

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Факультет електроніки та інформаційних технологій

Кафедра електроніки,  
прикладної та загальної фізики

Кваліфікаційна робота магістра

**ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ У ПЕРІОДИЧНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМАХ  
ІЗОТРОПНИХ НАНОЧАСТИНОК**

Магістрант гр. ЕП-81.м

О.І. Шкуліпа

Науковий керівник,  
д-р. фіз.-мат. наук, професор

С.І. Денисов

Завідувач кафедри ЕЗПФ,  
д-р. фіз.-мат. наук, професор

І.Ю. Проценко

Суми – 2019

## РЕФЕРАТ

Метою даної роботи є визначення потужності втрат енергії у ізотропних феромагнітних наночастинках, що рухаються у в'язкій рідині під дією оберտального магнітного поля. Вирішення цієї проблеми має не тільки теоретичне, але і важливе практичне значення, оскільки напряму пов'язане з магнітною гіпертермією – новим методом лікування злоякісних пухлин шляхом нагрівання феромагнітних наночастинок у змінних магнітних полях.

Для досягнення зазначеної мети в роботі використана система рівнянь для опису сумісної магнітної та обертальної динаміки феромагнітних наночастинок, що базується на концепції їх повного моменту імпульсу. Шляхом аналітичного розв'язання даної системи рівнянь у випадку магнітно-ізотропних наночастинок знайдено всі характеристики прецесійного руху намагніченості таких частинок, який індукується обертальним магнітним полем. Це дозволило знайти явний вираз для потужності втрат енергії та проаналізувати її залежність від параметрів моделі.

Магістерська робота викладена на 25 сторінках, містить 1 рисунок та список цитованої літератури із 31 джерела.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ІЗОТРОПНІ ФЕРОМАГНІТНІ НАНОЧАСТИНКИ, ОБЕРТАЛЬНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ, РІВНЯННЯ РУХУ НАНОЧАСТИНОК, ПРЕЦЕСІЯ НАМАГНІЧЕНОСТІ, ПОТУЖНІСТЬ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	<b>С.</b> <b>5</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК</b> .....	<b>6</b>
1.1. Феромагнітні наночастинки та їх властивості.....	6
1.2. Магнітно-ізотропні наночастинки у гіпертермії .....	7
<b>РОЗДІЛ 2. ПРЕЦЕСІЯ НАМАГНІЧЕНОСТІ В МАГНІТНО-ІЗОТРОПНИХ НАНОЧАСТИНКАХ</b> .....	<b>10</b>
2.1. Концепція повного моменту імпульсу наночастинки в її динаміці.....	10
2.2. Система безрозмірних рівнянь руху наночастинки.....	11
2.3. Рівняння прецесійного руху намагніченості в обертальному магнітному полі.....	14
2.4. Стаціонарні режими прецесії намагніченості .....	15
2.5. Аналіз стійкості прецесійних режимів .....	17
<b>РОЗДІЛ 3. ПОТУЖНІСТЬ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ В ІЗОТРОПНИХ НАНОЧАСТИНКАХ</b> .....	<b>18</b>
3.1. Визначення потужності втрат енергії.....	20
3.2. Потужність втрат енергії ізотропної наночастинки в обертальному магнітному полі .....	21
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	<b>22</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	<b>23</b>

## ВСТУП

Завдяки своїм унікальним фізико-хімічним властивостям феромагнітні наночастинки широко використовуються, зокрема, в електронних та енергетичних галузях. Вони є надзвичайно перспективними і з точки зору майбутніх застосувань, наприклад, в біомедичних системах. Серед цих застосувань найбільш багатообіцяючою є магнітна гіпертермія, в якій використовується нагрівання наночастинок внаслідок поглинання енергії від зовнішніх змінних магнітних полів для лікування злоякісних пухлин. У феромагнітних рідинах зазвичай розглядають два механізми нагрівання наночастинок. Перший пов'язаний із броунівським обертанням частинок, а другий – із релаксацією Нееля, при якій відбувається спонтанна переорієнтація намагніченості цих частинок. Однак якщо їх середній розмір досить великий (більше або порядку сотень нанометрів), то ці температурно-індуковані механізми нагрівання стають незначними, і найбільший вклад в потужність втрат енергії може вносити детерміністична (магнітна і механічна) динаміка.

Метою даної роботи є визначення потужності втрат енергії у ізотропних феромагнітних наночастинок, що рухаються у в'язкій рідині під дією обертального магнітного поля. В даній роботі використовується детерміністичний (тобто без урахування теплових флуктуацій) підхід для визначення потужності енергетичних втрат у випадку магнітно-ізотропних феромагнітних наночастинок, що розподілені у в'язкій рідині і знаходяться під дією обертального магнітного поля. Головна відмінність цього підходу від тих, які використовувалися в попередніх дослідженнях, полягає у тому, що повний момент імпульсу наночастинок розглядається як сума кутового моменту імпульсу і спінового моменту імпульсу. Це дозволило коректно описати прецесію намагніченості в таких частинках і, як наслідок, точно визначити потужність втрат енергії в них.

Результати роботи були представлені і обговорені на III Міжнародній науково-практичній конференції «Пріоритети сучасної науки» (м. Київ, 19-20 листопада 2019 року).

## РОЗДІЛ 1. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ФЕРОМАГНІТНИХ НАНОЧАСТИНОК

### 1.1. Феромагнітні наночастинки та їх властивостями

Ферромагнетики - речовина, у якого вектор індукції власного магнітного поля, співнаправлений з вектором магнітної індукції зовнішнього поля, значно перевищує його по модулю (зовнішнє магнітне поле значно збільшується).

Ферромагнетики, на відміну від слабомагнітних діамагнетиків і парамагнетиків, є сильномагнітними середовищами: внутрішнє магнітне поле в них може в сотні і тисячі разів перевершувати зовнішнє поле.

Феромагнітні матеріали в більшій чи меншій мірі володіють магнітною анізотропією, тобто властивістю намагнічуватися з різним ступенем труднощі в різних напрямках.

Магнітні властивості феромагнітних матеріалів зберігаються до тих пір, поки їх температура не досягне значення, званого точкою Кюрі. При температурах вище точки Кюрі феромагнетик веде себе в зовнішньому магнітному полі як парамагнітна речовина. Феромагнетик не тільки втрачає свої феромагнітні властивості, але у нього також змінюється теплоємність, електропровідність і деякі інші фізичні характеристики. Точка Кюрі для різних матеріалів різна: Залізо (+ 7700 С), нікелю + 3650 С, кобальту +11300 С.

На даний момент встановлено, що магнітні властивості феромагнетиків визначаються спінові магнітними моментами електронів. Встановлено також, що феромагнітними властивостями можуть володіти тільки кристалічні речовини, в атомах яких маються недобудовані внутрішні електронні оболонки з некомпенсованими спінами. У подібних кристалах можуть виникати сили, що змушують спінові магнітні моменти електронів орієнтуватися паралельно один одному, що і приводить до виникнення областей вільного намагнічування. Ці сили, мають квантову природу - вони обумовлені хвильовими властивостями електронів.

## 1.2. Перспективи використання феромагнітних наночастинок

Феромагнітні однодоменні наночастинок є об'єктами інтенсивних досліджень, оскільки мають високий потенціал для різних застосувань, наприклад в практичному застосуванні, як виготовлення: магнітів, сердечників електромагнітів, трансформаторів, роторів і статорів електричних машин, їх застосування для магнітного звукозапису, магнітної дефектоскопії, збагачення руд. Залізний або сталевий сердечник в котушці в багато разів підсилює створюваний цією котушкою поле, не збільшуючи силу струму в котушці. Це економить електроенергію. Сердечники трансформаторів, генераторів, електродвигунів та інших пристроїв виготовляють з феромагнетиків. При виключенні зовнішнього магнітного поля феромагнетик залишається намагніченим, тобто створює магнітне поле в навколишньому його просторі. Упорядкована орієнтація елементарних струмів жевріє при виключенні зовнішнього магнітного поля. Завдяки цьому існують постійні магніти. Постійні магніти знаходять широке застосування в приладах, телефонах, в пристроях звукозапису, магнітних компасах і т.д.

Магнітна звукозапис проводиться таким чином. Поблизу стрічки, покритої шаром дрібних частинок феромагнетика, яка повільно перемотується з одного валика на інший, поміщається маленький електромагніт, що живиться струмами звукової частоти. Сила струму в його обмотці весь час змінюється в такт зі звуком. Відповідно змінюється і величина індукції магнітного поля, що збуджується електромагнітом, чому залишкова намагніченість феромагнітної стрічки в різних місцях виявляється різною. Таким чином, звук залишає на стрічці як би свої магнітні "відбитки". Якщо тепер поставити інший електромагніт поблизу стрічки і під'єднати його через підсилювач до гучномовцю, то при русі стрічки магнітне поле "відбитків" буде порушувати в обмотці електромагніту змінні індукційні струми, які після посилення і дадуть в гучномовці звук.

Одними з найбільш перспективних є застосування в біомедицині, наприклад, для отримання зображень за допомогою магнітних частинок [1,2], доставки ліків до уражених хворобою органів [3,4], магнітної гіпертермії, тобто лікування злоякісних пухлин шляхом нагрівання наночастинок під дією змінних магнітних полів [5,6], та сепарації клітин [7-9]. Розробка методів для отримання феромагнітних наночастинок із наперед заданими властивостями є одним з ключових факторів для реалізації цих та багатьох інших застосувань. На сьогоднішній день вже запропоновано кілька таких методів та продемонстрована їх ефективність (див., приклад, посилання [10–12]).

Ще одним ключовим фактором є розробка теоретичних підходів, спрямованих на більш повний опис магнітних і транспортних властивостей феромагнітних частинок у в'язких рідинах, що знаходяться під дією зовнішніх змінних магнітних полів. Такі системи часто вивчаються в рамках моделі жорсткого диполя, коли намагніченість частинки спрямована вздовж однієї з осей її легкого намагнічування. Це наближення, яке добре виконується у випадку наночастинок з відносно великим полем магнітної анізотропії, часто використовується для вивчення ефектів, зумовлених, наприклад, обертанням частинок в рідинах, диполь-дипольною взаємодією між ними та тепловими флуктуаціями [13–17]. Це ж наближення нещодавно було використано для передбачення та вивчення ефекту спрямованого транспорту феромагнітних наночастинок у суспензіях, що виникає під дією сили Магнуса внаслідок коливального та обертального рухів таких частинок, які індукуються зовнішніми змінними магнітними полями [18–20].

Однак якщо поле магнітної анізотропії не сильно перевищує зовнішнє поле, тоді модель частинок із “вмороженою” намагніченістю (тобто, модель жорсткого диполя) стає незастосовною. У цьому випадку необхідно враховувати зв'язок між обертанням намагніченості частинки і обертанням самої частинки. Одним з найбільш простих та ефективних методів визначення властивостей таких систем базується на концепції часу релаксації (див.

посилання [21]). У той же час динамічний підхід на основі як детерміністичних, так і стохастичних рівнянь руху частинки та її намагніченості дозволяє провести більш детальний опис властивостей таких систем. Хоча ці рівняння були отримані багато років тому [22], тільки нещодавно вони були застосовані для вивчення сумісної магнітної та механічної динаміки та ефектів в магнітній гіпертермії [23–28].

В даній магістерській роботі зазначені вище рівняння використані для розрахунку потужності втрат енергії в магнітно-ізотропних феромагнітних наночастинках з відносно малим полем магнітної анізотропії (типу пермалоя), що рухаються у в'язкій рідині під дією обертального магнітного поля. Оскільки потужність втрат у стаціонарному стані визначається характеристиками прецесійного руху намагніченості таких частинок, були також використані результати роботи [29], де ці характеристики отримано аналітично шляхом розв'язання відповідних рівнянь руху. Оригінальні результати стосовно потужності втрат енергії в магнітно-ізотропних феромагнітних наночастинках представлено в роботі [30], в якій потужність втрат отримано у вигляді простих формул, що залежать лише від відомих параметрів моделі.



## РОЗДІЛ 2. ПРЕЦЕСІЯ НАМАГНІЧЕНОСТІ В МАГНІТНО-ІЗОТРОПНИХ НАНОЧАСТИНКАХ

### 2.1. Концепція повного моменту імпульсу наночастинки в її динаміці

Ми вважаємо однодоменні частинки сферичної форми підвішеними у в'язкій рідині і вони характеризується загальним імпульсом  $\vec{J} = \vec{J}(t)$  і визначається як сума механічного кута, імпульс  $I\vec{\omega}$  та обертовий імпульс у квазікласичному наближенні,  $-(V/\gamma)\vec{M}$ :

$$\vec{J} = I\vec{\omega} - \frac{V}{\gamma}\vec{M}, \quad (2.1)$$

Де  $I = \frac{\rho_m V d^2}{10}$  - момент інерції частинки;

$\rho_m$ ,  $V$  і  $d$ - щільність частинок, об'єм та діаметр, відповідно;

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$  кутова швидкість частинки;

$\vec{M} = \vec{M}(t)$ , ( $|\vec{M}| = M = const$ ) - намагнічування частинки;

$\gamma = (> 0)$ - гіромагнітне відношення.

За відсутності розсіювання [23,24]  $d\vec{J}/dt = V\vec{M} \times \vec{H}$ , де  $\vec{H} = \vec{H}(t)$  є зовнішнім магнітним полем і знак  $\times$  позначає вектор добутку. Тому, диференціюючи імпульс кута частинок  $I\vec{\omega}$  щодо часу та введення тертя. Обертаючий момент має такий вигляд  $-6\eta V\vec{\omega}$  ( де  $\eta$  - динамічна в'язкість рідини, що діє на частинку). Тоді рівняння набуває такого вигляду:

$$I \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \frac{V}{\gamma} \frac{d}{dt} \vec{M} + V\vec{M} \times \vec{H} - 6\eta V\vec{\omega}, \quad (2.2)$$

яке описує обертання феромагнітних частинок у в'язкій рідині. Звернемо увагу, що для вакууму (коли  $\eta = 0$ ) це рівняння було отримано в [23], а для

в'язкої рідини в [24]. Оскільки величина намагніченості  $M$  не залежить від часу, тому динаміку вектора намагніченості  $\vec{M}$  можна описати рівнянням Ландау-Ліфшиця [31]. Важлива особливість цього рівняння, що описує Динаміка намагніченості обертових наночастинок така, що її Термін розсіювання повинен бути належним чином змінений [23]:

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}_{eff} - \frac{\gamma \alpha}{M} \vec{M} \times \left[ \vec{M} \times \left( \vec{H}_{eff} - \frac{\vec{\omega}}{\gamma} \right) \right], \quad (2.3)$$

Коли  $\alpha (> 0)$  – параметр затухання Ландау-Ліфшиця,  $-\vec{\omega}/\gamma$  – є так зване поле Барнетта, що походить від обертання частинок (див., приклад, [26]) і  $\vec{H}_{eff}$  - ефективне магнітне поле яке діє на  $\vec{M}$ . Зокрема, в разі одноосьових частинок, ефективне магнітне поле дається формулою

$$\vec{H}_{eff} = \frac{H_a}{M} (\vec{M} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{H}, \quad (2.4)$$

де  $H_a$  – одноосьове магнітне анізотропне поле, крапка позначає скалярний добуток, а одиничний вектор  $\vec{n}$  спрямований по осі намагніченості і задовільняє наступне рівняння руху (кінематичне відношення):

$$\frac{d}{dt} \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{n}. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.2), (2.3) та (2.5) доповнені ефективним магнітним полем (2.4) яке повністю описує сумісну динаміку намагніченості та обертальну динаміку наночастинок на одній осі у в'язкій рідині.

## 2.2. Система безрозмірних рівнянь руху наночастинок

Шляхом введення безрозмірних змінних і параметрів, що визначаються наступним формулами:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{\vec{M}}{M}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{\omega}}{\gamma M}, \quad \vec{h}_{eff} = \frac{\vec{H}_{eff}}{M}, \quad \vec{h} = \frac{\vec{H}}{M}, \\ \tau &= \gamma M t, \quad \kappa = \frac{I \gamma^2}{V}, \quad \beta = \frac{6 \gamma \eta}{M}, \quad h_a = \frac{H_a}{M},\end{aligned}\quad (2.6)$$

рівняння (2.2), (2.3) та (2.5) можна переписати в безрозмірному вигляді

$$\kappa \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{m}} + \vec{m} \times \vec{h} - \beta \vec{v}, \quad (2.7a)$$

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h}_{eff} - \alpha \vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} - \vec{v})], \quad (2.7b)$$

$$\dot{\vec{n}} = \vec{v} \times \vec{n}, \quad (2.7b)$$

де крапка зверху позначає похідну за часом  $\tau$ , і відповідно до (2.4)

$$\vec{h}_{eff} = h_a (\vec{m} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{h}. \quad (2.8)$$

Якщо прийняти керовану динаміку намагніченості за рівняння Ландау-Ліфшиц-Гілберт (ЛЛГ) [31], і врахувати вплив обертання частинок, тоді це рівняння можна записати в такому вигляді [24]:

$$\frac{d}{dt} \vec{M} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}_{eff} + \frac{\alpha'}{M} \vec{M} \times \left( \frac{d}{dt} \vec{M} - \omega \times \vec{M} \right) \quad (2.9)$$

( $\alpha'$  - параметр демпфування ЛЛГ). Використовуючи це рівняння, знаходимо:

$$\vec{M} \times \frac{d}{dt} \vec{M} = -\gamma \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}_{eff}) - \alpha' M \frac{d}{dt} \vec{M} - \alpha' M (\vec{M} \times \vec{\omega}), \quad (2.10)$$

що випливає безпосередньо з (2.9) та позначень (2.6). За допомогою (2.10) рівняння (2.9) можна звести до безрозмірного рівняння ЛЛГ

$$(1 + \alpha'^2) \dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} \times \alpha'^2 \vec{v}) - \alpha' \vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} - \vec{v})], \quad (2.11)$$

яке у цьому випадку слід використовувати замість рівняння (2.7b).

Порівнюючи рівняння (2.7б) та (2.11), ми можемо переконатися що при  $\vec{v} = 0$  (коли наночастинки не рухаються) ці рівняння насправді є рівнозначними [31]. Строго кажучи, при  $\vec{v} \neq 0$  ці рівняння різні. Однак у найбільш поширених випадках, коли  $\alpha' \ll 1$ , цією різницею можна знехтувати. Тому у подальшому аналізі ми будемо використовувати набір рівнянь (2.7).

Важливо відзначити, що рівняння (2.7) записані в детерміністичному підході. В принципі, теплові флуктуації можна також врахувати, вводячи в ці рівняння гауссові шуми (див., посилання, [22,24,25]). Однак якщо ці шуми не інтенсивні, вони не знищуються детермінованим ефектом. Це означає, що рівняння (2.7) може бути використане як відправна точка для зв'язаної магнітної та обертальної динаміки підвішених (частинки які знаходяться у в'язкій речовині) феромагнітних частинок. Можна також сформулювати умови за якими тепловими коливаннями можна сміливо нехтувати. Зокрема, коливання намагніченості магнітно-ізотропними наночастинок (коли  $h_a = 0$ ) може вважатися невеликим, якщо магнітна енергія  $MNV$  перевищує теплову  $k_B T$  ( $k_B$  - константа Больцмана;  $T$  - абсолютна температура). Така ситуація виникає, коли діаметр частинок задовольняє умову  $d > d_1$ , де  $d_1 = (6k_B T / \pi MN)^{1/3}$ .

### 2.3. Рівняння прецесійного руху намагніченості в обертальному магнітному полі

Наступним нашим завданням є вивчення зв'язку магнітної та обертальної динаміки ізотропних феромагнітних наночастинок. Оскільки в цьому випадку  $h_a = 0$ , згідно з (2.8)  $\vec{h}_{eff} = \vec{h}$ , і ця динаміка описується набором лише двох рівнянь, (2.7а) та (2.7б). Що до рівняння (2.7в), то для таких наночастинок воно може бути виключено з подальшого розгляду.

Якщо припустити, що лівий бік рівняння (2.7а) малий, ми можемо переписати систему рівнянь (2.7а) та (2.7б) у формі:

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h} + \beta \vec{v}, \quad (2.12a)$$

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h} - \alpha \vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{h} - \vec{v})]. \quad (2.12b)$$

Підставивши  $\dot{\vec{m}}$  з рівняння (2.12б) в рівняння (2.12а) та приймаючи до уваги, що відповідно до (2.12а)  $\vec{v} \cdot \vec{m} = 0$ , знаходимо:

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{h}). \quad (2.13)$$

Потім, замінюючи цей вираз безрозмірним кутовим (2.12б) отримуємо замкнуте узагальнене рівняння Ландау-Ліфшиця-Гілберта для одиничного вектора намагніченості магнітно-ізотропних частинок у в'язкій рідині:

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{m} \times \vec{h} - q \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{h}), \quad (2.14)$$

де  $q = \alpha\beta/(\alpha + \beta)$ .

Зауважимо, що межа  $\beta \rightarrow \infty$  відповідає нерухомим частинкам. У цій межі  $\vec{v} \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \alpha$  рівняння (2.14) зводиться до стандартного рівняння Ландау-Ліфшиця.

Далі ми використовуємо рівняння (2.14) та вираз (2.13) для визначення магнітної та обертальної стаціонарної динаміки ізотропних наночастинок, які обертаються під дією магнітного поля:

$$\vec{h} = h(\cos v\tau \vec{e}_x + \rho \sin v\tau \vec{e}_y), \quad (2.15)$$

де,  $h = |\vec{h}| = \text{const}$  - це безрозмірна амплітудна величина, обертового магнітного поля;

$v = \Omega/\gamma\vec{M}$  - частота обертового поля,  $\rho = \pm 1$  - параметр, що визначає напрямок обертання магнітного поля, а  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  та  $\vec{e}_z$  є одиницею вектора декартової системи координат.

#### 2.4. Стационарні режими прецесії намагніченості

Представимо одиничний вектор намагніченості  $\vec{m}$  в формі

$$\vec{m} = \sin\theta \cos\phi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z, \quad (2.16)$$

де  $\theta = \theta(\tau)$  и  $\phi = \phi(\tau)$  - полярні и азимутальні кути  $\vec{m}$ , відповідно. Далі, вводячи кут запізнення:

$$\psi = \rho v\tau - \phi, \quad (2.17)$$

ми можемо звести векторне рівняння ЛЛ (2.14) до системи диференціальних рівнянь відносно  $\theta$  і  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \sin\psi + q h \cos\theta \cos\psi, \\ (\dot{\psi} - \rho v) \sin\theta &= h \cos\theta \cos\psi - q h \sin\psi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Якщо припустити, що в стаціонарному стані (коли  $\tau \rightarrow \infty$ ) кути  $\theta$  і  $\psi$  не залежать від часу,

$$\theta = \theta_p = \text{const}, \quad \psi = \psi_p = \text{const} \quad (2.19)$$

( $0 \leq \theta_p \leq \pi$ ,  $-\pi < \psi_p \leq \pi$ ) від рівнянь (2.18) кожен отримує множину рівнянь для  $\theta_p$  і  $\psi_p$ :

$$\begin{aligned}\sin\psi_p + q\cos\theta_p\cos\psi_p &= 0, \\ \rho\chi\sin\theta_p + \cos\theta_p\cos\psi_p - q\sin\psi_p &= 0,\end{aligned}\tag{2.20}$$

де  $\chi = v/h$ . Якщо ці кути представлені у вигляді

$$\theta_p = \frac{\pi}{2}(1 + \rho) - \rho\theta_0, \quad \psi_p = \rho\psi_0,\tag{2.21}$$

тоді нові змінні  $\theta_0 (0 \leq \theta_0 \leq \pi)$  і  $\psi_0 (-\pi \leq \psi_0 \leq \pi)$  не залежать від параметру  $\rho$ . Дійсно, з урахуванням того, що  $\sin\psi_p = \rho\sin\psi_0$ ,  $\cos\psi_p = \cos\psi_0$ ,  $\sin\theta_p = \sin\theta_0$  і  $\cos\theta_p = -\rho\sin\theta_0$ , рівняння (2.20) дають

$$\begin{aligned}\sin\psi_0 + q\cos\theta_0\cos\psi_0 &= 0, \\ \chi q\sin\theta_0 - (1 + q^2)\sin\psi_0 &= 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Згідно з останнім рівнянням в (2.22) кут  $\psi_0$  (як  $\theta_0$ ) має належати інтервалу  $[0, \pi]$ , тобто дозволені тільки невід'ємні значення для  $\sin\psi_0$ . Вводячи параметри  $c = q/\sqrt{1 + q^2}$  та  $k = \chi/\sqrt{1 + q^2}$ , це легко показати з рівняння (2.22) що  $\sin\psi_0$  задовольняє біквдратичне рівняння

$$\sin^4\psi_0 - (1 + k^2)\sin^2\psi_0 + c^2k^2 = 0.\tag{2.23}$$

Оскільки  $\psi_0 \in [0, \pi]$ , то воно вирішується за формулою  $\sin\psi_0 = R$ , де

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + k^2 - \sqrt{(1 + k^2)^2 - 4c^2k^2}}.\tag{2.24}$$

Звідси, використовуючи друге рівняння в (2.22), отримуємо  $\sin\psi_0 + q\cos\theta_0\cos\psi_0 = 0$  (Зверніть увагу, що згідно з (2.24) умови  $R \leq 1$  і  $R/ck \leq 1$  завжди виконуються). Крім того, перше рівняння в (2.22) показує, що обидва кута  $\psi_0$  і  $\theta_0$  повинні лежати в інтервалі  $[0, \pi/2]$  або в такому інтервалі  $[\pi/2, \pi]$ .

У першому випадку рішення рівнянь (2.22) записується як

$$\theta_0^{(1)} = \arcsin\frac{R}{ck}, \quad \psi_0^{(1)} = \arcsin R,\tag{2.25}$$

тоді як в останньому випадку воно записується наступним чином:  $\theta_0^{(2)} = \pi - \theta_0^{(1)}$ ,  $\psi_0^{(2)} = \pi - \psi_0^{(1)}$ .

Таким чином, обертальне магнітне поле (2.16) в принципі могло б: індукувати у магнітно-ізотропних наночастинках, де є два прецесійні стани намагніченості,  $\vec{m}^{(1)}$  і  $\vec{m}^{(2)}$ . Використовуючи (2.21) та (2.25), знаходимо кути

$$\theta_0^{(1)} = \frac{\pi}{2}(1 + \rho) - \rho \arcsin \frac{R}{ck}, \quad \psi_0^{(1)} = \rho \arcsin R, \quad (2.26)$$

для  $\vec{m}^{(1)}$  і  $\theta_p^{(2)} = \theta_{-p}^{(1)}$  і  $\psi_p^{(2)} = \rho\pi + \psi_{-p}^{(1)}$  для  $\vec{m}^{(2)}$ . Ці вирази разом із визначенням (2.17) кута відставання, дозволяємо визначити складові вектора  $\vec{m}^{(l)}$  ( $l = 1, 2$ ) наступним чином [29]:

$$\begin{pmatrix} m_x^{(l)} \\ m_y^{(l)} \\ m_z^{(l)} \end{pmatrix} = (-1)^{1+l} \frac{R}{ck} \times \begin{cases} \cos[v\tau + (-1)^l \arcsin R], \\ \rho \sin[v\tau + (-1)^l \arcsin R], \\ -\rho \sqrt{c^2 k^2 / R^2 - 1}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Згідно з ними, стаціонарні прецесії намагнічування, якщо вони стійкі, виникають навколо осі  $z$ . Частота магнітного поля та їх напрямок збігається з напрямком обертання магнітного поля. Середній час намагніченість у цих прецесійних станах, визначається як:  $\langle \vec{m}^{(l)} \rangle = (v/2\pi) \int_0^{2\pi/v} \vec{m}^{(l)} d\tau$ , задається  $\langle \vec{m}^{(l)} \rangle = (-1)^l \rho \sqrt{1 - R^2/c^2 k^2} \vec{e}_z$ , тобто магнітне поле, що обертається в площині  $xu$  намагнічує ізотропні наночастинки в  $z$  напрямку.

## 2.5. Аналіз стійкості прецесійних режимів

Тепер ми аналізуємо лінійну стійкість прецесії стану  $\vec{m}^{(l)}$ . Заміняючи  $\theta = \theta_\rho^{(1)} + \theta_1$  ( $\theta_1 = \theta_1(\tau)$ ,  $|\theta_1| \ll 1$ ) і  $\psi = \psi_\rho^{(1)} + \psi_1$  ( $\psi_1 = \psi_1(\tau)$ ,  $|\psi_1| \ll 1$ ) у рівнянні (2.18), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь для кутів  $\theta_1$  та  $\psi_1$ :

$$\dot{\theta}_1 = h(\cos\psi_\rho^{(l)} - q\cos\theta_\rho^{(l)}\sin\psi_\rho^{(l)})\psi_1 - qh\sin\theta_\rho^{(l)}\cos\psi_\rho^{(l)}\theta_1,$$



$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 \sin\theta_\rho^{(l)} = & -h(\cos\theta_\rho^{(1)} \sin\psi_\rho^{(l)} + q\cos\psi_\rho^{(l)})\psi_1 + \\ & + h(\rho\chi\cos\theta_\rho^{(l)} - \sin\theta_\rho^{(l)} \cos\psi_\rho^{(1)})\theta_1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Якщо припустити, що

$$\theta_1 = \tilde{\theta}_\rho e^{\lambda_l h \tau}, \quad \psi_1 = \tilde{\psi}_\rho e^{\lambda_l h \tau}, \quad (2.29)$$

де параметри  $\tilde{\theta}_1$ ,  $\tilde{\psi}_1$  і  $\lambda_l$  не залежать від  $\tau$ , рівняння (2.28) зводяться до однорідної системи лінійних рівнянь відносно  $\tilde{\theta}_1$  та  $\tilde{\psi}_1$ , які можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} \lambda_l + (1)^{1+l} a_{11} & (-1)^l a_{12} \\ (-1)^{1+l} a_{21} & \lambda_l + (-1)^l a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\psi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Враховуючи відповідно до (2.21) та (2.26), що

$$\begin{aligned} \sin\theta_\rho^{(l)} = \frac{R}{ck}, \quad \cos\theta_\rho^{(l)} = (-1)^l \rho \frac{1}{ck} \sqrt{c^2 k^2 - R^2}, \\ \sin\psi_\rho^{(l)} = \rho R, \quad \cos\psi_\rho^{(l)} = (-1)^{1+l} \sqrt{1 - R^2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

коефіцієнти  $a_{nm}$  в рівняннях (2.29) виражаються через параметри  $c$  і  $k$  (нагадаємо, що  $c < 1$  і  $k < \infty$ ) наступним чином:

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{R}{k} \sqrt{\frac{1-R^2}{1-c^2}}, \quad a_{12} = \sqrt{1-R^2} + \frac{R}{k} \sqrt{\frac{c^2 k^2 - R^2}{1-c^2}}, \\ a_{21} = \sqrt{1-R^2} + \frac{k}{R} \sqrt{\frac{c^2 k^2 - R^2}{1-c^2}}, \\ a_{22} = \sqrt{c^2 k^2 - R^2} - \frac{c^2 k}{R} \sqrt{\frac{1-R^2}{1-c^2}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Добре відомо, що ненульові розв'язки системи рівнянь (2.29) існують лише за умови коли детермінант матриці коефіцієнтів дорівнює нулю, тобто, якщо має місце наступне рівняння

$$\lambda_l^2 + (-1)^{1+l}(a_{11} - a_{22})\lambda_l + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0. \quad (2.33)$$

Воно виконується при  $\lambda_l = \lambda_l^+ i \lambda_l^-$ , де

$$\lambda_l^\pm = (-1)^l \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \pm i \frac{1}{2} \sqrt{4a_{12}a_{21} - (a_{11} + a_{22})^2}. \quad (2.34)$$

( $i$  - уявна одиниця) – розв’язки рівняння (2.33). Можна перевірити (аналітично чи чисельно), що  $a_{11} - a_{22} > 0$  і  $4a_{12}a_{21} - (a_{11} + a_{22})^2 > 0$  для всіх значень  $c$  і  $k$ . Тому, використовуючи (2.23), можна зробити висновок, що прецесійний стан намагніченості з  $l = 1$  (тобто,  $\vec{m}^{(1)}$ ) є стабільним (тому що  $\text{Re}\lambda_1^\pm < 0$ ), тоді як прецесійний стан при  $l = 2$  (тобто  $\vec{m}^{(2)}$ ) нестійкий (тому що  $\text{Re}\lambda_2^\pm > 0$ ). Рисунок 2.1 ілюструє прецесію намагніченості наночастинки і її кутової швидкості в стаціонарному стані.

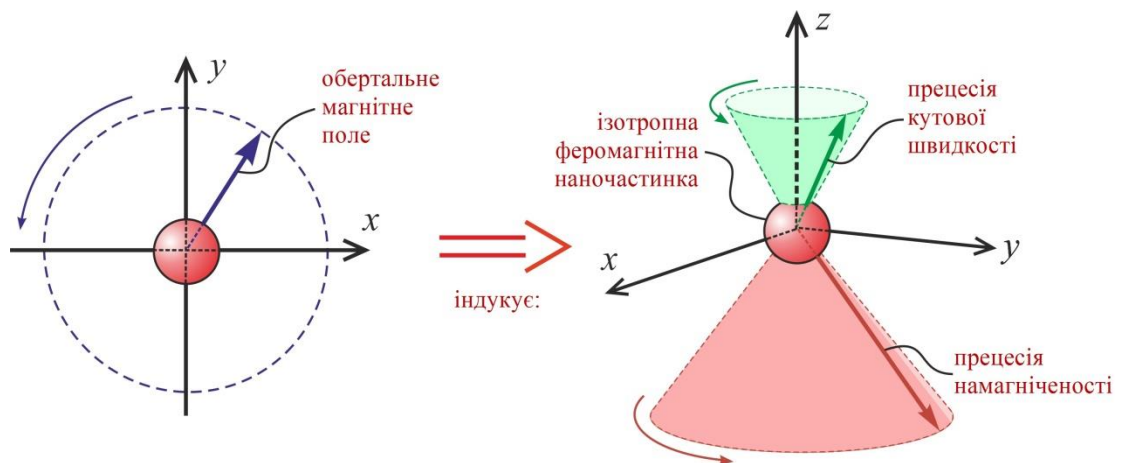


Рисунок 2.1 – Схематичне зображення прецесії намагніченості та прецесії кутової швидкості ізоотропної ферромагнітної наночастинки у в'язкій рідині, що індукуються обертальним магнітним полем.

## РОЗДІЛ 3. ПОТУЖНІСТЬ ВТРАТ ЕНЕРГІЇ В ІЗОТРОПНИХ НАНОЧАСТИНКАХ

### 3.1. Визначення потужності втрат енергії

Для визначення потужності втрат  $Q$ , тобто магнітної енергії, що розсіюється за одиницю часу, спочатку запишемо повну енергію ізотропної наночастинки у вигляді

$$W = VM^2(\kappa\vec{v}^2/2 - \vec{m} \cdot \vec{h}), \quad (3.1)$$

де перший член в правій частині цього виразу описує кінетичну енергію обертання наночастинки, а другий – її магнітну енергію у зовнішньому магнітному полі. Потім, використовуючи рівняння (2.7) і умову  $\vec{h}_{eff} = \vec{h}$  (вона показує, що частинка ізотропна), можна переконатися, що

$$\dot{W} = -\gamma VM^3 \left( \vec{m} \cdot \dot{\vec{h}} + \vec{v}^2/\beta + \alpha [\vec{m} \times (\vec{h} - \vec{v})]^2 \right). \quad (3.2)$$

Визначимо далі середнє значення функції  $f(\tau)$ , що задовільняє умові періодичності  $f(\tau + 2\pi/\nu) = f(\tau)$ , за формулою  $\langle f(\tau) \rangle = (\nu/2\pi) \int_0^{2\pi/\nu} f(\tau) d\tau$ . Тоді, приймаючи до уваги умову  $\langle \dot{W} \rangle = 0$  і визначення

$$Q = -\gamma VM^3 \langle \vec{m} \cdot \dot{\vec{h}} \rangle, \quad (3.3)$$

з (3.2) неважко показати, що

$$Q = -\gamma VM^3 \left( \langle \vec{v}^2 \rangle / \beta + \alpha \langle [\vec{m} \times (\vec{h} - \vec{v})]^2 \rangle \right). \quad (3.4)$$

Таким чином, потужність втрат енергії в ізотропній феромагнітній частинці можна розрахувати як за допомогою визначення (3.3), так і за допомогою формули (3.4). В подальших обчисленнях будемо використовувати більш просту в математичному сенсі формулу (3.3).

### 3.2. Потужність втрат енергії ізотропної наночастинки в обертальному магнітному полі

Підставивши в (3.3) формули (2.16) та (2.27) (в останній формулі потрібно вибрати  $l = 1$ ) і прийнявши до уваги, що  $v = \Omega/\gamma M$ , знаходимо

$$Q = MHV\Omega R^2 / ck. \quad (3.5)$$

Нарешті, враховуючи визначення параметрів  $c$  і  $k$ , отримуємо остаточний вираз для потужності втрат енергії у магнітно-ізотропних феромагнітних наночастинках [30]

$$Q = \gamma VMH^2 R^2 (1 + q^2) / q. \quad (3.6)$$

Використовуючи цей результат, проаналізуємо залежність потужності втрат від параметрів системи. Зокрема, якщо  $H \rightarrow 0$ , тоді, приймаючи до уваги визначення (2.24), з (3.6) отримуємо

$$Q = \gamma VMH^2 q, \quad (3.7)$$

тобто  $Q$  зростає з  $H$  за квадратичним законом. У випадку ж, коли  $v \rightarrow 0$  ( $\Omega \rightarrow 0$ ), загальна формула (3.6) дає

$$Q = \gamma VM^3 v^2 q / (1 + q^2). \quad (3.8)$$

Простий аналіз формули (3.6) показує, що при зменшенні параметра дисипації Ландау-Ліфшиця і динамічної в'язкості рідини потужність втрат прямує до нуля. Зазначимо також, що вищенаведені результати отримані для ізольованої наночастинки. Але їх можна використовувати і у випадку, коли концентрація частинок  $n$ , розподілених в рідині, є досить малою (тобто коли взаємодією частинок можна знехтувати). В цьому випадку потужність втрат енергії в одиниці об'єму рідини наближено визначається за формулою  $Qn$ .

## ВИСНОВКИ

1. Для опису сумісної магнітної та обертальної динаміки феромагнітних наночастинок використано систему рівнянь, що базується на концепції їх повного моменту імпульсу. Встановлено, що у випадку ізотропних частинок, чийми інерційними властивостями можна знехтувати, кутова швидкість частинок у стаціонарному стані повністю визначається прецесійним рухом вектора намагніченості, який описується узагальненим рівнянням Ландау-Ліфшиця.

2. Знайдено два стаціонарних розв'язки узагальненого рівняння Ландау-Ліфшиця, що описують прецесію намагніченості ізотропних наночастинок відносно осі, перпендикулярної до площині обертання магнітного поля. Показано, що тільки один з цих розв'язків є стійким.

3. Використовуючи стійкий розв'язок узагальненого рівняння Ландау-Ліфшиця, отримано загальний вираз для потужності втрат енергії в ізотропних феромагнітних наночастинках, що рухаються у в'язкій рідині під дією обертального магнітного поля, та проаналізовано залежність потужності втрат від параметрів моделі.

4. Встановлено, що потужність втрат зростає за квадратичними законами при збільшенні амплітуди та частоти обертального магнітного поля. Показано також, що при зменшенні параметра дисипації Ландау-Ліфшиця і динамічної в'язкості рідини потужність втрат прямує до нуля.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. B. Gleich, J. Weizenecker. Tomographic imaging using the nonlinear response of magnetic particles // *Nature (London)* – 2005. – Vol. 435. – P. 1214-2017.
2. Q. A. Pankhurst, N. T. K. Thanh, S. K. Jones, J. Dobson. Progress in applications of magnetic nanoparticles in Biomedicine // *J. Phys. D* – 2009. – Vol. 42. – P. 224001.
3. M. Arruebo, R. Fernández-Pacheco, M. R. Ibarra, J. Santamaría. Magnetic nanoparticles for drug delivery // *Nano Today* – 2007. – Vol. 2. – P. 22-32.
4. K. Ulbrich, K. Holá, V. Šubr, A. Bakandritsos, J. Tuček, R. Zbořil. Targeted drug delivery with polymers and magnetic nanoparticles: Covalent and noncovalent approaches, release control, and clinical studies // *Chem. Rev.* – 2016. – Vol. 116. – P. 5338-5431.
5. S. Laurent, S. Dutz, U. O. Häfeli, M. Mahmoudi. Magnetic fluid hyperthermia: Focus on superparamagnetic iron oxide Nanoparticles // *Adv. Colloid Interface Sci.* – 2011. – Vol. 166. – P. 8-23.
6. E. A. Périgo, G. Hemery, O. Sandre, D. Ortega, E. Garaio, F. Plazaola, F. J. Teran. Fundamentals and advances in magnetic hyperthermia // *Appl. Phys. Rev.* – 2015. – Vol. 2. – P. 041302.
7. D. W. Inglis, R. Riehn, R. H. Austin, J. C. Sturm. Continuous microfluidic immunomagnetic cell separation // *Appl. Phys. Lett.* – 2004. – Vol. 85. – P. 5093-5095.
8. M. Hejazian, W. Li, N.-T. Nguyen. Lab on a chip for continuous-flow magnetic cell separation // *Lab Chip* – 2015. – Vol. 15. – P. 959-970.
9. A. Dalili, E. Samiei, M. Hoorfar. A review of sorting, separation and isolation of cells and microbeads for biomedical applications: Microfluidic approaches // *Analyst* – 2019. – Vol. 144. – P. 87-113.
10. R. Hao, R. Xing, Z. Xu, Y. Hou, S. Gao, S. Sun. Synthesis, functionalization, and biomedical applications of multifunctional magnetic nanoparticles // *Adv. Mater.* – 2010. – Vol. 22. – P. 2729-2742.

11. O. V. Yelenich, S. O. Solopan, T. V. Kolodiazhnyi, V. V. Dzyublyuk, A. I. Tovstolytkin, A. G. Belous. Magnetic properties and high heating efficiency of  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  nanoparticles // *Mater. Chem. Phys.* – 2014. – Vol. 146. – P. 129-135.
12. K. Zhu, Y. Ju, J. Xu, Z. Yang, S. Gao, Y. Hou. Magnetic nanomaterials: Chemical design, synthesis, and potential applications // *Acc. Chem. Res.* – 2018. – Vol. 51. – P. 404-413.
13. D. V. Berkov, L. Yu. Iskakova, A. Yu. Zubarev. Theoretical study of the magnetization dynamics of nondilute ferrofluids // *Phys. Rev. E* – 2009. – Vol. 79. – P. 021407.
14. Yu. L. Raikher, V. I. Stepanov. Power losses in a suspension of magnetic dipoles under a rotating field // *Phys. Rev. E* – 2011. – Vol. 83. – P. 021401.
15. A. Yu. Polyakov, T. V. Lyutyy, S. Denisov, V. V. Reva, and P. Hänggi. Large-scale ferrofluid simulations on graphics processing units // *Comput. Phys. Commun.* – 2013. – Vol. 184. – P.1483-1489.
16. T. V. Lyutyy, S. I. Denisov, V. V. Reva, Yu. S. Bystrik. Rotational properties of ferromagnetic nanoparticles driven by a precessing magnetic field in a viscous fluid // *Phys. Rev. E* – 2015. – Vol. 92. – P. 042312.
17. T. V. Lyutyy, V. V. Reva. Energy dissipation of rigid dipoles in a viscous fluid under the action of a time-periodic field: The influence of thermal bath and dipole interaction // *Phys. Rev. E* – 2018. – Vol. 97. – P. 052611.
18. S. I. Denisov, B. O. Pedchenko. Drift of suspended ferromagnetic particles due to the Magnus effect // *J. Appl. Phys.* – 2017. – Vol. 121. – P. 043912.
19. S. I. Denisov, B. O. Pedchenko, O. V. Kvasnina, E. S. Denisova. Exactly solvable model for drift of suspended ferromagnetic particles induced by the Magnus force // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2017. – Vol. 443. – P.89-95.
20. S. I. Denisov, T. V. Lyutyy, V. V. Reva, A. S. Yermolenko. Temperature effects on drift of suspended single-domain particles induced by the Magnus force // *Phys. Rev. E* – 2018. – Vol. 97. – P. 032608.
21. R. E. Rosensweig. Heating magnetic fluid with alternating magnetic field // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2002. – Vol. 252 – P. 370-374.

22. A. O. Tsebers. Simultaneous rotational diffusion of the magnetic moment and the solid matrix of a single-domain ferromagnetic particle // *Magnetohydrodynamics* – 1975. – Vol. 11. – P. 273-278.
23. N. A. Usov, B. Ya. Liubimov. Magnetic nanoparticle motion in external magnetic field // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2015. – Vol. 385. – P. 339-346.
24. K. D. Usadel, C. Usadel. Dynamics of magnetic single domain particles embedded in a viscous liquid // *J. Appl. Phys.* – 2015. – Vol. 118. – P. 234303.
25. K. D. Usadel. Dynamics of magnetic nanoparticles in a viscous fluid driven by rotating magnetic fields // *Phys. Rev. B* – 2017. – Vol. 95. – P. 104430.
26. H. Keshtgar, S. Streib, A. Kamra, Ya. M. Blanter, G. E. W. Bauer. Magnetomechanical coupling and ferromagnetic resonance in magnetic nanoparticles // *Phys. Rev. B* – 2017. – Vol. 95. – P. 134447.
27. T. V. Lyuty, O. M. Hryshko, A. A. Kovner. Power loss for a periodically driven ferromagnetic nanoparticle in a viscous fluid: The finite anisotropy aspects // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2018. – Vol. 446. – P. 87-94.
28. T. V. Lyuty, O. M. Hryshko, M. Yu. Yakovenko. Uniform and nonuniform precession of a nanoparticle with finite anisotropy in a liquid: Opportunities and limitations for magnetic fluid hyperthermia // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2019. – Vol. 473. – P. 198-204.
29. T. V. Lyuty, S. I. Denisov, P. Hänggi. Dissipation-induced rotation of suspended ferromagnetic nanoparticles // *Phys. Rev. B.* – 2019. – Vol. 100. – P. 134403.
30. O. I. Shkulipa, S. I. Denisov. Energy loss in periodically driven systems of magnetically isotropic nanoparticles / *Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції “Пріоритети сучасної науки”* – Київ: 2019. – С. 47-49.
31. G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, C. Serpico. *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems.* – London, Elsevier, 2009. – 330 p.