

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

А. В. Загорулько, Д. О. Кайота

Комп'ютерне моделювання динамічних систем

Конспект лекцій

Суми
Сумський державний університет
2019

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Комп'ютерне моделювання динамічних систем

Конспект лекцій
для студентів спеціальності
113 «Прикладна механіка»
денної форми навчання

Затверджено
на засіданні кафедри
загальної механіки
та динаміки машин
як конспект лекцій
із дисципліни «Комп'ютерне
моделювання динамічних систем».
Протокол № 9 від 04.06.2019 р.

Суми
Сумський державний університет
2019

Комп'ютерне моделювання динамічних систем :
конспект лекцій / укладачі: А. В. Загорулько, Д. О. Кайота. –
Суми : Сумський державний університет, 2019. – 118 с.

Кафедра загальної механіки та динаміки машин

Зміст

	С.
1 Сучасні програмні засоби скінченно-елементного аналізу	5
2 Загальні положення програмного комплексу ANSYS	12
3 Розв'язання контактних задач	29
4 Теоретичні основи розв'язання контактної задачі	47
5 Приклад аналізу напружено-деформованого стану системи “вал-втулка” при посадці з натягом	54
6 Динамічний аналіз	62
6.1 Загальні положення	62
6.2 Матриці динамічної системи	64
6.3 Види динамічного аналізу	75
7 Приклад модального аналізу балки	81
7.1 Використання методу підпростору для модального аналізу	82
7.2 Використання редуційного методу для модального аналізу	86
8 Приклад гармонійного аналізу балки	89
9 Аналіз динаміки ротора	96
9.1 Вступ	96
9.2 Моделювання динаміки ротора в програм-	

ному комплексі ANSYS	98
9.3 Загальна процедура аналізу динаміки ротора в програмному комплексі ANSYS	101
Завдання для курсової роботи	109
Список літератури	117

1 Сучасні програмні засоби скінченно-елементного аналізу

Програмні системи

Розвиток методу скінченних елементів обумовлений взаємозв'язком трьох факторів: наявністю високопродуктивної обчислювальної техніки; розробленням математичних моделей досліджуваних явищ, які адекватні реальним процесам з достатнім ступенем точності; особливостями самого методу [6].

Перші програмні комплекси, в яких реалізований метод скінченних елементів, були розроблені в 60-х роках. До них належать STRUDL-II, SAP-IV, NONSAP, ASKA, NASTRAN, SESAM-69 та інші. Появі цих універсальних програмних систем через особливості методу скінченних елементів передувало створення високопродуктивних електронно-обчислювальних машин, таких, наприклад, як IBM-370. Починаючи з кінця 70-х років ХХ ст., в СРСР з'явилося декілька десятків програмних комплексів для різних ЕОМ, в яких був реалізований МСЕ. До них відносять МІРАЖ, МОРЕ, КАСКАД-2, МІЦНІСТЬ-75, МСЕ/20, МАРС, ПАРСЕК, ЛІРУ, СПРИНТ, FEA і ряд інших програм.

У США і ряді інших країн подальший розвиток МСЕ і необхідність у проведенні розрахунків конструкцій на міцність також сприяли подальшому розвитку вже створених

програмних комплексів і розробленню нових. Були розроблені сотні програмних комплексів, які призначені для наближеного вирішення найрізноманітніших задач не тільки з області механіки деформованного твердого тіла, але й із таких областей, як гідродинаміка, акустика, електротехніка і т.д. Найбільшого поширення з них набули: ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC, MSC/NASTRAN, COSMOS, LS-DYNA та інші.

Відзначимо, що розроблення програмних комплексів є дорогою справою. Тому, як правило, організації і фірми - власники розроблених програм розглядають їх як комерційний науково-технічний продукт. Регулярно друкуються огляди існуючих програмних комплексів і їх характеристик, відомості про програми у галузевих фондах алгоритмів і програм дозволяють користувачам програмної продукції цілеспрямовано вибрати необхідні для їх діяльності програми розрахунку.

У кожної програми є свої сильні і слабкі сторони при розрахунку конкретної конструкції. Вибір програми розрахунку залежить від підготовленості користувача в своїй науковій області, типу вирішуваної задачі, типу доступної ЕОМ, розмірності задачі і інших факторів.

До критеріїв, що допомагають зробити вибір, необхідно віднести такі фактори:

- 1) програма широко використовується;
- 2) у програмі використовуються новітні наукові досягнення;
- 3) програма комерційно цілком доступна;
- 4) є докладна і зрозуміла документація.

Ознайомлення з програмною документацією і доступною літературою з описом програми і її елементів дозволяє зробити остаточний висновок про доцільність вибору програмного комплексу.

Для МСЕ характерні особливості, які необхідно враховувати при виборі і розробленні програми розрахунку. Такими особливостями є великі об'єми початкових даних, проміжних і остаточних результатів розрахунку. Тому розрахунок за МСЕ складається з трьох основних етапів:

- 1) розроблення розрахункової скінченно-елементної схеми і підготовки початкових даних;
- 2) перевірки самого розрахунку;
- 3) обробки результатів розрахунку.

Кожен етап є самостійною задачею. Перший етап полягає у створенні початкової скінченно-елементної розрахункової моделі, виходячи з інженерної інтуїції про поведінку конструкції. Надалі ця модель може коригуватися на основі аналізу результатів розрахунку. Коригування моделі може виконуватися і програмним шляхом, якщо така

можливість реалізована у використовуваному програмному комплексі. Підготовка початкових даних здійснюється, як правило, за допомогою програм генераторів сіток скінченних елементів, які створюють блок підготовки даних.

Проведення розрахунку (етап 2) здійснюється розрахунковим блоком, у якому використовується той або інший алгоритм розрахунку методом скінченних елементів. Як правило, розрахунковий блок складається з ряду програмних модулів, кожний з яких виконується на певному кроці алгоритму. У простому випадку програмної реалізації МСЕ для лінійної статичної крайової задачі теорії пружності розрахунковий блок містить таку послідовність кроків:

- 1) введення початкових даних (наприклад, підготовлених програмою-генератором в окремому файлі);
- 2) обчислення матриць жорсткостей скінченних елементів;
- 3) формування глобальної матриці жорсткості повної структури;
- 4) формування глобального вектора навантажень;
- 5) розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- 6) обчислення переміщень вузлів сітки скінченних елементів, деформацій і напружень у довільних точках скінченних елементів.

На різних кроках розрахункового блоку включаються перевірки правильності початкових даних і результатів проміжних обчислень (діагностика помилок), програмні модулі вибору поєднань навантажень, які діють на конструкцію, визначення площі перетинів та інше. Діагностика помилок на етапі виконання програми є важливою, оскільки при своєчасному виявленні помилки припиняються обчислення, що приводить до економного використання ресурсів ЕОМ.

Ефективне використання ЕОМ досягається також за рахунок розроблення спеціальних методів розв'язання стандартних математичних задач, що враховують специфіку МСЕ і в першу чергу стрічковість і розрідженість матриці жорсткості розрахункової моделі конструкції.

Розрахунок напружено-деформованого стану конструкції в рамках лінійної теорії пружності при дії на неї статичних навантажень зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У скінченно-елементних комплексах програм використовуються різноманітні методи розв'язання великих систем рівнянь.

Різні варіанти методу Гаусса реалізовані в програмах ADINA (блочний метод Гаусса), NASTRAN (LTDL - декомпозиція). Ефективним є фронтальний метод, реалізований у програмах ABAQUS, ANSYS та ін. Методи

суперелементів і редукції базису дозволяють суттєво скоротити час обчислення. Ефективними є також ітераційні методи.

Розрахунок власних коливань конструкції виконується методами ітерації в підпросторі (SAP-7), обчислення кореня характеристичного визначника (NASTRAN), Хаусхолдера з використанням методу Якобі (ASKA), Гівенса і QR-методу (NASTRAN), Hiber-Hughes (ABAQUS), Ланцоша (ANSYS). При розрахунку динамічного відгуку використовуються методи: подання розв'язання у вигляді суперпозиції форм власних коливань, крокові - Вілсона, Ньюмарка (ABAQUS, ADINA, SAP-7, NASTRAN). Розв'язання геометрично і фізично нелінійних задач здійснюється, як правило, ітераційними методами, основу яких складає метод Ньютона-Рафсона в поєднанні із кроковими методами (ABAQUS, ADINA, NASTRAN, ANSYS та ін.).

Необхідно відзначити, що принцип модульного програмування, який використовується в програмних комплексах, дозволяє створювати як універсальні обчислювальні програми, так і промислові для вирішення вузького класу задач. На перших етапах освоєння МСЕ розроблялися в основному промислові обчислювальні програми. Вони ефективні, якщо розв'язується велика кількість варіантів однотипних задач або виконується великий

об'єм обчислень для якісного і кількісного дослідження явищ, які пов'язані з новим поставленням задачі. Тенденція розвитку обчислювальної техніки, що привела до створення персональних ЕОМ і нових інформаційних технологій, зробила вплив на розроблення програмного забезпечення МСЕ. Програмні комплекси за МСЕ активно використовуються у системах автоматизованого проектування, які базуються на персональних ЕОМ (AutoCAD/MechanicalDesktop, Pro-Engineer).

Сучасні програмні комплекси, в яких використовується МСЕ, дозволяють одержувати наближені чисельні розв'язання при розрахунку конструкцій на статичні і динамічні навантаження для широкого класу матеріалів з різними механічними характеристиками і поведінкою. Розрахунок конструкцій на статичні навантаження може проводитися з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності, температурних полів, взаємодії з іншими середовищами (наприклад, з рідиною). Проводиться розрахунок критичних навантажень, при яких конструкція або її елементи втрачають стійкість та поведінку конструкції після втрати стійкості. МСЕ дозволяє також визначити навантаження, при яких відбувається руйнування конструкції. Враховуються такі властивості матеріалу, як анізотропія, нелінійна пружність, пластичність, текучість. Враховуються види геометричної

нелінійності: великі деформації і великі переміщення. Основними динамічними задачами є: розрахунок власних коливань конструкції; динамічний відгук на навантаження, який залежить від часу.

Як приклад, у наступних розділах буде розглянуто використання сучасного універсального програмного комплексу ANSYS для вирішення актуальних інженерних задач [7].

2 Загальні положення програмного комплексу ANSYS

Навантаження.

Існує п'ять категорій навантажень:

- 1) закріплення - задані значення ступенів вільності, такі, як переміщення у структурному аналізі;
- 2) зосереджені навантаження - точкові навантаження, такі, як сили;
- 3) поверхневі навантаження - навантаження, розподілені по поверхні, такі, як тиск;
- 4) об'ємні навантаження - навантаження, такі, як температури, що викликають об'ємне розширення, або внутрішні джерела тепла;
- 5) інерційні навантаження - навантаження від маси конструкції або інерції, такі, як сила тяжіння, обертальна швидкість.

Завжди корисно перевіряти "логічність" і прийнятність розв'язання. Що необхідно перевіряти, залежить від типу вирішуваної задачі. Тут декілька основних питань для контролю:

- 1) перевірка балансу між реакціями і прикладеними навантаженнями;
- 2) перевірка розміщення максимумів напружень, місць сингулярностей, таких, як точкові навантаження або вхідний кут, де часто значення не мають сенсу або не є цікавими;
- 3) перевірка значень напружень, які не повинні перевищувати межу пружності. Якщо вони перевищують цю межу, то величина навантаження помилкова або необхідно виконати нелінійний аналіз.

Сітка.

Перевірити адекватність сітки можна за допомогою оцінки похибки.

Інший спосіб перевірки адекватності сітки:

- 1) відбийте результати роз'язку в елементах (неусереднені напруження) і знайдіть елементи з високим градієнтом напружень. Ці регіони - кандидати на згущування сітки;
- 2) якщо є значна відмінність між вузловими (усередненими) і елементними (неусередненими) напруженнями, то сітка дуже груба;

3) так само, якщо є значна відмінність між зображеннями напружень в режимах PowerGraphics і Full graphics, то сітка дуже груба;

4) згустіть сітку в два рази, обчисліть і порівняйте результати. (Цей спосіб не завжди можна реалізувати на практиці.)

Сингулярності напружень.

Сингулярності напружень - місця в скінченно-елементній моделі, в яких величини напружень нескінченні.

Приклади:

- 1) навантаження в точках, такі, як сили або моменти;
- 2) окрема закріплена точка, в якій сили реакції подібні до точкового навантаження;
- 3) гострий вхідний кут (з нульовим радіусом округлення).

Реальні конструкції не мають зон сингулярностей напружень. Ці зони - штучне явище, яке викликане спрощеннями розрахункової моделі. Так що ж робити із зонами сингулярності напружень? Якщо вони розміщуються далеко від регіону, який нас цікавить, можна просто ігнорувати їх, виключивши непотрібну зону при перегляді результатів. Якщо вони розміщуються в регіоні, який є цікавим, необхідно внести корективи, такі, як:

- округлити гострий вхідний кут і виконати розрахунок знову;

- замінити точкове навантаження еквівалентним розподіленим тиском;

- розподілити закріплення переміщень з одного на декілька вузлів.

Із збільшенням густини сітки в зоні сингулярності значення напружень зростають, але ніколи не досягають певної межі.

Плоска задача.

Плоский напружений стан (Plane stress) - маються на увазі нульові напруження у напрямку осі Z . Така задача підходить для компонентів, у яких розмір по осі Z менший за розміри по осях X і Y . Деформація по осі Z у цьому випадку не дорівнює нулю. Можливе задання товщини (по осі Z). Використовується для конструкцій, типу плоских панелей, які навантажені у площині (рис. 1), або тонкостінних дисків під тиском або відцентровим навантаженням.

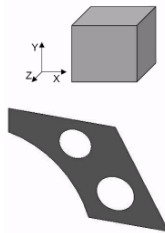


Рисунок 1 – Приклад пластини, яка може розглядатися у плоскому напруженому стані

Плоскі деформації (Plane strain) – маються на увазі нульові деформації у напрямку осі Z . Підходить для компонентів, у яких розмір по осі Z набагато більше розмірів по осях X і Y . У цій задачі напруження по осі Z не дорівнюють нулю. Використовується для довгих конструкцій з постійним поперечним перетином типу балок (рис. 2).

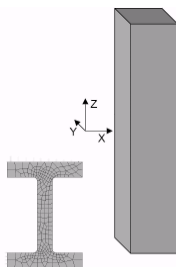


Рисунок 2 – Приклад бруса, який підходить для аналізу плоскої деформації

Осесиметричний елемент (Axisymmetry) – мається на увазі, що 3-D модель та її навантаження можуть бути створені шляхом обертання 2-D перетину на 360° навколо осі Y . Вісь симетрії повинна збігатися з віссю Y глобальної системи координат. Від'ємні значення координат X не допускаються. Напрямок Y - осьовий, напрям X - радіальний, напрям Z - окружний.

Окружні переміщення дорівнюють нулю; окружні напруження і деформації звичайно дуже важливі. Використовується для судин під тиском (рис. 3), прямолінійних труб, валів і т.д.

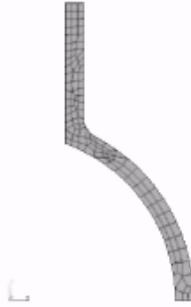


Рисунок 3 – Приклад осесиметричної моделі

Параметричне моделювання.

APDL - походить від *ANSYS Parametric Design Language* (мова параметричного моделювання ANSYS), це мова сценаріїв, що дозволяє параметризувати моделі і автоматизувати найзагальніші задачі. Використовуючи APDL, можна:

- 1) вводити розміри моделі, властивості матеріалів і т.д.;
- 2) у термінах параметрів, а не числами одержувати інформацію з бази даних ANSYS, таку, як координати вузлів, максимальні напруження і т.д.;
- 3) виконувати математичні операції над параметрами, включаючи векторні і матричні операції;
- 4) визначати аббревіатури (скорочення) для часто використовуваних команд або макросів;
- 5) створювати макроси для виконання послідовності дій з використанням умовних переходів (if-then-else), циклів (do-loop), які призначені для введень користувача.

Для визначення параметра використовується формат **Name=Value (Им'я=Значення)**.

Це може бути набрано у вікні введення або в діалозі **Scalar Parameters** (Скалярні параметри) (**Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters...**)

Им'я параметра – буквено-цифрове позначення завдовжки до 8 символів. Значенням може бути: число, раніше введений параметр, математична функція, параметричний вираз або буквенний рядок (рис. 4).

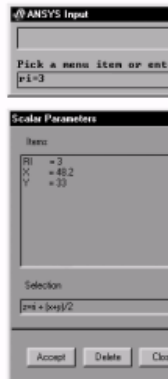


Рисунок 4 – Вікно для введення скалярних параметрів

Вище розглядалися *скалярні параметри*, які мають єдине значення або числове, або рядкове. ANSYS також підтримує *масиви (array parameters)* - це параметри, які містять в собі множину значень. Доступні числові і рядкові масиви.

Для отримання інформації з бази даних і передачі її параметра використовується команда ***GET** або **Utility Menu > Parameters > Get Scalar Data...** (рис. 5).



Рисунок 5 – Вікно для отримання параметрів із бази даних

Вирішувачі.

Призначення *вирішувача (solver)* – розв’язання системи лінійних сумісних рівнянь, які описують ступені вільності системи. Час розв’язання може бути від декількох секунд до декількох годин залежно від розміру моделі і швидкодії комп’ютера. Для лінійного статичного аналізу з одним кроком навантаження потрібно тільки одне таке розв’язання, тоді як для нелінійного або динамічного аналізів можуть бути потрібні десятки, сотні і навіть тисячі таких розв’язань. Тому тип вирішувача, який буде вибрано, дуже важливий. Доступні в ANSYS вирішувачі можуть бути зведені до двох типів:

1) *прямі (Direct elimination)* вирішувачі:

- Frontal;

i Sparse;

2) *ітераційні (Iterative)* вирішувачі:

- PCG (Pre-conditioned Conjugate Gradient);
- ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient);
- JCG (Jacobi Conjugate Gradient).

Прямі вирішувачі розв'язують таким чином:

1) формулюються матриці окремих елементів;
2) прочитуються ступені вільності (DOF) для першого елемента;

3) виключаються будь-які DOF, які мають відоме значення, або які можуть бути виражені у термінах інших DOF, потім рівняння записується у файл з розширенням `.tri`. DOF, які залишилися, складають ширину фронту (wavefront);

4) повторюються кроки 2 і 3 для всіх елементів, поки не буде виключено всі DOF. Тоді файл з розширенням `.tri` буде містити в собі трикутну матрицю (triangularized matrix);

5) рішення за DOF знаходиться зворотною підстановкою (back substitution), потім використовуються матриці елементів для обчислення результатів в елементах.

Ширина фронту (wavefront - числа DOF, які не можуть бути виключені в процесі тріангуляції. Вона збільшується і зменшується в процесі розв'язання і у результаті дорівнює нулю, коли вже виключено всі DOF. Ширина фронту прямо впливає на час розв'язання задачі: чим більше ця величина,

тим довше час розв'язання. Переупорядкування елементів — вибір певного порядку, в якому елементи оброблятимуться вирішувачем, — може зменшити ширину фронту. ANSYS автоматично виконує переупорядкування елементів перед початком розв'язання.

Ітераційні вирішувачі одержують розв'язання таким чином:

- 1) формулюються матриці окремих елементів;
- 2) збирається глобальна матриця жорсткості;
- 3) на початку розв'язання беруться нульові значення для всіх DOF, і ітерації тривають до отримання збіжності (базуючись на заданому допуску залишкової сили);
- 4) використовуються матриці елементів для обчислення результатів в елементах.

Головна відмінність між ітераційними вирішувачами в ANSYS — PCG, JCG, ICCG — тип методу попереднього формування глобальної матриці.

Спеціальні можливості отримання результатів розрахунку.

Запит вказівкою (Query picking) дозволяє досліджувати в моделі напруження, переміщення або інші результати у зазначеному місці. За допомогою цього методу також можна швидко знайти в моделі місця максимуму і мінімуму величини, яка вивчається.

Доступно тільки в інтерактивному режимі (команди немає):

General Postproc > Query Results > Nodal або Element або Subgrid Solu...

Виберіть величину і натисніть **ОК** (рис. 6).

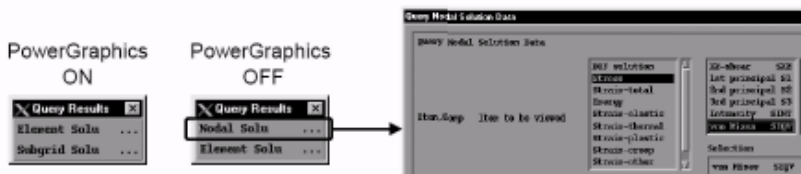


Рисунок 6 – Отримання даних розрахунку за допомогою Query Results

Потім вкажіть будь-яку точку в моделі для перегляду значень результатів у цій точці. Кнопки **Min** і **Max** показуватимуть значення в точках мінімуму і максимуму. Використовуйте кнопку **Reset** для очищення екрана перед повторним вибором. Зазначте, що номер об'єкта, його координати і значення результату показані в меню вказівки.

Інший спосіб перегляду результатів дії з траєкторією (Path operations), - який дозволяє:

- аналізувати результати уздовж довільної траєкторії на моделі;
- виконувати математичні операції уздовж траєкторії, включаючи інтеграцію і диференціювання;

- виводити зображення, які відображають зміну результатів уздовж траєкторії.

Доступно тільки для моделей, які містять 2-D або 3-D об'ємні або оболонкові елементи.

Три кроки для створення зображення уздовж траєкторії:

- визначення траєкторії;
- визначення даних уздовж траєкторії;
- відображення даних.

1 Визначення траєкторії. Потрібна така інформація:

- точки, які визначають траєкторію (від 2 до 1000);
- вузли або координати на робочій площині;
- кривина траєкторії, яка визначається у активній системі координат (CSYS);
- ім'я траєкторії.

Активізуйте потрібну систему координат (CSYS).

**General Postproc > Path Operations > Define Path > By Nodes
або On Working Plane**

Вкажіть вузли або координати робочої площини (WP), яка визначає необхідну траєкторію і натисніть кнопку **ОК**. Введіть ім'я траєкторії. Значення полів **nSets** і **nDiv** здебільшого випадків краще за все залишати без зміни.

2 Визначення даних уздовж траєкторії

General Postproc > Path Operations > Map onto Path... (або команда **PDEF**)

Виберіть потрібну величину, наприклад, *SX*. Введіть мітку для величини, яка використовуватиметься в зображеннях і лістингу. Тепер можна відобразити траєкторію, якщо це необхідно.

General Postproc > Path Operations > Plot Paths

(або використовуйте команду **/PBC,PATH,1** разом з командами **NPLOT** або **EPLOT**)

З Відображення даних

Можна відображати величини уздовж траєкторії або у вигляді графіка:

PLPATH або **General Postproc > Path Operations > On Graph...**

або уздовж геометрії траєкторії:

PLPAGM або **General Postproc > Path Operations > On Geometry...**

Визначення похибок розрахунку.

У скінченно-елементному розв'язанні напруження обчислюються на по-елементній основі, тобто напруження окремо розраховуються в кожному елементі. Проте при відображенні *вузлових* напружень в **POST1** відображаються згладжені кольорові контури, тому що напруження усереднюються у вузлах. Якщо відображаються *елементні*

рішення, то виводяться усереднені дані і на зображеннях видно розриви кольорових контурів на межах елементів.

Відмінність між усередненими і неусередненими напруженнями свідчить про якість сітки. На основі цього будуються оцінки похибки (*error estimation*) (рис. 7).

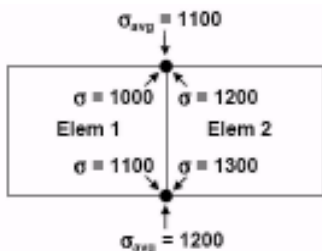


Рисунок 7 – Оцінка похибки

Оцінка похибки доступна тільки в POST1 і лише для:

- лінійного статичного аналізу міцності;
- об'ємних (2-D і 3-D) і оболонкових елементів;
- графічного режиму **Full graphics** (не **PowerGraphics**);

Якщо не забезпечуються ці умови, ANSYS автоматично відключає оцінку похибки. Для включення/відключення оцінки похибки використовуйте **ERNORM.ON/OFF** або **General Postproc > Options for Outp.**

POST1 обчислює такі величини похибки. Структурний аналіз:

- percentage error in energy norm (SEPC) (відсоток похибки у нормі енергії);

- element stress deviations (SDSG) (відхилення напружень в елементі);

- element energy error (SERR) (похибка енергії елемента);

max і min межі напружень (SMXB, SMNB).

Відсоток похибки у нормі енергії (SEPC) - приблизна оцінка похибки напружень (або переміщень) у вибраному наборі елементів. Може використовуватися для порівняння подібних моделей структур з подібними навантаженнями. **SEPC** - відображається у легенді при зображенні деформованого стану. Її значення можна також переглянути за допомогою команди **PRERR** або **GeneralPostproc > List Results > Percent Error**.

На практиці необхідно прагнути, щоб значення **SEPC** не перевищувало 10%. Якщо воно вище, тоді визначте точки сингулярності напружень (навантаження/закріплення в точках) і виключіть елементи в їх околі. Якщо все одно похибка вище, відобразіть зображення похибки енергії елемента. Елементи з високим рівнем похибки енергії - кандидати на покращання сітки (рис. 8).

Відхилення напружень в елементі (SDSG) - величина, яка показує, наскільки напруження в елементах не збігаються з усередненими напруженнями в їх вузлах. **SDSG** можна відобразити у вигляді кольорових контурів за допомогою

PLESOL.SDSG або General Postproc > Plot Results > Element Solu...

Великі значення похибки **SDSG** є необов'язково негативним фактом, особливо якщо це є малий відсоток від номінальних напружень у структурі. Наприклад, в цій моделі (рис. 9) відхилення напружень у потрібній зоні становить лише 1.5%.

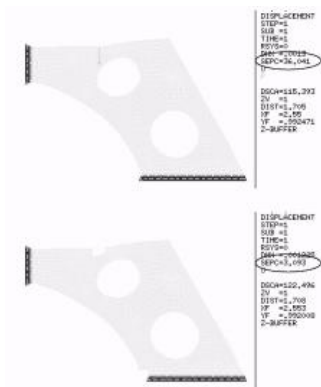


Рисунок 8 – Приклад оцінки похибки SEPC

Похибка енергії елемента (SERR) - енергія, яка пов'язана з невідповідністю напружень у вузлах елемента. Це базова величина, з якої розраховується решта оцінок похибки. **SERR** має розмірність енергії. Для відображення **SERR** у вигляді кольорових контурів використовуйте команду **PLESOL.SERR** або **General Postproc > Plot Results > Element Solu...**

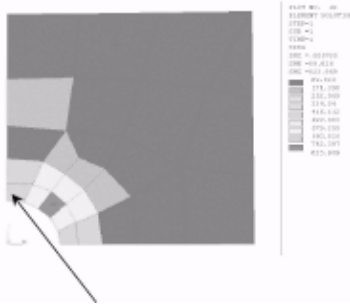


Рисунок 9 – Оцінка похибки SDSG

Звичайно, елементи з високим рівнем похибки **SERR** – кандидати на поліпшення сітки. Проте оскільки величина **SERR** буде завжди найбільшою в зонах сингулярності напружень, то спочатку виключіть ці елементи.

Межі напружень (SMXB і SMNB). Межі напружень можуть допомогти визначити потенційний вплив похибки дискретизації сітки на величину максимального напруження. Вони відображаються у легенді кольорових зображень напружень як **SMXB** (верхня межа) і **SMNB** (нижня межа). Ці межі не оцінюють дійсні максимуми і мінімуми, але визначають доверительну область. Без інших додаткових перевірок немає підстав довіряти тому, що істинний максимум напружень буде нижчим за **SMXB**. Попередження: якщо не виключені елементи поблизу зон сингулярності напружень, використання меж напружень немає сенсу, як показано на рисунку 10.

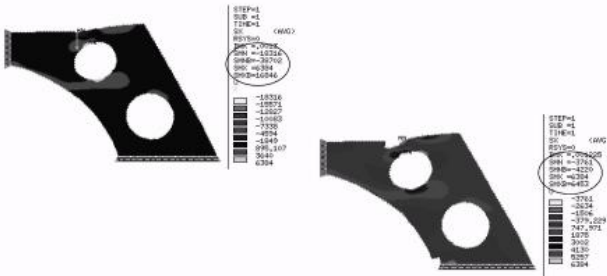


Рисунок 10 – Оцінка меж напружень

3 Розв’язання контактних задач

Розгляд контактних задач завжди виноситься в окремий розділ, оскільки вони мають деяку специфіку. Специфіка ця полягає у тому, що область прикладення контактного тиску заздалегідь не відома. Вона визначається у процесі ітераційного розв’язання відповідних рівнянь. Для інженера-конструктора при розв’язанні контактної задачі за допомогою ANSYS необхідне вміння гнучко використовувати достатньо широкі засоби системи [8].

У ANSYS для розв’язання контактних задач використовуються спеціальні елементи і безліч опцій. Як правило, задача не вимагає перевизначення значень параметрів, які виставляються "за замовчуванням", окрім коефіцієнта тертя. Тому ми детально не розглядатимемо можливості перевизначення параметрів контакту. Наведемо тільки короткий опис дійсних сталих, які є в установках

контактної пари (**Add Contact Pair – Settings - Parameters**) (рис. 11).

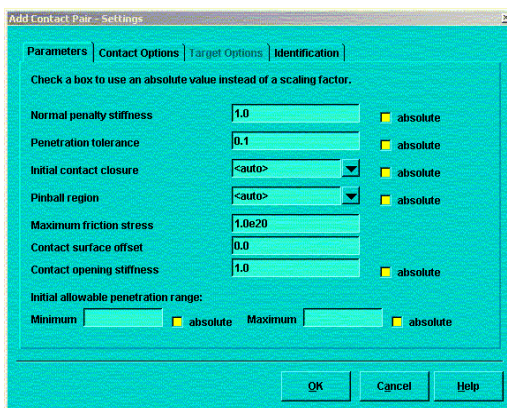


Рисунок 11 – Вікно для задавання дійсних сталих

Задавання дійсних сталих:

1) **normal penalty stiffness** - встановлює значення для дійсної константи FKN, яка визначає масштабний коефіцієнт або абсолютне значення для нормальної контактної жорсткості. Значення масштабного коефіцієнта звичайно знаходиться між 0.01 і 10; значення 1 - добре початкове значення для задач з обертанням або 0.01 - 0.1 -для задач вигину;

2) **penetration tolerance** - встановлює значення для дійсної константи FTOLN, яка використовується разом з методом Лагранжа. FTOLN визначає допустиме максимальне проникнення для методу Лагранжа. Це множник, що базується на товщині елемента, який використовується для розрахунку допустимого проникнення (межа максимального проникнення);

3) **initial contact closure** - встановлює значення для речовинної константи ICONT, яка визначає чинник початкової замкнутості (тобто величину зазора, при якій контакт вважається замкнутим);

4) **pinball region** - встановлює масштабний коефіцієнт або абсолютне значення для речовинної константи PINB. Визначає радіус області пошуку контактної пари ("pinball region");

5) **maximum friction stress** - встановлює абсолютне значення або масштабний коефіцієнт для межі зсувного напруження тертя. Значення за замовчуванням $1,0E20$;

6) **contact surface offset** - встановлює дійсну константу CNOF. Називає додатну або від'ємну величину зсуву, яка використовується до контактної поверхні;

7) **contact opening stiffness** - встановлює абсолютне значення або масштабний коефіцієнт для дійсної константи FKOP. Називає коефіцієнт жорсткості, який використовується у той момент, коли контакт відкритий;

8) **initial allowable penetration range** - встановлює абсолютне значення або масштабний коефіцієнт для дійсних констант PMAX і PMIN. Визначають допустимий рівень проникнення при початковому проникненні;

9) **TAUMAX** - задає максимальне контактне тертя;

10) **ФКТ** - встановлює тангенціальну контактну жорсткість;

11) **СОНІ** - встановлює величину сил тертя спокою (the cohesion sliding resistance).

Відзначимо, що значення опцій не роблять ніякого впливу на послідовність і хід розв'язання задачі:

- 1 Створення геометричної моделі і розбиття.
- 2 Визначення контактних пар.
- 3 Призначення контактної поверхні і поверхні проникнення.
- 4 Створення контактних пар на названих поверхнях.
- 5 Визначення опцій і дійсних сталей для елементів (для контактних елементів це необхідно, коли вони визначаються користувачем вручну).
- 6 Накладення обмежень на переміщення деталей, які взаємодіють, і прикладення навантажень до них.
- 7 Розв'язання контактної задачі.
- 8 Перегляд результатів.

Розв'язання контактних задач не є чимось особливим. Підкреслимо відразу, що при розв'язанні контактної задачі від інженера вимагається на першому етапі заздалегідь оцінити максимальну область і виділити поверхню контакту, щоб використовувати контактні елементи тільки на цій ділянці, а не на всій поверхні.

Найбільшу складність викликає отримання епюри контактного тиску, якщо взаємодіють не плоскі поверхні. Про це свідчать публікації, які стосуються розв'язання контактних задач в ANSYS. У зв'язку з цим відзначимо, що хоча максимальну область контакту можна оцінити практично завжди, проте яка вона буде насправді - дослідник не знає. З іншого боку, зрозуміло, що якщо область контакту розбита на елементи, то розміри області контакту при ітераційному (покроковому) розв'язанні задачі змінюються стрибком на величину відповідного контактного елемента. Тому щоб одержати коректний розподіл контактного тиску, необхідно на етапі розбиття у області контакту біля точки або лінії початкового контакту максимально згущувати сітку. Справа в тому, що контактні елементи відповідають за розмірами граням скінченних елементів, які виходять на поверхню деталі у області контакту. Даний підхід усуне всі конфліктні ситуації.

Contact Manager об'єднав візуалізацію і призначення контактних пар в єдиний інтерфейс (рис. 12).

Методи розв'язання контактних задач:

- 1) штрафний метод;
- 2) розширений метод Лагранжа;
- 3) метод множників Лагранжа.

Контакт в ANSYS можна моделювати трьома типами скінченних елементів:

- 1) поверхня-поверхня Surface-to-surface (SS);
- 2) вузол-поверхня (NS) Node-to-surface;
- 3) вузол-вузол (NN) Node-to-node.

ID	Contact Behavior	Exclude everything	Type
34	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
35	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
36	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
37	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
40	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
43	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
47	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
50	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
53	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface
54	Bonded (always)	Exclude everything	Surface-to-Surface

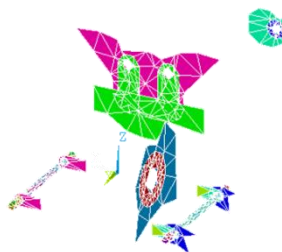


Рисунок 12 – Вікно Contact Manager

Крім того, контактуючі тіла можуть бути або жорсткими (rigid), або гнучкими (flexible), що поділяє задачі на два класи.

1 Rigid-to- flexible (жорстко-гнучкий).

Одна поверхня моделюється абсолютно жорсткою – немає ні деформацій, ні напружень, за винятком зсувів як жорсткого тіла (rigid-body motions). Застосовується лише тоді, коли одна поверхня значно жорсткіше і напруження в “жорсткому” тілі не цікавлять.

2 Flexible-to-flexible (гнучкий-гнучкий).

Обидва тіла складаються із скінченних елементів, які деформуються. Кожний із трьох типів скінченних елементів підтримує обидва класи задач.

NS - скінченний елемент використовуються, коли одна точка контактує з поверхнею довільної форми:

- 1) за допомогою множини NS - скінченних елементів можна змоделювати контакт між ребром і поверхнею (рис. 13);
- 2) зона контакту може бути наперед не відома;
- 3) поверхні можуть мати різне розбиття;
- 4) підтримується велике взаємне ковзання;
- 5) враховуються великі деформації і повороти.

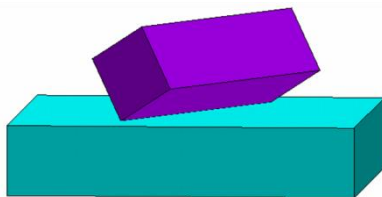


Рисунок 13 - Контакт між ребром (тобто лінією) і поверхнею

NN - скінченний елемент застосовуються, коли точка вступає в контакт з іншою конкретною точкою. При цьому необхідно точно задати зону контакту при створенні моделі. При моделюванні контакту двох багатоелементних поверхонь необхідно використовувати множину NN - скінченних елементів. Розбиття поверхонь повинне збігатися. Взаємне ковзання повинне залишатися малим. Можна використовувати тільки при малих кутах повороту (рис. 14).

За допомогою контактних скінченних елементів вузол-вузол можна моделювати контакт між поверхнями, наприклад, з пружною основою (foundation-to-soil interaction).

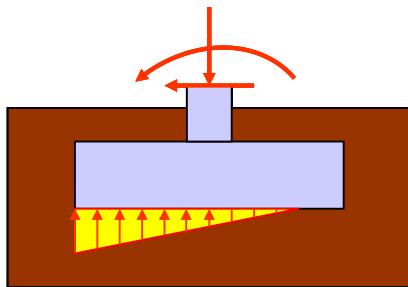


Рисунок 14 – Моделювання контакту між поверхнями з пружною основою за допомогою контактних скінченних елементів вузол-вузол

Всі контактні скінченні елементи в ANSYS для досягнення сумісності на стику використовують штрафну жорсткість (контактну жорсткість).

Пружина зміститься на величину Δ відповідно до рівняння рівноваги (рис. 15)

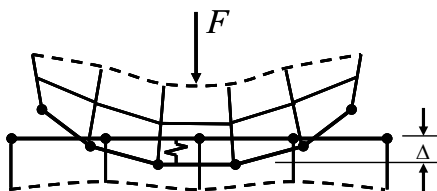


Рисунок 15 – Нормальна контактна жорсткість стику

$$F = k \Delta,$$

де k - нормальна контактна жорсткість.

Для встановлення рівноваги потрібна незначна величина проникнення (penetration), $\Delta > 0$. Фізично, проте, проникнення відсутнє ($\Delta = 0$). Виникає дилема. Мінімальне проникнення підвищує точність, отже, контактна жорсткість повинна бути дуже великою. Разом з тим надмірна жорсткість погіршує збіг. Можуть бути осциляції з “відскоком” тіл одно від одного (рис. 16).

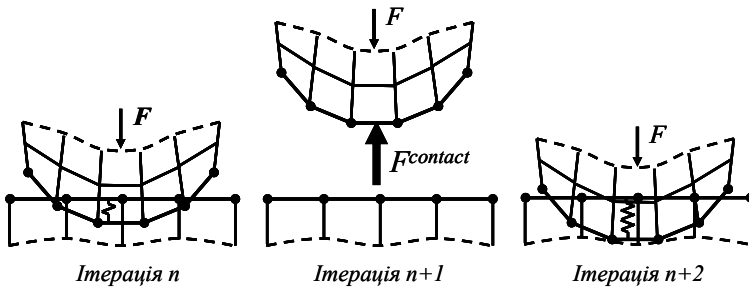


Рисунок 16 – Осциляції при розв’язанні контактної задачі

Контактна жорсткість - важливий параметр, який впливає і на точність, і на збіг. Необхідно акуратно підбирати значення контактної жорсткості і додержуватися балансу між добрим збігом і точністю. Найкраще значення контактної жорсткості залежить від конкретної задачі і часто визначається “методом проб і помилок”.

Крім нормальних сил (тиску), контактні скінченні елементи також передають і дотичні сили (тертя). Контактні скінченні елементи використовують *дотичну штрафну жорсткість* для сумісності в тангенціальному напрямку. *Дотична штрафна жорсткість* впливає на збіжність і точність точно так, як і *нормальна штрафна жорсткість* (рис. 17).

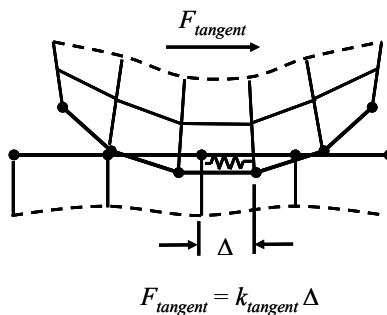


Рисунок 17 - Дотична контактна жорсткість стику

Для визначення відповідної штрафної жорсткості необхідне деяке експериментування. Для SS - скінченних елементів штрафна жорсткість визначається у формі множника на значення, яке визначається, виходячи з жорсткості елементів, які контактують. Спершу спробуйте $FKN = 1,0$ при контакті “твердих” тіл, $FKN = 0,01-0,1$ - для гнучкіших (з переважанням вигину) частин моделі. Як альтернатива, можна прямо задати жорсткість в розмірності (сила/довжина)/площа. NN – скінченні елементи (виключаючи CONTA178) і NS - контактні скінченні елементи вимагають

введення абсолютного значення штрафної жорсткості KN . Спершу задайте: для малих деформацій $0,1E < KN < 1,0E$, при вигині $0,01E < KN < 0,1E$, де E - модуль пружності.

Можна рекомендувати таку процедуру визначення жорсткості:

- 1) спершу використовуйте малу жорсткість;
- 2) виконайте розрахунок з малою частиною загального навантаження;
- 3) перевірте проникнення і кількість ітерацій на кожному підкроці.

У постпроцесорі візуально необхідно перевірити проникнення. Якщо воно надмірне, збільшіть жорсткість і повторіть розрахунок. Якщо для збіжності потрібно дуже багато ітерацій (або вона взагалі не досягнута), зменшіть жорсткість і повторіть розрахунок. Зазначимо, що штрафна жорсткість може змінюватися між кроками навантаження, а також може бути змінена при рестарті. Необхідно пам'ятати, контактна жорсткість - найважливіший параметр, який впливає і на збіг, і на точність. Якщо виникають проблеми із збігом, зменшіть жорсткість і повторіть розрахунок. Для надійності необхідно провести аналіз чутливості (sensitivity study), змінюючи величину штрафної жорсткості. Змінюйте жорсткість до того часу, поки найважливіші результати

(контактний тиск, максимальні еквівалентні напруження SEQV і т.д.) не перестануть помітно змінюватися.

Ті самі рекомендації з приводу точності і збіжності стосуються і вибору тангенціальної штрафної жорсткості. Дуже м'яка величина знижує точність. Дуже жорстка погіршує збіжність. Найкраще значення визначається також методом проб і помилок. Спершу використовуйте $k_{\text{tangent}} = 0,01k_{\text{normal}}$, що прийняте за замовчуванням для більшості типів контактних скінченних елементів. Зрозуміло, тангенціальне напруження обмежується зверху значенням, при якому виникає прослизання

$$\tau \leq f p,$$

де f – коефіцієнт тертя; p – нормальний тиск.

У ANSYS тертя моделюється за законом Амонтона з урахуванням зчеплення і зрушення.

Закон Кулона - це макроскопічна модель, що встановлює, що еквівалентна тангенціальна сила FT, яка виникає між двома тілами, не може перевищити деякої частки нормальної сили FN: $F_T \leq f F_N$. Якщо FT перевищена, тіла почнуть ковзати одне відносно одного. Контакт з урахуванням тертя породжує несиметричну матрицю жорсткості. Використання несиметричних вирішувачів обчислювально

“дороще”, ніж симетричних. Тому ANSYS використовує алгоритм “симетризації”, за допомогою якого можна розв’язати більшість таких задач. Якщо спостерігається повільний збіг, знадобиться опція несиметричного рішення (NROPT, UNSYM). В цьому випадку ви повинні використовувати або *sparse* (рекомендується), або *frontal* - вирішувачі, які автоматично перемкнуться на несиметричний варіант за наявності несиметричних матриць. Вирішувач PCG не придатний для несиметричних матриць.

Нагадаємо, що можна поліпшити збіг і підвищити точність, якщо розбити навантаження на додаткові кроки. За замовчуванням ANSYS автоматично визначає збільшення навантаження і використовує автоконтроль кроку (*automatic time stepping feature*). Розмір кроку збільшується і зменшується для досягнення балансу між надійним збігом, точністю і загальною ефективністю розв’язання. Більше число substeps (дрібні кроки) покращує збіг і точність. Разом з тим надмірне число малих кроків погіршить ефективність.

Для визначення переміщень та великих поворотів жорсткої поверхні rigid target surface може бути визначений «пілотний вузол» (pilot node). Pilot node повинен бути пов’язаний з іншими скінченними елементами. Для задання маси жорсткого тіла необхідно створити точкову масу

(MASS21) в pilot node. Кожна жорстка поверхня може мати лише один «пілотний вузол» pilot node (рис. 18).

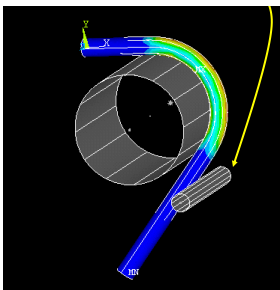


Рисунок 18 – Моделювання згинання труби за допомогою жорстких та гнучкої поверхонь

Зупинимося на найпростішому (у значенні використання у роботі засобів GUI (графічного інтерфейсу)) і могутнішому способі розв’язання контактних задач - використанні скінченних контактних елементів типу "поверхня-поверхня".

Використання елементів типу "поверхня-поверхня" для розв’язання контактної задачі

Можна використовувати контактні елементи типу "поверхня-поверхня" як для моделі контакту жорсткої і деформованої поверхні, так і для вирішення контактної задачі для двох поверхонь, які деформуються. Створити контактні пари можна за допомогою засобів графічного інтерфейсу, а саме, використовуючи засоби **Contact Wizard. Contact**

Wizard стає доступним при використанні наступного пункту головного меню

Main Menu > Preprocessor > Create > Contact Pair > Contact Wizard

Contact Wizard буде свого роду провідником у процесі створення контактних пар. Рисунки пояснень і довідкові відомості, доступні при натисненні кнопки Help, допоможуть вам правильно орієнтуватися в процесі створення контактних пар.

Зауваження: "Contact Wizard" не доступний, якщо ви не розбили на скінченні елементи яку-небудь частину вашої моделі. Якщо ви бажаєте створити модель контактної взаємодії жорсткої поверхні і тієї, що деформується, то вам необхідно розбити на елементи тільки ті частини моделі, які використовуватимуть контактні елементи, які деформуються, не розбиваючи при цьому поверхню проникнення перед використанням Contact Wizard.

При використанні названого вище пункту меню вам стає доступно перше діалогове вікно Contact Wizard (рис. 19), а саме, перше вікно Add Contact Pair (рис. 11). У ньому надається можливість графічно призначити локалізовані контактні поверхні і поверхні проникнення.

Яка поверхня в ANSYS є поверхнею проникнення?

Для контакту жорсткої поверхні з поверхнею, що деформується: поверхня проникнення завжди жорстка, а контактна поверхня завжди деформується. Для контакту двох тіл, які деформується, неправильний вибір відповідності поверхонь може спричинити втрату точності при визначенні проникнення і, отже, точність розв'язання задачі. Існують такі правила визначення поверхонь:

1 Якщо випукла поверхня проникає в плоску або увігнуту поверхню, то остання повинна бути вибрана як поверхня проникнення.

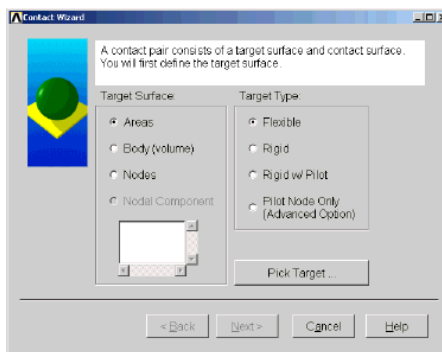


Рисунок 19 – Вигляд вікна Contact Wizard

2 Якщо одна поверхня має дрібне розбиття, а друга - грубе, то друга повинна бути призначена поверхнею проникнення.

3 Жорсткіша поверхня повинна бути поверхнею проникнення.

4 Якщо одна з поверхонь значно більша за іншу, то вона повинна бути поверхнею проникнення.

Призначення контактних пар.

Необхідно відзначити, що процес призначення контактних пар повинен починатися з вказівки того, з яким саме типом компонент ("за замовчуванням", лініями або поверхнями, залежно від розмірності твердотільної моделі) працюватиме Contact Wizard. Після цього можна переходити безпосередньо до призначення поверхні проникнення з використанням кнопки Pick Target. Використовуючи курсор або за допомогою безпосереднього введення номерів компонент, можна вибрати лінії, які потрібні, або поверхні, а за допомогою вікна графічного вибору Select Line for Target (або Select Area for Target) підтвердити вибір за допомогою кнопки ОК або відредагувати вибір.

Після успішного вибору поверхні проникнення необхідно натиснути кнопку Next> і перейти до вибору контактних пар за допомогою другого вікна Add Contact Pair. Тут також необхідно зазначити тип компонент, з якими працюватиме ANSYS. У цілому процедура така сама, як і у разі вибору поверхонь проникнення. Підтвердити закінчення вибору необхідно за допомогою кнопки ОК. Після цього також необхідно натиснути кнопку Next> і перейти до визначення

параметрів контактної взаємодії і безпосередньо до створення контактних пар.

Необхідно відзначити, що в третьому вікні Add Contact Pair надається можливість відредагувати тільки коефіцієнт тертя, проте із збільшенням досвіду можна перейти до самостійного визначення решти параметрів, які стають доступними при натисненні кнопки Optional settings.... Таким чином, відредагувавши коефіцієнт тертя, можна натиснути кнопку Create> або кнопку <Back і повернутися до попередніх етапів для коригування зробленого раніше вибору.

Після створення контактних пар **Contact Wizard** надає можливість коригування положення нормалі. "Грубо" кажучи, нормалі до контактної поверхні і поверхні проникнення на всіх ділянках, на яких створені контактні пари, повинні бути спрямовані одна на одну, тоді все визначено правильно. Якщо на якій-небудь ділянці це не так, то необхідно внести виправлення. Після закінчення натиснути кнопку Finish. Таким чином, створення контактних пар закінчено.

4 Теоретичні основи розв'язання контактної задачі

Розв'язання тривимірної контактної задачі теорії пружності можна звести до розв'язання простішої задачі в двовимірному поставленні, що істотно спрощує аналіз контактних явищ. Як відомо, в загальному випадку

напружено-деформований стан системи пружних тіл, які взаємодіють, описується системою диференціальних рівнянь рівноваги двовимірної осесиметричної задачі в декартовій системі координат rz у такому вигляді [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Границя L даної області контакту складається з вільних ділянок контура L_s і з взаємодіючих ділянок L_c , передбачуваних зон контакту. На контурі L вважаються відомими компоненти переміщень або напружень, або формулюються змішані граничні умови.

Для точок, які лежать на лінії поділу L_c контактуючих ділянок, граничні умови не можуть бути наперед задані однозначно і формулюються у вигляді нерівностей

$$\begin{aligned} u_n^{i-1} + u_n^{i+1} - \delta_n^i &\leq 0; \quad \sigma_n^i \leq 0; \\ (u_n^{i-1} + u_n^{i+1} - \delta_n^i) \sigma_n^i &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $u_n^{i-1}, u_n^{i+1}, \delta_n^i$ - переміщення точок контура тіл, які взаємодіють, і початковий зазор (натяг) у напрямку додатних нормалей контактуючих ділянок;

σ_n^i - напруження взаємодії тіл у напрямку до нормалі n .

Перша нерівність (2) являє собою умову непроникнення тіл і пов'язана з силовим співвідношенням (друга нерівність (2)), оскільки закриття зазору супроводжується виникненням контактного тиску. Роз'єднання контактуючих ділянок відповідає нульовим контактним напруженням (третя нерівність (2)).

Оскільки задача розглядається в геометрично лінійному поставленні, вважаємо, що контактують між собою одні і ті самі точки ділянок контура через спеціальний пружний контактний шар, властивості якого забезпечують задані умови взаємодії. Умови фрикційної взаємодії на контакті беруться у формі закону Кулона. При цьому нормальні σ_n^i і дотичні τ_n^i напруження описуються співвідношенням

$$|\tau_n^i| \leq f_d \sigma_n^i, \quad (3)$$

де f_d - коефіцієнт сухого тертя.

Останнє співвідношення виконується за рахунок прослизання контактуючих поверхонь одна відносно другої, які стримуються фрикційними дотичними напруженнями.

Властивості матеріалу тіла передбачаються ізотропними. Зв'язок між пружними напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} \sigma_r = A_{rr}(\varepsilon_r - \varepsilon_r^0) + A_{rz}(\varepsilon_z - \varepsilon_z^0) + A_{r\theta}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^0) + A_{rG}(\gamma_{rz} - \gamma_{rz}^0); \\ \sigma_z = A_{zr}(\varepsilon_r - \varepsilon_r^0) + A_{zz}(\varepsilon_z - \varepsilon_z^0) + A_{z\theta}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^0) + A_{zG}(\gamma_{rz} - \gamma_{rz}^0); \\ \sigma_\theta = A_{\theta r}(\varepsilon_r - \varepsilon_r^0) + A_{\theta z}(\varepsilon_z - \varepsilon_z^0) + A_{\theta\theta}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^0) + A_{\theta G}(\gamma_{rz} - \gamma_{rz}^0); \\ \tau_{rz} = A_{Gr}(\varepsilon_r - \varepsilon_r^0) + A_{Gz}(\varepsilon_z - \varepsilon_z^0) + A_{G\theta}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^0) + A_{GG}(\gamma_{rz} - \gamma_{rz}^0), \end{cases} \quad (4)$$

де σ_i , τ_{rz} , ε_i , γ_{rz} - компоненти тензорів напруження і деформації;

$\varepsilon_i^0, \gamma_{rz}^0$ - деформації, які обумовлені наявністю початкових зазорів (натягу);

A_{ij} - пружні сталі матеріалу.

Для ізотропного матеріалу

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad A_{ij} = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \\ A_{iG} &= \frac{E}{3 \cdot (1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Зв'язок між переміщеннями і деформаціями визначається такими співвідношеннями:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}. \quad (6)$$

Сформульовані співвідношення (1) – (6) - крайова задача механіки деформованого тіла, яка відрізняється від

традиційного поставлення наявністю контактних граничних умов (2) – (3) у вигляді нерівностей.

Розв'язання поставленої контактної задачі в загальному випадку не лінійно залежить від ряду чинників, до яких належать: зміна границь ділянок зіткнення у процесі деформації, взаємне прослизання контактуючих тіл в дотичному напрямку, наявність тертя. Таким чином, нелінійні контактні крайові умови не можуть бути сформульовані наперед, оскільки залежать від одержуваного розв'язання і визначаються у ході ітераційного процесу.

Задача про проникнення жорсткого кільцевого штампа в пружний напівпростір під дією зовнішнього навантаження є класичним прикладом змішаних задач механіки твердого деформованого тіла. Основа штампа є плоскою, а глибина проникнення визначається рівнянням $f(r) = \delta = const$. Штамп вдавлюється в пружне тіло без нахилу за умови рівності нулю головного моменту сил щодо осі симетрії.

Зовнішнє навантаження, яке діє на штамп, врівноважується силою контактного тиску, яка визначається чисельним інтегруванням контактного тиску, який може бути одержаний у результаті розрахунку

$$F_c = 2 \cdot \pi \int_{r_2}^{r_3} p_c(r) r dr. \quad (7)$$

Між тілами, які взаємодіють, у межах можливої області контакту вводиться спеціальний контактний шар, який має особливі властивості. Такий прийом дозволяє зовнішню нелінійність, обумовлену граничними умовами, звести до внутрішньої нелінійності контактного шару.

Математичні труднощі отримання точного аналітичного розв'язання даної контактної задачі обумовило використання методу скінченних елементів (МСЕ) для цієї мети, перевага якому надана завдяки його високій універсальності і ефективності.

Розв'язання крайової задачі проводиться МСЕ у переміщеннях з використанням варіаційного рівняння Лагранжа

$$\partial(\Pi - A_{\Omega} - A_p) = 0, \quad (8)$$

де Π, A_{Ω}, A_p - відповідно потенціальна енергія деформації пружної системи, робота об'ємних і поверхневих сил.

Система розв'язних рівнянь МСЕ для системи скінченних елементів записується у вигляді

$$[B_{ij}] \{u_i\} = \{b_i\}, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Тут B_{ij} - матриця жорсткості системи; u_j, b_j - вектори-стовпці вузлових переміщень і навантажень, які прикладені відповідно.

При контакті ідеально гладких тіл вплив контактного шару може бути зведений до мінімуму, якщо взяти його достатньо тонким і жорстким. Модулі пружності і зсуву зведені до мінімальної товщини шару δ_{0i} і дорівнюють:

$$E_{ik}^* = \frac{E_i \Delta_i}{\delta_{0i}}; G_{ik}^* = \frac{G_i \Delta_i}{\delta_{0i}}, \quad (10)$$

де Δ_i - поточна товщина шару.

Оскільки штамп виконаний, як правило, з твердішого матеріалу, то модулі стиснення і зсуву контактного шару беруться такими, що дорівнюють відповідним константам цього матеріалу.

Схема ітераційного процесу може бути подана рівнянням

$$\left[B_{ij}(\varphi) \right]^{N-1} \{u\}^N = \{b_i\}^{N-1}, \quad (11)$$

де φ - деякий параметр, що визначає нелінійність процесу;

N - номер ітерації.

У ході розв'язання контактної задачі задовольняються граничні умови (2-3). Ітераційний процес починається з повного дотикання тіл, що взаємодіють, по всіх можливих

ділянках контакту і продовжується до того часу, поки суми накопичених контактних деформацій ε_{ni} на даній і попередній ітерації не відрізняться на задану малу величину ε . Силовий критерій збігу передбачає поступове покрокове прикладення зовнішнього навантаження до штампу, причому на кожному кроці ітерації перевіряється рівність зовнішнього навантаження силі контактного тиску, який може бути одержаний у результаті розрахунку (7). Зони контакту і відриву визначаються з точністю до розмірів скінченного елемента.

5 Приклад аналізу напружено-деформованого стану системи “вал-втулка” при посадці з натягом

Припущення.

Унаслідок симетрії для розв’язання задачі (рис. 20) моделюється тільки один сектор (90 градусів). Для наочності і зручності візуальної оцінки і контролю береться перебільшена величина початкового проникнення, матеріал при цьому вважається лінійно пружним. Цей приклад призначений для вивчення методики розв’язання задач контактного типу. З метою можливості розв’язання на всіх типах навчальних версій використовується грубе розбиття (464 елементи і 576 вузлів), унаслідок чого ефекти

концентрації напружень в районі зіткнення ребер втулки з валом не можуть бути виявлені [7].

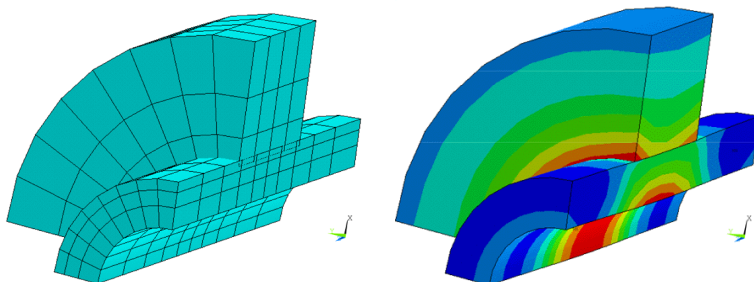


Рисунок 20 – Сітка і напружений стан системи
“вал-втулка”

Покроковий опис процедури розв’язання

**Main Menu→Preprocessor→Element Type→
→Add/Edit/Delete→Add→Structural→Solid→
→Brick 8 node 45→Apply**

Contact→3D Target 170→Apply

Contact 4nd surf 173→OK

Для знаходження урівноваженого стану при початковому проникненні (initial penetration) необхідно виконати дві умови:

1) на першому кроці розв’язання не задаються ніякі навантаження (зусилля, моменти, переміщення), крім граничних умов (викривлення, умови симетрії та інше). У даному прикладі задача складається тільки з одного кроку для знаходження урівноваженого стану;

2) включити алгоритм початкового проникнення:

**Type 3 Conta173→Options→Effect of Initial penetration
K9→Include-ramp→OK**

Для активації алгоритму контакту поверхні гнучка-у-гнучку необхідно набрати в командному рядку вікна введення (ANSYS Input→) команду: **keyopt,3,8,1** (введення).

**Main Menu→Preprocessor→Real Constants→Add→Type 3
Conta173→OK**

Real Constant Set No.	2	
Normal Penalty stiffness FKN	5	
Penetration Tolerance FTOLN	0.05	OK

Закрийте вікно **Close**

Задамо властивості матеріалу (сталь в одиницях CI).

Material Props→Constant Isotropic→OK→EX 2.1E11

Poisson's Ratio (minor)	0.3	
Friction coefficient	0.1	OK

Створимо геометрію поверхні вала.

**Main Menu→Preprocessor→Modeling Create→
Volumes Cylinder →Partial Cylinder**

Rad-1	0.06	
Theta-1	90	
Rad-2	0.1	
Theta-2	180	
Depth	0.3	OK

При створенні твердотільних примітивів основа об'єкта завжди знаходиться на робочій площині (Working Grid). Для побудови другого циліндра із зсувом щодо першого по подовжній осі (висоті) необхідно пересунути робочу площину:

ANSYS Utility Menu→Workplane→Offset by Increments

X,Y,Z offsets 0.,0.,0.1 OK

Створимо геометрію поверхні втулки.

Main Menu→Preprocessor→Modeling Create→Volumes

Cylinder→Partial Cylinder

Rad-1	0.095	
Theta-1	90	
Rad-2	0.2	
Theta-2	180	
Depth	0.1	OK

ANSYS Utility Menu→Plot→Lines

ANSYS Utility Menu→PlotCtrls→Pan Zoom Rotate→Iso

Підготуємо модель для розбиття на скінченні елементи.

Main Menu→Preprocessor→Size Ctrls→Picked Lines

1) вибрати всі радіальні лінії довгого циліндра **Apply**

No of Element Divisions	NDIV 3	Space Spacing Ratio
2	Apply	

- 2) вибрати всі радіальні лінії порожнистого циліндра **Apply**
No of Element Divisions NDIV 3 **Space Spacing Ratio**
0.5 **Apply**
- 3) вибрати будь-яку твірну короткого циліндра **Apply**
No of Element Divisions NDIV 4 **Space Spacing Ratio**
1 **Apply**
- 4) вибрати всі твірні довгого циліндра **Apply**
No of Element Divisions NDIV 10 **Space Spacing Ratio**
-0.5 **Apply**
- 5) вибрати будь-яку окружність довгого і короткого циліндрів
Apply
No of Element Divisions NDIV 8 **Space Spacing Ratio**
1 **OK**

Створимо скінченно-елементну сітку

Main Menu→**Preprocessor**→**Mesh**→**Volumes**→**Mapped**→
→4 to 6 Sided→**Pick All**

ANSYS Utility Menu→**Select** →**Entities**→**Areas By Num Pick**
Apply

Виберемо внутрішню поверхню короткого циліндра (втулки)
OK

ANSYS Utility Menu→**Select** →**Nodes**→**Attached to**→
→Areas All→**Apply**

ANSYS Utility Menu→**Plot**→**Nodes**

Перед побудовою контактних елементів необхідно змінити атрибути для елементів, які будуть побудовані:

**Main Menu→Preprocessor →Modeling Create→
Elements→Elem Attributes**

TYPE 3 Conta173

REAL 2 OK

Побудуємо контактні елементи для компоненти “контактна поверхня”

**Main Menu→Preprocessor→Modeling Create→Elements→
→On Free Surf OK**

ANSYS Utility Menu→Plot→Lines

**ANSYS Utility Menu→Select →Entities→Areas→By Num
Pick→Apply**

Виберемо зовнішню поверхню довгого циліндра (вала)

OK

**ANSYS Utility Menu→Select →Entities→Nodes→Attached
to→Areas All→Apply**

Nodes→By Location→Z coordinates 0.075, 0.225

Reselect OK

**Main Menu→Preprocessor →Modeling Create→
→Elements→Elem Attributes**

TYPE 2 Targe170

REAL 2 OK

Побудуємо контактні елементи для компоненти
“поверхня проникнення”

**Main Menu→Preprocessor →Modeling Create→
Elements→On Free Surf →OK**

ANSYS Utility Menu→Select Everything

ANSYS Utility Menu→Plot→Elements

Прикладемо граничні умови (симетрії)

Main Menu→Solution

Loads→Apply→Structural Displacement→Symmetry

BC→on Areas

Виберемо всі бокові поверхні (радіальні) втулки і вала→**OK**

Pan Zoom Rotate→Bot

Для безпосереднього прикладення умови симетрії до
вузлів:

Displacement→On Nodes Box - За допомогою “гумового вікна”
виберіть всі вузли, які знаходяться посередині (рис. 21) **OK**→
виберіть ступінь вільності *UZ* **OK**

Задання параметрів розрахунку і розв’язання

Analysis Options→NLGEOM Large deform effects ON

EQSLV Equation Solver→Sparse Solver →OK

Load Step Opts→Time/Frequency→Time and Substps

TIME Time at end of load step 100

Number of Substeps 1 OK

Nonlinear Equil Iterations 120 OK

Solve→ **Current LS.**

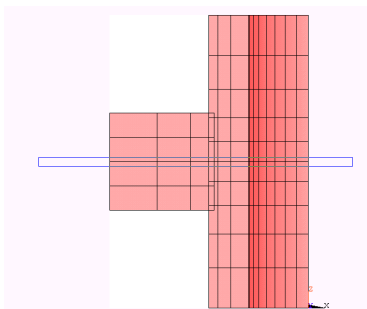


Рисунок 21 – Вибір середніх вузлів

Закриємо вікно лістингу, натиснувши **ОК**, після появи повідомлення “**Solution is Done**” натиснемо у цьому вікні **ОК**.

Перегляд результатів розрахунку – постпроцесинг.

Main Menu→**General PostProc**

Відображення еквівалентних напружень за Мізесом

Plot Results→**Nodal Solution**→**Stress von Mises SEQV**→**ОК**.

Для перегляду результатів можна скористатися функцією динамічного обертання зображення - для обертання використовуйте праву кнопку миші, для переміщення - ліву, для масштабування з одночасним обертанням – середню (Shift+права кнопка, якщо миша 2- кнопкова

(Pan Zoom Rotate→**Dynamic Mode**).

Анімація результатів еквівалентних напружень:

Utility Menu→**PlotCtrls**→**Animate**→**Deformed Results**→
→**Stress von Mises SEQV**→**ОК**.

Після перегляду анімації вийдіть з медіаплеєра:

Media player →File – Exit.

Для зручності перегляду результатів розрахунку для елементів групи “контактна поверхня” необхідно вибрати тільки елементи відповідного типу (3 згідно з порядком введення на початку сеансу роботи).

Utility Menu→Select→Elements→By attributes→Element type Num введіть 3→**ОК.**

Відображення контактних напружень: **Plot Results→Nodal Solution→Contact→Total Stress STOT→→ОК.**

6 Динамічний аналіз

6.1 Загальні положення

Динаміка займається вивченням поведінки конструкцій під дією змінних у часі навантажень [7]. Прикладами таких навантажень є:

- періодично діючі сили, які викликані обертанням механізмів;
- рухомі навантаження на мости і естакади;
- раптово прикладені сили (наприклад, вибухові навантаження);
- сили, викликані сейсмічними навантаженнями.

Динаміка також включає вивчення вільних коливань, тобто коливань конструкції після видалення або припинення зміни сили, яка є причиною руху.

Розглянемо представлену нижче систему з одним ступенем вільності (рис. 22). Рівняння статичної рівноваги для системи має вигляд

$$[K] \{u\} = \{F\}, \quad (12)$$

де $[K]$ - матриця жорсткості системи (відома);

$\{u\}$ - вектор переміщення (невідомий);

$\{F\}$ - вектор навантаження (відомий).

Це рівняння, проте, є особливим випадком загального статичного рівняння рівноваги для довільної системи: векторна сума всіх прикладених сил дорівнює нулю $\sum f = 0$. Загальний випадок динамічної задачі ілюструється показаною нижче одномасовою системою (рис. 23), що складається з маси, жорсткості та непружного опору.

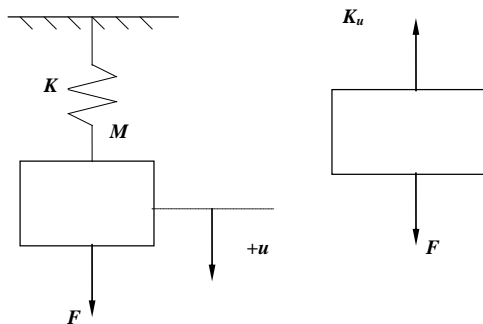


Рисунок 22 – Динамічна система з одним ступенем вільності

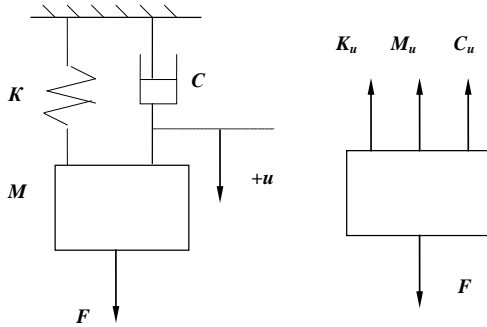


Рисунок 23 – Загальний випадок одномасової динамічної системи

Розв’язна система рівнянь має вигляд

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [C] \{ \dot{u} \} + [K] \{ u \} = \{ F \},$$

- де
- $[M]$ - матриця мас системи;
 - $[C]$ - матриця опорів;
 - $[K]$ - матриця жорсткості;
 - $\{ F \}$ - функція навантаження, яка залежить від часу;
 - $\{ u \}$ - вектор вузлових переміщень;
 - $\{ \dot{u} \}$ - вектор вузлових швидкостей;
 - $\{ \ddot{u} \}$ - вектор вузлових прискорень.

Структура матриць для скінченно-елементної системи наводиться нижче.

6.2 Матриці динамічної системи

Матриця жорсткості $[K]$.

Матриця жорсткості визначається виразом

$$[K] = \sum_{i=1}^{N_e} [K_i^e],$$

де N_e - число елементів; $[K_i^e]$ - матриця жорсткості окремих елементів.

Матриця мас $[M]$

Матриця мас системи визначається співвідношенням

$$[M] = \sum_{i=1}^{N_e} [M_i^e],$$

де $[M_i^e]$ - матриця мас окремих елементів.

У програмі ANSYS матриця мас елемента може бути узгодженою матрицею, матрицею зосереджених мас або зредукованою (приведеною) матрицею.

Узгоджена матриця мас елемента обчислюється з використанням функцій форми елемента. Ці функції форми такі ж, як і ті, які використовуються при обчисленні матриці жорсткості, тобто є узгодженими. Матриця мас для балкового елемента BEAM3 записується у вигляді

UX1	x	0	0	x	0	0
UY1	0	x	x	0	x	x
ROTZ1	0	x	x	0	x	x
UX2	x	0	0	x	0	0
UY2	0	x	x	0	x	x
ROTZ2	0	x	x	0	x	x

У матриці зосереджених мас маса кожного елемента розподілена (необов'язково однаково) по його вузлах. Іншими словами, зосереджені маси, розміщені у вузлах елемента, в сукупності являють собою масу елемента. Тому матриця зосереджених мас є діагональною, тобто всі елементи матриці, окрім діагональних, дорівнюють нулю. Сума “вузлових” мас в кожному напрямку дорівнює загальній масі елемента. (Це оцінюється за допомогою команди LUMPM, ON).

UX1	x	0	0	0	0	0	
UY1	0	x	0	0	0	0	
ROTZ1	0	0	x	0	0	0	
UX2	0	0	0	x	0	0	
UY2	0	0	0	0	x	0	
ROTZ2	0	0	0	0	0	x	

Опції зосередженої маси в основному встановлюються з основного меню таким чином:

Main Menu Path: Solution → Analysis Type → Analysis Options.

Деякі елементи генерують тільки зосереджені масові матриці, наприклад, COMBIN37, COMBIN39, COMBIN40.

Ряд скінченних елементів програми ANSYS (наприклад, BEAM44, PIPE59, SHELL63) мають опцію **KEYOPT**, що дозволяє використовувати зредуковану матрицю мас елемента. Ця матриця утворюється видаленням з

узгодженої матриці тих її елементів, які належать до обертальних ступенів вільності.

UX1	x	0	0	x	0	0
UY1	0	x	0	0	x	0
ROTZ1	0	0	0	0	0	0
UX2	x	0	0	x	0	0
UY2	0	x	0	0	x	0
ROTZ2	0	0	0	0	0	0

Опції цих елементів можуть бути встановлені з основного меню:

Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete.

Використовуйте кнопку **OPTION**.

Більшість скінченних елементів програми ANSYS використовує за замовчуванням узгоджену матрицю мас. У загальному випадку рекомендується використовувати матрицю мас, яка задана за замовчуванням, за винятком таких випадків:

- якщо об'єкт розрахунку має відносно малий розмір в одному (або двох) напрямках в порівнянні з рештою розмірів (наприклад, тонкі балки або дуже тонкі оболонки), то

необхідно використовувати опцію зредукованої матриці мас (якщо вона доступна) або опцію матриці зосереджених мас;

- для деяких задач розповсюдження хвиль корисним виявляється використання матриці зосереджених мас.

Матриця опору [C].

Повний вираз для матриці опору [C] має вигляд

$$[C] = \underbrace{\alpha[M]}_{\text{інерційне демпфірування}} + \underbrace{\beta[K] + \sum_{j=1}^{N_{MAT}} \beta_j [K_j]}_{\text{конструкційне демпфірування}} + \underbrace{[C_\xi]}_{\text{елементи з тертям}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_{EL}} [C_k]}_{\text{постійне демпфірування}},$$

де $[C_k]$ - матриця опору окремого елемента; N_{EL} - число елементів з демпфіруючими властивостями.

На практиці побудувати матрицю демпфірування такого вигляду складно, оскільки звичайно інтерес становить обчислення сухого тертя і гістерезисного (внутрішнього) демпфірування, а не в'язкого тертя. Тому демпфірування апроксимується комбінацією внесків опорів, які пов'язані з двома матрицями системи - матрицею мас і матрицею жорсткості:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

коефіцієнти α і β відомі як константи демпфірування Релея. Їх значення звичайно не відомі, оскільки більшість даних, що стосуються демпфірування, доступна у вигляді частотних

коефіцієнтів загасання ξ_i , тобто у вигляді відношення фактичного значення загасання до критичного для певного режиму коливань.

Отже, при даному значенні α -демпфірування коефіцієнт демпфірування обернено пропорційний частоті. Таким чином, нижчі частоти демпфіруватимуться сильніше, а верхні - менше.

Доступне тільки одне значення, таким чином, для обчислення повинна використовуватися домінуюча частота.

Значення α встановлюється:

**Main Menu: Solution→Loads→Time/Frequence→
Damping**

як множник матриці мас [ALPHAD].

Якщо ω_i є i -ю власною круговою частотою, то параметри α і β задовольняють співвідношення

$$\xi_i = \alpha / 2\omega_i + \beta\omega_i / 2,$$

при цьому параметр α відповідає інерційному демпфіруванню, а параметр β - конструкційному.

Інерційне демпфірування (α).

Граничний випадок інерційного демпфірування реалізується при зануренні твердого тіла в масло. В цьому випадку коефіцієнт $\beta = 0$, отже,

$$\xi_i = \alpha / 2 \omega_i,$$

або

$$\alpha = 2 \omega_i \xi_i = 4 \pi f_i \xi_i .$$

Таким чином, при заданому значенні α коефіцієнт загасання ξ_i обернено пропорційний частоті: нижчі частоти демпфіруються сильніше, а вищі - слабше. Для задання α використовується команда **ALPHAD**. Допускається задання тільки одного значення, тому обчислення α необхідно проводити для переважаючої частоти системи.

Конструкційне демпфірування (β).

Цей вид демпфірування пов'язаний з енергетичними втратами, які обумовлені дією сил сухого тертя. Для більшості практичних задач нехтують інерційним демпфіруванням, тобто $\alpha = 0$, отже,

$$\xi_i = \beta \omega_i / 2,$$

або

$$\beta = 2 \xi_i / \omega_i = \xi_i / \pi f_i,$$

де $\omega_i = 2 \pi f_i$, f_i - власна частота.

Таким чином, при конструкційному демпфіруванні коефіцієнт загасання ξ_i прямо пропорційний частоті: нижчі частоти загасають менше, вищі - більше.

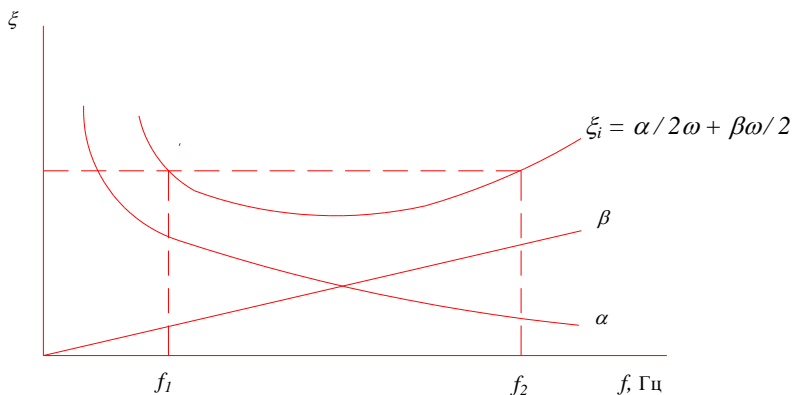


Рисунок 24 – Залежність загасання від власної частоти системи

У деяких випадках бажано задати постійне загасання в діапазоні частот. Необхідно звернути увагу на те, що сума двох функцій загасання майже постійна у області частот поблизу точки їх перетину (рис. 2.24). Отже, для заданого в діапазоні частот f_1 і f_2 значення коефіцієнта загасання ξ є можливість отримати значення α і β як результат розв'язання рівнянь:

$$\xi = \alpha / 4\pi f_1 + \beta\pi f_1,$$

$$\xi = \alpha / 4\pi f_2 + \beta\pi f_2.$$

Для введення коефіцієнта постійного загасання в деяких випадках можна використовувати матрицю $[C_\xi]$.

У програмі ANSYS конструкційне демпфірування можна задати у вигляді:

- постійного множника β матриці жорсткості;
- множника β_j матриці жорсткості, який залежить від властивостей матеріалу.

Також, як і α , постійний множник матриці жорсткості β встановлюється так:

Solution → Load Step Opts → Time/Frequenc → Damping.

Допускається тільки одне значення, таким чином, для обчислення β повинна використовуватися домінуюча частота.

Множник β_j матриці жорсткості, який залежить від властивостей матеріалу і визначається через меню властивостей матеріалів.

Main Menu: Preprocessor → Material Props

як “демпфіруючий множник” [DAMP].

Множник постійної матриці жорсткості задається за допомогою команди **BETAD**. Дана команда, як і команда **ALPHAD**, допускає використання тільки одного значення параметра, тому для обчислення β повинна використовуватися переважна частота.

Залежний від властивостей матеріалу множник β_j матриці жорсткості $[K_j]$ задається як властивість матеріалу командою **MP, DAMP**. Загальне для системи конструкційне демпфірування визначається виразом

$$\sum_{j=1}^{N_{MAT}} \beta_j [K_j],$$

де $[K_j]$ - частина матриці жорсткості, яка належать до матеріалу з індексом j ; N_{MAT} - число матеріалів у моделі.

Елементи, які складаються з декількох матеріалів, подібних до SOLID46, SOLID65, SHELL91, SHELL99, визначають номер j -го матеріалу з меню:

Main Menu: Preprocessor → Material Props → Change Mat Num,

якщо номери матеріалів не задані реальними константами.

Частотно-залежна матриця демпфірування $[C_\xi]$ визначається непрямо, а саме заданням постійного коефіцієнта загасання ξ за допомогою команди **DMPRAT**. Це можливо тільки при проведенні спектрального аналізу і розрахунку відгуку на гармонійну дію, а також при аналізі перехідних процесів у режимі суперпозиції і при модальному аналізі із загасанням.

Для вказаного значення коефіцієнта ξ матриця $[C_\xi]$ обчислюється відповідно до виразу

$$\{u_i\}^T [C_\xi] \{u_i\} = 4\pi f_i \xi,$$

де f_i - частота, для якої знаходиться гармонійне розв'язання; $\{u_i\}$ - власна i -та форма коливань.

При цьому матриця $[C_{\xi}]$ ніколи явним чином не обчислюється.

Ще одним методом введення демпфірування в програмі ANSYS є задання скінченних елементів з демпфіруючими властивостями. Ці елементи мають специфічні характеристики демпфірування. Перелік таких скінченних елементів наводиться нижче:

- COMBIN14 - пружинний елемент із загасанням;
- MATRIX27 - елемент з матрицею демпфірування;
- COMBIN37 - керуючий елемент;
- COMBIN40 - комбінований елемент;
- MATRIX50 – суперелемент.

Отже, демпфірування може бути задане одним з таких способів:

- 1) інерційне демпфірування (команда **ALPHAD**);
- 2) конструкційне демпфірування:
 - постійна величина β (команда **BETAD**);
 - демпфірування, яке залежить від матеріалу β_j (команда **MP, DAMP**);
- 3) постійний коефіцієнт загасання ξ (команда **DMPRAT**, доступна не для всіх видів аналізу);
 - скінченні елементи з демпфіруючими властивостями.

6.3 Види динамічного аналізу

Існують три види динамічного аналізу:

- 1) модальний аналіз (**ANTYPE,MODAL**);
- 2) динамічний аналіз перехідних процесів (**ANTYPE,TRANS**);
- 3) відгук на гармонійну дію (**ANTYPE,HARMIC**).

Всі ці види аналізу є окремими випадками розв'язання загального рівняння руху

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [C] \{ \dot{u} \} + [K] \{ u \} = \{ F(t) \}.$$

Модальний аналіз.

Модальний аналіз (команда **ANTYPE,MODAL**) використовується для визначення власних частот і форм коливань конструкції. Передбачається, що здійснюються вільні незгасаючі коливання, тобто

$$\{ F(t) \} = \{ 0 \} \text{ і } [C] = [0].$$

Модальний аналіз звичайно передує іншим видам динамічного аналізу. Як буде показано далі, результати модального аналізу дають можливість визначити деякі параметри і співвідношення, необхідні для інших видів аналізу.

Розв'язне рівняння має вигляд

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [K] \{ u \} = \{ 0 \}.$$

Для лінійної системи вільні коливання будуть гармонійними:

$$\{u\} = \{u_0\} \cos \omega t.$$

Заміна $\{u\}$ і $\{\ddot{u}\}$ у розв'язному рівнянні приводить до співвідношення

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{u_0\} = \{0\}.$$

Для існування нетривіальних розв'язань детермінант $[[K] - \lambda[M]]$ повинен дорівнювати нулю, тобто

$$[[K] - \lambda[M]],$$

де $\lambda = \omega^2$.

Це задача про власні значення, яка полягає в знаходженні значення λ_j і відповідного йому вектора $\{u_j\}$. Власне значення λ_j визначає власну частоту системи $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, а власний вектор - відповідну форму коливань.

У принципі, обчислення власних значень означає знаходження кореня полінома n - го порядку. Отже, у даному випадку потрібне ітеративне розв'язання задачі.

Для обчислення власних значень доступні чотири методи, які задаються за допомогою команди **MODOPT**:

- метод редукції (приведення) Хаусхолдера (**MODOPT, REDUC**);

- ітеративний підпросторовий метод (**MODOPT, SUBSP**);

- метод для несиметричних матриць (**MODOPT, UNSYM**);

- метод для систем із загасанням (**MODOPT, DAMP**).

Динамічний аналіз перехідних процесів

Динамічний аналіз перехідних процесів (команда **ANTYPE,TRANS**) використовується для отримання відгуку системи на дію змінного у часі або нестационарного, вимушувального навантаження (рис. 2.25).

Розв'язне рівняння рівноваги має такий вигляд:

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [C] \{ \dot{u} \} + [K] \{ u \} = \{ F(t) \}.$$

У своїй найзагальнішій формі цей вид аналізу допускає використання всіх типів нелінійностей. Іншими словами, не передбачається наявність яких-небудь обмежень.

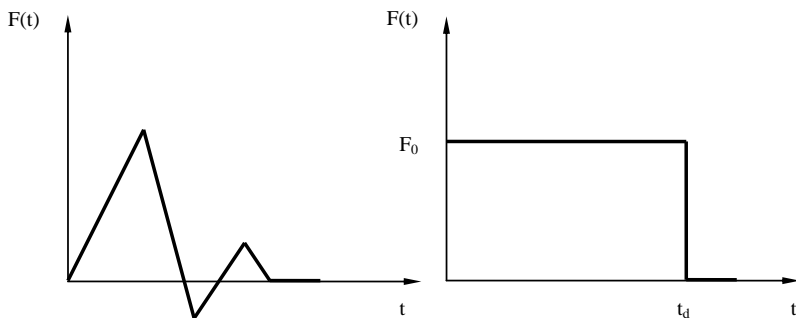


Рисунок 25 – Нестационарне вимушувальне навантаження

При аналізі перехідних процесів доступні такі методи розв'язання:

- повний (FULL);
- редуційний (REDUC);
- метод суперпозицій (MSUP).

Відгук на гармонійну дію

Аналіз відгуку на гармонійну дію (команда **ANTYPE, HARMIC**) використовується для визначення поведінки системи при дії вимушувальної гармонійної (синусоїдальної) сили, тобто при $F(t)$ у вигляді періодичного навантаження з відомою амплітудою і частотою (рис. 26).

Для лінійних і нелінійних задач динаміки перехідних процесів розв'язання загального рівняння руху полягає у визначенні переміщень як функцій часу. Вектор вимушувальної сили $\{F\}$ також є довільною функцією часу $\{F(t)\}$.

При аналізі відгуку на гармонійну дію вимушувальне навантаження передбачається гармонійним, тобто змінним синусоїдальною силою відомої амплітуди і частоти. Отже, рівняння руху може бути розв'язане стосовно переміщень як функцій частоти. Якщо система лінійна, то переміщення u також змінюються синусоїдально з такою ж частотою, як і сила, але необов'язково збігається за фазою.

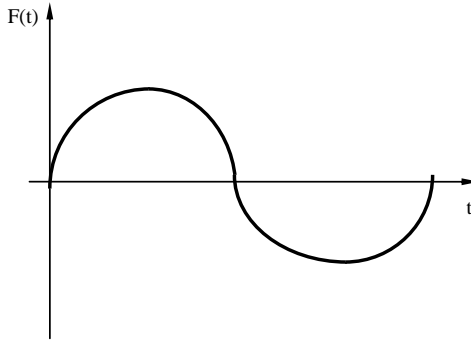


Рисунок 26 – Зміна гармонійної (синусоїдальної) сили

У даному випадку рівняння рівноваги набуває такого вигляду:

$$[M] \{ \ddot{u} \} + [C] \{ \dot{u} \} + [K] \{ u \} = \{ F_{max} e^{i\psi} \} e^{i\Omega t},$$

де F_{max} - амплітуда сили;

i - $\sqrt{-1}$;

t - час;

ψ - фазовий кут функції навантаження, радіан;

$\Omega = 2\pi f$ - задана кругова частота, радіан / час;

f - задана частота, число коливань / час.

Комплексний вираз для сили F можна подати у вигляді двох доданків:

$$\begin{aligned} \{ F \} &= \{ F_{max} e^{i\psi} \} e^{i\Omega t} = \{ F_{max} (\cos \psi + i \sin \psi) \} e^{i\Omega t} = \\ &= (\{ F_1 \} + i \{ F_2 \}) e^{i\Omega t}, \end{aligned}$$

де $\{ F_1 \} = \{ F_{max} \cos \psi \}$ - вектор дійсних складових сили;

$\{ F_2 \} = \{ F_{max} \sin \psi \}$ - вектор уявних складових сили.

Необхідно зазначити, що задані кругова частота Ω , амплітуда F_{max} і фазовий кут ψ функції вимушувального навантаження відомі.

Як вже було сказано, всі точки системи передбачаються рухомими за синусоїдальним законом з однією і тією ж частотою, але необов'язково в одній фазі. Таким чином, вектор переміщення u може бути записаний у вигляді

$$\{u\} = \{u_{max} e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t} = (\{u_1\} + i\{u_2\}) e^{i\Omega t},$$

де $\{u_1\} = \{u_{max} \cos \varphi\}$ - вектор дійсної частини переміщення;

$\{u_2\} = \{u_{max} \sin \varphi\}$ - вектор уявної частини переміщення.

Зверніть увагу, що кругова частота Ω для вектора переміщення відома (така ж, як у вектора сили), тоді як амплітуда u_{max} і фазовий кут φ не відомі.

Замінімо в рівнянні рівноваги вектор переміщення $\{u\}$ і його похідні, а також вектор сили $\{F\}$ їх доданками, одержимо

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 [M] + i\Omega [C] + [K]) (\{u_1\} + i\{u_2\}) e^{i\Omega t} = \\ = (\{F_1\} + i\{F_2\}) e^{i\Omega t}, \end{aligned}$$

або

$$(-\Omega^2 [M] + i\Omega [C] + [K]) (\{u_1\} + i\{u_2\}) = (\{F_1\} + i\{F_2\}).$$

Отже, розв'язання буде комплексною функцією, якщо виконується хоча б одна з таких умов:

1) $[C] \neq [0]$ (існує матриця опору);

2) $\{u\} \neq \{0\}$ (уявна частина заданих переміщень не дорівнює нулю);

3) $\{F_2\} \neq \{0\}$ (уявна частина сил не дорівнює нулю).

Доступні три методи аналізу:

- повний гармонійний аналіз (**HROPT, FULL**);
- редуційний гармонійний аналіз (**HROPT, REDUC**);
- гармонійний аналіз методом суперпозиції (**HROPT, MSUP**).

7 Приклад модального аналізу балки

Розглянемо вільні згинальні коливання балки (рис. 27) [10].

Початкові дані:

- модуль пружності (E) – 206800×10^6 Н/м²,
- густина (ρ) – 7830 кг/м³.
-

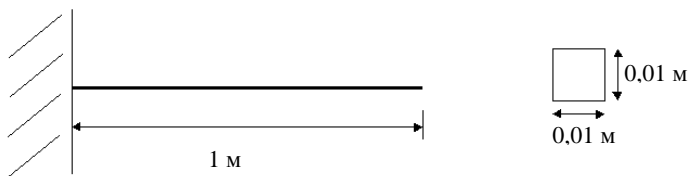


Рисунок 27 – Схема балки

7.1 Використання методу підпростору для модального аналізу

Preprocessing: Визначення задачі

GUI commands

Solution: Задання навантажень і розв'язання

1) Вибір типу аналізу

Solution > Analysis Type > New Analysis > Modal ANTYPE,2

2) Установка опцій для розв'язання:

- a) **Select: Solution > Analysis Type > Analysis Options..**
- b) з'явиться наступне вікно (рис. 28);
- c) як показано, вибрати **Subspace** метод і ввести **5** в '**No. of modes to extract**';
- d) відзначити '**Expand mode shapes**' і ввести **5** в '**No. of modes to expand**';
- e) натиснути '**OK**';
- f) з'явиться наступне вікно (рис. 29);
- g) для цієї задачі – опції за замовчуванням, натиснути **OK**.

3) Задання закріплень

Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Keypoints;

Закріпити точку **1** за всіма напрямками.

4) Розв'язання системи

Solution > Solve > Current LS

SOLVE;

Postprocessing: Перегляд результатів

- вибрати: **General Postproc > Results Summary...**;
- з'явиться вікно (рис. 30).

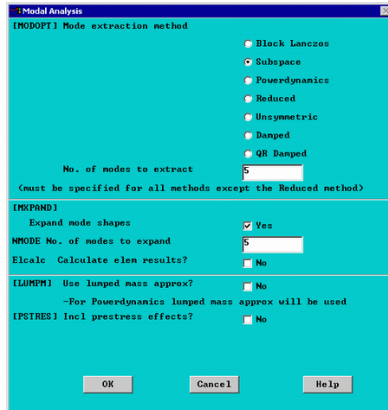


Рисунок 28 – Вікно модального аналізу

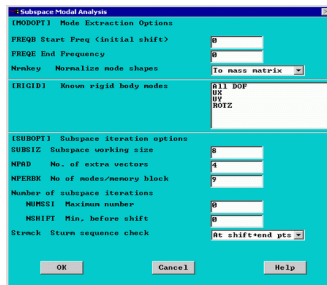


Рисунок 29 – Вікно методу підпростору

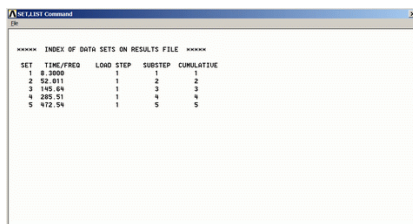


Рисунок 2.30 – Вікно перегляду результатів

У таблиці 1 наведені частоти в герцах, які були розраховані в ANSYS і теоретично.

Таблиця 1 – Порівняння результатів, отриманих аналітично і чисельно у программі ANSYS

Номер	Теоретично	ANSYS	Відсоток похибки
1	8,311	8,300	0,1
2	51,94	52,01	0,2
3	145,68	145,64	0,0
4	285,69	285,51	0,0
5	472,22	472,54	0,1

Зауваження: для отримання точніших частот, необхідно поліпшити розбиття (тобто замість 10 елементів 15 або більше).

2) Форми коливань балки.

а) вибрати: **General Postproc > Read Results > First Set;**

Вибрати першу форму.

- b) вибрати **General Postproc > Plot Results > Deformed shape** . Вибрати '**Def + undef edge**', перша форма з'явиться на екрані;
- c) для перегляду наступної форми, вибрати **General Postproc > Read Results > Next Set**. Як раніше, вибрати **General Postproc > Plot Results > Deformed shape** . і '**Def + undef edge**';
- d) перші 4 форми коливань мають такий вигляд (рис. 31).

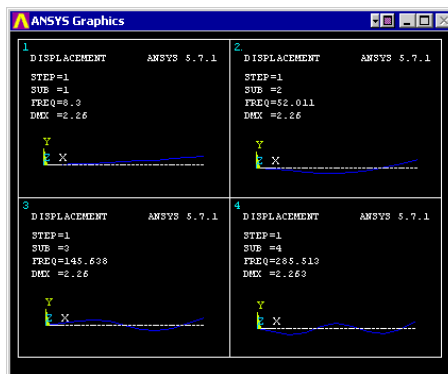


Рисунок 31 – Вікно з першими чотирма формами коливань балки

3) Анімація форм

- a) вибрати **Utility Menu (Menu at the top) > PlotCtrls > Animate > Mode Shape**;

б) з'явиться вікно (рис. 32);

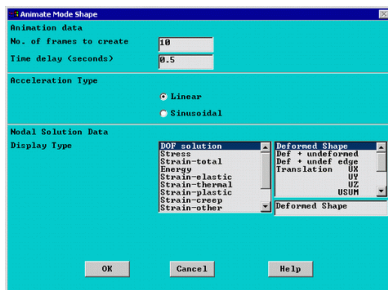


Рисунок 32 – Вікно анімації

с) залишити все за замовчуванням, як показано на рисунку 2.32, і натиснути 'ОК'.

7.2 Використання редуційного методу для модального аналізу

Цей метод використовує провідні ступені вільності, які керують динамічними особливостями структури. Наприклад, провідними ступенями вільності для заданої балки для режимів згинання є ступені вільності, які зображені на рисунку 33.

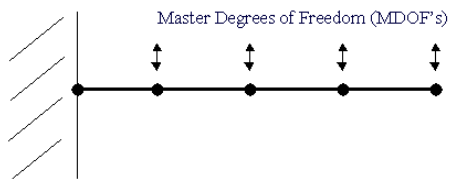


Рисунок 33 – Схема балки з головними ступенями вільності

Для цього розв’язання потрібне розуміння динамічної поведінки структури. Проте цей метод має меншу матрицю жорсткості і відповідно швидший розрахунок.

Кроки для розв’язання такі:

- замість методу **Subspace** вибрати метод **Reduced** і визначити 5 режимів для знаходження.
- заповніть вікно, як показано нижче (рис. 34).

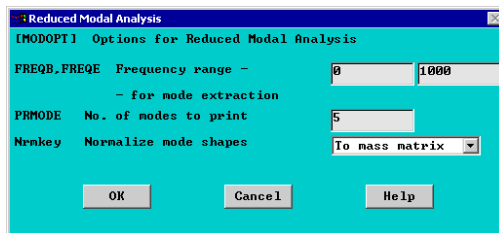


Рисунок 34 – Вікно редуційного методу

Зауваження: для цього прикладу задається і число режимів, і частотний діапазон:

- вибрати **Solution > Master DOF > User Selected > Define**;
- вибрати всі вузли, за винятком лівого (закріпленого);
- з'явиться вікно (рис. 35);

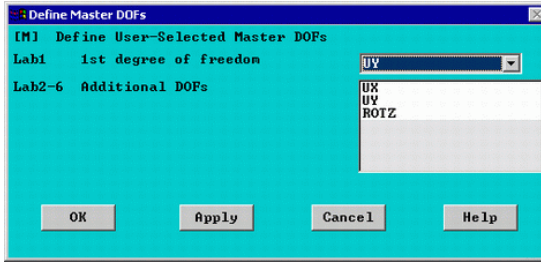


Рисунок 35 – Вікно методу підпростору

- вибрати UY як один ступінь вільності.
Такі самі обмеження були накладені вище.

Таблиця 2 - Порівняння результатів

Номер	Теоретично	ANSYS	Відсоток похибки
1	8.311	8.300	0.1
2	51.94	52.01	0.1
3	145.68	145.66	0.0
4	285.69	285.71	0.0
5	472.22	473.66	0.3

Як видно із таблиці 2, похибка істотно не змінюється. Проте для більш складної задачі похибка для спрощеного методу може бути більше.

8 Приклад гармонійного аналізу балки

Розглянемо гармонійний аналіз згинальних коливань балки (рис. 27) [10].

Початкові дані:

- модуль пружності (E) – 206800×10^6 Н/м²,
- густина (ρ) – 7830 кг/м³.

Проведемо цей аналіз за допомогою задання циклічного навантаження (гармонійного) на краю балки. Частота навантаження змінюватиметься від 1 до 100 Гц. На рисунку 2.36 зображено балку з навантаженням.

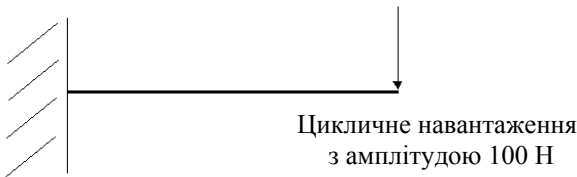


Рисунок 36 – Схема навантаження балки

Як було відмічено в попередніх розділах, ANSYS забезпечує 3 методи проведення гармонійного аналізу: повний, редуційний і метод суперпозиції.

Цей приклад демонструє повний метод, оскільки він простий і легкий у використанні в порівнянні з двома іншими. Проте цей метод використовує повні матриці жорсткості і маси і у зв'язку з цим повільніший для вирішення.

Solution. Задання навантажень і розв'язання.

1 Вибір типу аналізу (гармонійний)

Solution > Analysis Type > New Analysis >

Harmonic

ANTYPE,3

2 Опції для вирішення:

- вибрати: **Solution > Analysis Type > Analysis Options...**;
- з'явиться вікно (рис. 37);
- як показано на рисунку 37, вибрати метод розв'язання **Full**, і **Real + imaginary** для **DOF printout format**;
- натиснути **'OK'**;
- з'явиться вікно (рис. 38). Установки за замовчуванням (як показано нижче).

3 Задання закріплень:

- вибрати **Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes**;
- після вибору вузла $x=0$ з'явиться вікно (рис. 39);
- закріпити по всіх напрямках.

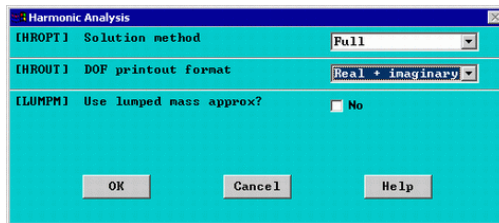


Рисунок 37 – Вікно гармонійного аналізу

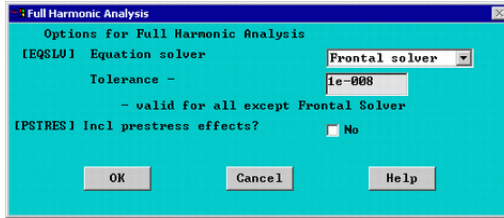


Рисунок 38 – Вікно повного методу гармонійного аналізу

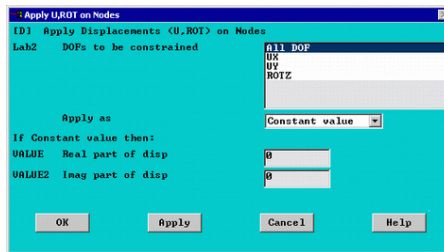


Рисунок 39 – Вікно задання граничних умов (закріплень)

4 Задання навантажень:

- вибрати **Solution > Define Loads > Apply > Structural > Force/Moment > On Nodes**;
- вибрати вузол $x=1$;
- з'явиться вікно (рис. 40). Заповнити, як показано нижче, для задання сили з дійсним значенням 100 і уявним 0 у напрямі осі 'y'.

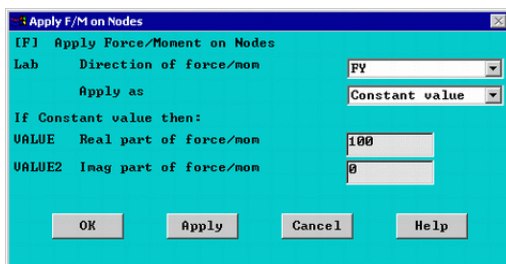


Рисунок 40 – Вікно задання граничних умов (навантажень)

Примітка. За допомогою задання дійсного і уявного значень навантаження ми забезпечуємо інформацію стосовно величини і фази навантаження. У даному випадку величина навантаження становить 100 Н і її фаза дорівнює 0. Інформація про фазу важлива, коли є 2 або більше циклічних навантажень, які прикладені до системи, оскільки вони можуть або збігатися, або не збігатися за фазою. Для гармонійного аналізу всі навантаження, які прикладені до системи, повинні мати однакову частоту.

5 Задання частотного ряду

- вибрати **Solution > Load Step Opts > Time/Frequency > Freq and Substps...**;
- як показано на рисунку 2.41, визначити частоту від 0 до 100 з кількістю кроків 100.

За допомогою цього на балку будуть задані сили з частотою 1 Гц, 2 Гц, 3 Гц, ..., 100 Гц. Ми визначили покрокові умови навантаження (**КВС - stepped**), при цьому амплітуда

навантаження 100 Н буде прикладена на кожному кроці за частотою. При визначенні лінійно зростаючого навантаження (KBC -ramped) при частоті 1 Гц амплітуда повинна бути 1 Н, а при 100 Гц амплітуда – 100 Н. У графічному вікні повинно бути таке (рис. 42).

6 Розв'язання системи

Solution > Solve > Current LS

SOLVE

1.1 Postprocessing: Перегляд результатів

Ми хочемо отримати необхідні результати у точці $x=1$, де було задано навантаження як функцію частоти. Тому потрібно скористатися **TimeHist PostProcessing (POST26)**. **POST26** використовується, щоб спостерігати змінні як функції часу або частоти.

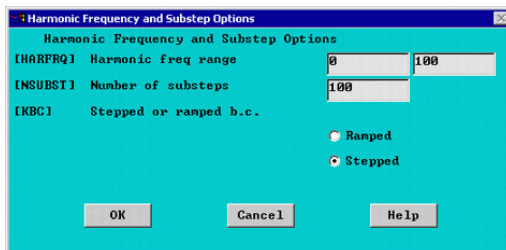


Рисунок 41 – Вікно задання частотного ряду

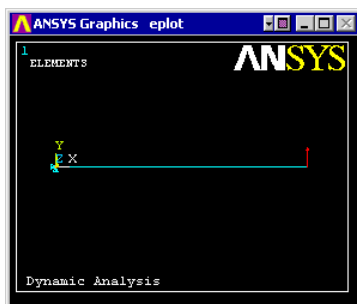


Рисунок 42 – Графічне вікно прикладення навантаження

- 1 Відкрити меню **TimeHist Processing (POST26)**.
Вибрати **TimeHist Postpro** з **ANSYS Main Menu**.
- 2 Визначити змінні. За замовчуванням **Змінна 1** – або час, або частота. У нашому випадку це частота. Ми хочемо отримати переміщення по UY у вузлі $x=1$, який має номер 2. Після вибору **TimeHist Postpro > Variable Viewer...** з'явиться наступне вікно (рис. 43).
Вибрати **Add** (зелений '+') і з'явиться наступне вікно (рис. 44).
Нам потрібне **Nodal Solution > DOF Solution > Y-Component of displace**

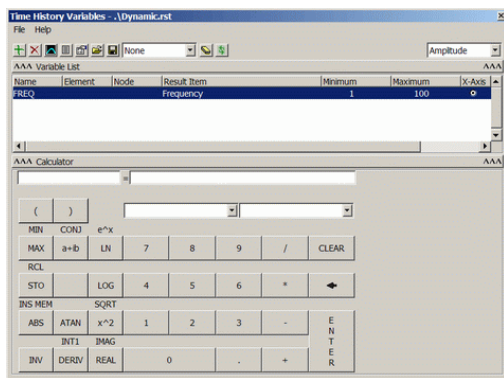


Рисунок 43 – Вікно історії навантаження

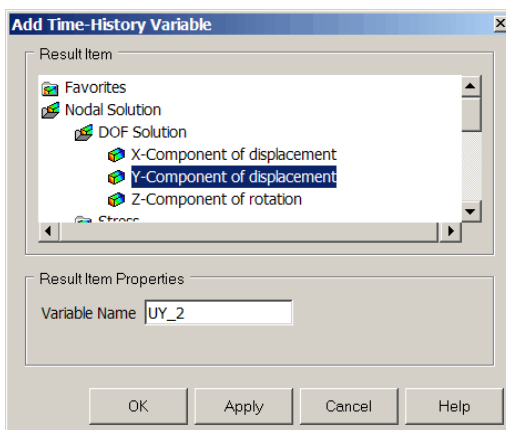


Рисунок 44 – Вікно вибору змінних

9 Аналіз динаміки ротора

9.1 Вступ

Задача аналізу динамічних характеристик роторів, яку необхідно вирішувати при розробленні і проектуванні відцентрових машин, є достатньо важливою. Доводиться визначати критичні швидкості і досліджувати реакцію роторної системи на можливі дисбаланси і навантаження. Така задача не завжди піддається точному аналітичному розв'язанню і вимагає величезних витрат на її експериментальну реалізацію.

На сьогодні найпоширенішим чисельним методом розв'язання задач динамічного розрахунку роторних систем є метод скінченних елементів (МСЕ), який практично повністю витіснив метод початкових параметрів. МСЕ дозволяє розв'язувати задачу моделювання динамічної поведінки реального ротора з урахуванням всіх можливих ефектів: пружних, інерційних властивостей і інерції обертання ротора; обертального моменту, гіроскопічних моментів дисків, деформації зсуву, осьових навантажень, внутрішнього тертя та ін.

Відомі вузькоспеціалізовані програмні комплекси, які застосовуються тільки для аналізу динаміки конкретних роторних систем, такі, як: ARMD, ROTECH, Dynamics, DyRoBes, NISA/ROTOR і багато інших.

Ці програми не мають, як правило, вбудованої мови програмування і тому не дозволяють вносити які-небудь зміни і нові елементи в методику розрахунку, що обмежує їх застосування. Універсальні програмні комплекси МСЕ-аналізу (ANSYS, NASTRAN, COSMOS та ін.) дозволяють розв'язувати ряд задач динамічного аналізу роторних систем [11]. Такі програмні комплекси надають користувачу достатньо обширну бібліотеку елементів, великий набір засобів і інструментів. У них закладена загальна процедура методу скінченних елементів, але при цьому відсутні спеціальні модулі для автоматизованого розрахунку різних деталей, у тому числі і деталей відцентрових машин. Для створення окремого модуля для розрахунку динаміки ротора в таких програмах потрібне написання спеціальних підпрограм макросів, які забезпечують автоматизацію побудови розрахункової моделі, видачу результатів розрахунку, а також створення графічного інтерфейсу користувача. Істотні можливості для створення програмних додатків має в своєму розпорядженні макромова Tcl/Tk, інтерпретатор якої безпосередньо вбудований у програму ANSYS [12].

9.2 Моделювання динаміки ротора в програмному комплексі ANSYS

У ротородинамічному аналізі програми ANSYS розв'язуються такі задачі, як: статичний аналіз; модальний аналіз, зокрема, побудова демпфованих форм коливань і діаграми Кемпбелла і визначення синхронних орбіт точок осі ротора; гармонійний аналіз, зокрема, визначення коефіцієнтів загасання і амплітудно-частотних характеристик; аналіз перехідних процесів, зокрема, моделювання проходження ротором зони резонансу і визначення реакції ротора на удар при постійній швидкості обертання [11].

Незважаючи на принципову можливість розв'язання задач динаміки ротора і в раніших версіях пакета ANSYS, необхідно зазначити, що компанія ANSYS, починаючи з версії Ansys 10.0, включає в комплект поставки спеціалізований модуль розрахунку динамічних характеристик роторних машин. Можливі типи розрахунків: модальний аналіз, гармонійний аналіз, аналіз перехідних процесів. Використовуються нерухома система і обертальна система координат при розрахунках з урахуванням гіроскопічного ефекту (рис. 45).

У нерухомій системі координат (рис. 46) застосовуються скінченні елементи BEAM4, PIPE16, MASS21, BEAM188, BEAM189; використовується осесиметрична

модель ротора; можна задати декілька частот обертання. Результати розрахунку оформляються у вигляді діаграми Кемпбелла.

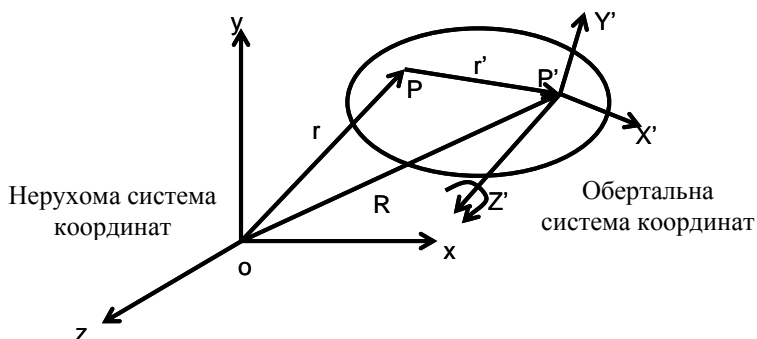


Рисунок 45 – Система координат

У рухомій системі координат (рис. 47) використовуються елементи SHELL181, PLANE182, PLANE183, SOLID185, SOLID186, SOLID187, BEAM188, BEAM189, SOLID190. Для розрахунку не вимагається виконання умови осьової симетрії ротора; при розрахунку з урахуванням гіроскопічного ефекту задається одна частота обертання. У модуль включений розрахунок статичних характеристик ротора, моменту інерції і маси.

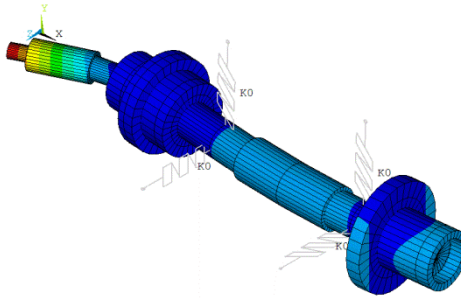


Рисунок 46 – Динаміка ротора в нерухомій системі координат з урахуванням пружних опор

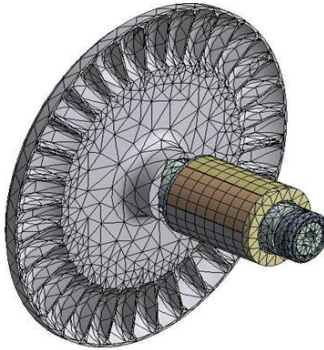
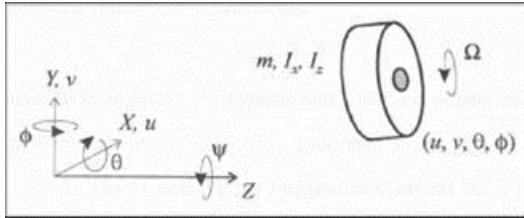


Рисунок 47 – Аналіз динаміки в рухомій системі координат

У пакеті ANSYS можливе параметричне задання геометрії ротора і динамічних коефіцієнтів опор рідинного тертя, з'являється можливість на стадії проектування вирішувати задачу оптимізації параметрів роторної системи і вибору раціональних компоувальних схем.

9.3 Загальна процедура аналізу динаміки ротора в програмному комплексі ANSYS

Як було вже сказано, програма ANSYS дозволяє враховувати інерційні ефекти ротора (рис. 48), що обертається, як в нерухомій, так і у обертальній системі координат.



Сили і моменти, які діють на ротор за відсутності обертання і опору

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}.$$

Члени Кориоліса і дисбалансу з ненульовим обертанням

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I_z \Omega \\ I_z \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_{u,x} \\ F_{u,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} me\Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega t) + \begin{bmatrix} 0 \\ me\Omega^2 \end{bmatrix} \sin(\omega t).$$

Динамічне рівняння в обертальній системі координат

$$[M]\{\ddot{u}_r\} + ([C] + [C_{cor}])\{\dot{u}_r\} + ([K] - [K_{spin}])\{u_r\} = [F], \quad (2.13)$$

де сила Кориоліса $\{f_c\} = [C_{cor}]\{\dot{u}_r\}$; K_{spin} - жорсткість, яка обумовлена відцентровою силою.

Матриця Кориоліса

$$[C_{cor}] = 2 \int \rho \Phi^T \bar{\omega} \Phi dv,$$

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Динамічне рівняння у стаціонарній системі координат

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([C] + [C_{gyr}])\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = [F], \quad (14)$$

де $\{f_g\} = [C_{gyr}]\{\dot{u}\}$ - гіроскопічний момент.

Програма ANSYS дозволяє враховувати змінні сили жорсткості і демпфірування підшипників рідинного тертя

$$\begin{bmatrix} C_{fxx} & C_{fxy} \\ C_{fyx} & C_{fyy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{fxx} & K_{fxy} \\ K_{fyx} & K_{fyy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$C_f = C_f(\omega), \quad K_f = K_f(\omega).$$

Для визначення критичних частот, що відповідають прямій і зворотній синхронній прецесії в програмі ANSYS, є можливість побудови якісної діаграми Кемпбелла (залежності частоти прецесії від частоти обертання ротора). Критичні швидкості прецесії відповідають точкам перетину між частотними кривими і додатковим графіком функції $f(\omega) = s \cdot \omega$ (де $s = \omega/\Omega$ є коефіцієнтом прецесії при синхронній прецесії $s=1$). Оскільки критичні швидкості визначаються графічно, їх точність залежить від якості побудови діаграми Кемпбелла (рис. 49).

Ротор відцентрової машини у програмі ANSYS моделюється спрощеною балочною моделлю (рис. 2.50), яка створюється балочними елементами BEAM3 або BEAM4 (рис. 51) залежно від розмірності задачі, різної довжини ($l_1 \dots l_n$) і діаметра ($d_1 \dots d_2$) з урахуванням розбиття ротора на ділянки [12].

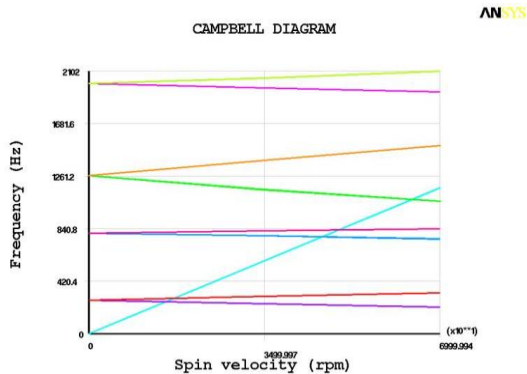


Рисунок 49 – Приклад діаграми Кемпбелла

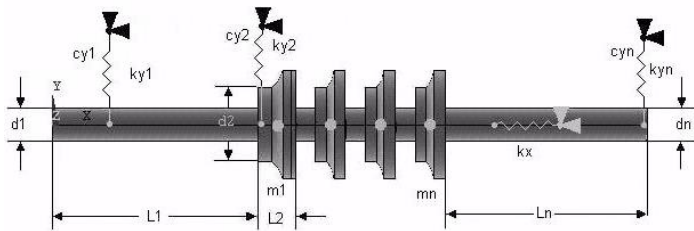


Рисунок 50 - Модель ротора

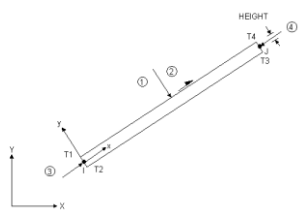


Рисунок 51 – Елемент 2D Elastic Beam

Опори, ущільнення і розвантажувальний пристрій подаються у вигляді пружних елементів Spring-damper14 з жорсткістю ($k_{y1} \dots k_{yn}$) і демпфіруванням ($c_{y1} \dots c_{yn}$) (рис. 2.52).

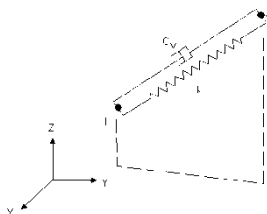


Рисунок 52 – Елемент Spring-damper14

Насаджені на вал деталі (робочі колеса, півмуфта і втулки) з певною масою і моментом інерції моделюються елементом - одинична маса Structural 3D Mass ($m_1 \dots m_n$) (рис. 53).

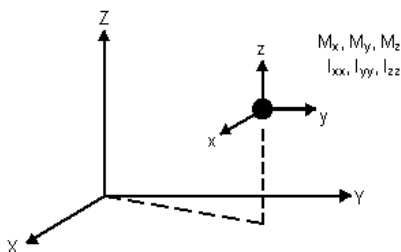


Рисунок 53 – Елемент 3D mass21

У розрахунку задаються фізико-механічні властивості матеріалу вала: модуль пружності E , коефіцієнт Пуассона μ і густина.

При розрахунку гідростатичної жорсткості і демпфірування ущільнень режим течії рідини у каналах передбачається турбулентним автомодельним. Коефіцієнт гідростатичної жорсткості ущільнення

$$k_p = \Delta p_0 \frac{\pi r l}{2H}, \quad (16)$$

де Δp_0 - перепад тиску, який дроселюється; l - довжина каналу; r - радіус вала; H - середній зазор у кільцевому каналі.

Коефіцієнт демпфірування визначається за формулою

$$k_d = \mu \frac{\pi r l^3 k_0}{12H^3}, \quad (17)$$

де μ - коефіцієнт динамічної в'язкості рідини; k_0 - модифікований коефіцієнт опору тертя $k_0 = \frac{\lambda_0}{8} \text{Re}_0$; λ_0 - коефіцієнт опору тертя кільцевого концентричного каналу, який знаходиться за формулою Блазіуса $\lambda_0 = \frac{C}{\text{Re}_0^n}$; C, n - постійні, які залежать від режиму течії у щіліні; число

Рейнольдса - $Re_0 = \frac{2\rho q_0}{\mu}$; ρ - густина рідини; q_0 - витрата

через концентричний кільцевий канал з постійною висотою

$$\text{щілини } q_0 = \left[\frac{4\Delta p H^3}{\rho l C} \left(\frac{2\rho}{\mu} \right)^n \right]^{\frac{1}{2-n}}.$$

Для проведення гармонійного аналізу і побудови амплітудно-частотної характеристики необхідно прикласти в центрі мас робочих колес ротора, відповідні вимушувальні навантаження. Амплітуда вимушувальної сили $F_{\text{вын}} = D \cdot \omega^2$; $D = m\varepsilon$ - величина дисбалансу, яка визначається за ГОСТ 22061-76 залежно від робочої частоти ω і класу відцентрової машини; m - маса ротора; ε - ексцентриситет.

Для спрощення побудови моделі і автоматизації розрахунку динамічних характеристик відцентрових машин в програмі ANSYS розроблені алгоритм і програмний додаток (Dynrotor) на макромові Tcl/Tk. Блок-схема алгоритму розрахунку наведена на рис.2.54 [12]. Для ефективної взаємодії користувача з програмою Dynrotor був розроблений ергономічний інтерфейс на мові Tk. Вікно інтерфейсу користувача подане на рис. 2.55. У робоче вікно програми Dynrotor вводяться геометричні розміри (довжини і діаметри), кількість ділянок ротора, маси насаджених деталей, величини жорсткостей і демпфірування опор і ущільнень. Вибирається

тип аналізу: модальний або гармонійний. Задається частота обертання і фізико-механічні властивості матеріалу вала.

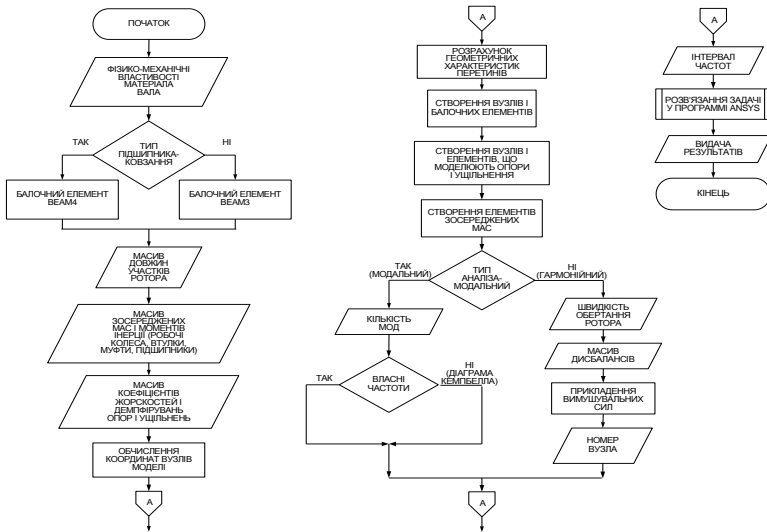


Рисунок 54 - Блок-схема алгоритму розрахунку

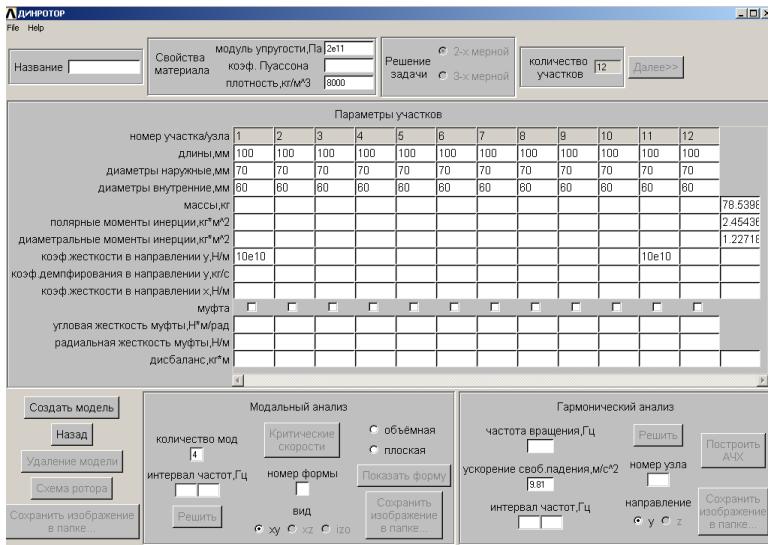


Рисунок 55 - Вікно інтерфейсу користувача програмного додатка DYNROTOR

Завдання для курсової роботи

Провести розрахунок динаміки ротора вказаного на
рисунку

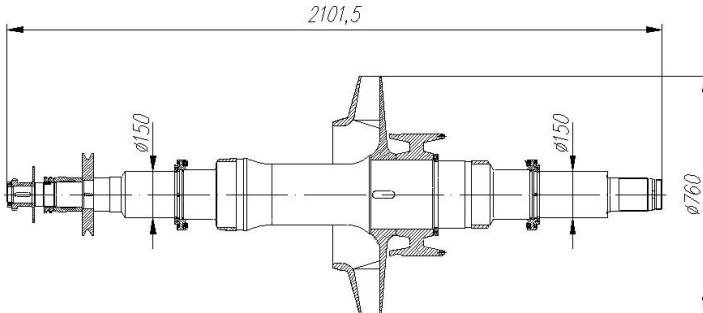


Рисунок – Схема ротора для розрахунку

Алгоритм розрахунку динаміки ротора

Створення розрахункової схеми ротора.

1 Задання скалярних параметрів (координати вузлів)

Utility Menu – Parameters – Scalar Parameters – Selection – x=.. – Accept

2 Задання типу елемента (балочний елемент : 2D (BEAM3) або 3 D (BEAM4)).

Main Menu – Preprocessor – Element Type – Add/Edit/Delete – BEAM3 (2D elastic 3) або BEAM4 (3D elastic 4) – Options – K6 (Include output) (для виведення епюр моментів і сил).

3 Задання типу елемента (зосереджена маса з урахуванням моментів інерції)

Main Menu – Preprocessor – Element Type – Add/Edit/Delete – Mass 21 (3D mass 21) – Options – K1 (Masses-inertias) – K3 (2D або 3D з урахуванням або без урахування інерції обертання).

4 Задання типу елемента (жорсткість демпфірування)

Main Menu – Preprocessor – Element Type – Add/Edit/Delete – Combine14 (Combination: Spring-damper 14) – Options (за умовчанням).

5 Задання поперечного перетину балочного елемента (розбиття вала на ділянки з однаковими діаметрами)

Main Menu – Preprocessor – Sections – Beam – Common Sectns (ID – 1..., Name – B1...Bn, Sub-type – круглий перетин; R – радіус; N, T – точність відображення).

6 Задання реальних констант

Main Menu – Preprocessor – Real Constants – Add/Edit/Delete – Add – Type 1...n (BEAM, Mass, Combin) – ok – Real Constant Set No (1...n): BEAM (Area, IZZ, HIGHT), Mass (Mass, IZZ), Combin (K – жорсткість, Н/м; CV1 – демпфірування).

7 Задання властивостей матеріалу

Main Menu – Preprocessor – Material Props – Material Models – Structural – Linear – Elastic – Isotropic (EX – модуль пружності, МПа; PRXY- коеф. Пуассона) – **OK –Exit.**

Main Menu – Preprocessor – Material Props – Material Models – Structural – Density – Dens (7800 кг/м3) (густина матеріалу).

8 Задання координат вузлів ротора

Main Menu – Preprocessor – Modeling – Create – Nodes – In Active CS – Node Number (1...n), X, Y, Z location in active CS.

9 Створення елементів між двома вузлами

Задання атрибутів ділянки

Main Menu – Preprocessor – Modeling – Create – Elements – Elem Attributes ([TYPE] – BEAM, MASS, COMBIN; [Mat] – 1; [Real] – 1...n; [SecNum] – 1..n (для BEAM) або no section (для MASS, COMBIN).

Створення елементів

Main Menu – Preprocessor – Modeling – Create Main Menu – Preprocessor – Modeling – Create – Elements – Auto numbered – Thru Nodes (вибрати два сусідніх однакових вузли і з'єднати).

Процедуру повторити при зміні діаметра вала, при виборі маси (вибирати тільки один вузол) або демпфірування.

10 Задання граничних умов (закріплення)

Main Menu – Preprocessor – Loads – Define Loads – Apply – Structural – Displacement – On nodes – All DOF – UX (0) вказуються закріплення на вузлах (для підшипника і ущільнення).

Main Menu – Preprocessor – Loads – Define Loads – Apply – Structural – Displacement – On nodes – UX (0) вказуються закріплення вала від переміщення по осі X.

Модальний аналіз ротора (аналіз вільних коливань і знаходження власних частот і форм коливань).

1 Вибір типу аналізу

Main Menu – Solution – Analysys type – New Analysis – Modal – ОК.

Main Menu – Solution – Analysys type – Analysis Options (Block Lanczos або Subspace; No of modes to extract (10); Expande mode shapes (yes); [Nmode] (10); [ELcalc] (yes) – для розрахунку напружень і деформацій) – ОК.

Block Lanczos Method (FreqB – 1 (початкова частота); FreqE – 500 (кінцева частота)).

2 Розв’язання задачі

Main Menu – Solution – Solve- Current Ls

3 Перегляд результатів

Main Menu – General Postproc – Result summary (перегляд частот коливань)

Main Menu – General Postproc – Read Results – First Set (зчитування результатів першої форми коливань) або **Next set** – наступна форма коливань.

Utility Menu – PlotCtrls – Style – Size and shape - /ESHAPE (on) – OK. Utility Menu – PlotCtrls – Style – Size and shape - /ESHAPE (on) – OK.

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Deform Shape (перегляд форми коливань).

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Stress – Van mises (для сталі) або **S1, S2,S3** (для чавуну).

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Dof solution (переміщення по осі).

Гармонійний аналіз ротора (аналіз вимушених коливань, знаходження динамічного прогинання, аналіз напруженого стану вала).

1 Вибір типу аналізу

Main Menu – Solution – Analysys type – New Analysis – Harmonic – OK.

Main Menu – Solution – Analysys type – Analysis Options ([HROPT] – full; [HROUT] – Amplitude + phase) – OK.

Full Harmonic Analysis – [EQSLV] frontal solver – OK.

Main Menu – Solution – Load Step Opts – Time/Frequeunds – Freq an Sabstps – ([HARFRQ] – 1...500; [NSUBST] – 500; [KBC] – stepped) - Задання гармонійної сили.

2 Додавання сили від дисбалансу на робочій частоті

Main Menu – Solution – Define Loads – Apply – Structural – Force/Moment – On nodes – вказати вузли – FY – real part of force/mom – вказати силу, яка виникає від дисбалансу робочих коліс ($F = D \cdot \omega^2$, D – кг·м; $\omega = \pi \cdot n / 30$).

3 Розв’язання задачі

Main Menu – Solution – Solve – Current LS.

4 Побудова амплітудно-частотної характеристики

Main Menu – TimeHist Postproc – Add – Nodal Solution – Dof Solution – U component of displacement – виділити вузол – **OK** – рисувати графік.

5 Аналіз напружено-деформованого стану вала

Main Menu – General Postproc – Read Results – By Time/Freq – **50** (робоча частота, Гц).

Utility Menu – PlotCtrls – Style – Size and shape - /ESHAPE (on) – OK.

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Deform Shape (перегляд динамічного прогинання вала).

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Stress – Van mises (Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Stress – Van mises (для сталі) або S1, S2, S3 (для чавуну).

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Dof solution (переміщення по осі).

Utility Menu – List – Results – Reaction Solution – FY – ok
(реакції в опорах, H)

Статичний аналіз (аналіз напружено-деформованного стану вала).

1 Видалення елементів жорсткість-демпфірування

Main Menu – Preprocessor – Modeling – Delete – Elements i Nodes.

2 Задання сили тяжіння для визначення маси ротора

Main Menu – Preprocessor – Loads –Define Loads – Apply – Structural – Inertia – Gravity (Y – 9.81). Можливо встановити для динаміки.

3 Вибір типу аналізу

Main Menu – Solution – Analysys type – New Analysis – Static – ОК.

4 Розв’язання задачі

Main Menu – Solution – Solve – Current LS.

5 Перегляд результатів

Utility Menu – PlotCtrls – Style – Size and shape - /ESHAPE (on) – ОК.

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Deform Shape (перегляд статичного прогинання вала).

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Stress – Van mises (для сталі) або **S1, S2,S3** (для чавуну).

Main Menu – General Postproc – Plot Results – Nodal Solution – Dof solution (переміщення по осі).

Utility Menu – List – Results – Reaction Solution – FY – ok (реакції в опорах, H).

6 Побудова епюри згинального моменту

Потрібно використовувати таблицю елементів для перегляду епюри згинальних моментів:

1) вибрати **General Postproc > Element Table > Define Table**;

2) натиснути **'Add...'**;

3) у вікні, що з'явилося:

- ввести **'MMOMZI'** в секції **'User Label for Item'**;

- у першому вікні секції **'Results Data Item'** вибрати

'By sequence num';

- у другому вікні цієї секції вибрати **'NMISC'**;

- у третьому вікні ввести **'1'**;

4) натиснути **'Apply'**;

5) повторити кроки від 2 до 4 але змінити **'MMOMZI'** на **'MMOMZJ'** і **'1'** на **'3'** на кроці 3;

6) натиснути **'OK'**. Вікно **'Element Table Data'** зараз має дві змінні;

7) натиснути **'Close'** в **'Element Table Data'**;

8) вибрати: **General Postproc > Plot Results > Line Elem Res...**;

9) вибрати **'MMOMZI'** з **'LabI'** і **'MMOMZJ'** з **'LabJ'**.

Список літератури

1. Тарасевич Ю.Я., Загоруйко А.В. Применение современных информационных компьютерных технологий при преподавании на специальности «Динамика и прочность». Інформатизація освіти та дистанційна форма навчання: сучасний стан і перспективи розвитку: Шоста міжнародна науково-методична конференція. – Суми: Вид-во СумДУ, 2004. - С. 275-279.
2. Сиковский Д.Ф. Методы вычислительной теплопередачи: Конспект лекций. - Новосибирск, 2006. - 66 с.
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.
4. ANSYS CFX 10.0 Theory Reference / SAS IP Inc., 2005.
5. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: Мир, 1990.- Т.1,2.
6. Маслов Л.Б. Численные методы механики: Курс лекций / Иван. гос. энерг. ун-т.- Иваново: ИГЭУ, 2001.
7. ANSYS 10.0 Documentation / SAS IP Inc., 2005.
8. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. Ansys для инженеров: Справочное пособие. - М.: Машиностроение-1, 2004. - 512 с.

9. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.Н. Подгорный, П.П. Гонтаровский, Б.Н. Киркач и др. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
10. ANSYS 7.0 Tutorials / University of Alberta, 2001.
11. Соломин О. Задача и методы динамического анализа высокоскоростных роторных систем с подшипниками жидкостного трения. Гидродинамическая теория смазки – 120 лет. Труды Международного научного симпозиума: В 2 томах. Машиностроение-1, Орел: ОрелГТУ, 2006. Т.1.
12. Герасиміва К.П., Загорулько А.В., Кундера Ч. Программное приложение для автоматизированного расчета динамических характеристик роторов центробежных машин // Вісник СНАУ. - №9(15) 2006. – С. 168-175.

Навчальне видання

**Загорулько Андрій Васильович,
Кайота Дмитро Олегович**

Комп'ютерне моделювання динамічних систем

Конспект лекцій

для студентів спеціальності
113 «Прикладна механіка»
денної форми навчання

Відповідальний за випуск А. В. Загорулько
Редактор А. В. Загорулько
Комп'ютерне верстання С. О. Міщенко

Формат 60×84/8. Ум. друк. арк. 13,95. Обл.-вид. арк. 12,62.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.