h^{(2)}}{2} \right) \psi_i^{(2)} - \varphi^{(1)} \left(\frac{h^{(1)}}{2} \right) \psi_i^{(1)} \quad (i=1,2),$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} - \frac{h^{(1)}}{2} \gamma^{(1)} - \frac{h^{(2)}}{2} \gamma^{(2)},$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} + \frac{h^{(n-1)}}{2} \gamma_i^{(n-1)} + \frac{h^{(n)}}{2} \gamma_i^{(n)} + \varphi^{(n-1)} \left(\frac{h^{(n-1)}}{2} \right) \psi_i^{n-1} + \varphi^{(n)} \left(\frac{h^{(n)}}{2} \right) \psi_i^{(n)} \quad (i=1,2),$$

$$w^{(n)} = w^{(n-1)} + \frac{h^{(n-1)}}{2} \gamma^{(n-1)} + \frac{h^{(n)}}{2} \gamma^{(n)}. \quad (2.76)$$

Статичні крайові умови ідеального контакту на лицьових поверхнях k -го шару приймають вигляд

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+} \quad (i=1,2), \quad \sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (2.77)$$

Для першого і n -го шарів оболонки вирази (2.77) відповідно перепишуть так:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(1)+} &= \sigma_{i3}^{(2)-}, & \sigma_{i3}^{(1)-} &= q_{(1)}^{(-i)} & (i=1,2), & \sigma_{33}^{(1)+} &= \sigma_{33}^{(2)-}, & \sigma_{33}^{(1)-} &= q_{(1)}^{(-)}, \\ \sigma_{i3}^{(n)+} &= -q_{(n)}^{(+i)}, & \sigma_{i3}^{(n)-} &= \sigma_{i3}^{(n-1)+} & (i=1,2), & \sigma_{33}^{(n)+} &= -q_{(n)}^{(+)}, & \sigma_{33}^{(n)-} &= \sigma_{33}^{(n-1)+}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

При цьому напруження $\sigma_{(k)}^{i3}$ ($i=1,2,3$) на лицьових поверхнях k -го шару, згідно статичним умовам (2.77) і співвідношенням пружності (2.62), приймають вигляд

$$z^{(k)} = -\frac{h^{(k)}}{2} : \sigma_{13}^{(k)-} = a_{(k)}^{54} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)\gamma} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \left(a_{(k)}^{54} \psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55} \psi_1^{(k)} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)-} &= a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \varepsilon_{12}^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} \left(a_{(k)}^{31} \chi_{11}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{32} \chi_{22}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{36} \chi_{12}^{(k)\gamma} \right) - \\ &\quad - \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \left(a_{(k)}^{31} \psi_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \psi_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \psi_{12}^{(k)} \right), \end{aligned}$$

$$z^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} : \sigma_{13}^{(k)+} = a_{(k)}^{54} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)\gamma} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \left(a_{(k)}^{54} \psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55} \psi_1^{(k)} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(k)+} &= a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \varepsilon_{12}^{(k)} + \frac{h^{(k)}}{2} \left(a_{(k)}^{31} \chi_{11}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{32} \chi_{22}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{36} \chi_{12}^{(k)\gamma} \right) + \\ &\quad + \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) \left(a_{(k)}^{31} \psi_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \psi_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{36} \psi_{12}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Таким чином, кінематичні умови ідеального контакту лицьових поверхонь k -го шару і зв'язаних з ними лицьових поверхонь $k+1$ і $k-1$ шарів (2.73), (2.74)

накладають певні обмеження (2.75) на тангенціальні і нормальні переміщення k -го шару. Аналогічно статичні умови ідеального контакту (2.77) вносять деякі зміни в характер розподілу напружень зсуву та обтиснення (2.62) в зонах контакту k -го шару (2.79).

Вносячи співвідношення (2.77) у формули (2.42) – (2.44) і вважаючи, що $g^{(k)} \approx a^{(k)}$, компоненти векторів $\vec{X}_{(k)}$, $\vec{M}_{(k)}$, $\vec{B}_{(k)}$ k -го шару оболонки приймають вигляд

$$\begin{aligned} X_i^{(k)} &= \sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}, \quad X_3^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}, \\ M_i^{(k)} &= \frac{h^{(k)}}{2} (\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}), \quad M_3^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}), \\ B_i^{(k)} &= \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) (\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}) \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Тут не враховується вплив власної ваги k -го шару $\vec{p}^{(k)}$ на компоненти тензорів напружень і деформацій.

Маючи геометричні співвідношення (2.11) – (2.35) для випадку середнього згинання k -го шару, фізичні співвідношення (2.70) – (2.72), рівняння рівноваги (2.55), (2.56), для оболонки обертання, яка включає в себе n шарів з співвісними поверхнями обертання, нескладно скласти n розв'язувальних систем рівнянь для кожного шару. При цьому умови ідеального контакту по суміжних лицьових поверхнях шарів виконуються за допомогою співвідношень (2.75) – (2.76), (2.79) – (2.80). В якості основних невідомих приймаються функції, які входять в граничні умови на бічному контурі k -го шару оболонки. Таким чином, розв'язувальна система диференціальних рівнянь в частинних похідних для k -го шару оболонки має вигляд

$$\frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{\hat{A}_{(\hat{e})} \partial \alpha_1^{(k)}} = D_0^{(k)} \vec{R}^{(k)} + D_1^{(k)} \frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{\hat{A}_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} + \vec{f}^{(k)} \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.81)$$

де

$$\vec{R}^{(k)} = \left\{ R_{11}^{(k)}, R_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, \dot{I}_{11}^{(k)}, \dot{I}_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \right\}^T,$$

$$\vec{f}^{(k)} = \left\{ f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{14}^{(k)} \right\}^{\dot{O}},$$

$D_0^{(k)}, D_1^{(k)}$ – квадратні матриці 14-го порядку.

Окрім 14 диференціальних рівнянь система рівнянь (2.81) доповнюється двома недиференціальними рівняннями (2.56) і (2.13) при врахуванні поперечного обтиснення k -го шару. На торцях кожного шару оболонки мають місце статичні (2.57), геометричні та змішаного типу граничні умови (2.58) – (2.61).

Після відкидання нелінійних доданків більш високого порядку малості фізичні компоненти тензора тангенціальних зусиль $R_{ij}^{(k)}$ і зусиль поперечного зсуву $R_{i\zeta}^{(k)}$ [136] запишуться таким чином:

$$R_{11}^{(k)} \approx \dot{O}_{11}^{(k)}, \quad R_{22}^{(k)} \approx \dot{O}_{22}^{(k)}, \quad R_{12}^{(k)} \approx R_{21}^{(k)} \approx \dot{O}_{12}^{(k)} \approx \dot{O}_{21}^{(k)},$$

$$R_{13}^{(k)} \approx \dot{O}_{11}^{(k)} \omega_1^{(k)} + \dot{O}_{12}^{(k)} \omega_2^{(\hat{e})} + Q_1^{(k)}, \quad R_{23}^{(k)} \approx \dot{O}_{21}^{(k)} \omega_1^{(k)} + \dot{O}_{22}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_2^{(k)}, \quad (2.82)$$

$$\text{де} \quad \gamma_1^{(k)} = 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - \omega_1^{(k)}, \quad \omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\hat{A}^{(k)} \partial \alpha_1} - k_1^{(k)} u_1^{(k)} \quad (1 \leftrightarrow 2, \hat{A}^{(k)} \leftrightarrow \hat{A}^{(k)}). \quad (2.83)$$

При цьому система рівнянь (2.81) перепишеться

$$\frac{\partial \vec{Y}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)} \partial \alpha_1} = F \left(\alpha_1, \alpha_2, \vec{Y}^{(k)}, \frac{\partial \vec{Y}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)} \partial \alpha_2}, \vec{f}^{(k)} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.84)$$

де вектор розв'язків

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{ \vec{Y}_1^{(k)}, \vec{Y}_2^{(\hat{e})}, \dots, \vec{Y}_{14}^{(k)} \right\}^{\dot{O}} = \left\{ \dot{O}_{11}^{(k)}, \dot{O}_{12}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, \dot{I}_{11}^{(k)}, \dot{I}_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \right\}^T$$

і компоненти вектора правих частин F в розгорнутій формі:

$$F_1^{(k)} = \rho_1^{(k)} Y_1^{(k)} + 2\rho_2^{(k)} Y_2^{(k)} - \rho_1^{(k)} \dot{O}_{22}^{(k)} - k_1^{(k)} Y_3^{(k)} - \frac{\partial Y_2^{(k)}}{\hat{A}^{(k)} \partial \alpha_2} - X_1^{(k)},$$

$$\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= -\rho_2^{(k)}Y_1^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_2^{(k)} + \rho_2^{(k)}\dot{O}_{22}^{(k)} - k_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - \frac{\partial T_{22}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - X_2^{(k)}, \\
F_3^{(k)} &= k_1^{(k)}Y_1^{(k)} + \rho_1^{(k)}Y_3^{(k)} + k_2^{(k)}\dot{O}_{22}^{(k)} + \rho_2^{(k)}R_{23}^{(k)} - \frac{\partial R_{23}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - X_3^{(k)}, \\
F_4^{(k)} &= \rho_1^{(k)}Y_4^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_5^{(k)} - \rho_1^{(k)}\dot{I}_{22}^{(k)} + Q_1^{(k)} - \frac{\partial Y_5^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{h^{(k)}}{2}X_1^{(k)}, \\
F_5^{(k)} &= -\rho_2^{(k)}Y_4^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_5^{(k)} + \rho_2^{(k)}\dot{I}_{22}^{(k)} + Q_2^{(k)} - \frac{\partial \dot{I}_{22}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - \frac{h^{(k)}}{2}X_2^{(k)}, \\
F_6^{(k)} &= \rho_1^{(k)}Y_6^{(k)} + 2\rho_2^{(k)}Y_7^{(k)} - \rho_1^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{13}^{(k)} - \frac{\partial Y_7^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)X_1^{(k)}, \\
F_7^{(k)} &= -\rho_2^{(k)}Y_6^{(k)} + 2\rho_1^{(k)}Y_7^{(k)} + \rho_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + L_{23}^{(k)} - \frac{\partial L_{22}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - \varphi^{(k)}\left(\frac{h^{(k)}}{2}\right)X_2^{(k)}, \\
F_8^{(k)} &= \varepsilon_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)}Y_9^{(k)} - k_1^{(k)}Y_{10}^{(k)} - \frac{1}{2}\left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)^2, \\
F_9^{(k)} &= \varepsilon_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)}Y_8^{(k)} - \rho_1^{(k)}Y_9^{(k)} - \left(2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)}\right)\left(\frac{\partial Y_{10}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2} - k_2^{(k)}Y_9^{(k)}\right) - \frac{\partial Y_8^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2}, \\
F_{10}^{(k)} &= 2\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - Y_{11}^{(k)} + k_1^{(k)}Y_8^{(k)}, & F_{11}^{(k)} &= \chi_{11}^{(k)\gamma} + \rho_2^{(k)}Y_{12}^{(k)}, \\
F_{12}^{(k)} &= 2\chi_{12}^{(k)\gamma} - \rho_2^{(k)}Y_{11}^{(k)} - \rho_1^{(k)}Y_{12}^{(k)} - \frac{\partial Y_{11}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2}, & F_{13}^{(k)} &= \psi_{11}^{(k)} + \rho_2^{(k)}Y_{14}^{(k)}, \\
F_{14}^{(k)} &= 2\psi_{12}^{(k)} - \rho_2^{(k)}Y_{13}^{(k)} - \rho_1^{(k)}Y_{14}^{(k)} - \frac{\partial Y_{13}^{(k)}}{\hat{A}^{(k)}\partial\alpha_2}, & & (2.85)
\end{aligned}$$

$$\text{де } \rho_1 = -\frac{\partial B^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}\partial\alpha_1}, \quad \rho_2 = -\frac{\partial A^{(k)}}{A^{(k)}B^{(k)}\partial\alpha_2}.$$

При врахуванні поперечного обтиснення k -го шару система рівнянь (2.84) доповнюється двома недиференціальними рівняннями:

$$Q_3^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} \left(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-} \right) - k_1^{(k)} \left(Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)} \right) - k_2^{(k)} \left(\dot{I}_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)} \right),$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \gamma_{(k)}. \quad (2.86)$$

Враховуючи, що, як правило, тангенціальні компоненти деформацій k -го шару не чинять істотного впливу на величину напружень поперечного обтиснення, третє рівняння фізичних співвідношень (2.64) можна переписати у такому вигляді:

$$Q_3^{(k)} \approx A_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z}. \quad (2.87)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (2.86) і (2.87), можна скласти вирази для визначення деформації поперечного обтиснення k -го шару

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \frac{Q_3^{(k)}}{A_{33}^{(k)}} = \left(A_{33}^{(k)} \right)^{-1} \left[\frac{h^{(k)}}{2} \left(\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-} \right) - k_1^{(k)} \left(Y_4^{(k)} + Y_6^{(k)} \right) - k_2^{(k)} \left(\dot{I}_{22}^{(k)} + L_{22}^{(k)} \right) \right]. \quad (2.88)$$

У рівнянні (2.88) не враховується доданок, рівний половині добутку товщини k -го шару на різницю напружень поперечного обтиснення, які виникають на лицьових поверхнях, так як відомо, що ці напруження значно менші інших компонент напруженого стану оболонки.

Всі невідомі, які входять в праву частину системи рівнянь (2.84), необхідно записати за допомогою компонент вектора розв'язків. Ці залежності нескладно отримати, використовуючи геометричні та фізичні співвідношення.

2.3 Модель дискретно-структурної теорії багат шарових тонкостінних конструкцій з неідеальним контактом між шарами

В даному підрозділі на основі запропонованого варіанта дискретно-структурної теорії розроблена модель, відповідно до якої враховуються неідеальні умови контакту суміжних лицьових поверхонь сусідніх анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу.

Внаслідок того, що між жорсткими шарами в процесі виготовлення анізотропних оболонок утворюється міжфазний м'який клейовий шар, товщину

цього шару, як правило, вважають рівною нулю. Тоді відповідно до прийнятих допущень передбачається пружне проковзування жорстких шарів один щодо одного, тобто по лицьовим сполученим поверхням виконуються тільки статичні умови контакту. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту однакові.

Статичні умови ідеального контакту по сполученим лицьовим поверхням k -го шару (2.77) можна врахувати, якщо скористатися методом штрафних функцій [30] і в варіацію роботи δA_R (2.39) додатково ввести

$$\vec{P}_{(k)} = K(\vec{X}_{(k-1)}^+ - \vec{X}_{(k)}^-)^2, \quad (2.89)$$

де K – коефіцієнт штрафу.

Після нескладних перетворень в праву частину (2.85) системи рівнянь (2.84), складених для шару $2 \leq k \leq n-1$, увійдуть відповідні штрафні функції:

$$\begin{aligned} \text{в перше рівняння -} & \quad P_{(k)}^1 = 2K(\sigma_{13}^{(k-1)+} - \sigma_{13}^{(k)-}) , \\ \text{в друге рівняння -} & \quad P_{(k)}^2 = 2K(\sigma_{23}^{(k-1)+} - \sigma_{23}^{(k)-}) , \\ \text{в третє рівняння -} & \quad P_{(k)}^3 = 2K(\sigma_{33}^{(k-1)+} - \sigma_{33}^{(k)-}) . \end{aligned} \quad (2.90)$$

Слід зазначити, що розподіли напружень поперечного зсуву та обтиснення $\sigma_{i3}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$ ($i = 1, 2$) по товщині k -го шару відповідають припущенням (2.31) про зміну деформацій $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$, $\varepsilon_{33}^{(k)z}$ залежно від координати z , а також фізичним співвідношенням узагальненого закону Гука (2.62)

$$\sigma_{13}^{(k)} = a_{(k)}^{45} \varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + a_{(k)}^{55} \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2} \varphi_{(z)}^{(k)'} \left(a_{(k)}^{45} \psi_2^{(k)} + a_{(k)}^{55} \psi_1^{(k)} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \quad (2.91)$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)z}, \quad (2.92)$$

$$\text{де} \quad -\frac{h^{(k)}}{2} \leq z \leq \frac{h^{(k)}}{2}.$$

Вирази (2.91) – (2.92) дозволяють за допомогою методу штрафних функцій виконати статичні умови міжшарового контакту (2.77). Тим не менше, коли в статичних умовах контакту першого і n -го шарів (2.78) анізотропної оболонки

мають місце нульові значення горизонтальних або вертикальних складових зовнішнього навантаження $q_{(1)}^{(-)i}$, $q_{(n)}^{(+)i}$, $q_{(1)}^{(-)}$, $q_n^{(+)}$ ($i = 1, 2$) наявність в (2.91) – (2.92) сталих величин, які не залежать від координати z , не дозволяє точно задовольнити граничні умови на поверхнях оболонки $z = \delta_{(0)}$, $z = \delta_{(n)}$ (рисунок 2.1 б).

Таким чином, поряд з припущеннями (2.31) додатково можна вважати, що напруження $\sigma_{i3}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$ змінюються по товщині шару, згідно наступного закону:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = \left(0,5 + \frac{z}{h_{(k)}}\right)\sigma_{i3}^{(k)+} + \left(0,5 - \frac{z}{h_{(k)}}\right)\sigma_{i3}^{(k)-} + f_{(k)}^*(z)\eta_i^{(k)} \quad (i = 1, 2), \quad (2.93)$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = \left(0,5 + z/h_{(k)}\right)\sigma_{33}^{(k)+} + \left(0,5 - z/h_{(k)}\right)\sigma_{33}^{(k)-}, \quad (2.94)$$

де $\sigma_{i3}^{(k)-}$, $\sigma_{33}^{(k)-}$, $\sigma_{i3}^{(k)+}$, $\sigma_{33}^{(k)+}$ – значення напружень поперечного зсуву та обтиснення на нижній $z = -h_{(k)}/2$ і верхній $z = h_{(k)}/2$ поверхнях шару; функція $f_{(k)}^*(z)$ неперервна і задовольняє умовам

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} f_{(k)}^*(z) dz = 1, \quad f_{(k)}^*\left(-\frac{h_{(k)}}{2}\right) = f_{(k)}^*\left(\frac{h_{(k)}}{2}\right) = 0; \quad (2.95)$$

функція $\eta_i^{(k)} = \eta_i^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ дозволяє зв'язати і встановити несуперечливий закон зміни по товщині k -го шару деформацій $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$ і напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$; залежність (2.94) відповідає апроксимації функції $\sigma_{33}^{(k)}$ поліномами Лежандра в першому наближенні [137 – 138], що якісно вірно відображає прийняті допущення про деформації $\varepsilon_{33}^{(k)z}$.

Як впливає з (2.48), співвідношення пружності для напружень поперечного зсуву та обтиснення виконуються інтегрально по товщині k -го шару. Ці вирази з урахуванням залежностей (2.93) – (2.94) приймають вигляд

$$\int_{-\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \left(2\varepsilon_{13}^{(k)z} - \hat{a}_{45}^{(k)}\sigma_{23}^{(k)} - \hat{a}_{55}^{(k)}\sigma_{13}^{(k)}\right) f_{(k)}^*(z) dz = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \quad (2.96)$$

$$\int_{\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \left(\varepsilon_{33}^{(k)z} - \hat{a}_{31}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} - \hat{a}_{32}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} - \hat{a}_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \right) dz = 0. \quad (2.97)$$

Підставивши в (2.96) співвідношення (2.31), (2.93), а також задавши вираз ортонормованій функції (2.95) у вигляді $f_{(k)}^*(z) = \varphi'_{(k)}(z)$, неважко знайти залежність напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$ від координати z :

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(k)} = & \sigma_1^{(k)+} + \frac{2z}{h_{(k)}} \sigma_1^{(k)-} + \frac{1}{d_{(k)}^*} \varphi'_{(k)}(z) \left\{ a_{(k)}^{45} \left[\varepsilon_{23}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2} d_{(k)}^* \psi_2^{(k)} - d_{45}^{(k)*} \sigma_1^{(k)+} - d_{44}^{(k)*} \sigma_2^{(k)+} \right] + \right. \\ & \left. + a_{(k)}^{55} \left[\varepsilon_{13}^{(k)\gamma} + \frac{1}{2} d_{(k)}^* \psi_1 - d_{55}^{(k)*} \sigma_1^{(k)+} - d_{45}^{(k)*} \sigma_2^{(k)+} \right] \right\} \quad (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5), \end{aligned} \quad (2.98)$$

де

$$\begin{aligned} d_{(k)}^* = & \int_{\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \left(\varphi'_{(k)}(z) \right)^2 dz, & d_{mn}^{(k)*} = & \int_{\frac{h_{(k)}}{2}}^{\frac{h_{(k)}}{2}} \hat{a}_{mn}^{(k)} \varphi'_{(k)}(z) dz \quad (m, n = 4, 5), \\ \sigma_i^{(k)+} = & \frac{\sigma_{i3}^{(k)+} + \sigma_{i3}^{(k)-}}{2}, & \sigma_i^{(k)-} = & \frac{\sigma_{i3}^{(k)+} - \sigma_{i3}^{(k)-}}{2} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Окрім інтегральної тотожності (2.96), в результаті проведених перетворень можна додатково отримати статичні умови ідеального контакту на лицьових поверхнях k -го шару (2.77).

Аналогічно, з рівняння (2.97) для напружень $\sigma_{33}^{(k)}$ k -го шару мають місце співвідношення

$$\sigma_3^{(k)+} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} + \sigma_{33}^{(k)-}}{2} = a_{(k)}^{31} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{(k)}^{32} \varepsilon_{22}^{(k)} + a_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)}. \quad (2.99)$$

З урахуванням введених позначень (2.99), вираз (2.94) запишеться так:

$$\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_3^{(k)+} + \frac{2z}{h_{(k)}} \sigma_3^{(k)-}, \quad (2.100)$$

$$\text{де } \sigma_3^{(k)+} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} + \sigma_{33}^{(k)-}}{2}, \quad \sigma_3^{(k)-} = \frac{\sigma_{33}^{(k)+} - \sigma_{33}^{(k)-}}{2}.$$

Якщо між k і $k+1$ шарами оболонки відсутній клейовий шар, то на поверхні суміжних сусідніх шарів $S_z^{(k,k+1)}$ діють невідомі вектори сил $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактної взаємодії. Згідно 3-му закону Ньютона має місце залежність – $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для обліку впливу сил контактної взаємодії шарів на ділянках непроклею у функціоналі енергії R необхідно ввести доданок, що враховує роботу сили контактної взаємодії на векторі переміщення кожного шару ділянки суміжної поверхні

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k+1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{U}_z^{(m)} dS. \quad (2.101)$$

Для випадку однобічного контакту по області $S_z^{(k,k+1)}$, коли між шарами відсутня клейовий шар, з виразу (2.101) виходить, що зусилля контактної взаємодії будуть залежати від величини $(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)})$, і рівняння рівноваги (2.55) – (2.56) для k -го жорсткого шару у тензорній формі приймають вигляд

$$\nabla_i R_{(k)}^{ij} - b_i^{j(k)} R_{(k)}^{i3} + q_{(k)}^i + X_{(k)}^i = 0 \quad (i=1,2),$$

$$\nabla_i R_{(k)}^{i3} + b_{ij}^{(k)} R_{(k)}^{ij} + q_{(k)}^3 + X_{(k)}^3 = 0 \quad (i=1,2),$$

$$\nabla_i M_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^i + M_{(k)}^i = 0 \quad (i=1,2),$$

$$\nabla_i L_{(k)}^{ij} - L_{(k)}^{i3} = 0 \quad (i=1,2). \quad (2.102)$$

Сили контактної взаємодії $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$ виникають при виконанні умови

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (2.103)$$

у зонах контакту жорстких шарів. У випадку, коли нерівність (2.103) не виконується при переміщенні точок області $S_z^{(k,k+1)}$ в процесі деформації, сила $\vec{q}_{(k)}$ у формулах (2.102) приймає значення $\vec{q}_{(k)} = 0$. Статичні і кінематичні граничні умови на контурі області $S_z^{(k,k+1)}$ мають вигляд залежностей (2.57) – (2.61).

Таким чином, маючи рівняння рівноваги (2.102) і (2.103), нескладно із

заданою точністю знайти значення контактної тиску за допомогою, наприклад, ітераційного методу, запропонованого в [139].

2.4 Рівняння незв'язаної задачі термопружності багат шарових тонкостінних конструкцій з ослабленим контактом між шарами

Незв'язана теорія термопружності складається з двох послідовно розв'язуваних задач: задачі теплопровідності [82] і безпосередньо задачі термопружності. Задача термопружності розв'язується без урахування впливу зміни температурного поля, викликаної деформаціями. При врахуванні інерційних доданків задача термопружності називається динамічною. Оскільки характерні часи зміни температурного поля і динамічних процесів деформування оболонки значно відрізняються, то при дослідженні задач термопружності можна нехтувати інерційними членами. У тих випадках, коли можна нехтувати інерційними членами, має місце квазістатична задача термопружності. Нарешті, якщо температурне поле не залежить від часу, то нескладно перейти до вирішення стаціонарної задачі теорії термопружності.

На основі фізичних рівнянь Дюамеля-Неймана [142] рівняння узагальненого закону Гука для анізотропного шару з однією площиною пружної симетрії (2.62), (2.63), приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{13}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{16}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{11}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{22}^{(k)} &= a_{21}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{23}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{26}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{22}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{33}^{(k)} &= a_{31}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{32}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{36}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{33}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{12}^{(k)} &= a_{61}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)z} + a_{62}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)z} + a_{63}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)z} + a_{66}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)z} - \beta_{66}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{23}^{(k)} &= a_{44}^{(k)} \varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{45}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)z} - \beta_{23}^{(k)} t_{(k)}, \\
 \sigma_{13}^{(k)} &= a_{54}^{(k)} \varepsilon_{23}^{(k)z} + a_{55}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)z} - \beta_{13}^{(k)} t_{(k)}
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

або

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{(k)z} &= \hat{a}_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + \hat{a}_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + \hat{a}_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + \hat{a}_{16}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{11}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{22}^{(k)z} &= \hat{a}_{21}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + \hat{a}_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + \hat{a}_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + \hat{a}_{26}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{22}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{33}^{(k)z} &= \hat{a}_{31}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + \hat{a}_{32}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + \hat{a}_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + \hat{a}_{36}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{33}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{12}^{(k)z} &= \hat{a}_{61}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + \hat{a}_{62}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + \hat{a}_{63}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + \hat{a}_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_{66}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{23}^{(k)z} &= \hat{a}_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} + \hat{a}_{45}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + \alpha_{23}^{t(k)} t_{(k)}, \\
\varepsilon_{13}^{(k)z} &= \hat{a}_{54}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} + \hat{a}_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + \alpha_{13}^{t(k)} t_{(k)}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Тут $\alpha_{ij}^{t(k)}$ ($i, j = 1, 2, 3, 6$) – коефіцієнти теплового розширення k -го шару.

Коефіцієнти $\beta_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, 3, 6$) визначаються як розв'язки системи рівнянь (2.105).

Для подальшого викладання системи рівнянь (2.104), (2.105) зручно представити у вигляді

$$\sigma_{(k)} = a_{(k)} \varepsilon_{(k)} - \beta_{(k)} t_{(k)}, \quad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = a_{(k)}^{\alpha 3} \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} - \beta_{(k)}^{\alpha 3} t_{(k)} \tag{2.106}$$

або

$$\varepsilon_{(k)} = b_{(k)} \sigma_{(k)} + \alpha_{(k)}^t t_{(k)}, \quad \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} = b_{(k)}^{\alpha 3} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} + \alpha_{(k)}^{t \alpha 3} t_{(k)}. \tag{2.107}$$

В (2.106), (2.107) введені позначення:

$$\begin{aligned}
\sigma_{(k)} &= [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T, & \sigma_{(k)}^{\alpha 3} &= [\sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}]^T, \\
\beta_{(k)} &= [\beta_{11}^{(k)}, \beta_{22}^{(k)}, \beta_{33}^{(k)}, \beta_{66}^{(k)}]^T, & \beta_{(k)}^{\alpha 3} &= [\beta_{23}^{(k)}, \beta_{13}^{(k)}]^T, \\
\varepsilon_{(k)} &= [\varepsilon_{11}^{(k)z}, \varepsilon_{22}^{(k)z}, \varepsilon_{33}^{(k)z}, \varepsilon_{12}^{(k)z}]^T, & \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} &= [\varepsilon_{23}^{(k)z}, \varepsilon_{13}^{(k)z}]^T, \\
\alpha_{(k)}^t &= [\alpha_{11}^{t(k)}, \alpha_{22}^{t(k)}, \alpha_{33}^{t(k)}, \alpha_{66}^{t(k)}]^T, & \alpha_{(k)}^{t \alpha 3} &= [\alpha_{23}^{t(k)}, \alpha_{13}^{t(k)}]^T, \\
a_{(k)} &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & a_{16}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & a_{26}^{(k)} \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & a_{36}^{(k)} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, & a_{(k)}^{\alpha 3} &= \begin{bmatrix} a_{44}^{(k)} & a_{45}^{(k)} \\ a_{54}^{(k)} & a_{55}^{(k)} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$b_{(k)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & b_{16}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & b_{26}^{(k)} \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & b_{36}^{(k)} \\ b_{61}^{(k)\beta} & b_{62}^{(k)\beta} & b_{63}^{(k)\beta} & b_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}, \quad b_{(k)}^{\alpha 3} = \begin{bmatrix} b_{44}^{(k)} & b_{45}^{(k)} \\ b_{54}^{(k)} & b_{55}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.106), нескладно знайти напруження $\sigma_{(k)}$, $\sigma_{(k)}^{\alpha 3}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{(k)} &= [b_{(k)}]^{-1} (\varepsilon_{(k)} - \alpha_{(k)}^t t_{(k)}) = [b_{(k)}]^{-1} \varepsilon_{(k)} - [b_{(k)}]^{-1} \alpha_{(k)}^t t_{(k)}, \\ \sigma_{(k)}^{\alpha 3} &= [b_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} (\varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} - \alpha_{(k)}^{t\alpha 3} t_{(k)}) = [b_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} - [b_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} \alpha_{(k)}^{t\alpha 3} t_{(k)}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Порівнюючи рівняння (2.106), (2.109) можна записати наступні тотожності

$$a_{(k)} = [b_{(k)}]^{-1}, \quad a_{(k)}^{\alpha 3} = [b_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1}, \quad (2.110)$$

$$\beta_{(k)} = [b_{(k)}]^{-1} \alpha_{(k)}^t, \quad \beta_{(k)}^{\alpha 3} = [b_{(k)}^{\alpha 3}]^{-1} \alpha_{(k)}^{t\alpha 3}. \quad (2.111)$$

Таким чином, матриці жорсткості $a_{(k)}$, $a_{(k)}^{\alpha 3}$ рівні оберненим матрицям піддатливості $b_{(k)}$, $b_{(k)}^{\alpha 3}$ відповідно, а коефіцієнти $\beta_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, 3, 6$) визначаються з виразів (2.111). При цьому система рівнянь (2.106) з урахуванням виразів (2.109) – (2.111) перепишеться:

$$\begin{aligned} \sigma_{(k)}^t &= a_{(k)} (\varepsilon_{(k)} - \alpha_{(k)}^t t_{(k)}) = a_{(k)} \varepsilon_{(k)}^t, \\ \sigma_{(k)}^{t\alpha 3} &= a_{(k)}^{\alpha 3} (\varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} - \alpha_{(k)}^{t\alpha 3} t_{(k)}) = a_{(k)}^{\alpha 3} \varepsilon_{(k)}^{t\alpha 3}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \varepsilon_{(k)}^t &= [\varepsilon_{11}^{(k)z} - \alpha_{11}^{t(k)} t_{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)z} - \alpha_{22}^{t(k)} t_{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)z} - \alpha_{33}^{t(k)} t_{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)z} - \alpha_{12}^{t(k)} t_{(k)}]^T, \\ \varepsilon_{(k)}^{t\alpha 3} &= [\varepsilon_{23}^{(k)z} - \alpha_{23}^{t(k)} t_{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)z} - \alpha_{13}^{t(k)} t_{(k)}]^T. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Якщо прийняти, що зміна температури по товщині шару апроксимується лінійною залежністю, то підставляючи співвідношення (2.112) з урахуванням формул (2.11) – (2.13), (2.31) – (2.33) в (2.51), нескладно отримати фізичні співвідношення між компонентами тензорів внутрішніх зусиль і моментів k -го шару анізотропної оболонки з площиною пружної симетрії, дотичної до координатної поверхні, і компонентами тензора деформацій, які також включають і температурні деформації, в матричній формі:

$$T_{(k)}^t = A_{(k)} \varepsilon_{(k)}^t, \quad (2.114)$$

$$M_{(k)}^t = D_{(k)} \chi_{(k)}^t + K_{(k)} \psi_{(k)}^t, \quad L_{(k)}^t = K_{(k)} \chi_{(k)}^t + F_{(k)} \psi_{(k)}^t, \quad (2.115)$$

$$Q_{(k)}^{t\gamma} = C_{(k)} \varepsilon_{(k)}^{t\gamma} + R_{(k)} \psi_{(k)}^{t\gamma}, \quad L_{(k)}^{t\gamma} = R_{(k)} \varepsilon_{(k)}^{t\gamma} + G_{(k)} \psi_{(k)}^{t\gamma}. \quad (2.116)$$

Тут прийняті наступні позначення матриць стовпців зусиль і деформацій:

$$\begin{aligned} T_{(k)}^t &= \left[T_{(k)}^{t11}, T_{(k)}^{t22}, Q_{(k)}^{t3}, T_{(k)}^{t12} \right]^T, \quad M_{(k)}^t = \left[M_{(k)}^{t11}, M_{(k)}^{t22}, M_{(k)}^{t12} \right]^T, \\ L_{(k)}^t &= \left[L_{(k)}^{t11}, L_{(k)}^{t22}, L_{(k)}^{t12} \right]^T, \quad Q_{(k)}^{t\gamma} = \left[Q_{(k)}^{t2}, Q_{(k)}^{t1} \right]^T, \quad L_{(k)}^{t\gamma} = \left[L_{(k)}^{t23}, L_{(k)}^{t13} \right]^T, \\ \varepsilon_{(k)}^t &= \left[\varepsilon_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{t(k)} t_0^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{t(k)} t_0^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)} - \alpha_{33}^{t(k)} t_0^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)} - \alpha_{12}^{t(k)} t_0^{(k)} \right]^T, \\ \chi_{(k)}^t &= \left[\chi_{11}^{(k)\gamma} - \alpha_{11}^{t(k)} \theta^{(k)}, \chi_{22}^{(k)\gamma} - \alpha_{22}^{t(k)} \theta^{(k)}, \chi_{12}^{(k)\gamma} - \alpha_{22}^{t(k)} \theta^{(k)} \right]^T, \\ \varepsilon_{(k)}^{t\gamma} &= \left[\varepsilon_{23}^{(k)\gamma} - \alpha_{23}^{t(k)} t_0^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)\gamma} - \alpha_{13}^{t(k)} t_0^{(k)} \right]^T, \\ \psi_{(k)}^t &= \left[\psi_{11}^{(k)} - \alpha_{11}^{t(k)} \theta^{(k)}, \psi_{22}^{(k)} - \alpha_{22}^{t(k)} \theta^{(k)}, \psi_{12}^{(k)} - \alpha_{22}^{t(k)} \theta^{(k)} \right]^T, \\ \psi_{(k)}^{t\gamma} &= \left[\psi_2^{(k)} - \alpha_{23}^{t(k)} t_0^{(k)}, \psi_1^{(k)} - \alpha_{13}^{t(k)} t_0^{(k)} \right]^T. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Матриці жорсткості k -го шару оболонки $A_{(k)}$, $D_{(k)}$, $K_{(k)}$, $F_{(k)}$, $C_{(k)}$, $R_{(k)}$ визначаються згідно виразів (2.68).

Використовуючи алгоритм підрозділу 2.2, який визначається формулами (2.70) – (2.72), нескладно отримати фізичні співвідношення, що зв'язують деформації $\varepsilon_{(k)}^t$, $\chi_{(k)}^t$, $\varepsilon_{(k)}^{t\gamma}$, $\psi_{(k)}^t$, $\psi_{(k)}^{t\gamma}$ і внутрішні зусилля $T_{(k)}^t$, $M_{(k)}^t$, $L_{(k)}^{t\gamma}$, $Q_{(k)}^t$, $L_{(k)}^{t\gamma}$ k -го шару оболонки.

Узагальнюючи варіаційне рівняння принципу Рейснера для багат шарової оболонки на випадок задачі термопружності, першу варіацію другого доданка рівняння (2.36) з урахуванням виразів (2.114) – (2.117) можна подати так:

$$\delta\Pi_R^t = \sum_{k=1}^n \left(\delta\Pi_{1R}^{t(k)} + \delta\Pi_{2R}^{t(k)} \right), \quad (2.118)$$

де

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{1R}^{t(k)} = \iint_{S(k)} & \left(\Gamma_{(k)}^{t ij} \delta\varepsilon_{ij}^{t(k)} + M_{(k)}^{t ij} \delta\chi_{ij}^{t(k)\gamma} + L_{(k)}^{t ij} \nabla_i \delta\psi_i^{t(k)} + 2Q_{(k)}^{t i} \delta\varepsilon_{i3}^{t(k)\gamma} + L_{(k)}^{t i3} \delta\psi_i^{t(k)} + \right. \\ & \left. + M_{(k)}^{t i3} \nabla_i \delta\varepsilon_{33}^{t(k)z} + Q_{(k)}^{t 3} \delta\varepsilon_{33}^{t(k)z} \right) dS, \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{2R}^{t(k)} = - \iint_{S(k)} & \left\{ \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial \Gamma_{(k)}^{t ij}} - \varepsilon_{ij}^{t(k)} \right) \delta\Gamma_{(k)}^{t ij} + \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{t ij}} - \chi_{ij}^{t(k)\gamma} \right) \delta M_{(k)}^{t ij} + \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{t ij}} - \nabla_i \psi_i^{t(k)} \right) \delta L_{(k)}^{t ij} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^{t i}} - 2\varepsilon_{i3}^{t(k)\gamma} \right) \delta Q_{(k)}^{t i} + \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial L_{(k)}^{t i3}} - \psi_i^{t(k)} \right) \delta L_{(k)}^{t i3} + \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial M_{(k)}^{t i3}} - \nabla_i \varepsilon_{33}^{t(k)z} \right) \delta M_{(k)}^{t i3} + \\ & \left. + \left(\frac{\partial G_t^{(k)}}{\partial Q_{(k)}^{t 3}} - \varepsilon_{33}^{t(k)z} \right) \delta Q_{(k)}^{t 3} \right\} dS. \end{aligned} \quad (2.120)$$

У (2.120) для k -го шару оболонки введений термодинамічний потенціал Гіббса [142], який, будучи функцією стану, виражається формулою

$$G_t^{(k)} = f_t^{(k)} - \sigma_{ij}^{t(k)} \varepsilon_{ij}^{t(k)}. \quad (2.121)$$

У разі ізометричного процесу потенціал Гіббса дорівнює з протилежним знаком додатковій роботі деформації k -го шару $F_p^{(k)}$, $f_t^{(k)}$ – функція вільної енергії Гельмгольца.

Опускаючи цілий ряд громіздких перетворень варіаційних рівнянь, наведених в [136] і переходячи до фізичних компонент, рівняння незв'язаної стаціонарної задачі термопружності в змішаній формі, складені на основі дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок, приймають вигляд рівнянь (2.84) – (2.88). В силу громіздкості зазначених рівнянь тут представлений їх запис тільки в матричній формі:

$$\frac{\partial \vec{Y}_t^{(k)}}{\hat{A}_{(k)} \partial \alpha_1} = F \left(\alpha_1, \alpha_2, \vec{Y}_t^{(k)}, \frac{\partial \vec{Y}_t^{(k)}}{\hat{A}_{(k)} \partial \alpha_2}, \mathbf{g}_t^{(k)} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.122)$$

де вектор розв'язків

$$\begin{aligned} \vec{Y}_t^{(k)} &= \left\{ \vec{Y}_1^{t(k)}, \vec{Y}_2^{t(k)}, \dots, \vec{Y}_{14}^{t(k)} \right\}^0 = \\ &= \left\{ \dot{O}_{11}^{t(k)}, \dot{O}_{12}^{t(k)}, R_{13}^{t(k)}, \dot{I}_{11}^{t(k)}, \dot{I}_{12}^{t(k)}, L_{11}^{t(k)}, L_{12}^{t(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{t(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \right\}^T \end{aligned}$$

При врахуванні поперечного обтиснення k -го шару система рівнянь (2.122) доповнюється двома недиференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} Q_3^{t(k)} &= \frac{h_{(k)}}{2} \left(\sigma_{33}^{t(k)+} - \sigma_{33}^{t(k)-} \right) - k_1^{(k)} \left(Y_4^{t(k)} + Y_6^{t(k)} \right) - k_2^{(k)} \left(\dot{I}_{22}^{t(k)} + L_{22}^{t(k)} \right), \\ \varepsilon_{33}^{t(k)z} &= \gamma_{(k)}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Для розв'язання поставленої задачі систему рівнянь (2.122), (2.123) необхідно доповнити статичними і кінематичними умовами контакту сполучених лицьових поверхонь сусідніх шарів, наведених у підрозділах 2.2 і 2.3.

Таким чином, незв'язана стаціонарна задача термопружності включає розв'язання двох задач. Спочатку вирішується задача теплопровідності [82]. Отримана функція розподілу температури по товщині багат шарової оболонки, підставляється в праву частину рівнянь (2.122), (2.123).

2.5 Висновки по другому розділу

У другому розділі були структуровані і узагальнені рівняння дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок і пластин з дефектами структури матеріалу по товщині. Виведення рівнянь рівноваги, геометричних і фізичних співвідношень, коли враховуються геометрична нелінійність деформацій, деформації поперечного зсуву та трансверсального обтиснення, здійснювався за допомогою принципу Рейснера.

Показана фізична коректність розрахункової моделі багат шарових

тонкостінних конструкцій, згідно якої реалізуються як ідеальні умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу, так і умови контакту з міжфазним ослабленим шаром.

Міжфазний ослаблений шар – непроклеї або розшарування, моделюється поверхнею нульової товщини, на якій зазнають розрив компоненти вектора переміщень. Можливий контактний тиск між шарами приймається пропорційним різниці нормальних зміщень суміжних шарів.

Для розв'язання контактної крайової задачі в змішаній формі складена повна система розв'язувальних рівнянь дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок. Статичні умови контакту по лицьовим сполученим поверхням сусідніх шарів виконуються за допомогою методу штрафних функцій. Для оболонок обертання, які включають в себе n шарів зі співвіднесеними поверхнями, отримана система з $14 \cdot n$ диференціальних рівнянь в частинних похідних.

На основі узагальненого варіаційного принципу Рейснера і дискретно-структурної теорії багат шарових оболонок отримані розв'язувальні рівняння термопружності в змішаній формі. Для випадку, коли температурне поле не залежить від часу, запропонований алгоритм рішення стаціонарної незв'язаної задачі теорії термопружності багат шарових оболонок.

3 СТРУКТУРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

В цьому розділі досліджуються властивості магнетоелектропружних матеріалів, армованих регулярною двоякоперіодичною системою циліндричних волокон. Припускається, що в структурі задані середні значення компонент механічних напружень, векторів електричної та магнітної індукції, що відповідають стану антиплоскої деформації.

Загальне подання розв'язку розшукується в класі квазіперіодичних функцій і описується дзета-функцією Вейерштраса. Гранична задача зводиться до системи регулярних інтегральних рівнянь, яка реалізується за схемою механічних квадратур [166].

Схема рішення проблеми осереднення [167,168,169,170,171] узагальнюється на регулярно армованому магнетоелектропружному середовищі і будується алгоритм визначення макроскопічних параметрів через деякі функціонали, які визначені через розв'язок системи регулярних інтегральних рівнянь, які відповідають граничній задачі.

3.1 Постановка задачі. Комплексні подання

Під магнетоелектропружним композитним матеріалом будемо розуміти необмежене магнетоелектропружне середовище (матрицю), армоване двоякоперіодичною системою груп прямолінійних волокон (рисунок 3.1). При цьому приймемо такі припущення:

- 1) контакт матриці та волокна здійснюється по всій поверхні волокна без натягу;
- 2) конгруентні волокна тотожні в сенсі розмірів та фізичних властивостей;
- 3) в площині поперечного перерізу композитного матеріалу (КМ) лінії розподілу компонентів структури – прості замкнуті ляпунові дуги, що не перетинаються [172];
- 4) зовнішній вплив реалізується у вигляді середніх компонент: механічних напружень $\langle \sigma_{31} \rangle$, $\langle \sigma_{32} \rangle$, магнітної індукції $\langle B_1 \rangle$, $\langle B_2 \rangle$ та електричної індукції

$\langle D_1 \rangle$, $\langle D_2 \rangle$, що діють в структурі.

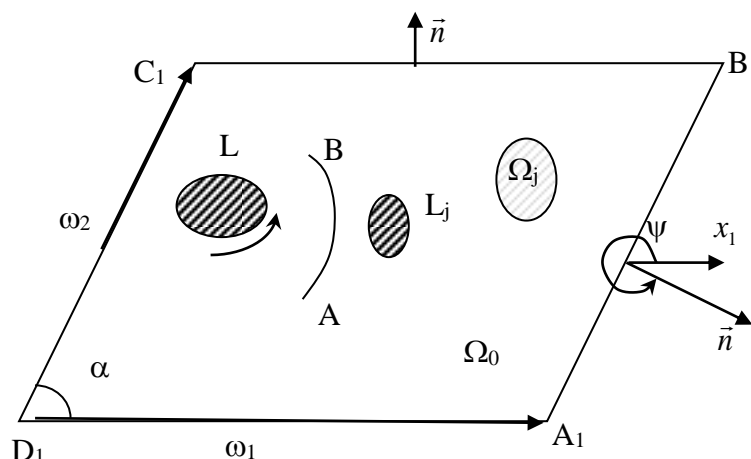


Рисунок 3.1 – Фундаментальна комірка Π_0

Віднесемо таку структуру до декартових прямолінійних осей $Ox_1x_2x_3$. Нехай ω_1 ($\text{Im } \omega_1 = 0$) та ω_2 ($\text{Im } \omega_2 > 0$) - основні періоди армування; L_j ($j = \overline{1, N}$) - контур поперечного перерізу j -го волокна, яке займає область Ω_j в основній комірці Π_0 ; $L = \cup L_j$, Ω_0 - область, яку займає матриця (рисунок 3.1).

Для кожного компонента структури справедливі матеріальні рівняння [173]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{23} &= c_{44} \partial_2 u_3 + e_{15} \partial_2 \varphi^E + h_{15} \partial_2 \varphi^H, \\
 \sigma_{31} &= c_{44} \partial_1 u_3 + e_{15} \partial_1 \varphi^E + h_{15} \partial_1 \varphi^H, \\
 D_1 &= e_{15} \partial_1 u_3 - \varepsilon_{11} \partial_1 \varphi^E - \beta_{11} \partial_1 \varphi^H, \\
 D_2 &= e_{15} \partial_2 u_3 - \varepsilon_{11} \partial_2 \varphi^E - \beta_{11} \partial_2 \varphi^H, \\
 B_1 &= h_{15} \partial_1 u_3 - \beta_{11} \partial_1 \varphi^E - \gamma_{11} \partial_1 \varphi^H, \\
 B_2 &= h_{15} \partial_2 u_3 - \beta_{11} \partial_2 \varphi^E - \gamma_{11} \partial_2 \varphi^H, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k=1,2).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Рівняння рівноваги, збереження електричних та магнітних зарядів

$$\begin{aligned}
 \partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} &= 0, \\
 \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 &= 0, \\
 \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Вирази механічних деформацій, напруженостей електричного та магнітного

полів

$$\begin{aligned}
 2e_{23} &= \partial_2 u_3, & 2e_{31} &= \partial_1 u_3, \\
 E_1 &= -\partial_1 \varphi^E, & E_2 &= -\partial_2 \varphi^E, \\
 H_1 &= -\partial_1 \varphi^H, & H_2 &= -\partial_2 \varphi^H,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

У співвідношеннях (3.1)-(3.3): σ_{k3} , $2e_{k3}$, D_k , B_k , E_k , H_k ($k=1,2$) - відповідно зсувні механічні напруження та деформації, електрична та магнітна індукція, напруженість електричного та магнітного полів: φ^E та φ^H - електричний та магнітний потенціали. Матеріальні константи c_{44} , e_{15} , h_{15} , ε_{11} , β_{11} , γ_{11} , які фігурують в (3.1), описані та задані в [173]. Для j -го волокна будемо приписувати їм індекс j .

Підставимо в рівняння (3.2) вирази польових величин з (3.1). Отримаємо

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 (c_{44}u_3 + e_{15}\varphi^E + h_{15}\varphi^H) &= 0 \\
 \nabla^2 (e_{15}u_3 - \varepsilon_{11}\varphi^E - \beta_{11}\varphi^H) &= 0 \\
 \nabla^2 (h_{15}u_3 - \beta_{11}\varphi^E - \gamma_{11}\varphi^H) &= 0, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2
 \end{aligned}$$

Звідси, мають місце такі комплексні подання

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \{u_3, \varphi^E, \varphi^H\}^T = \alpha^{-1} \cdot 2\operatorname{Re} f_0(z), & w_j &= \alpha_j^{-1} \cdot 2\operatorname{Re} f_j(z), \\
 f_j(z) &= \{f_{1j}(z), f_{2j}(z), f_{3j}(z)\}^T & (j &= \overline{1, N}), \\
 \alpha &= \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & h_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} & -\beta_{11} \\ h_{15} & -\beta_{11} & -\gamma_{11} \end{bmatrix}, & f_0 &= \{f_1(z), f_2(z), f_3(z)\}^T, \\
 \alpha_j &= \begin{bmatrix} c_{44}^j & e_{15}^j & h_{15}^j \\ e_{15}^j & -\varepsilon_{11}^j & -\beta_{11}^j \\ h_{15}^j & -\beta_{11}^j & -\gamma_{11}^j \end{bmatrix}, & \det \alpha &\neq 0, \quad \det \alpha_j \neq 0,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

де $f_k(z)$, $f_{kj}(z)$ ($j=\overline{1, N}, k=1,2$) - функції, аналітичні в областях Ω_0 и Ω_j ,

відповідно.

Враховуючи (3.4), визначимо з (3.1) польові величини в матриці через аналітичний вектор $f_0(z)$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \{\sigma_{31}, D_1, B_1\}^T &= 2\operatorname{Re} F_0(z), & F_0 = f'_0(z) &= \frac{d}{dz} f_0(z), \\ \gamma_2 = \{\sigma_{32}, D_2, B_2\}^T &= -2\operatorname{Im} F_0(z), & F_0 &= \{f'_1(z), f'_2(z), f'_3(z)\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Або

$$\{\sigma_{31} - i\sigma_{32}, D_1 - iD_2, B_1 - iB_2\}^T = 2F_0(z).$$

Головний вектор механічної напруженості, потоки магнітної та електричної індукції через довільну гладку дугу AB в фундаментальній комірці Π_0 визначається за формулою

$$\int_{AB} \begin{bmatrix} X_{3n} \\ D_{3n} \\ B_{3n} \end{bmatrix} ds = \int_{AB} (\gamma_1 \cos \psi + \gamma_2 \sin \psi) ds = 2 \operatorname{Im} f_0(z) \Big|_A^B, \quad (3.6)$$

де ψ - кут між додатньою нормаллю до AB та віссю x_1 .

Умови спряження матриці та j -го волокна в фундаментальній комірці мають вигляд

$$w_0 = w_j, \quad \int_{L_j}^S \{X_{3n}, D_{3n}, B_{3n}\}^T ds = \int_{L_j}^S \{X_{3n}^j, D_{3n}^j, B_{3n}^j\}^T ds \quad (j = \overline{1, N}).$$

Враховуючи співвідношення (3.4) та (3.6) подамо їх в комплексній формі на $L = \cup L_j$

$$\operatorname{Im} f_0(z) = \operatorname{Im} f_j(z), \quad \operatorname{Re} f_0(z) = \alpha \cdot \alpha_j^{-1} \operatorname{Re} f_j(z), \quad j = \overline{1, N} \quad (3.7)$$

Кусково-голоморфний стовпець $f_0(z)$ повинен забезпечувати квазіперіодичність вектора w_0 та, відповідно, двоякоперіодичність вектор-функції $F_0(z)$. Нехай

$$A + \frac{1}{2\pi i} \int_L q(z) \zeta(t-z) dt = \begin{cases} f_0(z), z \in \Omega_0 \\ f_j(z), z \in \Omega_j \end{cases}, \quad L = \bigcup_{j=1}^N L_j, \quad \text{Im } q(t) = 0, \quad (3.8)$$

$$q(t) = \left\{ q_j(t), t \in L_j, (j = \overline{1, N}) \right\}, \quad q_j(t) = [q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}]^T, \quad A = [A_1, A_2, A_3]^T,$$

де $\zeta(z)$ - дзета-функція Вейерштрасса, побудована на періодах ω_1 та ω_2 [167],
 A - сталий стовпець, що забезпечує існування в структурі заданих середніх величин $\langle \sigma_{31} \rangle, \langle \sigma_{32} \rangle, \langle D_1 \rangle, \langle D_2 \rangle$ та $\langle B_1 \rangle, \langle B_2 \rangle$.

Для визначення стовпця A використаємо співвідношення (3.6). Згідно (рисунок 3.1), маємо

$$\int_{B_1 C_1} \gamma_2 ds = \omega_1 \langle \gamma_2 \rangle = 2 \text{Im } f_0(z) \Big|_{z+\omega_1}^z, \quad h = \text{Re } \omega_2, \quad H = \text{Im } \omega_2, \quad (3.9)$$

$$\int_{A_1 B_1} (\gamma_1 \sin \alpha - \gamma_2 \cos \alpha) ds = \langle \gamma_1 \rangle H - \langle \gamma_2 \rangle h = 2 \text{Im } f_0(z) \Big|_z^{z+\omega_2},$$

де $\langle \gamma_1 \rangle, \langle \gamma_2 \rangle$ - середні компоненти величин (3.5), які діють на гранях фундаментальної комірки Π_0 .

Згідно групової властивості дзета-функції Вейерштрасса [174]

$$\zeta(z + \omega_\nu) - \zeta(z) = \delta_\nu, \quad \delta_\nu = 2\zeta\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right), \quad (\nu = 1, 2),$$

$$\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1 = 2\pi i, \quad \delta_1 h - \delta_2 \omega_1 = i(2\pi - \delta_1 H).$$

Маємо в (3.9)

$$f_0(z + \omega_\nu) - f_0(z) = A \omega_\nu - \frac{\delta_\nu l}{2\pi i}, \quad l = \int_L q(t) dt = \sum_{j=1}^N \int_{L_j} q_j(t) dt. \quad (3.10)$$

Використовуємо приріст (3.10) у співвідношення (3.9), після перетворень маємо

$$\text{Re } A = \frac{1}{2} \langle \gamma_1 \rangle + \text{Im} \left(\frac{\delta_1 l}{2\pi \omega_1} - \frac{l}{F_0} \right), \quad (3.11)$$

$$\text{Im } A = -\frac{1}{2} \langle \gamma_2 \rangle - \text{Re} \frac{\delta_1 l}{2\pi \omega_1}, \quad F_0 = H \omega_1.$$

Таким чином, інтегральні подання у (3.8) та співвідношення (3.11) забезпечують квазіперіодичність механічних переміщень, електричного та магнітного потенціалів, компонентів електричного та магнітного полів.

3.2 Інтегральні рівняння магнетоелектропружного композитного матеріалу

Згідно з формулами Сохоцького-Племеля [175] граничні значення векторів (3.8) на L мають вигляд

$$\begin{aligned} \left\{ f_0(z) \right\}^-_{z \rightarrow t_{0j} \in L_j, z \in \Omega_0} &= At_{0j} - \frac{1}{2} q_j(t_{0j}) + \frac{1}{2\pi i} \int_L q(t) \zeta(t - t_{0j}) dt, \\ \left\{ f_0(z) \right\}^+_{z \rightarrow t_{0j} \in L_j, z \in \Omega_0} &= At_{0j} + \frac{1}{2} q_j(t_{0j}) + \frac{1}{2\pi i} \int_L q(t) \zeta(t - t_{0j}) dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

де під особливим інтегралом в правій частині розуміють

$$\int_L q(t) \zeta(t - t_{0j}) dt = \int_{L_j} q(t) \zeta(t - t_{0j}) dt + \int_{L \setminus L_j} q(t) \zeta(t - t_{0j}) dt.$$

Підставляючи граничні значення (3.12), враховуючи (3.11) в крайових умовах (3.7), перша умова задовольняється тотожно, а друга умова приводить до матричного регулярного інтегрального рівняння другого роду

$$\mu_j q_j(t_{0j}) + \frac{1}{\pi} \int_L q(t) \operatorname{Im} \left[\zeta(t - t_{0j}) \right] dt + M(l, t_{0j}) = N(t_{0j}), \quad j = \overline{1, N} \quad (3.13)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_j &= (\alpha \alpha_j^{-1} - I)^{-1} (\alpha \alpha_j^{-1} + I), \quad I = \operatorname{diag}(1 \ 1 \ 1), \quad t_{0j} \in L_j, \quad t \in \bigcup_{j=1}^N L_j, \\ M(l, t_{0j}) &= \operatorname{Im} \left(\frac{\delta_1 l}{\pi \omega_1} t_{0j} \right) - \frac{2}{F_0} \operatorname{Im} l \cdot \operatorname{Re} t_{0j}, \quad N(t_{0j}) = -(\langle \gamma_1 \rangle \operatorname{Re} t_{0j} + \langle \gamma_2 \rangle \operatorname{Im} t_{0j}). \end{aligned}$$

Існування та єдиність розв'язку рівняння (3.13) доводиться за схемою [167] для ізотропного композитного матеріалу.

3.3 Осереднення фізичних властивостей магнетоелектропружного композита

При оцінці полів в елементах конструкцій із композитного матеріалу [178,179] звичайно цей матеріал замінюють деяким гомогенним матеріалом, еквівалентним (в певному розумінні) середовищу з заданою мікроструктурою. Питання такого роду зводяться до так званої проблеми осереднення властивостей композитних матеріалів. Осереднення фізичних властивостей магнетоелектропружного композита проведемо згідно схеми [167,170,171,176, 177].

В модельному середовищі, що припускається однорідним, маємо з (3.4)

$$\begin{aligned} w_0(z + \omega_1) - w_0(z) &= w_0(x_1 + \omega_1, x_2) - w_0(x_1, x_2) = \omega_1 \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right\rangle, \\ w_0(z + \omega_2) - w_0(z) &= w_0(x_1 + h, x_2 + H) - w_0(x_1, x_2) = h \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right\rangle + H \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де кутові дужки означають середні значення відповідних величин.

З іншого боку, в силу (3.10) та (3.4)

$$\begin{aligned} w_0(z + \omega_1) - w_0(z) &= 2\alpha^{-1} \operatorname{Re} \left(A\omega_1 - \frac{\delta_1 l}{2\pi i} \right), \\ w_0(z + \omega_2) - w_0(z) &= 2\alpha^{-1} \operatorname{Re} \left(A\omega_2 - \frac{\delta_2 l}{2\pi i} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Порівняння виразів (3.14) та (3.15) дає

$$\begin{aligned} \omega_1 \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right\rangle &= 2\alpha^{-1} \operatorname{Re} \left(A\omega_1 - \frac{\delta_1 l}{2\pi i} \right), \\ h \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right\rangle + H \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right\rangle &= 2\alpha^{-1} \operatorname{Re} \left(A\omega_2 - \frac{\delta_2 l}{2\pi i} \right). \end{aligned}$$

Підстановка у ці рівності виразів для вектор-стовпця A з (3.11) отримуємо таку рівність

$$\begin{aligned}\alpha\chi_1 &= \langle \gamma_1 \rangle - \frac{2}{F_0} \text{Im} l \\ \alpha\chi_2 &= \langle \gamma_2 \rangle + \frac{2}{F_0} \text{Re} l,\end{aligned}\tag{3.16}$$

де

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_1} \right\rangle = \left[\langle 2e_{31} \rangle, -\langle \partial_1 \varphi^E \rangle, -\langle \partial_1 \varphi^H \rangle \right]^T \\ \chi_2 &= \left\langle \frac{\partial w_0}{\partial x_2} \right\rangle = \left[\langle 2e_{32} \rangle, -\langle \partial_2 \varphi^E \rangle, -\langle \partial_2 \varphi^H \rangle \right]^T\end{aligned}$$

Рівності (3.16) визначають матеріальні рівняння макромоделі магнетоелектропружного композиту та, як наслідок, його ефективні фізичні характеристики.

Для більш докладного опису макромоделі композиту введемо стандартні розв'язки системи (3.13) у вигляді (3×3) матриць $R_j^{(1)}(t)$ та $R_j^{(2)}(t)$ таким чином, щоб виконувалась рівність

$$\begin{aligned}q_j(t) &= R_j^{(1)}(t) \langle \gamma_1 \rangle + R_j^{(2)}(t) \langle \gamma_2 \rangle = R_j^{(k)}(t) \langle \gamma_k \rangle, \\ \text{Im} R_j^{(k)}(t) &= 0 \quad (k = 1, 2, j = \overline{1, N}).\end{aligned}\tag{3.17}$$

При цьому, в силу (3.10)

$$l = \sum_{j=1}^N \int_{L_j} R_j^{(k)}(t) \langle \gamma_k \rangle dt = \sum_{j=1}^N l_j^{(k)} \langle \gamma_k \rangle, l_j^{(k)} = \int_{L_j} R_j^{(k)}(t) dt.$$

Для визначення матриць $R_j^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2$) приходимо з (3.13) до таких регулярних матричних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}\mu_j R_j^{(k)}(t_{0j}) + \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{m=1}^N \int_{L_m} R_m^{(k)}(t) G(t_m, t_{0j}) dt &= -E (\delta_1^k \text{Ret}_{0j} + \delta_2^k \text{Ret}_{0j}) \quad (k = 1, 2) \\ G(t_m, t_{0j}) &= \zeta(t_m - t_{0j}) + \frac{1}{\omega_1} \left(\delta_1 t_{0j} - \frac{2\pi}{H} \text{Ret}_{0j} \right), \quad t_m \in L_m \quad (m, j = \overline{1, N}),\end{aligned}\tag{3.18}$$

де E - одинична (3×3) матриця, δ_i^k - символ Кронекера, матриці $R_m^{(k)}$ та

функціонали $l_m^{(k)}$ мають вигляд

$$R_m^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} r_{m11}^{(k)} & r_{m12}^{(k)} & r_{m13}^{(k)} \\ r_{m21}^{(k)} & r_{m22}^{(k)} & r_{m23}^{(k)} \\ r_{m31}^{(k)} & r_{m32}^{(k)} & r_{m33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (k = \overline{1,2}; m = \overline{1,N})$$

$$l_m^{(k)} = \begin{bmatrix} l_{m11}^{(k)} & l_{m12}^{(k)} & l_{m13}^{(k)} \\ l_{m21}^{(k)} & l_{m22}^{(k)} & l_{m23}^{(k)} \\ l_{m31}^{(k)} & l_{m32}^{(k)} & l_{m33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad l_{mij}^{(k)} = \int_{L_m} r_{mij}^{(k)} dt \quad (i, j = \overline{1,3})$$
(3.19)

Враховуючи ці позначення, матеріальні рівняння (3.16) подамо таким чином

$$\alpha \begin{bmatrix} 2\langle e_{31} \rangle \\ \langle E_1 \rangle \\ \langle H_1 \rangle \end{bmatrix} = \left(E - \frac{2}{F_0} \text{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \right) \begin{bmatrix} \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle D_1 \rangle \\ \langle B_1 \rangle \end{bmatrix} - \frac{2}{F_0} \text{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \begin{bmatrix} \langle \sigma_{32} \rangle \\ \langle D_2 \rangle \\ \langle B_2 \rangle \end{bmatrix},$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 2\langle e_{32} \rangle \\ \langle E_2 \rangle \\ \langle H_2 \rangle \end{bmatrix} = \frac{2}{F_0} \text{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \begin{bmatrix} \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle D_1 \rangle \\ \langle B_1 \rangle \end{bmatrix} + \left(E + \frac{2}{F_0} \text{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \right) \begin{bmatrix} \langle \sigma_{32} \rangle \\ \langle D_2 \rangle \\ \langle B_2 \rangle \end{bmatrix}.$$
(3.20)

Звідси випливає, що макромодель магнітоелектропружного композиту в загальному випадку є анізотропною.

Закон (3.20) в комплексному варіанті можна подати так

$$\alpha(\langle \chi_2 \rangle - i\langle \chi_1 \rangle) = E(\langle \gamma_2 \rangle - i\langle \gamma_1 \rangle) + \frac{2}{F_0} \sum_{m=1}^N l_m^{(k)} \langle \gamma_k \rangle, \quad k = 1, 2. \quad (3.21)$$

Нарешті, закон (3.20) можна обернути. Маємо після елементарних перетворень

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{32} \rangle \\ \langle D_2 \rangle \\ \langle B_2 \rangle \end{bmatrix} = \Delta_{11} \alpha \begin{bmatrix} 2\langle e_{32} \rangle \\ \langle E_2 \rangle \\ \langle H_2 \rangle \end{bmatrix} + \Delta_{12} \alpha \begin{bmatrix} 2\langle e_{31} \rangle \\ \langle E_1 \rangle \\ \langle H_1 \rangle \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle D_1 \rangle \\ \langle B_1 \rangle \end{bmatrix} = \Delta_{21} \alpha \begin{bmatrix} 2\langle e_{32} \rangle \\ \langle E_2 \rangle \\ \langle H_2 \rangle \end{bmatrix} + \Delta_{22} \alpha \begin{bmatrix} 2\langle e_{31} \rangle \\ \langle E_1 \rangle \\ \langle H_1 \rangle \end{bmatrix}.$$
(3.22)

де Δ_{ij} , ($i, j = 1, 2$) визначаються так

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= (A_1)^{-1} \left(\frac{2}{F_0} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \right)^{-1}, \\ \Delta_{12} &= (A_1)^{-1} \left(E - \frac{2}{F_0} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \right)^{-1}, \\ \Delta_{21} &= (A_2)^{-1} \left(E + \frac{2}{F_0} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \right)^{-1}, \\ \Delta_{22} &= (A_2)^{-1} \left(\frac{2}{F_0} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \right)^{-1}, \\ A_1 &= \left(\frac{2}{F_0} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \right)^{-1} \left(E + \frac{2}{F_0} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \right) + \left(E - \frac{2}{F_0} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \right)^{-1} \frac{2}{F_0} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)}, \\ A_2 &= \left(\frac{2}{F_0} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \right)^{-1} \left(E - \frac{2}{F_0} \operatorname{Im} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)} \right) + \left(E + \frac{2}{F_0} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(2)} \right)^{-1} \frac{2}{F_0} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^N l_m^{(1)}.\end{aligned}$$

3.4 Результати чисельних розрахунків

Розглянемо волокнистий композит тетрагональної будови ($\omega_1 = 2, \omega_2 = 2i$) матриця якого виготовлена із електропружного матеріалу $BaTiO_3$, а волокно з магнетопружного матеріалу $CoFe_2O_3$ (необхідні параметри матеріалів наведені в таблиці 3.1).

Таблиця 3.1

Матеріал	c_{44}	e_{15}	h_{15}	ε_{11}	β_{11}	γ_{11}
$BaTiO_3$	$43 \cdot 10^9$	11.6	0	$-11.2 \cdot 10^{-9}$	0	$-5 \cdot 10^{-6}$
$CoFe_2O_3$	$45.3 \cdot 10^9$	0	550	$-0.08 \cdot 10^{-9}$	0	$-590 \cdot 10^{-6}$

Поперечний переріз волокна має форму кола з радіусом r . Нижче для матеріальних рівнянь, поданих у такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \langle \sigma_{32} \rangle \\ \langle D_2 \rangle \\ \langle B_2 \rangle \\ \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle D_1 \rangle \\ \langle B_1 \rangle \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2\langle e_{32} \rangle \\ \langle E_2 \rangle \\ \langle H_2 \rangle \\ 2\langle e_{31} \rangle \\ \langle E_1 \rangle \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix},$$

наводяться матриці, що містять макропараметри магнетоелектропружного композиту С при різних значеннях радіусу волокна.

При $r = 1$:

$$\begin{pmatrix} 5.7007 \cdot 10^{10} & -3.4357 & -5.8883 & 1.1097 \cdot 10^9 & 6.4603 & -3.2651 \\ -3.4357 & 3.1955 \cdot 10^{-9} & 1.0762 \cdot 10^{-11} & 6.4603 & -6.1977 \cdot 10^{-9} & -3.4585 \cdot 10^{-12} \\ -5.8883 & 1.0762 \cdot 10^{-11} & 1.4148 \cdot 10^{-6} & -3.2651 & -3.4585 \cdot 10^{-12} & 2.7691 \cdot 10^{-6} \\ 1.1097 \cdot 10^9 & 6.4603 & -3.2651 & 4.7669 \cdot 10^{10} & 6.5881 & -1.9628 \\ 6.4603 & -6.1977 \cdot 10^{-9} & -3.4585 \cdot 10^{-12} & 6.5881 & -6.4015 \cdot 10^{-9} & 3.5872 \cdot 10^{-12} \\ -3.2651 & -3.4585 \cdot 10^{-12} & 2.7691 \cdot 10^{-6} & -1.9628 & 3.5872 \cdot 10^{-12} & -2.8617 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

При $r = 0.5$:

$$\begin{pmatrix} 4.5363 \cdot 10^{10} & 9.2357 & -0.93674 & -2.2556 \cdot 10^9 & 4.0683 & -1.7972 \\ 9.2357 & -8.9367 \cdot 10^{-9} & 1.7169 \cdot 10^{-12} & 4.0683 & 3.8977 \cdot 10^{-9} & -2.6339 \cdot 10^{-12} \\ -0.93674 & 1.7169 \cdot 10^{-12} & -3.9943 \cdot 10^{-6} & -1.7972 & -2.6339 \cdot 10^{-12} & 1.7365 \cdot 10^{-6} \\ -2.2556 \cdot 10^9 & 4.0683 & -1.7972 & 4.7669 \cdot 10^{10} & 10.812 & -0.31225 \\ 4.0683 & 3.8977 \cdot 10^{-9} & -2.6339 \cdot 10^{-12} & 10.812 & -6.4015 \cdot 10^{-9} & 5.7229 \cdot 10^{-13} \\ -1.7972 & -2.6339 \cdot 10^{-12} & 1.7365 \cdot 10^{-6} & -0.31225 & 5.7229 \cdot 10^{-13} & -4.6648 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

При $r = 0.1$:

$$\begin{pmatrix} 4.3004 \cdot 10^{10} & 0.11596 & -0.00167 & -1.0923 \cdot 10^8 & 0.181 & -0.0792 \\ 0.11596 & -1.1196 \cdot 10^{-8} & 3.058 \cdot 10^{-15} & 0.181 & -1.7340 \cdot 10^{-10} & -1.1856 \cdot 10^{-13} \\ -0.00167 & 3.058 \cdot 10^{-15} & -4.9982 \cdot 10^{-6} & -0.0792 & -1.1856 \cdot 10^{-13} & 7.7213 \cdot 10^{-8} \\ -1.0923 \cdot 10^8 & 0.181 & -0.0792 & 4.3001 \cdot 10^{10} & 11.599 & -5.559 \cdot 10^{-4} \\ 0.181 & -1.7340 \cdot 10^{-10} & -1.1856 \cdot 10^{-13} & 11.599 & -1.1199 \cdot 10^{-8} & 1.0197 \cdot 10^{-15} \\ -0.0792 & -1.1856 \cdot 10^{-13} & 7.7213 \cdot 10^{-8} & -5.559 \cdot 10^{-4} & 1.0197 \cdot 10^{-15} & -4.9994 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

При $r = 0.0001$:

$$\begin{pmatrix} 4.300 \cdot 10^{10} & 11.6 & 0 & -1.0926 \cdot 10^2 & 1.8104 \cdot 10^{-7} & -0.0792 \\ 11.6 & -1.1200 \cdot 10^{-8} & 3.058 \cdot 10^{-15} & 1.8104 \cdot 10^{-7} & -1.7343 \cdot 10^{-16} & 0 \\ 0 & 3.058 \cdot 10^{-15} & -5.0 \cdot 10^{-6} & -7.9173 \cdot 10^{-8} & 0 & 7.7226 \cdot 10^{-14} \\ -1.0926 \cdot 10^2 & 1.8104 \cdot 10^{-7} & -7.9173 \cdot 10^{-8} & 4.300 \cdot 10^{10} & 11.6 & 0 \\ 1.8104 \cdot 10^{-7} & -1.7343 \cdot 10^{-16} & 0 & 11.6 & -1.1200 \cdot 10^{-8} & 0 \\ -0.0792 & 0 & 7.7226 \cdot 10^{-14} & 0 & 0 & -5.0 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Наведені результати підтверджують, що побудована макромодель композитного матеріалу є адекватною, оскільки чим менша площа волокна, тим отримані макропараметри наближаються до відповідних значень для матеріалу матриці. Одночасно, наведені дані, дають можливість стверджувати, що зі збільшенням співвідношення площі волокна до площі матриці макромодель магнітоелектропружного композиту в загальному випадку є анізотропною, при цьому з'являються ненульові макропараметри, що відповідають за ефекти зв'язаності електричних, магнітних та механічних полів на відміну від однорідного магнетоелектропружного середовища, де в умовах антиплоскої деформації п'єзоєфекти не спостерігаються.

На рисунку 3.2 наведено залежності відносних макропараметрів (відношення осередненого параметру КМ до відповідного параметру матриці) від радіусу волокна для композиції $BaTiO_3/CoFe_2O_3$ (матриця/волокно). На рисунку 3.3 зображено аналогічні результати у випадку зворотної композиції, тобто для $CoFe_2O_3/BaTiO_3$. Аналіз зазначених результатів приводить до таких висновків:

- осереднена жорсткість отриманого КМ залежить від співвідношення площ матриці і волокна, у випадку волокна з більш жорсткого матеріалу (рисунок 3.2) жорсткість КМ збільшується при збільшенні площі волокна, в протилежній композиції (рисунок 3.3) спостерігаються незначні зміни у бік зменшення відповідного макропараметру;
- всі інші макропараметри $((e_{15}/e_{15m}, \varepsilon_{11}/\varepsilon_{11m}, \gamma_{11}/\gamma_{11m})$ -рисунок 2 та $(h_{15}/h_{15m}, \varepsilon_{11}/\varepsilon_{11m}, \gamma_{11}/\gamma_{11m})$ -рисунок 3.3) суттєво змінюються у бік зменшення і

при площі волокна, що перевищує половину площі комірки ці параметри йдуть до нуля.

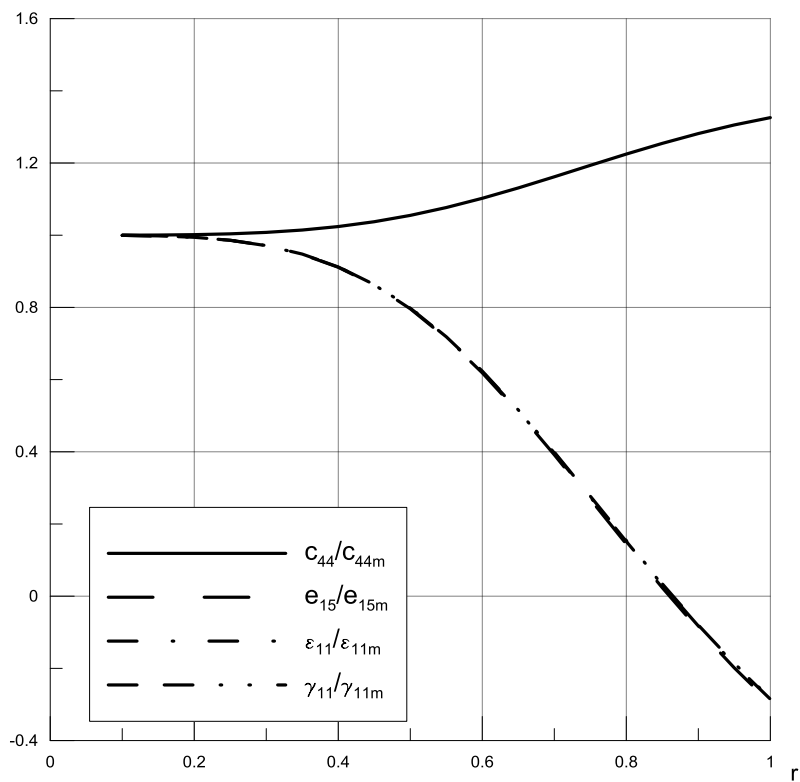


Рисунок 3.2

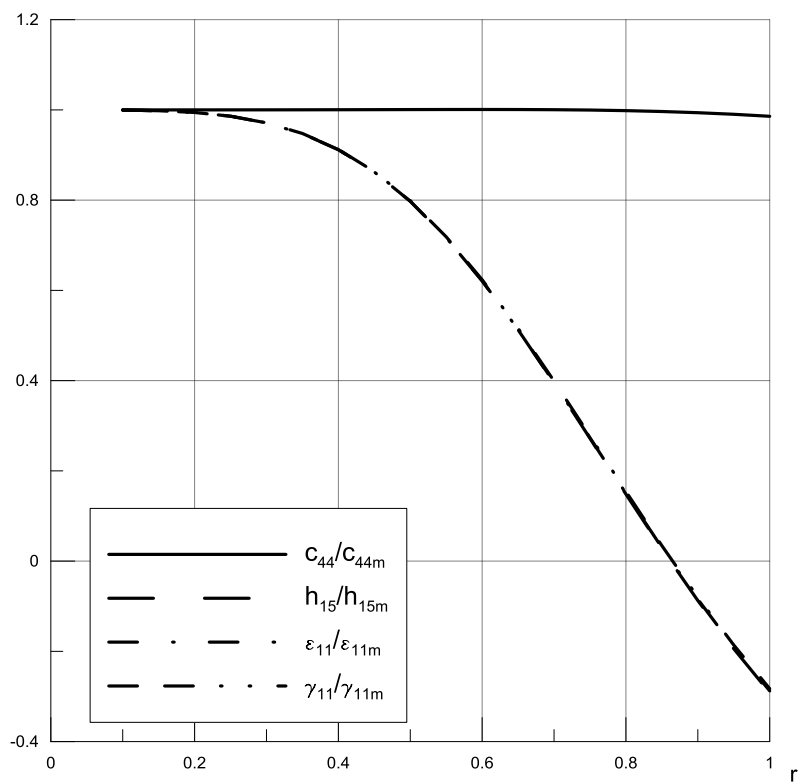


Рисунок 3.3

Наступні 2 графіки демонструють, що в композитному матеріалі, матриця якого виготовлена із електропружного матеріалу $BaTiO_3$, а волокно з магнетопружного матеріалу $CoFe_2O_3$ (рисунок 3.4) з'являються магнетопружні властивості $h_{15} \neq 0$. А у зворотній композиції $CoFe_2O_3/ BaTiO_3$ (рисунок 3.5)- електропружні $e_{15} \neq 0$.

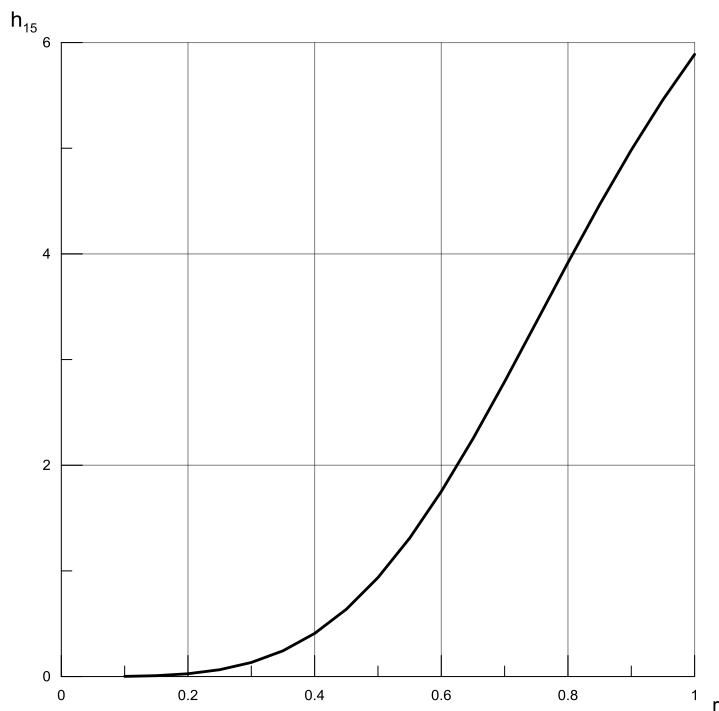


Рисунок 3.4

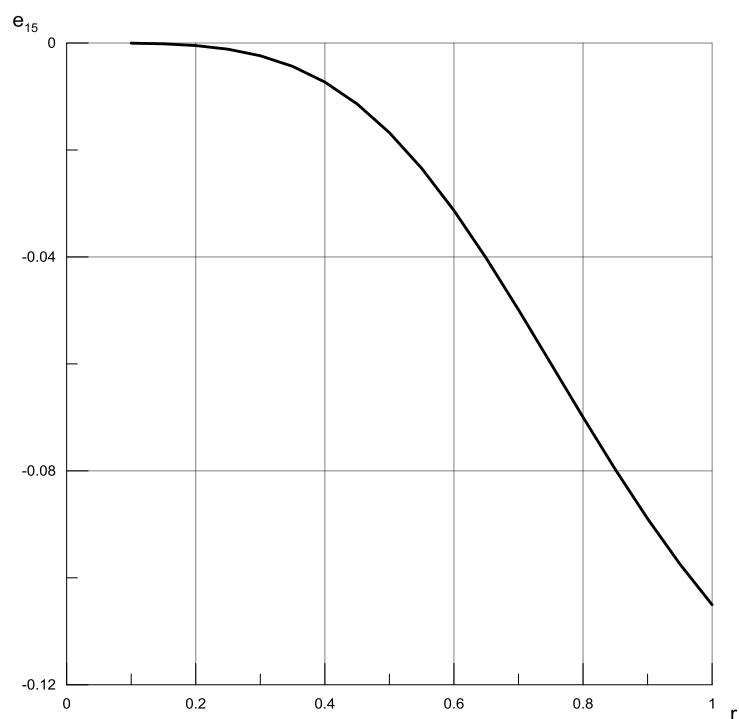


Рисунок 3.5

На рисунки 3.6, 3.7 зображено графік зміни електромагнітного макромодуля β_{11} для композицій $BaTiO_3/CoFe_2O_3$ (рисунок 3.6) та $CoFe_2O_3/BaTiO_3$ (рисунок 3.7) в залежності від радіусу волокна. Отримані результати вказують, що в КМ з'являється зв'язок між електричними та магнітними полями.

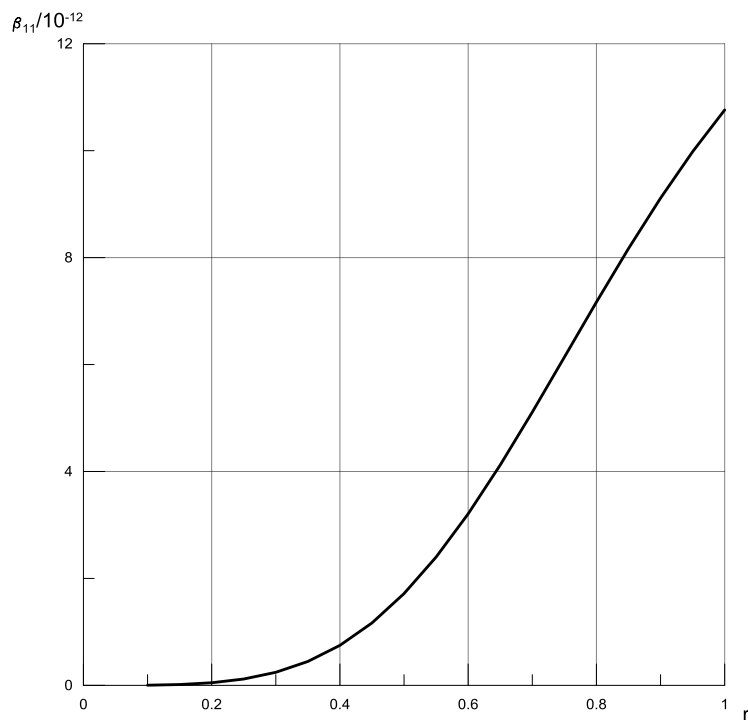


Рисунок 3.6

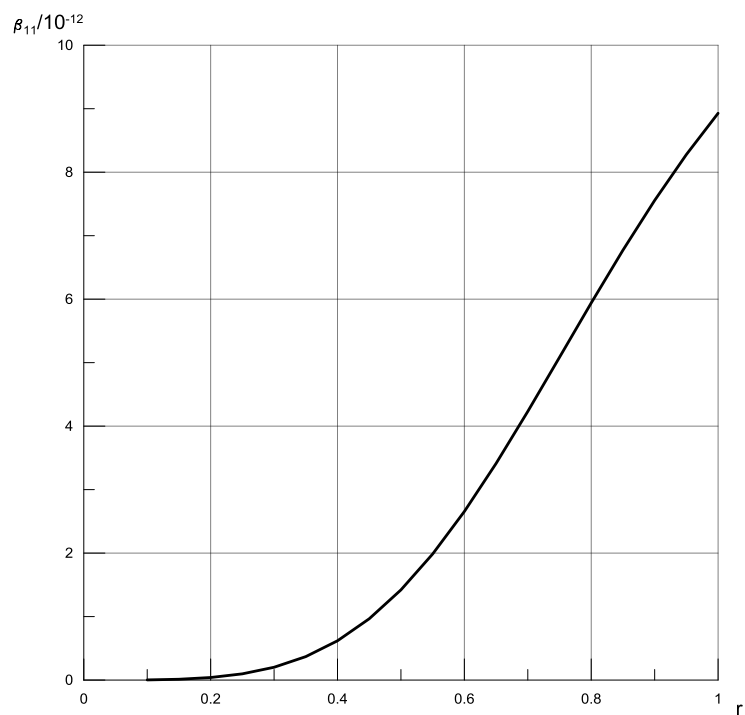


Рисунок 3.7

3.5 Висновки по третьому розділу

В третьому розділі роботи вивчено властивості електро(магнето)пружних матеріалів, армованих регулярною двоякоперіодичною системою однакових циліндричних волокон, поперечний переріз яких довільні достатньо гладкі замкнуті контури. Припускається, що в структурі задані середні значення компонент механічних напружень, магнітної індукції та електричної індукції.

Загальні подання розв'язків розшуковуються в класі квазіперіодичних функцій і описуються за допомогою дзета-функції Вейерштраса. Гранична задача магнетоелектропружності зведена до матричного регулярного інтегрального рівняння, чисельний розв'язок якого реалізовано за схемою метода механічних квадратур.

Метод регулярних структур узагальнено на регулярно-армоване магнетоелектропружне середовище і побудований алгоритм для визначення макроскопічних параметрів структури.

Аналіз проведених чисельних експериментів дозволяє зробити такі висновки:

- побудована макромодель композитного матеріалу є адекватною, оскільки чим менша площа волокна, тим отримані макропараметри наближаються до відповідних значень для матеріалу матриці;
- зі збільшенням співвідношення площі волокна до площі матриці макромодель магнітоелектропружного композиту в загальному випадку є анізотропною, при цьому з'являються ненульові макропараметри, що відповідають за ефекти зв'язаності електричних, магнітних та механічних полів на відміну від однорідного магнетоелектропружного середовища, де в умовах антиплоскої деформації п'єзоефекти не спостерігаються;
- осереднена жорсткість отриманого КМ залежить від співвідношення площ матриці і волокна, у випадку волокна з більш жорсткого матеріалу жорсткість КМ збільшується при збільшенні площі волокна, в протилежній

композиції спостерігаються незначні зміни у бік зменшення відповідного макропараметру;

- всі інші макропараметри $((e_{15} / e_{15m}, \varepsilon_{11} / \varepsilon_{11m}, \gamma_{11} / \gamma_{11m})$ - для композиції $BaTiO_3/CoFe_2O_3$ та $(h_{15} / h_{15m}, \varepsilon_{11} / \varepsilon_{11m}, \gamma_{11} / \gamma_{11m})$ - $CoFe_2O_3/ BaTiO_3$) суттєво змінюються у бік зменшення і при площі волокна, що перевищує половину площі комірки ці параметри йдуть до нуля.
- в композитному матеріалі, матриця якого виготовлена із електропружного матеріалу $BaTiO_3$, а волокно з магнетопружного матеріалу $CoFe_2O_3$ з'являються магнетопружні властивості $h_{15} \neq 0$. А у зворотній композиції $CoFe_2O_3/ BaTiO_3$ -електропружні $e_{15} \neq 0$.

ВИСНОВКИ

У першому розділі роботи проведено аналіз різних розрахункових моделей і методик розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових елементів конструкцій з дефектами структури від дії статичних та температурних навантажень.

У другому розділі структуровані і узагальнені рівняння дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок і пластин з дефектами структури матеріалу по товщині. Виведенні рівняння рівноваги, геометричних і фізичних співвідношень, коли враховуються геометрична нелінійність деформацій, деформації поперечного зсуву та трансверсального обтиснення.

Отримані розв'язувальні рівняння термопружності теорії багатошарових оболонок в змішаній формі. Запропонований алгоритм рішення стаціонарної незв'язаної задачі теорії термопружності багатошарових оболонок для випадку, коли температурне поле не залежить від часу.

У третьому розділі роботи побудовано структурну математичну модель магнетоелектропружного композитного матеріалу. Вивчено властивості електро(магнето)пружних матеріалів, армованих регулярною двоякоперіодичною системою однакових циліндричних волокон, поперечний переріз яких довільні достатньо гладкі замкнуті контури, в залежності від фізичних та геометричних властивостей, побудованої структури.

Основні висновки роботи такі:

- Результатом аналізу існуючих моделей став висновок, що в даний час проводиться активна робота по створенню ефективних методик розрахунку багатошарових конструкцій на основі дискретно-структурної теорії, коли враховується анізотропія термопружних властивостей матеріалу, схеми армування, особливості спільної роботи та умови контакту шарів, температурні навантаження. Актуальними також залишаються питання експериментальної перевірки різних моделей, які враховують дефекти структури композиційного матеріалу, вплив температури.

- Показана фізична коректність розрахункової моделі багатошарових тонкостінних конструкцій, згідно якої реалізуються як ідеальні умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу, так і умови контакту з міжфазним ослабленим шаром.

- Складена повна система розв'язувальних рівнянь дискретно-структурної теорії багатошарових оболонок для розв'язання контактної крайової задачі в змішаній формі. Отримана система з $14 \cdot n$ диференціальних рівнянь в частинних похідних для оболонок обертання, які включають в себе n шарів зі співвісними поверхнями.

- Отримані розв'язувальні рівняння термопружності теорії багатошарових оболонок в змішаній формі. Запропонований алгоритм рішення стаціонарної незв'язаної задачі теорії термопружності багатошарових оболонок для випадку, коли температурне поле не залежить від часу.

- Побудована макромодель композитного матеріалу є адекватною, оскільки чим менша площа волокна, тим отримані макропараметри наближаються до відповідних значень для матеріалу матриці.

- Зі збільшенням співвідношення площі волокна до площі матриці макромодель магнітоелектропружного композиту в загальному випадку є анізотропною, при цьому з'являються ненульові макропараметри, що відповідають за ефекти зв'язаності електричних, магнітних та механічних полів на відміну від однорідного магнітоелектропружного середовища, де в умовах антиплоскої деформації п'єзоефекти не спостерігаються.

- Макропараметри отриманого КМ суттєво залежать від співвідношення площ матриці і волокна.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Андреев Л. В. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации // Андреев Л. В, Ободан Н. И., Лебедев А. Г.- М.: Наука, 1988.- 208 с.
2. Григолюк Э. И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники // Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. - М.: Наука, 1971. - Т. 5. - 271 с.
3. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ // Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. - К.: Вища шк., 1983.- 286 с.
4. Гузь А. Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов // А. Н. Гузь - К.: Наук. думка, 1990. - 630 с.
5. Гуляев В. И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач // Гуляев В. И., Баженов В. А., Лизунов П. П. - Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1978. - 192 с.
6. Дудченко А. А. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. - М.: ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика твердого деформируемого тела. - 1983. - Вып. 15. - С. 3 - 68.
7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек // С. А. Амбарцумян - М.: Наука, 1974. - 448 с.
8. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин // С. А. Амбарцумян - М.: Наука, 1987. - 360 с.
9. Григоренко Я. М. Задачи теории упругости неоднородных тел // Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. - К.: Наук. думка, 1991. - 216 с.
10. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс // В. И. Королев - М.: Машиностроение, 1965. - 272 с.
11. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины // С. Г. Лехницкий. - М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1957. - 463 с.
12. Григолюк Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек // Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикл. механика. - 1972. - 8, №6. - С. 3 - 17.

13. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко – К.: Наук. думка, 1972. – 501 с.
14. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. and Phys. - 1944. - № 33. - P.184 - 191.
15. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек / С. А. Амбарцумян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ. - мат. наук. - 1964. - 17, № 3. - С. 29 - 53.
16. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов // В. В. Васильев. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с.
17. Григоренко Я. М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек // Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. - М.: Наука, 1992. - 336 с.
18. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости // Я. М. Григоренко. - Киев: Наук. думка, 1973.- 228 с.
19. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках /Я.М.Григоренко // Прикл. механика. - 1996. № 6. - С. 3 - 40.
20. Гузь А.Н. Механика элементов конструкций // Гузь А. Н., Григоренко Я. М., Бабич И. Ю. - К.: Наук. думка, 1983. - 484 с.
21. Донелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Донелл. - М.: Наука, 1982. - 567 с.
22. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells / P. M. Naghdi // Quarterly of Applied Mathematics. - 1957. - V.14, № 4. - P. 369 - 380.
23. Vasiliev V. V. Modern conceptions of plate theory / V. V. Vasiliev // Composite structures. - 2000. - № 48. - P. 39 – 48.
24. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек В. Г. Пискунов, А. А. Рассказов // Прикл. механика. - 2002. - 38, № 2. С. 22 - 57.
25. Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин // Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. - М.: Машиностроение, 1988. - 280 с.
26. Пикуль В. В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек /

- В. В. Пикуль // Изв. АН СССР. МТТ. - 1992. - №3. - С. 18 - 25.
27. Родионова В. А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек // Родионова В. А., Титаев Б. Ф., Черных К. Ф. – СПб.:Изд-во С.- Петербург. ун-та, 1996. - 278 с.
28. Гуртовой А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А. Г. Гуртовой // Механика композитных материалов. - 1999. - 35, №1. - С. 13 - 28.
29. Немиш Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел / Ю. Н. Немиш // Прикл. механика.- 2000.- 36, № 2. - С. 3 - 38.
30. Григолюк Э. И. Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: Сб. науч. статей. - М.: Изд-во МГУ, 2000. - С. 56 - 109.
31. Сахаров А.С. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем / А. С. Сахаров, О. Л. Козак, А. В. Гондлях, С. Л. Мельников // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1984. - №44. - С.13 – 16.
32. Александров А. Я. Конструкции с наполнителем из пенопластов // Александров А. Я., Бородин И. Я., Павлов В. В. - М.: Машиностроение, 1972. - 211 с.
33. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // L.Librescu, T.Hause // Composite structures. - 2000. - V.48. - P. 1 - 17.
34. Noor A. K. Computational models for sandwich panels and shells // A. K. Noor, W. S. Burton, C. W. Bert // Appl.Meh. Rev. – 1996. - V.9, № 3. - P. 155 - 199.
35. Болотин В. В. Теория армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями / В. В. Болотин // Механика полимеров.– 1966. - № 1. - С. 11 - 19.
36. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В. В. Болотин

// Механика полимеров. - 1965. - № 2. - С. 27 - 37.

37. Пискунов В. Г. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко, В. К. Присяжнюк, В. С. Сипетов, В. С. Карпиловский. - К.: Вища шк., 1987. - 200 с.
38. Пискунов В. Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций // В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко. - К.: Будівельник, 1986. - 176 с.
39. Рассказов А. О. Расчет многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов / А. О. Рассказов // Прикл. механика. - 1978. - 14, № 8. - С. 51 - 57.
40. Сахаров А. С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений / А. С. Сахаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1974 - №24. - С.147- 156.
41. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко // Прикл. механика.- 2002.- 38, №11. – С.32 - 68.
42. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С. К. Годунов //Успехи мат. наук. - 1961. - 16, №3. - С. 171 - 174.
43. Баженов В. А. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек // Баженов В. А. , Сахаров А. С., Гондлях А. В., Мельников С. Л. - К.: НДІ Будмеханіка, 1994.- 264 с.
44. Григоренко Я. М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я. М. Григоренко, Н.Н.Крюков // Прикл. механика - 1995.- 31, № 6. - С. 3 - 27.
45. Рассказов А.О. Экспериментальное исследование статики и динамики многослойных пластин / А.О.Рассказов, И.И.Соколовская // Прикл. механика. - 1981. - 17, № 2. С. 65 – 70.
46. Рассказов А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек // Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. - К.: Вища шк., 1986. - 192 с.

47. Александров А. Я. Расчет трехслойных панелей // Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Куршин Л. М. - М.: Оборонгиз, 1960. – 270 с.
48. Алфутов Н. А. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов /Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. //М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.
49. Королёв В. И. Упругопластические деформации оболочек // В. И. Королёв. - М: Машиностроение, 1971. - 303 с.
50. Остерник Э. С. Анизотропные слоистые пластины средней толщины / Э. С. Остерник // Изв. АН Арм. ССР. Механика. - 1967. - 20, № 5. - С. 48 - 57.
51. Потапов А. И. Неразрушающий контроль конструкций из композиционных материалов / А. И. Потапов, Ф. П. Пеккер / - Л.: Машиностроение, 1977. - 192 с.
52. Скудра А. М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков // Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А.-Рига: Зинатне,1971.-239 с.
53. Тарнопольский Ю. М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков // Ю. М. Тарнопольский, А .В. Розе. - Рига: Зинатне, 1969.- 274 с.
54. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями // Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. - К.: Наук. думка, 1988. - 279 с.
55. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287с.
56. Белозеров Л.Г., Киреев В.А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. – 388 с.
57. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов однонаправленно-армированных моноотропными волокнами. Сообщение 1. Модель армированной среды//Изв. вузов. Строительство. – 2006. № 5. – С. 16 – 24.
58. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические

характеристики композитов однонаправленно-армированных монотропными волокнами. Сообщение 2. Модель армированной среды//Изв. вузов. Строительство. – 2006. № 6. – С. 10 – 19.

59. Перов Ю.Ю., Мельников П.В. Экспериментально-теоретическое исследование термических деформаций конструкционного углепластика КМУ-8 // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29. – №5. – С. 608 – 612.
60. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
61. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч.1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГУТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. №3. – С. 36 – 49.
62. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности волокнистого композита методом согласования// Наука и образование. 2013. С. 519 – 532.
63. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75 – 81.
64. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 6. С. 276 – 282.
65. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
66. Кувыркин Г.Н. Теплопроводность однонаправленного волокнистого композита. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8.
67. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер: с англ. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
68. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Определение эффективных термомеханических характеристик слоистого композита регулярной структуры в несимметричной постановке // Прикладная механика. – 2009.

Т. 45, № 11. – С. 71 – 79.

69. Биргер И.Д., Мавшотов Р.Р. Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
70. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.– М.: Наука, 1977– 416 с.
71. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука. – 1997. – 400 с.
72. Шленский О.Ф. Тепловые свойства стеклопластиков. – М.: Химия, 1973.–219 с.
73. Шленский О.Ф. Теплофизика разлагающихся материалов // Шленский О.Ф., Шашков Л.Г., Аксенов Л.Н. – М.: Энергоиздат, 1985. – 144 с.
74. Ильюшин А.А., Победря Б.Б. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
75. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.
76. Композиционные материалы. Т. 3. Применение композиционных материалов в технике: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1978. – 512 с.
77. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966.– 752 с.
78. Бураков В.Л., Санду С.Ф. Влияние теплового воздействия частиц на нестационарный нагрев и термохимическое разрушение коксующихся теплозащитных материалов// Теплофизика и аэромеханика – 1996, – М. – С. 381 –388.
79. Исаков Г.Н., Кузин А.Я. Моделирование и идентификация процессов тепломассопереноса во вспучивающихся теплозащитных материалах //Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – № 4. – С. 126 – 134.
80. Павлов В.П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2003. – 197 с. 15ВК 5-86911-315-6.
81. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.
82. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.:

- Машиностроение, 1980. – 375 с.
83. Валишвили И.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
84. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. – М.: Машиностроение. 1972. – 167 с.
85. Ершов П.П. Проектирование анизотропных конструкций. – М.: ВИМИ, 1981.– 160 с.
86. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. – М.: Машиностроение. 1981. – 216 с.
87. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
88. Острик А.В., Слободчиков С.С. Расчет прочности композитных оболочек высокого давления под действием лучистых потоков энергии // Технол. сер. Конструкции из композиционных материалов. – 1995. - № 1. – С. 21 – 30.
89. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ибламинова Д.Р. и др. Влияние скорости теплового нагружения па напряженное состояние вязкоупругих слоистых конструкций // Механика композитных материалов. – 1989. – № 6. – С. 1080 – 1085.
90. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций. – М.: Наука, 1985.– 184 с.
91. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. – Рига, 1978. – 240 с.
92. Тимошенко С.П., Войновскпй-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
93. Бакулин В.Н. Уточненные эффективные подходы для построения моделей слоистых оболочек и криволинейных стержней // Десятая юбилейная международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным средствам. – Переславль-Залесский, – М., МГИУ, 1999. – С.132 – 134.
94. Бакулин В.Н., Острик А.В. Расчетно-экспериментальное исследование механического действия излучений на композитные элементы конструкций

- летательных аппаратов в полетных условиях.// Механика композиционных материалов и конструкций. – М. ИПРИМ РАН, 1999. – Т. 4, N4. – С. 77 – 87.
95. Бакулин В.Н., Потопахин В.А. Уравнения трехмерной теории для расчета толстостенных многослойных оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. – М. ИПРИМ РАН, 1998. – Т. 4, N2. – С. 83 – 96.
96. Павлов В.П., Первушин Ю.С., Звонарев В.Д. Математическая модель теплового деформирования теплозащитного материала // Механика деформируемых тел и конструкций: Межвузовский научный сборник, УГАТУ. – Уфа, 1998. – С. 9 – 15.
97. Третьяченко Г.Н., Грачева Л.И. Термическое деформирование неметаллических деструктурирующих материалов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 248 с.
98. Композиционные материалы. Т. 4. Композиционные материалы с металлической матрицей: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1978. – 504 с.
99. Павлов В.П. Тепловая деформация, прочность и термовязкоупругость стеклопластиков при высокой переменной во времени температуре в условиях термодеструкции. Экспериментальные исследования и математическое моделирование / УГАТУ. – Уфа: УГАТУ, 2004. – 218 с. 18ВМ 5-86911-483-7.
100. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов // Г. А. Ванин. – К.: Наук. думка, 1971. – 304 с.
101. Малмейстер А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов // Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
102. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов // Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
103. Шульга Н. А. Моделирование и расчет элементов конструкций из неоднородных материалов // Шульга Н. А., Кривов Г. А., Федоренко Ю. М. – К.: Техника, 1996. – 244 с.
104. Noor A. K. Assessment of computational models for multilayered composite shells / A. K. Noor, W. S. Burton // Appl. Mech. Rev. – 1990. – V.43, № 4. – P. 67-97.
105. Noor A. K. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite

- plates / A.K. Noor, W.S. Burton // *Appl. Mech. Rev.* – 1989.– V.42, № 1.–P. 1 – 13.
106. Reddy J.N. An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates / J.N. Reddy // *Composite Structures.* – 1993. – №25 – P. 21 – 35.
107. Reddy J. N. On the generalization of displacement-based laminated theories / J. N. Reddy // *Appl. Mech. Rev.* – 1993. – V.42, № 11, pt. 2. – P. 213 – 222.
108. Reddy J. N. Theories and computational models for composite laminates / J. N. Reddy, D. H. Robbins // *Appl.Mech. Rev.* – 1994. – V.47, № 6, pt. 1. – P. 21 – 35.
109. Васильев В. В. Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении / В. В. Васильев, А. А. Дубченко, А. Н. Елпатьевский // *Механика полимеров.* – 1970. – № 1. – С. 144 – 146.
110. Григоренко Я. М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами // Я. М. Григоренко, Н. Н. Крюков. – К.: Наук. думка, 1988. – 264 с.
111. Механика композитов: в 8 т. Т. 8: Статика элементов конструкций // Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов, Н. Н. Крюков, Ю. Н. Немиш, Н. Д. Панкратова, Б. Л. Пелех, Г. Г. Влайков, А. В. Максимум, Г. П. Урусова. – К.: Наук. думка, 1999. – 379 с.
112. Никишин В. С. Задачи теории упругости для многослойных сред // В. С. Никишин, Г. С. Шапиро. – М.: Наука, 1973. – 132 с.
113. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела // В. С. Саркисян. – Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та, 1976. – 534 с.
114. Роуландс Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных / Р. Роуландс // *Неупругие свойства композитных материалов.* – М.: Мир, 1978. – С. 140 – 179.
115. Захаров В.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов / В. В. Захаров, Л. В. Никитин // *Механика композитных материалов.* - 1983.– № 1. – С. 20 – 25.

116. Кобелев В. Н. Расчёт трёхслойных конструкций // Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
117. Серенсен С. В. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами // С.В. Серенсен, Г. П. Зайцев. – К.: Наук. думка, 1982. – 295 с.
118. Тарнопольский Ю. М. Расслоение сжимаемых стержней из композитов / Ю. М. Тарнопольский // Разрушение композитных материалов: тр. 1-го советско-американского симпозиума. – Рига: Зинатне, 1979. – С.160 – 166.
119. Ашбаух В. Развитие конечной трещины, перпендикулярной поверхности раздела двух материалов / Ашбаух В. // Прикл. механика, 1973.– т.40.– сер.Е, 2.– С. 312 – 314.
120. Кучерявый В. И. Расчет обсадных труб заданной надежности при растягивающих нагрузках и внутреннем давлении / Кучерявый В. И., Мильков С. Н. // Проблемы машиностроения и надежности машин.– 2003.– № 5.– С. 30 – 36.
121. Левин В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. // М.: Физматлит.– 2004. – 408 с.
122. Акопян В.Н. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин / Акопян В.Н., Саакян А.В. // Известия РАН.– Механика твердого тела.– 1999.– № 3.– С. 106 - 113.
123. Неупругие свойства композиционных материалов //Под ред. К.Гераковича [Пер. с англ.]. – М.: Мир, 1978. – 294 с.
124. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс // А. Я. Гольдман. – Л.: Машиностроение, 1979. – 320 с.
125. Тамуж В. П. Микромеханика разрушения полимерных материалов // В. П. Тамуж, В. С. Куксенко. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
126. Фудзии Т. Механика разрушения композиционных материалов // Т.
127. Alwar R.S. Three-dimensional finite element analysis of cracked plates in bending / Alwar R.S., Ramachandran Nambissan K.E. // Int. J. Numer.- Meth. Eng., 1983.-

v.2.- Ж 2.- pp. 293 - 303.

128. Kollar L. Buckling of complete spherical shells and spherical caps subjected to uniform overall radial pressure / Kollar L. // Proc. colloq. on buckling of shells.- Stuttgart.- Mai 6-7.- 1982. -Berlins Springer.- 1982.- pp. 401 425.
129. Бурьян О.Ю. Моделирование межфазного слоя в композитах с полимерной матрицей. Определение его структуры и механических свойств / Бурьян О.Ю., Новиков В.У. // Механика композитных материалов. – 2002.– № 3.– 289 с.
130. Бочкарева С.А. Определение вероятностей безотказной работы конструкций из полимерных материалов / Бочкарева С.А., Люкшин Б.А., Реутов А.И. // Физическая мезомеханика.- Томск.- 2004.- Т. 7.- 43 с.
131. Люкшин Б.А., Люкшин П.А. Влияние свойств межфазных слоев на напряженно-деформированное состояние полимерного композита в окрестности включения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1998, т. 4, № 2, с. 56 - 68.
132. Яновский Ю.Г. Некоторые аспекты компьютерного моделирования структуры и микромеханических свойств перспективных полимерных композиционных материалов / Яновский Ю.Г., Образцов И.Ф. // Физическая мезомеханика. -1999,- т.2, № 1 2, С. 135-142.
133. Скудра А. М. Обобщенные структурные критерии прочности армированных пластиков для плоского напряженного состояния / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс // Прочность и разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 241 – 249.
134. Скудра А. М. Структурная теория армированных пластиков // А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.
135. Викарио А. Критерии прочности и анализ разрушения конструкций из композиционных материалов / А. Викарио, Р. Толанд // Композиционные материалы [под ред. Л. Браутмана, Р. Крока]. – М.: Машиностроение, 1978. Т. 7, ч. 1: Анализ и проектирование конструкций / [под ред. К. Чамиса; пер. с англ]. – С. 62 – 107.
136. Верещака С.М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных

- элементов конструкций с дефектами структуры // Верещака С.М. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. - 286 с.
137. Галимов К.З. Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко / К.З.Галимов // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – С. 36 – 95.
138. Григолюк Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И.Григолюк, Г.М.Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
139. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Кантор Б.Я. – Киев: Наук. думка, 1990.– 135 с.
140. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. – 256 с.
141. Кучер Н.К. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных одно направленными волокнами и тканью сатинового переплетения / Н. К. Кучер, М. П. Немцов, М. Н. Заразовский // Пробл. прочности. – 2006. – №1. – С. 41 – 58.
142. Кучер Н.К. Оценка прочности слоистых эпоксикарбо- волокнитов, армированных одно направленными волокнами / Н. К. Кучер, М. Н. Заразовский // Пробл. прочности. – 2006. – № 6. – С. 95 – 112.
143. Shao Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z. S. Shao // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82.– P. 155 – 163.
144. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина, Б. Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
145. Композиционные материалы: Справочник //В.В.Васильев, Ю.М.Тарнопольский. - М.: Машиностроение, 1990. - 512 с.
146. Ремонт магістральних трубопроводів під тиском / М. В. Беккер, В. С. Бут, Р. М. Говдяк та ін. — К.: Кий, 2008. — 232 с.
147. Mables A. R., Dunn K. R., Dodds N., and Gibson A. G. Refurbishment of steel tubular pipes using composite materials // Plast. Rubber and Comp. — 2000. —

- Vol. 29. — P. 558—565.
148. Freire J. L. F., Vieira R. D., Diniz J. L. C., and Meniconi L. C. Effectiveness of composite repairs applied to damaged pipeline // *Exp. Tech. Soc. Exp. Mech.* — 2007. — Vol. 31. — P. 59—66.
 149. Mattos H. Sd. C., Reis J. M. L., Sampaio R. F., and Perrut V. An alternative methodology to repair localized corrosion damage in metallic pipelines with epoxy resins // *Mater. Des.* — 2009. — Vol. 30. — P. 3581—3591.
 150. Leong A. Y. L., Leong K. H., Tan Y. C., Liew P. F. M., Wood C. D., Tian W., et al. Overwrap composite repairs of offshore risers at topside and splash zone // *Proc. Int. Comm. on Composite Materials (ICCM-18)*. — Jeju Island, Korea Int. Comm. on Composite Materials; 21—26, August, 2011.
 151. Duell J. M., Wilson J. M., and Kessler M. R. Analysis of a carbon composite overwrap pipeline repair system // *Int. J. Pressure Vessels and Piping*. — 2008. — Vol. 85. — P. 782—788.
 152. Alexander C., Francini B. State of the art assessment of composite systems used to repair transmission pipe lines // 6th Intern. pipeline conf. 25–29 Sept., 2006. — Calgary, Alberta, Canada, IPC 2006-10484. — 8 p.
 153. Бандажная система RES-Q Composite Wrap // Компания Т. Д. Williamson Inc.: [сайт]. URL: <http://www.tdwilliamson.com/en/Products/RehabilitationProducts/CompositeWrap> (дата обращения: 20.01.2014).
 154. ASME B 31.4, ASME B 31.8. Classes of ASME Boiler and Pressure vessel Code. — Date 10.05.90.
 155. Lukacs J., Nagy G., Torok I., Egert J., and Pere B. Experimental and numerical investigations of external reinforced damaged pipelines // *Procedia Engin.* — 2010. — Vol. 2. — P. 1191—1200.
 156. The American Society of Mechanical Engineers. Repair of Pressure Equipment and Piping. ASME PCC-2-2006. — N. Y.: ASME, 2006.
 157. ASTM Committee D20. Standard practice for obtaining hydrostatic or pressure design basis for “fibreglass” (glass-fibre-reinforced thermosetting resin) pipe and fittings. — ASTM D2992-2006. West Conshohocken: Am. Soc. for Testing and

Materials, 2006.

158. ISO. Petroleum, petrochemical and natural gas industries — composite repairs of pipework — qualification and design, installation, testing and inspection // ISO/TS 24817. — London: Int. Organization for Standardization (ISO), 2006.
159. Cunha S. B. and Netto T. A. Analytical solution for stress, strain and plastic instability of pressurized pipes with volumetric flaws // Int. J. Pres. Vessels and Piping. — 2012. — Vol. 89. — P. 187—202.
160. Szary T. The Finite Element Method Analysis for Assessing the Remaining Strength of Corroded Oil Field Casing and Tubing. PhD thesis. — Freiberg: Geotechnik und Bergbau der Technischen Univ. Bergakademie, 2006.
161. Alexander C. Development of a Composite Repair System for Reinforcing Offshore Risers. PhD thesis. Texas: Texas A&M Univ., 2007.
162. Shouman A. and Taheri F. Compressive strain limits of composite repaired pipelines under combined loading states // Composite Structures. — 2011. — Vol. 93. — P. 1538—1548.
163. Keller M. W., Jellison B. D., and Ellison T. Moisture effects on the thermal and creep performance of carbon fiber/epoxy composites for structural pipeline repair // Composites: Part B: Eng. — 2013. — Vol. 45, Iss. 1. — P. 1173—1180.
164. Kopple M. F., Lauterbach S., and Wagner W. Composite repair of through-wall defects in pipework — analytical and numerical models with respect to ISO/TS24817 // Compos. Struct. — 2013. — Vol. 95. — P. 173—178.
165. Гарф Э. Ф., Нетребский М. А. Оценка прочности и ресурса трубопроводов с эрозионно-коррозионными повреждениями // Автомат. сварка. — 2000. — № 9/10. — С. 15—20.
166. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. — М.: Наука, 1985. — 253 с.
167. Григолюк Э.И., Фильштинский Л. А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры. — М.: Наука.-1991.-288 с.
168. Григолюк Э.И., Фильштинский Л. А. Регулярные кусочно-однородные

- структуры с дефектами. – М.: Изд. фирма «Физико-матем. лит.», 1994.-335 с.
169. Фильштинский Л.А., Шрамко Ю.В. Об одном методе усреднения физических свойств волокнистых пьезокомполитов // Вестник Сумского государственного университета. – 1999. – №1. – С.56-58.
170. Фильштинський Л.А. Моделювання фізичних полів в кусково-однорідних деформівних тілах: Навчальний посібник. – Суми: Вид-во СумДУ, 2001.–451 с.
171. Фильштинский Л.А., Бардзокас Д. Усреднение электрических свойств волокнистых металлокомполитов // Механика композитных материалов. – 1995. – Т.31, №4. – С. 53-539.
172. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.:Физматгиз, 1951. – 608 с.
173. Wang B.L., Mai Yiu-Wing, Crack tip field in piezoelectric/piezomagnetic media //European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 22, Issue 4, July–August 2003. – pp. 591-602
174. Бардзокас Д.И., Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах: В 5 т.- Т.1. Математический аппарат физических и инженерных наук. – М.-Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.- 864 с.
175. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.
176. Григолюк Э.И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластинки и оболочки. –М.: Наука, 1970.– 556 с.
177. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
178. Карпинос Д. М., Тучинский Л. И., Вишняков Л. Р. Новые композиционные материалы.– Киев: Выща шк., 1977.– 312 с.
179. Современные композиционные материалы / Под ред. Р. Браутмана, Р. Крока.– М. : Мир, 1970.– 672 с.