

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту
Завідувач кафедри ПМ та МСС
_____ доцент Коплик І.В.
(підпис)
«__» _____ 20__ р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальність 113 «Прикладна математика»
освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи

«МОДЕЛЮВАННЯ МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ПОЛІВ У
СКЛАДЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З МНОЖИННИМИ
МАКРОТРИЩИНАМИ»

Виконавець

студентка факультету ЕЛІТ

Налімова Поліна Олександрівна _____

Науковий керівник

к.ф.-м.н, ст.викл.

Сушко Тетяна Сергіївна _____

Суми – 2020

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 102 с., 44 малюнка, 28 джерел.

Мета роботи: дослідження магнетоелектропружних полів в складеному з двох різнорідних електромагнетопружних півплощин, що містить випадкові множинні макротріщини.

Об'єкт дослідження: магнетоелектропружні поля, та ефекти, що виникають у складеному середовищі поблизу границі розділу матеріалів, та у місцях скупчення дефектів.

Наявність неоднорідностей в технологічних матеріалах має негативний вплив на міцність останніх, та значно скорочує термін придатності таких конструкцій. Розробка математичних моделей з метою дослідження впливу дефектів структури на розподіл фізичних полів дозволяє виявити (передбачити) ефекти, що виникають у складних конструкціях без проведення експериментів.

В роботі гранична задача для складеного середовища з випадковими тріщинами розв'язок зводиться до пошуку чотирьох функцій аналітичних у своїх афінних площинах, розв'язується методом граничних інтегральних рівнянь. При побудові інтегральних подань розв'язків використано відповідне фундаментальне рішення. Визначені аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності в вершинах тріщин та енергетичного критерію руйнування.

Чисельний розв'язок проведено з використанням методу механічних квадратур та триангуляції Делоне для параметризації контурів. Мовою Python написана програма, проведене параметричне дослідження.

МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ, СКЛАДЕНЕ СЕРЕДОВИЩЕ, ВИПАДКОВІ ТРІЩИНИ, ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ, ЕНЕРГЕТИЧНИЙ КРИТЕРІЙ РУЙНУВАННЯ, ТРИАНГУЛЯЦІЯ ДЕЛОНЕ

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД	6
2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ	9
2.1 Постановка задачі	9
2.2 Аналітичний розв'язок рівнянь магнетоелектропружності	11
2.3 Побудова фундаментального розв'язку для складеного магнетоелектропружного середовища	19
2.4 Мішана система рівнянь крайової задачі магнетоелектропружності для складеного середовища з тріщинами	21
2.5 Характеристики фізичних полів в околі вершин тріщин	28
2.6 Потік енергії у вершину тріщини при її просуванні	30
3 ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК. СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА РОЗІМКНЕНИХ КОНТУРАХ	33
3.1 Квадратурні формули на розімкнених контурах Γ_{mr}	33
3.2 Зведення алгоритму до СЛАР	35
3.3 Триангуляція Делоне	41
4 РЕЗУЛЬТАТИ	47
4.1 Режими роботи програми	47
4.2 Складений простір при матеріалі M1 у верхній та матеріалі M2 нижній півплощинах	48
4.3 Складений простір при матеріалі M2 у верхній та матеріалі M1 у нижній півплощинах	61
ВИСНОВКИ	73
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	75
Додаток А	79
Додаток Б	81

ВСТУП

У зв'язку зі створенням нових керамічних, зокрема магнетоелектропружних (МЕП) матеріалів, отриманих спіканням рідкоземельних елементів, на початку ХХІ століття виник новий напрямок в механіці - магнетоелектропружність.

Отримані нові матеріали володіють багатьма чудовими властивостями, зокрема гігантською магнітострикцією, проте страждають значним утворенням тріщин в процесі експлуатації. У зв'язку з цим виникає необхідність в розробці моделей механіки руйнування для елементів конструкцій з таких матеріалів, ослаблених тріщинами.

Хоча з практичної точки зору запобігання виникненню дефектів типу тріщин є вкрай важливим завданням, його здійснення в загальному випадку пов'язане з великими труднощами і взагалі кажучи, важко піддається реалізації. У зв'язку з цим при оцінці несучої здатності тіла припускають наявність тріщин, які є в структурі реальних твердих тіл, і визначають ті умови, при яких відбувається поширення найбільш небезпечної тріщини, що призводить до локального або повного руйнування тіла.

Коефіцієнти інтенсивності, включаючи коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), коефіцієнт інтенсивності електричної індукції (КІЕІ) і коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції (КІМІ) є ключовими параметрами руйнування, які характеризують область в околі вершини тріщини однорідного МЕП матеріалу.

Ця галузь активно розвивається останні десятиліття, зокрема, поширюються методи механіки де формівного тіла для побудови математичних моделей однорідних середовищ з дефектами структури, але для тіл складної геометрії за наявності у них множинних дефектів таких досліджень замало. В той же час сучасні елементи конструкцій в багатьох випадках є багат шаровими, що дозволяє підсилювати ефекти, що виникають в однорідних матеріалах.

Тому велике значення має вивчення розподілу фізичних полів та проблеми руйнування таких матеріалів для різних конфігурацій середовищ за наявності в них дефектів. Зокрема, для складених середовищ, що складаються з частин з різних матеріалів, та містять множинні випадкові дефекти.

Для проведення дослідження необхідно виконати таке:

- методом інтегральних рівнянь звести крайову задачу до системи рівнянь (сингулярних інтегральних на розімкнених контурах та алгебраїчних);
- отримати вирази характеристик розподілу фізичних полів в околі вершин тріщин (коефіцієнтів інтенсивності); отримати енергетичний критерій руйнування у вигляді додатної функції, що залежить від коефіцієнтів інтенсивності;
- розробити схему чисельного алгоритму параметризації множинних розімкнених контурів та чисельного розв'язання отриманих рівнянь;
- написати програму реалізації чисельного алгоритму з визначенням характеристик фізичних полів поблизу вершин тріщин;
- провести параметричні дослідження для різних конфігурацій складеного середовища з тріщинами, та визначити залежність характеристик руйнування від фізичних та геометричних параметрів складеного середовища.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

Аналіз напружено-деформованих станів поблизу дефектів типу тріщин в твердому тілі, що деформується, становить одну з найважливіших проблем механіки руйнування твердих тіл.

Основи теорії тріщин, що вивчає поширення крихких тріщин в механіці, закладені в роботах Гриффітса [1]. Енергетичний метод Гриффітса широко застосовується і понині для визначення граничних навантажень, що ґрунтується на визначенні потоку енергії в вершину тріщини.

Інший підхід запропоновано Ірвіном. В цьому підході напруження в околі вершин тріщини подають у вигляді $\frac{N}{\sqrt{r}} + O(1)$, де r - мінімальна відстань до вершини; N - коефіцієнт інтенсивності напружень. За Ірвіном тріщина просувається в середовищі тоді, коли коефіцієнт інтенсивності N досягає або перевищує певне (стале для кожного матеріалу в заданих умовах) значення. Величина такого коефіцієнту може слугувати характеристикою міцності матеріалу [2].

Для пошуку розв'язків задач про поширення тріщин, що містяться в деформованому твердому тілі в роботах [3, 4], прийнята гіпотеза про те, що напрямок початкового поширення прямолінійною або криволінійною тріщини збігається з площиною, де нормальні напруження розтягу досягають максимальної інтенсивності. На основі цієї гіпотези в роботах [3, 5] виведені рівняння, що дозволяють визначити граничні значення зовнішніх напруг і кут початкового поширення тріщини.

Лю та ін. (2001 р.) з теоретичної точки зору вивчили функції Гріна для магнетоелектропружних (МЕП) матеріалів з наявною тріщиною. Ґрунтуючись на розширеному формалізмі Строха, Ван і Май (2003 рік) отримали загальне двовимірне (2D) рішення поля МЕП в околі вершини тріщини. Гао та ін. (2003-04

р.р.) отримали явні рішення для тріщини в МЕР твердих тілах. Сонг і Цих (2003 рік) досліджували зародження і зростання тріщини в МЕР тілі. Згодом, значна дослідницька робота велася над статичною та динамічною задачами руйнування МЕР матеріалів [6 - 12]. МЕР матеріали зазвичай містять п'єзоелектричні (ПЕ) та п'єзомагнітні (ПМ) фази і взаємодія між складовими фаз може знизити надійність МЕР матеріалів, що, як правило, є джерелом поломок при експлуатації.

Для підвищення ефективності, дослідники ввели нову концепцію функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) - клас неоднорідних матеріалів, що складаються з матеріалів з різними властивостями. МЕР матеріали для яких застосовне поняття ФГМ, називаються функціонально-градієнтні МЕР (ФГМЕР) матеріали. Тріщини в твердому ФГМЕР матеріалів умовах антиплоскої деформації вперше були розглянуті Ван Чжоу (2004, 2006), з використанням методу Шмідта. Аналіз проблем руйнування в ФГМЕР матеріалах, в основному, обмежуються достатньо простими антиплоскими задачами [14, 15]. На сьогоднішній день, існують кілька робіт [16, 16] присвячених вирішенню завдань поперечно-зсувної деформації.

Більшість МЕР матеріалів - композити з п'єзоелектричних та п'єзомагнітних фаз, отже, існують точки взаємодії між різними фазами. Експериментальні дослідження [18, 19] показують, що точки взаємодії між складовими і мікроструктура мають вплив на характеристики руйнування в ФГМ. Аналіз МЕР матеріалів зі складними точками взаємодії вимагає створення методів механіки руйнування, що не потребують неперервних та диференційованих властивостей матеріалів.

В Сумському державному університеті останні роки активно проводились дослідження в галузі механіки зв'язаних полів під керівництвом проф. Фильштинського Л.А. Побудовано ряд моделей для середовищ з МЕР матеріалами. В роботі [20] побудовано модель для однорідного МЕР середовища з

тріщинами, чисельні результати наводяться для випадку 1-3 тріщин у середовищі. В роботі [21] аналогічну модель побудовано для скінченої пластини, обмеженої достатньо гладким контуром. Чисельні результати наведено для випадку наявності в пластині однієї тріщини. А в роботі [22] задача про скінченну МЕР пластину промодельовано для кількох тріщин. В магістерській роботі [23] обчислюються результати для кількох тріщин, що розташовані у складеному середовищі. Актуальним є завдання узагальнення чисельного алгоритму роботи [23] на випадок множинних тріщин, що формуються у складеному середовищі випадковим чином.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

2.1 Постановка задачі

В декартовій системі координат Ox_1x_2 розглядається кусково-однорідне середовище, складене з двох неперервно скріплених вздовж пласкої границі $x_2 = 0$ півпросторів. На границі розділу виконуються умови ідеальних механічного, електричного та магнітного контактів.

Вважається, що у верхньому та нижньому півпросторах розташовані випадкові тріщини $\Gamma_{n_r}^{(r)} (n_r = \overline{1, M_r}, r = 1, 2) \cap \Gamma_n^{(r)} = \emptyset$. На нескінченності прикладаються рівномірно розподілені поля механічних напружень $\langle \sigma_{ij} \rangle$, та компоненти електричної та магнітної індукцій $\langle D_i \rangle$, $\langle B_i \rangle$. Тріщини в недеформованому стані – прості ляпуновські дуги. Порожнини тріщин $\Gamma_n^{(r)} (n_r = \overline{1, M_r}, r = 1, 2)$ заповнені вакуумом, а на їх поверхнях може бути заданий тиск $p_{n_r}^{(r)}$ (Рисунок 1).

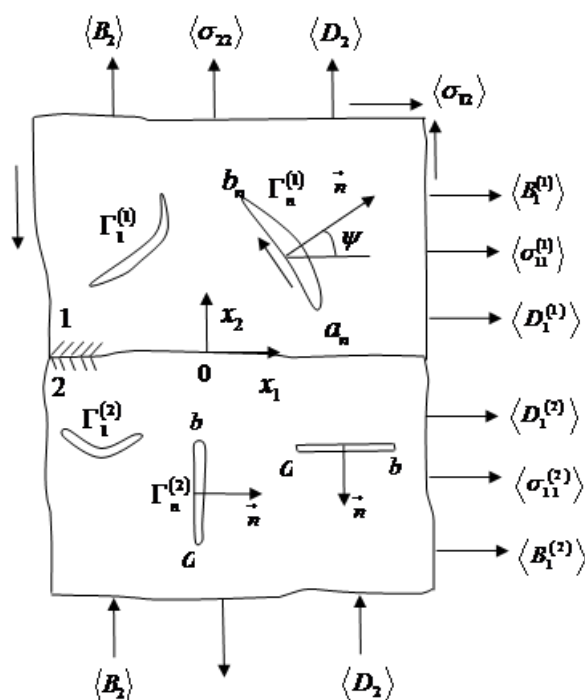


Рисунок 1 Конфігурація тіла з тріщинами

За таких умов розподіл фізичних полів в середовищі описується наступними рівняннями:

Матеріальні рівняння [19]

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Диференціальні рівняння рівноваги та електро та магнітостатики [24]:

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0, \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, (k = 1, 2), \quad (2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad (3)$$

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = 0. \quad (4)$$

Співвідношення Коші:

$$e_{11} = \partial_1 u_1, e_{22} = \partial_2 u_2, 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1. \quad (5)$$

Умови сумісності деформацій:

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}. \quad (6)$$

Умови спряження фізичних полів на границі розділу $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)} &= \sigma_{22}^{(2)}, & \sigma_{12}^{(1)} &= \sigma_{12}^{(2)}, \\ \partial_1 u_1^{(1)} &= \partial_1 u_1^{(2)}, & \partial_1 u_2^{(1)} &= \partial_1 u_2^{(2)}, \\ B_2^{(1)} &= B_2^{(2)}, & H_1^{(1)} &= H_1^{(2)}, \\ D_2^{(1)} &= D_2^{(2)}, & E_1^{(1)} &= E_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничні умови на поверхнях дефектів використовуємо у вигляді:

$$X_{1n}^{\pm}|_{\Gamma(r)} = -p^{(r)} \cos \psi, X_{2n}^{\pm}|_{\Gamma(r)} = -p^{(r)} \sin \psi, \quad (8)$$

$$B_n^{\pm}|_{\Gamma(r)} = 0, D_n^{\pm}|_{\Gamma(r)} = 0.$$

Знак «+» та «-» відповідають лівому та правому берегам контурів $\Gamma_n^{(r)}$ (якщо рух від початку a до кінця b), ψ - кут між зовнішньою нормаллю до лівого берега і віссю Ox_1 .

Сталі зазначені у матеріальних рівняннях (1) визначають таке: $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$ – механічні податливості, що виміряні за умови незмінних індукцій електричного і магнітного полів, $g_{kj} = g_{kj}^{\sigma D}$ та $p_{kj} = p_{kj}^{\sigma D}$ – п'єзоелектричні та п'єзомагнітні модулі деформації та напруженості, виміряні при сталих механічних напруженнях та індукції електричного поля; $\beta_{kl} = \beta_{kl}^{\sigma}$, $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$ та $\nu_{kl} = \nu_{kl}^{\sigma}$ – діелектрична, магнітна і електромагнітна сприйнятливість, виміряні при сталих механічних напруженнях; $u = (u_1, u_2)$ – переміщення; σ_{ij} та e_{ij} – тензори напружень та деформацій; D_i та B_i – компоненти векторів електричної та магнітної індукцій; E_i та H_i – напруженості електричного та магнітного полів.

2.2 Аналітичний розв'язок рівнянь магнетоелектропружності

Нехай $F_1(x_1, x_2)$ функція напружень, φ^E і φ^H - електричний та магнітний потенціали, що задаються співвідношеннями:

$$\sigma_{11} = \partial_2^2 F_1, \sigma_{12} = -\partial_1 \partial_2 F_1, \sigma_{22} = \partial_1^2 F_1, \quad (9)$$

$$E_1 = -\partial_1 \varphi^E, E_2 = -\partial_2 \varphi^E, \quad (10)$$

$$H_1 = -\partial_1 \varphi^H, H_2 = -\partial_2 \varphi^H. \quad (11)$$

Тоді рівняння (2), (4) задовольняються тотожно. Введемо аналогічно щоб виконувались рівняння (3) функції $F_2(x_1, x_2)$ і $F_3(x_1, x_2)$ за формулами:

$$D_1 = \partial_2 F_2, \quad D_2 = -\partial_1 F_2, \quad B_1 = \partial_2 F_3, \quad B_2 = -\partial_1 F_3. \quad (12)$$

Матеріальні рівняння (1) запишемо через функції $F_m(x_1, x_2)$ ($m = 1, 2, 3$) з урахуванням (9), (12) і підставимо отримані вирази в рівняння (4) та (6) маємо систему лінійних операторних рівнянь:

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2)F_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (13)$$

де

$$L_{11}(\partial_1, \partial_2) = s_{11} \partial_2^4 - 2s_{16} \partial_1 \partial_2^3 + (2s_{12} + s_{66}) \partial_1^2 \partial_2^2 - 2s_{26} \partial_1^3 \partial_2 + s_{22} \partial_1^4,$$

$$\begin{aligned} L_{12}(\partial_1, \partial_2) &= g_{11} \partial_2^3 - g_{22} \partial_1^3 - (g_{21} + g_{16}) \partial_1 \partial_2^2 + (g_{12} + g_{26}) \partial_1^2 \partial_2 \\ &= L_{21}(\partial_1, \partial_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{13}(\partial_1, \partial_2) &= p_{11} \partial_2^3 - p_{22} \partial_1^3 - (p_{21} + p_{16}) \partial_1 \partial_2^2 + (p_{12} + p_{26}) \partial_1^2 \partial_2 \\ &= L_{31}(\partial_1, \partial_2), \end{aligned}$$

$$L_{22}(\partial_1, \partial_2) = -\beta_{11} \partial_2^2 - \beta_{22} \partial_1^2 + 2\beta_{12} \partial_1 \partial_2,$$

$$L_{23}(\partial_1, \partial_2) = -\nu_{11} \partial_2^2 - \nu_{22} \partial_1^2 + 2\nu_{12} \partial_1 \partial_2 = L_{32}(\partial_1, \partial_2),$$

$$L_{33}(\partial_1, \partial_2) = -\chi_{11} \partial_2^2 - \chi_{22} \partial_1^2 + 2\chi_{12} \partial_1 \partial_2.$$

Нехай A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці $\|L_{ij}\|$, тоді за властивістю детермінантів, можемо записати три системи розв'язків через нові невідомі функції $\Psi_m(x_1, x_2)$, ($m = \overline{1, 3}$):

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, x_2) &= A_{11}\Psi_1, & F_{12}(x_1, x_2) &= A_{12}\Psi_1, & F_{13}(x_1, x_2) &= A_{13}\Psi_1, \\ F_{21}(x_1, x_2) &= A_{21}\Psi_2, & F_{22}(x_1, x_2) &= A_{22}\Psi_2, & F_{23}(x_1, x_2) &= A_{23}\Psi_2, \\ F_{31}(x_1, x_2) &= A_{31}\Psi_3, & F_{32}(x_1, x_2) &= A_{32}\Psi_3, & F_{33}(x_1, x_2) &= A_{33}\Psi_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Для першої системи функцій $F_j = F_{1j}$ при підстановці в (13), друге і третє рівняння задовольняються тотожно за властивістю детермінантів, а перше буде мати за теоремою Лапласа (про розклад детермінанту за рядком-стовпцем) такий вигляд:

$$(L_{11}A_{11} + L_{12}A_{12} + L_{13}A_{13})\Psi_1 = \Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 = 0,$$

$$\Delta(\partial_1, \partial_2) = \det \|L_{ij}\|.$$

Аналогічно для другої і третьої системи розв'язків $F_j = F_{2j}$ та $F_j = F_{3j}$ маємо

$$\Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_2 = 0, \quad \Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_3 = 0.$$

Тобто усі три системи розв'язків визначаються через $\Psi_m(x_1, x_2)$, що задовольняють рівнянню:

$$\Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_m = 0, \quad (m = \overline{1,3}). \quad (15)$$

Виходячи із співвідношення (13) можемо зробити висновок, що (15) - це однорідне диференціальне рівняння в частинних похідних восьмого порядку. Частковий розв'язок (15) шукаємо у вигляді:

$$\Psi = f(x_1 + \mu x_2), \quad (16)$$

де μ – деяка константа (комплексна), f – достатньо гладка функція.

Підстановка (16) у рівняння (15) дає рівняння характеристичне восьмого степеня відносно μ :

$$\Delta(1, \mu) = \begin{vmatrix} L_{11}(1, \mu), & L_{12}(1, \mu), & L_{13}(1, \mu) \\ L_{21}(1, \mu), & L_{22}(1, \mu), & L_{23}(1, \mu) \\ L_{31}(1, \mu), & L_{32}(1, \mu), & L_{33}(1, \mu) \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Коефіцієнти (17) - дійсні, отже має вісім попарно комплексно спряжених коренів $\mu_k (k = \overline{1,8})$. Серед коренів μ_k немає дійсних [25]. Тому вважаємо усі корені простими (справедливо для більшості відомих матеріалів). Тоді серед коренів оберемо напрямки афіних осей так щоб

$$\text{Im } \mu_k > 0, \quad \mu_{k+4} = \bar{\mu}_k, \quad (k = \overline{1,4}). \quad (18)$$

Функції $\Psi_m (m = \overline{1,3})$ – дійсні функції, тому загальний розв'язок (15) можна записати у вигляді:

$$\Psi_1(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 f_{1k}(z_k), \quad (19)$$

$$\Psi_m = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \int f_{mk}(z_k) dz_k, \quad (m = \overline{2,3}).$$

де $f_{mk}(z_k)$, $(m = \overline{1,3}; k = \overline{1,4})$ – аналітичні функції в своїх афінних областях.

Маємо першу систему розв'язків (14):

$$\begin{aligned} F_{11} &= A_{11}(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) f_{1k}^{(4)}(z_k) \\ F_{12} &= A_{12}(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) f_{1k}^{(5)}(z_k) \\ F_{13} &= A_{13}(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) f_{1k}^{(5)}(z_k) \end{aligned} \quad (20)$$

Компоненти вектору механічних напружень, електричної та магнітної індукцій такі:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}\} &= \{\partial_2^2, -\partial_1 \partial_2, \partial_1^2\} A_{11}(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k) \\ \{D_1^{(1)}, D_2^{(1)}\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{12}(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\{B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{13}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 \\
&= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k) \\
\Phi_{1k}(z_k) &= \frac{d^6}{dz_k^6} f_{1k}(z_k) = f_{1k}^{(6)}(z_k).
\end{aligned}$$

З матеріальних рівнянь (1) та співвідношень (21) напруженості електричних та магнітних полів такі:

$$\begin{aligned}
E_1^{(1)} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [g_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{11} A_{12}(1, \mu_k) \\
&\quad + \nu_{11} A_{13}(1, \mu_k)] \mu_k \Phi_{1k}(z_k), \\
E_2^{(1)} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(-g_{21} \mu_k^2 - g_{22}) A_{11}(1, \mu_k) - \beta_{22} A_{12}(1, \mu_k) \\
&\quad - \nu_{22} A_{13}(1, \mu_k)] \Phi_{1k}(z_k), \\
\Phi_{1k}(z_k) &= f_{1k}^{(6)}(z_k).
\end{aligned} \tag{22}$$

Нехай

$$\begin{aligned}
\alpha_{1k}^E &= [g_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{13}(1, \mu_k)] \mu_k, \\
\beta_{1k}^E &= -[(g_{21} \mu_k^2 + g_{22}) A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{22} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{22} A_{13}(1, \mu_k)].
\end{aligned}$$

Тоді має місце рівність

$$\beta_{1k}^E = \mu_k \alpha_{1k}^E. \tag{23}$$

За властивістю детермінанта, маємо наступне:

$$\begin{aligned}
& \mu_k \alpha_{1k}^E - \beta_{1k}^E = \\
& = (g_{16}\mu_k^2 + g_{21}\mu_k^2 + g_{22})A_{11}(1, \mu_k) + (\beta_{22} + \beta_{11}\mu_k^2)A_{12}(1, \mu_k) \\
& + (v_{22} + v_{11}\mu_k^2)A_{13}(1, \mu_k) = -\{L_{21}A_{11} + L_{22}A_{12} + L_{23}A_{13}\} = 0.
\end{aligned}$$

Тоді:

$$\{E_1^{(1)}, E_2^{(1)}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_{1k}^E \Phi_{1k}(z_k) \quad (24)$$

Аналогічно, компоненти напруженості магнітного поля

$$\{H_1^{(1)}, H_2^{(1)}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_{1k}^H \Phi_{1k}(z_k),$$

де

$$\alpha_{1k}^H = [p_{16}A_{11}(1, \mu_k) + v_{11}A_{12}(1, \mu_k) + \chi_{11}A_{13}(1, \mu_k)]\mu_k. \quad (25)$$

Потенціали електричний φ_1^E та магнітного φ_1^H полів визначимо з (4), (24), (25):

$$\begin{aligned}
\varphi_1^E &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \varphi_{1k}(z_k), \\
\varphi_1^H &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \varphi_{1k}(z_k), \quad \varphi_{1k}(z_k) = \int \Phi_{1k}(z_k) dz_k
\end{aligned} \quad (26)$$

Механічні переміщення:

$$\begin{aligned}
\partial_1 u_1^{(1)} &= e_{11}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 p_k^{(1)} \Phi_{1k}(z_k), \\
\partial_2 u_2^{(1)} &= e_{22}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k q_k^{(1)} \Phi_{1k}(z_k),
\end{aligned} \quad (27)$$

де

$$p_k^{(1)} = (s_{11}\mu_k^2 + s_{12})A_{11}(1, \mu_k) - g_{21}A_{12}(1, \mu_k) - p_{21}A_{13}(1, \mu_k),$$

$$q_k^{(1)} = \left(s_{12}\mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k}\right)A_{11}(1, \mu_k) - \frac{g_{22}}{\mu_k}A_{12}(1, \mu_k) - \frac{p_{22}}{\mu_k}A_{13}(1, \mu_k).$$

Інтегруючи (27) маємо

$$\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k^{(1)}, q_k^{(1)}\} \phi_{1k}(z_k). \quad (28)$$

Компоненти вектора механічних напружень, нормальні компоненти векторів електричної та магнітної індукцій, дотичні компоненти векторів напруженостей електричного та магнітного полів:

$$X_{1n}^{(1)} = \sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k),$$

$$X_{2n}^{(1)} = \sigma_{12} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k),$$

$$D_n^{(1)} = D_1 \cos \psi + D_2 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k(\psi) A_{12}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \quad (29)$$

$$B_n^{(1)} = B_1 \cos \psi + B_2 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k(\psi) A_{13}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k),$$

$$E_s^{(1)} = E_2 \cos \psi - E_1 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k(\psi) \alpha_{1k}^E \Phi_k(z_k),$$

$$H_s^{(1)} = H_2 \cos \psi - H_1 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_k(\psi) \alpha_{1k}^H \Phi_k(z_k).$$

Диференціали $d\zeta_k$ і ds пов'язані співвідношенням:

$$d\zeta_k = a_k(\psi)ds,$$

$$\zeta_k = Re \zeta + \mu_k Im \zeta, \quad \zeta \in AB, \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi. \quad (30)$$

З урахуванням співвідношень (29), (30) маємо:

$$X_1^{(1)} = \int_{AB} X_{1n} ds = 2 Re \sum_{k=1}^4 \mu_k A_{11}(1, \mu_k) \phi_{1k}(z_k)|_A^B,$$

$$X_2^{(1)} = \int_{AB} X_{2n} ds = -2 Re \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) \phi_{1k}(z_k)|_A^B,$$

$$\Pi_1^D = \int_{AB} D_n ds = 2 Re \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \phi_{1k}(z_k)|_A^B,$$

$$\Pi_1^B = \int_{AB} B_n ds = 2 Re \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \phi_{1k}(z_k)|_A^B, \quad (31)$$

$$A_1^E = \int_{AB} E_s ds = 2 Re \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \phi_{1k}(z_k)|_A^B,$$

$$A_1^H = \int_{AB} H_s ds = 2 Re \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \phi_{1k}(z_k)|_A^B,$$

$$\Phi_{1k}(z_k) = \frac{d\phi_{1k}(z_k)}{dz_k}.$$

Механічні моменти сил на дузі AB , обчислюємо відносно початку. Маємо:

$$M = \int_{AB} (X_{2n}x_1 - X_{1n}x_2) ds = -2 Re \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) \int_{AB} z_k \Phi_k(z_k) dz_k =$$

$$= \left[F_{11} - 2 Re \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) z_k \varphi_k(z_k) \right]_A^B, \quad (32)$$

де F_{11} - функція напружень, визначена в (20) Друга і третя системи приводять до ідентичних результатів.

2.3 Побудова фундаментального розв'язку для складеного магнетоелектропружного середовища

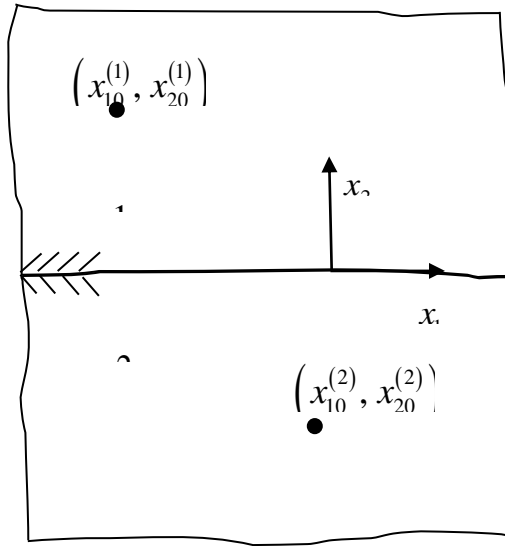


Рисунок 2 Постановка задачі для фундаментального розв'язку

Нехай у складеному магнетоелектропружному середовищі (Рисунок 2) вздовж шнура в точці $(x_{10}^{(1)}, x_{20}^{(1)})$ верхньої півплощини та $(x_{10}^{(2)}, x_{20}^{(2)})$ нижньої півплощини прикладені зосереджені сили $(Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)})$ та $(Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)})$, а також діють зосереджені заряди ρ_1^M, ρ_1^Y та ρ_2^M, ρ_2^Y відповідно. На границі розділу матеріалів $x_2 = 0$ мають місце умови ідеального механічного, магнітного та електричного контактів

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22}^{(1)} &= \sigma_{22}^{(2)}, & \sigma_{12}^{(1)} &= \sigma_{12}^{(2)}, \\
 \partial_1 u_1^{(1)} &= \partial_1 u_1^{(2)}, & \partial_1 u_2^{(1)} &= \partial_1 u_2^{(2)}, \\
 B_2^{(1)} &= B_2^{(2)}, & H_1^{(1)} &= H_1^{(2)}, \\
 D_2^{(1)} &= D_2^{(2)}, & E_1^{(1)} &= E_1^{(2)}.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

В комплексних змінних умови (33) мають вигляд:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [c_{nk} \Phi_k(x)] = 0 (n = \overline{1,8}), \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} [c_{nk} \Phi_k(x)] &= c_{nk}^{(1)} \Phi_k^{(1)}(x) - c_{nk}^{(2)} \Phi_k^{(2)}(x), \\ c_{1k}^{(r)} &= A_{11}^{(r)}(1, \mu_k), \quad c_{2k}^{(r)} = -\mu_k^{(r)} A_{11}^{(r)}(1, \mu_k), \quad c_{3k}^{(r)} = p_{1k}^{(r)}, \quad c_{4k}^{(r)} = q_k^{(r)}, \\ c_{5k}^{(r)} &= -A_{13}^{(r)}(1, \mu_k), \quad c_{6k}^{(r)} = (\alpha_{1k}^H)^{(r)}, \quad c_{7k}^{(r)} = -A_{12}^{(r)}(1, \mu_k), \quad c_{8k}^{(r)} = (\alpha_{1k}^E)^{(r)}. \end{aligned}$$

Значення $r = 1$ відповідає матеріалу верхньої півплощини, тоді як $r = 2$ – нижньої півплощини.

З використанням принципу дзеркального відображення та фундаментальний розв'язок в однорідному середовищі побудуємо шукані функції у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) &= \frac{A_k^{(1)}}{z_k^{(1)} - z_{0k}^{(1)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\bar{\alpha}_{k,m}^{(1)} \bar{A}_m^{(1)}}{z_k^{(1)} - \bar{z}_{0m}^{(1)}} + \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(2)} A_m^{(2)}}{z_k^{(1)} - z_{0m}^{(2)}}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \Phi_k^{(2)}(z_k^{(2)}) &= \frac{A_k^{(2)}}{z_k^{(2)} - z_{0k}^{(2)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\bar{\alpha}_{k,m}^{(2)} \bar{A}_m^{(2)}}{z_k^{(2)} - \bar{z}_{0m}^{(2)}} + \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(1)} A_m^{(1)}}{z_k^{(2)} - z_{0m}^{(1)}}, \quad \operatorname{Im} z \leq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$z_{0k}^{(1)} = \operatorname{Re} z_0^{(1)} + \mu_k^{(1)} \operatorname{Im} z_0^{(1)}, \quad z_0^{(1)} = x_{10}^{(1)} + ix_{20}^{(1)}, \quad x_{20}^{(1)} > 0,$$

$$z_{0k}^{(2)} = \operatorname{Re} z_0^{(2)} + \mu_k^{(2)} \operatorname{Im} z_0^{(2)}, \quad z_0^{(2)} = x_{10}^{(2)} + ix_{20}^{(2)}, \quad x_{20}^{(2)} < 0,$$

$$z_k^{(r)} = \operatorname{Re} z + \mu_k^{(r)} \operatorname{Im} z, \quad z = x_1 + ix_2$$

Перший член в виразах для $\Phi_k^{(r)}(z_k^{(r)})$ визначає фундаментальний розв'язок в магнетоелектропружному середовищі з матеріальними коефіцієнтами півплощини r . Інші члени в (35) враховують взаємний вплив півпросторів один на одного.

Невідомі сталі $\alpha_{km}^{(r)}$ знаходяться з умов спряження фізичних полів на границі півпросторів (34), а силові функціонали $A_k^{(r)}$ забезпечують задані зосереджені зусилля. Система рівнянь для визначення структурних коефіцієнтів $\alpha_{k,m}^{(r)}$ така:

$$\sum_{k=1}^4 \left(\bar{c}_{nk}^{(1)} \alpha_{k,m}^{(1)} + c_{nk}^{(2)} \alpha_{k+4,m}^{(1)} \right) = c_{nm}^{(1)}, \quad (n = \overline{1,8}; \quad m = \overline{1,4}) \quad (36)$$

$$\sum_{k=1}^4 \left(\bar{c}_{nk}^{(2)} \alpha_{k,m}^{(2)} + c_{nk}^{(1)} \alpha_{k+4,m}^{(2)} \right) = c_{nm}^{(2)}.$$

Маємо 32 лінійних алгебраїчних рівняння для визначення 32-х комплексних коефіцієнтів $\alpha_{k,m}^{(r)}$.

Силові функціонали $A_k^{(r)}$ в (35) забезпечують існування заданих зосереджених зусиль і визначаються з 8 таких умов: 2 умови однозначності переміщень, 2 умови рівноваги, умови однозначності магнітного та електричного потенціалів, умови збереження магнітного та електричного зарядів:

$$2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{p_k^{(1)}, q_k^{(1)}\} A_k = 0, \quad 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{11}(1, \mu_k) A_k = 0, \quad (37)$$

$$2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{\alpha_{1k}^H, \alpha_{1,k}^E\} A_k = 0, \quad 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \{A_{13}(1, \mu_k), A_{12}(1, \mu_k)\} A_k = 0.$$

Умови (37) окремо розглядаються в кожній півплощині.

2.4 Мішана система рівнянь крайової задачі магнетоелектропружності для складеного середовища з тріщинами

Повернемося до вихідної постановки задачі (Рисунок 1). Гранничні умови на поверхнях дефектів такі:

$$X_{1n}^{\pm} |_{\Gamma^{(r)}} = -p^{(r)} \cos \psi, \quad X_{2n}^{\pm} |_{\Gamma^{(r)}} = -p^{(r)} \sin \psi, \quad (38)$$

$$B_n^\pm \Big|_{\Gamma^{(r)}} = 0, D_n^\pm \Big|_{\Gamma^{(r)}} = 0.$$

Знаки «+» та «-» відповідають лівому та правому берегам тріщин $\Gamma_n^{(r)}$ (якщо рух від початку a до кінця b), ψ - кут між зовнішньою нормаллю до лівого берега і віссю Ox_1 .

У комплексних змінних умови (38) з запишуться так:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(1)} a_k^{(1)}(\psi) \left\{ \Phi_k^{(1)} \left(z_k^{(1)} \right) \right\}^\pm = \left(b_n^{(1)} \right)^\pm, \quad (n = \overline{1,4}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(2)} a_k^{(2)}(\psi) \left\{ \Phi_k^{(2)} \left(z_k^{(2)} \right) \right\}^\pm = \left(b_n^{(2)} \right)^\pm,$$

(399)

$$\begin{aligned} c_{1k}^{(r)} &= \mu_k^{(r)} A_{11} \left(1, \mu_k^{(r)} \right), c_{2k}^{(r)} = -A_{11} \left(1, \mu_k^{(r)} \right), \left(b_1^{(r)} \right)^\pm \\ &= -p^{(r)} \cos \psi, \left(b_2^{(r)} \right)^\pm = -p^{(r)} \sin \psi, \end{aligned}$$

$$c_{3k}^{(r)} = A_{12} \left(1, \mu_k^{(r)} \right), c_{4k}^{(r)} = A_{13} \left(1, \mu_k^{(r)} \right), \left(b_3^{(r)} \right)^\pm = 0, \left(b_4^{(r)} \right)^\pm = 0.$$

Інтегральні подання шуканих функцій будемо з використанням фундаментального розв'язку (35). Силві функціонали $A_k^{(r)}$ замінемо розподілами

$$A_k^{(r)} = \frac{\omega_k^{(r)}(\zeta)}{2\pi}, \quad \zeta \in \Gamma^{(r)} = \bigcup_{\substack{n=1 \\ M_r}} \Gamma_n^{(r)}.$$

Тоді

$$\Phi_k^{(1)} \left(z_k^{(1)} \right) = B_k^{(1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(1)}} \left(\frac{\omega_k^{(1)}(\zeta)}{\zeta_k^{(1)} - z_k^{(1)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\bar{a}_{k,m}^{(1)} \overline{\omega_m^{(1)}(\zeta)}}{\bar{\zeta}_m^{(1)} - z_k^{(1)}} \right) ds + \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(2)} \omega_m^{(2)}(\zeta)}{\zeta_m^{(2)} - z_k^{(1)}} ds, \operatorname{Im} z \geq 0 \\
\Phi_k^{(2)}(z_k^{(2)}) & = B_k^{(2)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \left(\frac{\omega_k^{(2)}(\zeta)}{\zeta_k^{(2)} - z_k^{(2)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\bar{\alpha}_{k,m}^{(2)} \overline{\omega_m^{(2)}(\zeta)}}{\bar{\zeta}_m^{(2)} - z_k^{(2)}} \right) ds + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(1)}} \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(1)} \omega_m^{(1)}(\zeta)}{\zeta_m^{(1)} - z_k^{(2)}} ds, \operatorname{Im} z \leq 0.
\end{aligned}$$

$$\zeta_k^{(r)} = \operatorname{Re} \zeta^{(r)} + \mu_k^{(r)} \operatorname{Im} \zeta^{(r)}, \zeta^{(r)} = \xi_1^{(r)} + i \xi_2^{(r)} \in \Gamma^{(r)} (r = \overline{1,2}),$$

$$\Gamma^{(1)} = \bigcup_{M_1}^{n=1} \Gamma_n^{(1)}, \Gamma^{(2)} = \bigcup_{M_2}^{n=1} \Gamma_n^{(2)}.$$

Коефіцієнти $\alpha_{k,m}^{(r)}$ визначаються з системи (36). Сталі $B_k^{(r)}$ забезпечують існування заданих фізичних полів на нескінченості. Умови спряження фізичних полів виконуються автоматично для довільних функції $\omega_m^{(r)}(\zeta)$.

Граничні значення комплексних потенціалів (40) на контурах тріщин (лівому і правому берегах) визначаються за співвідношеннями Сохоцького-Племеля:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) \right\}_{\substack{z^{(1)} \rightarrow \zeta_0^{(1)} \in \Gamma^{(1)} \\ (z_k^{(1)} \rightarrow \zeta_{0k}^{(1)})}}^{\pm} & = B_k^{(1)} \pm \frac{i \omega_k^{(1)}(\zeta_0^{(1)})}{2 a_k^{(1)}(\psi_0)} \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(1)}} \left(\frac{\omega_k^{(1)}(\zeta)}{\zeta_k^{(1)} - \zeta_{0k}^{(1)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\bar{\alpha}_{k,m}^{(1)} \overline{\omega_m^{(1)}(\zeta)}}{\bar{\zeta}_m^{(1)} - \zeta_{0k}^{(1)}} \right) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(2)} \omega_m^{(2)}(\zeta)}{\zeta_m^{(2)} - \zeta_{0k}^{(1)}} ds,
\end{aligned}$$

(41)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Phi_k^{(2)} \left(z_k^{(2)} \right) \right\}^{\pm} \\
& \begin{matrix} z^{(2)} \rightarrow \zeta_0^{(2)} \in \Gamma^{(2)} \\ (z_k^{(2)} \rightarrow \zeta_{0k}^{(2)}) \end{matrix} \\
& = B_k^{(2)} \pm \frac{i \omega_k^{(2)} \left(\zeta_0^{(2)} \right)}{2 a_k^{(2)} \left(\psi_0 \right)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \left(\frac{\omega_k^{(2)} \left(\zeta \right)}{\zeta_k^{(2)} - \zeta_{0k}^{(2)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\overline{\alpha_{k,m}^{(2)} \omega_m^{(2)} \left(\zeta \right)}}{\overline{\zeta_m^{(2)} - \zeta_{0k}^{(2)}}} \right) ds + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(1)}} \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(1)} \omega_m^{(1)} \left(\zeta \right)}{\zeta_m^{(1)} - \zeta_{0k}^{(2)}} ds,
\end{aligned}$$

$$a_k^{(r)} \left(\psi_0 \right) = \mu_k^{(r)} \cos \psi_0 - \sin \psi_0, \psi_0 = \psi \left(\zeta_0 \right),$$

Використовуємо (41) в граничних умовах (399) отримаємо:

$$Im \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(1)} \omega_k^{(1)} \left(\zeta_0^{(1)} \right) = 0, Im \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(2)} \omega_k^{(2)} \left(\zeta_0^{(2)} \right) = 0, \left(n = \overline{1,4} \right), \quad (42)$$

$$2 Re \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(1)} a_k^{(1)} \left(\psi_0 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(1)}} \left(\frac{\omega_k^{(1)} \left(\zeta \right) ds}{\zeta_k^{(1)} - \zeta_{0k}^{(1)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\overline{\alpha_{k,m}^{(1)} \omega_m^{(1)} \left(\zeta \right)}}{\overline{\zeta_m^{(1)} - \zeta_{0k}^{(1)}}} \right) ds +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(2)} \omega_m^{(2)} \left(\zeta \right)}{\zeta_m^{(2)} - \zeta_{0k}^{(1)}} ds = -2 Re \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(1)} a_k^{(1)} \left(\psi_0 \right) B_k^{(1)} + b_n^{(1)} =$$

$$N_n^{(1)}.$$

(43)

$$2 Re \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(2)} a_k^{(2)} \left(\psi_0 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \left(\frac{\omega_k^{(2)} \left(\zeta \right) ds}{\zeta_k^{(2)} - \zeta_{0k}^{(2)}} - \sum_{m=1}^4 \frac{\overline{\alpha_{k,m}^{(2)} \omega_m^{(2)} \left(\zeta \right)}}{\overline{\zeta_m^{(2)} - \zeta_{0k}^{(2)}}} \right) ds +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(1)}} \sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_{k+4,m}^{(1)} \omega_m^{(1)} \left(\zeta \right)}{\zeta_m^{(1)} - \zeta_{0k}^{(2)}} ds = -2 Re \sum_{k=1}^4 c_{nk}^{(2)} a_k^{(2)} \left(\psi_0 \right) B_k^{(2)} + b_n^{(2)} =$$

$$N_n^{(2)}, \left(n = \overline{1,4} \right).$$

Обчислимо суми в правих частинах системи (43):

$$2 Re \sum_{k=1}^4 c_{1k}^{(r)} a_k^{(r)} \left(\psi \right) B_k^{(r)} = 2 Re \sum_{k=1}^4 \mu_k^{(r)} A_{11} \left(1, \mu_k^{(r)} \right) \left(\mu_k^{(r)} \cos \psi -$$

$$\sin \psi) B_k^{(r)} = \langle \sigma_{11}^{(r)} \rangle \cos \psi + \langle \sigma_{12} \rangle \sin \psi,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 c_{2k}^{(r)} a_k^{(r)}(\psi) B_k^{(r)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 -A_{11} \left(1, \mu_k^{(r)}\right) \left(\mu_k^{(r)} \cos \psi - \sin \psi\right) B_k^{(r)} = \langle \sigma_{12} \rangle \cos \psi + \langle \sigma_{22} \rangle \sin \psi,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 c_{3k}^{(r)} a_k^{(r)}(\psi) B_k^{(r)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12} \left(1, \mu_k^{(r)}\right) \left(\mu_k^{(r)} \cos \psi - \sin \psi\right) B_k^{(r)} = \langle D_1^{(r)} \rangle \cos \psi + \langle D_2 \rangle \sin \psi,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 c_{4k}^{(r)} a_k^{(r)}(\psi) B_k^{(r)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13} \left(1, \mu_k^{(r)}\right) \left(\mu_k^{(r)} \cos \psi - \sin \psi\right) B_k^{(r)} = \langle B_1^{(r)} \rangle \cos \psi + \langle B_2 \rangle \sin \psi.$$

Тоді

$$N_1^{(r)} = -p^{(r)} \cos \psi_0 - \langle \sigma_{11}^{(r)} \rangle \cos \psi_0 - \langle \sigma_{12} \rangle \sin \psi_0, \quad (r = 1, 2),$$

$$N_2^{(r)} = -p^{(r)} \sin \psi_0 - \langle \sigma_{12} \rangle \cos \psi_0 - \langle \sigma_{22} \rangle \sin \psi_0$$

(44)

$$N_3^{(r)} = -\langle D_1^{(r)} \rangle \cos \psi_0 - \langle D_2 \rangle \sin \psi_0$$

$$N_4^{(r)} = -\langle B_1^{(r)} \rangle \cos \psi_0 - \langle B_2 \rangle \sin \psi_0$$

Механічні, магнітні та електричні поля на нескінченності не є довільними, оскільки на площині $x_2 = 0$ мають виконуватись умови спряження фізичних полів:

$$\begin{aligned} s_{11}^{(1)} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle + s_{12}^{(1)} \langle \sigma_{22} \rangle + g_{21}^{(1)} \langle D_2 \rangle + p_{21}^{(1)} \langle B_2 \rangle \\ = s_{11}^{(2)} \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle + s_{12}^{(2)} \langle \sigma_{22} \rangle + g_{21}^{(2)} \langle D_2 \rangle + p_{21}^{(2)} \langle B_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\beta_{11}^{(1)} \langle D_1^{(1)} \rangle + v_{11}^{(1)} \langle B_1^{(1)} \rangle + \left(g_{16}^{(2)} - g_{16}^{(1)}\right) \langle \sigma_{12} \rangle = \beta_{11}^{(2)} \langle D_1^{(2)} \rangle + v_{11}^{(2)} \langle B_1^{(2)} \rangle,$$

$$v_{11}^{(1)} \langle D_1^{(1)} \rangle + \chi_{11}^{(1)} \langle B_1^{(1)} \rangle + (p_{16}^{(2)} - p_{16}^{(1)}) \langle \sigma_{12} \rangle = v_{11}^{(2)} \langle D_1^{(2)} \rangle + \chi_{11}^{(2)} \langle B_1^{(2)} \rangle.$$

Зв'язок між польовими величинами має бути таким:

$$s_{11}^{(2)} \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle = s_{11}^{(1)} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle + (s_{12}^{(1)} - s_{12}^{(2)}) \langle \sigma_{22} \rangle + (g_{21}^{(1)} - g_{21}^{(2)}) \langle D_2 \rangle + (p_{21}^{(1)} - p_{21}^{(2)}) \langle B_2 \rangle \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}^{(2)}, v_{11}^{(2)} \\ v_{11}^{(2)}, \chi_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle D_1^{(2)} \rangle \\ \langle B_1^{(2)} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(1)}, v_{11}^{(1)} \\ v_{11}^{(1)}, \chi_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle D_1^{(1)} \rangle \\ \langle B_1^{(1)} \rangle \end{bmatrix} + \langle \sigma_{12} \rangle \begin{bmatrix} (g_{16}^{(2)} - g_{16}^{(1)}) \\ (p_{16}^{(2)} - p_{16}^{(1)}) \end{bmatrix}$$

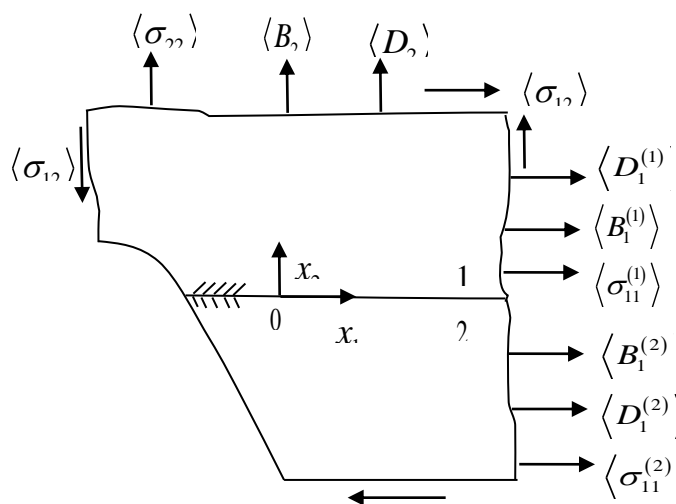


Рисунок 3 Поля на нескінченності

Нехай на нескінченності (Рисунок 3) мають місце однорідні поля $\langle \sigma_{11}^{(r)} \rangle$, $\langle \sigma_{12}^{(r)} \rangle$, $\langle \sigma_{22}^{(r)} \rangle$, $\langle D_1^{(r)} \rangle$, $\langle D_2^{(r)} \rangle$, $\langle B_1^{(r)} \rangle$, $\langle B_2^{(r)} \rangle$. Тоді, з урахуванням умов спряження (33) фізичні поля в складеній площині задовольняють таким умовам:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \langle \sigma_{12} \rangle, \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \langle \sigma_{22} \rangle, B_2^{(1)} = B_2^{(2)} = \langle B_2 \rangle,$$

$$D_2^{(1)} = D_2^{(2)} = \langle D_2 \rangle,$$

$$\begin{aligned}
s_{11}^{(2)} \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle &= s_{11}^{(1)} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle + (s_{12}^{(1)} - s_{12}^{(2)}) \langle \sigma_{12} \rangle + (g_{21}^{(1)} - g_{21}^{(2)}) \langle D_2 \rangle \\
&\quad + (p_{21}^{(1)} - p_{21}^{(2)}) \langle B_2 \rangle \\
\begin{bmatrix} \beta_{11}^{(2)} & v_{11}^{(2)} \\ v_{11}^{(2)} & \chi_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle D_1^{(2)} \rangle \\ \langle B_1^{(2)} \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(1)} & v_{11}^{(1)} \\ v_{11}^{(1)} & \chi_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle D_1^{(1)} \rangle \\ \langle B_1^{(1)} \rangle \end{bmatrix} + \langle \sigma_{12} \rangle \begin{bmatrix} (g_{16}^{(2)} - g_{16}^{(1)}) \\ (p_{16}^{(2)} - p_{16}^{(1)}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{46}$$

$$E_2^{(r)} = -g_{21}^{(r)} \langle \sigma_{11}^{(r)} \rangle - g_{22}^{(r)} \langle \sigma_{22} \rangle + \beta_{22}^{(r)} \langle D_2 \rangle + v_{22}^{(r)} \langle B_2 \rangle$$

$$H_2^{(r)} = -p_{21}^{(r)} \langle \sigma_{11}^{(r)} \rangle - p_{22}^{(r)} \langle \sigma_{22} \rangle + v_{22}^{(r)} \langle D_2 \rangle + \chi_{22}^{(r)} \langle B_2 \rangle, (r = \overline{1,2})$$

Позначимо ядра інтегральних рівнянь

$$g_{jm}^{(r)}(\zeta, \zeta_0) = \frac{c_{jm}^{(r)} a_m^{(r)}(\psi_0)}{\zeta_m^{(r)} - \zeta_{0m}^{(r)}} - \sum_{k=1}^4 \frac{\bar{c}_{jk}^{(r)} \overline{a_k^{(r)}(\psi_0)} \alpha_{k,m}^{(r)}}{\zeta_m^{(r)} - \bar{\zeta}_{0k}^{(r)}},$$

$$G_{jm}^{(3-r)}(\zeta, \zeta_0) = \sum_{k=1}^4 \frac{c_{jk}^{(r)} a_k^{(r)}(\psi_0) \alpha_{k+4,m}^{(3-r)}}{\zeta_m^{(3-r)} - \zeta_{0k}^{(r)}}, (r = 1,2).$$

Тоді мішану систему (42), (43) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \sum_{m=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}} g_{jm}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) \omega_m^{(1)}(\zeta) ds + \int_{\Gamma^{(2)}} G_{jm}^{(2)}(\zeta, \zeta_0) \omega_m^{(2)}(\zeta) ds \right\} &= \pi N_j^{(1)}(\zeta_0) \\
\operatorname{Re} \sum_{m=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma^{(2)}} g_{jm}^{(2)}(\zeta, \zeta_0) \omega_m^{(2)}(\zeta) ds + \int_{\Gamma^{(1)}} G_{jm}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) \omega_m^{(1)}(\zeta) ds \right\} &= \pi N_j^{(2)}(\zeta_0)
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\operatorname{Im} \sum_{m=1}^4 c_{jm}^{(r)} \omega_m^{(r)}(\zeta) = 0, (j = \overline{1,4}; r = \overline{1,2})$$

Цю систему треба розглядати сумісно з додатковими умовами однозначності переміщень, а також електричного і магнітного потенціалів, що мають вигляд

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 m_{jk}^{(r)} \int_{\Gamma_n^{(r)}} \omega_k^{(r)}(\zeta) ds = 0, (j = \overline{1,4}; r = \overline{1,2}), \tag{48}$$

$$m_{1k} = p_k, m_{2k} = q_k, m_{3k} = \alpha_k^E, m_{4k} = \alpha_k^H$$

Величини m_{jk} визначено в (22), (25), (28).

Ядра $g_{jm}^{(r)}$ мають особливість типу Коші, а ядра $G_{jm}^{(r)}$ - неперервні в усіх точках контурів. Таким чином, розв'язання поставленої задачі зводиться до розв'язання мішаної системи сингулярних інтегральних та алгебраїчних рівнянь (47), з додатковими умовами (48).

2.5 Характеристики фізичних полів в околі вершин тріщин

При визначені умов руйнування тіла (розповсюдження тріщин) використовують головні значення фізичних полів в околі вершин тріщин. Граничні значенні таких величин визначаються експериментально, та є характеристиками відповідних матеріалів, тоді умови розповсюдження тріщини виглядають таким чином

$$K_I < K_\sigma; \quad K_{II} < K_\tau; \quad K_D < K_{1D}; \quad K_B < K_{1B}.$$

де коефіцієнти інтенсивності нормального відриву K_I і поперечного зсуву K_{II} визначаються рівностями

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r} \sigma_n^{(1)} \right), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}^{(1)} \right), \quad (49)$$

Коефіцієнти інтенсивності електричної та магнітної індукції так

$$K_D = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r} D_n^{(1)} \right), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r} B_n^{(1)} \right). \quad (50)$$

В околі вершини c

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11} \cos^2 \psi_c + \sigma_{12} \sin 2\psi_c + \sigma_{22} \sin^2 \psi_c, \\ \tau_{ns} &= \sigma_{12} \cos 2\psi_c + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\psi_c, \end{aligned}$$

де ψ – кут нормалі між площадкою, на якій обчислюються напруження, та віссю Ox_1 .

В нашому випадку щільності $\omega_{1k}(\zeta)$ мають кореневі особливості в околі вершин тріщин. Введемо $\omega_{1k}(\zeta)$ таким чином:

$$\omega_{1k}(\zeta) = \frac{\omega_{1k}^*(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} = \frac{\Omega_{1k}(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta}$$

де $s'(\beta)d\beta$ - елемент довжини дуги тріщини.

З урахуванням (29) коефіцієнти інтенсивності (49), (50) визначаються так

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1), \quad b_k(\psi) = \frac{da_k(\psi)}{d\psi}, \quad (51)$$

$$K_D = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$K_B = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1).$$

Визначимо також коефіцієнти інтенсивності електричної K_E та магнітної K_H напруженостей

$$K_E^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r} E_s^{(1)} \right), \quad K_H^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2\pi r} H_s^{(1)} \right).$$

Через щільності $\Omega_{1k}(\pm 1)$ маємо

$$K_E^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$K_H^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \Omega_{1k}(\pm 1),$$

де

$$\alpha_1^E = [\alpha_{11}^E, \alpha_{12}^E, \alpha_{13}^E, \alpha_{14}^E], \quad \alpha_1^H = [\alpha_{11}^H, \alpha_{12}^H, \alpha_{13}^H, \alpha_{14}^H].$$

2.6 Потік енергії у вершину тріщини при її просуванні

За концепцією Гриффітса для визначення критерію руйнування велике значення має величина потоку енергії у вершину тріщини при її просуванні у тілі. У магнетоелектропружному середовищі крім механічної енергії, у потік може входити магнітна та електрична енергії. Критерій руйнування залежить від виду граничних умов на берігах тріщин.

Нехай $\sigma_{ij}^{(0)}, e_{ij}^{(0)}, u_i^{(0)}, \varphi_0^E, \varphi_0^H$ – відповідні польові величини, що відповідають деякому початковому стану «0», а $\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}, \varphi_1^E, \varphi_1^H$ – відповідно величини, що отримуються коли частина поверхні (двохстороння) тріщини одержує приріст $\Delta\Sigma$ - стан «1». В постановці задачі відсутні об'ємні сили та вільні заряди у тілі, тоді для внутрішньої енергії при переході зі стану «0» у стан «1» визначимо приріст потоку енергії $\Delta A_{\Delta\Sigma}$, що відповідає приросту $\Delta\Sigma$:

$$\begin{aligned} \Delta A_{\Delta\Sigma} = & \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} D_j^{(0)} n_j [\varphi_1^E] ds - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [D_j^{(1)} \varphi_1^E] n_j ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [D_j^{(1)}] n_j \varphi_0^E ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} B_j^{(0)} n_j [\varphi_1^H] ds - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [B_j^{(1)} \varphi_1^H] n_j ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [B_j^{(1)}] n_j \varphi_0^H ds, \quad [f] = f^+ - f^- \end{aligned}$$

Знаки \pm відносяться до граничних значень величин $u_j^{(1)}, \varphi_1^E, \varphi_1^H, D_j^{(1)}, B_j^{(1)}$ на двосторонній поверхні $\Delta\Sigma$, а інтегрується за однією стороною цієї поверхні.

Умова просування тріщини має вигляд

$$\gamma(\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2) = -\Delta A_{\Delta\Sigma},$$

де γ – густина поверхневої енергії.

У моделі тріщини в задачі Γ (за умови, що розпираючий тиск $p = 0$)

$$D_n^{(0)} = D_j^{(0)} n_j = 0, \quad B_n^{(0)} = B_j^{(0)} n_j = 0, \quad \sigma_{ij}^{(0)} n_j = 0 \quad (i, j = 1, 2).$$

Нехай тріщина Γ збільшила свою довжину по дотичній за вершину c на малу величину $h = \Delta l$ та вершина перейшла в положення c' . З урахуванням неперервності $\varphi_E^{(0)}, \varphi_H^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}, D_j^{(0)}, B_j^{(0)}$ на ділянці cc' , маємо з урахуванням граничних умов.

$$\Delta A_{\Delta l} = \frac{1}{2} \int_{cc'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^E] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^H] ds.$$

Відповідно умова поширення тріщини має вигляд

$$2\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_0^{\Delta l} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \int_0^{\Delta l} D_j^{(0)} n_j [\varphi_1^E] ds + \int_0^{\Delta l} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^H] ds \right\}.$$

Розглянемо праву частину цієї формули

$$\sigma_{1j}^{(0)} n_j = \sigma_{11}^{(0)} n_1 + \sigma_{12}^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$\sigma_{2j}^{(0)} n_j = \sigma_{21}^{(0)} n_1 + \sigma_{22}^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 -A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$D_j^{(0)} n_j = D_1^{(0)} n_1 + D_2^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$B_j^{(0)} n_j = B_1^{(0)} n_1 + B_2^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1)$$

Стрибки $[u_i^{(1)}], [\varphi_1^E], [\varphi_1^H]$ на ділянці за вершиною тріщини в точці $M \in cc'$, що віддалена від вершини c' на відстань $h-r$ такі

$$\{[u_1], [u_2]\} = \mp \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(h-r)}}{\sqrt{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k^{(1)}, q_k^{(1)}\} i\Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$\{[\varphi_1^E], [\varphi_1^H]\} = \pm \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(h-r)}}{\sqrt{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\alpha_{1k}^E, \alpha_{1k}^H\} i\Omega_{1k}(\pm 1)$$

Тоді умова поширення тріщин визначається через щільності $\Omega_{1k}(\pm 1)$ так

$$2\gamma = \frac{1}{s'(\pm 1)} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \sqrt{\frac{(h-r)}{r}} dr \right) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 (\mathcal{Q}_{11} p_k^{(1)} + \mathcal{Q}_{12} q_k^{(1)} + \mathcal{Q}_{13} \alpha_{1k}^E + \mathcal{Q}_{14} \alpha_{1k}^H) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

де

$$\sum_{k=1}^4 \mu_k A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \mathcal{Q}_{11}(\pm 1) \quad , \quad \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = -\mathcal{Q}_{12}(\pm 1) \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \mathcal{Q}_{13}(\pm 1) \quad , \quad \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \mathcal{Q}_{14}(\pm 1)$$

3 ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК. СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА РОЗІМКНЕНИХ КОНТУРАХ

Розв'яжемо отриману систему рівнянь з використанням одного з методів механічних квадратур до сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}} g_{jk}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) \omega_k^{(1)}(\zeta) ds + \int_{\Gamma^{(2)}} G_{jk}^{(2)}(\zeta, \zeta_0) \omega_k^{(2)}(\zeta) ds \right\} &= \pi N_j^{(1)}(\zeta_0), \\
 \zeta_0 &\in \Gamma^{(1)}, \\
 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}} G_{jk}^{(1)}(\zeta, \zeta_0) \omega_k^{(1)}(\zeta) ds + \int_{\Gamma^{(2)}} g_{jk}^{(2)}(\zeta, \zeta_0) \omega_k^{(2)}(\zeta) ds \right\} &= \pi N_j^{(2)}(\zeta_0), \quad (49) \\
 \zeta_0 &\in \Gamma^{(2)}, \\
 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 c_{jk}^{(r)} \omega_k^{(r)}(\zeta) &= 0, \zeta_0 \in \Gamma^{(r)}, (j = \overline{1,4}; r = \overline{1,2}).
 \end{aligned}$$

разом з додатковими умовами

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 m_{jk}^{(r)} \int_{\Gamma_m^{(r)}} \omega_k^{(r)}(\zeta) ds = 0, (j = \overline{1,4}; r = \overline{1,2}), \quad (50)$$

$$m_{1k} = p_k, m_{2k} = q_k, m_{3k} = \alpha_k^E, m_{4k} = \alpha_k^H,$$

де m_{jk} визначені у (22), (25), (28).

3.1 Квадратурні формули на розімкнених контурах $\Gamma_m^{(r)}$

Параметризуємо контури $\Gamma_m^{(r)}$

$$\begin{aligned}
 \zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1), \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma^{(r)} = \cup \Gamma_m^{(r)}, \\
 -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1
 \end{aligned} \quad (51)$$

Для тріщини параболічного перетину вводимо параметризацію:

$$\zeta(\beta) = x_1 + ix_2 = (p_1\beta + ip_2\beta^2)e^{i\alpha} + ih, \quad -1 \leq \beta \leq 1 \quad (52)$$

де p_1, p_2 - числові параметри, зокрема, коли при $p_2 = 0$ тріщина прямолінійна; α - кут нахилу осі симетрії параболи до осі Ox_1 ; h - комплексне число, що задає координати вершини параболи (середини тріщини у прямолінійному випадку).

На розімкнених контурах $\Gamma_m^{(r)}$ в околі вершин тріщин щільності $\omega_{km}^{(r)}(\zeta)$ мають кореневі особливості, з урахуванням параметризації, на кінцях інтервалу $(-1; 1)$, покладемо

$$\omega_{km}^{(r)}(\zeta) = \frac{\omega_{km}^{(r)*}(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} = \frac{\Omega_{km}^{(r)}(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta} \quad (53)$$

Розіб'ємо відрізок $(-1; 1)$ точками інтерполяції β_j (точки де визначаються значення невідомих) та коллокації β_{ol} (в цих точках задовольняються інтегральні рівняння):

$$\beta_j = \cos\left(\frac{2j - 1}{2n}\pi\right), (j = \overline{1, n}), T_n(\beta_j) = 0 \quad (54)$$

$$\beta_{ol} = \cos\left(\frac{\pi l}{n}\right), (l = \overline{1, n - 1}), U_{n-1}(\beta_{ol}) = 0 \quad (55)$$

де β_j - нулі многочленів Чебишова 1-го роду $T_n(\beta)$; β_{ol} - нулі многочленів Чебишова 2-го роду $U_n(\beta)$.

На системи вузлів (54) квадратурні формули Гауса для такі

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{(r)}} \frac{\omega_k^{(r)}(\zeta) ds}{\zeta_k - \zeta_{0k}} &= \int_{-1}^1 \frac{\Omega_k^{(r)}(\beta) d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2} (\zeta_k(\beta) - \zeta_k(\beta_0))} \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_k^{(r)}(\beta_j)}{\zeta_k(\beta_j) - \zeta_k(\beta_0)} + \pi \Omega_k^{(r)}(\beta_0) \frac{U_{n-1}(\beta_0)}{T_n(\beta_0)} \end{aligned} \quad (56)$$

$\zeta, \zeta_0 \in \Gamma$

При виборі точок коллокації (55) квадратурні формули (56) набувають вигляду:

$$\int_{\Gamma^{(r)}} \frac{\omega_k^{(r)}(\zeta) ds}{\zeta_k - \zeta_{0k}} = \int_{-1}^1 \frac{\Omega_k^{(r)}(\beta) d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}(\zeta_k(\beta) - \zeta_k(\beta_{0l}))} \simeq \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_k^{(r)}(\beta_j)}{\zeta_k(\beta_j) - \zeta_k(\beta_{0l})}, \quad (57)$$

$(l = \overline{1, n-1}).$

Для несингулярного інтегралу квадратурна формула така

$$\int_{-1}^1 \frac{G(\zeta(\beta), \zeta(\beta_0)) \Omega_k^{(r)}(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} d\beta \simeq \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n G(\zeta(\beta_j), \zeta(\beta_0)) \Omega_k^{(r)}(\beta_j). \quad (58)$$

3.2 Зведення алгоритму до СЛАР

З урахуванням формул (57), (58), шукаємо розв'язки системи (49)-(50) в точках інтерполяції на кожній з тріщин, нехай у верхньому півпросторі k_1 , а у нижньому - k_2 тріщин, тоді система (49)-(50) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно $8n(k_1 + k_2)$ значень комплексних щільностей $\Omega_{km}^{(r)}(\zeta(\beta_i)) = \Omega_{km}^{(r)}(\beta_i)$ та відповідних комплексно спряжених величин $\overline{\Omega_{km}^{(r)}(\beta_i)}$:

- алгебраїчні рівняння ($4n(k_1 + k_2)$ рівнянь)

$$Im \sum_{k=1}^4 c_{jk}^{(r)} \Omega_{km}^{(r)}(\zeta(\beta_i)) = 0, \quad (59)$$

$$\zeta \in \Gamma_m^{(r)}, (j = \overline{1,4}, i = \overline{1,n}; m = \overline{1, k_1 + k_2}, r = \overline{1,2})$$

- інтегральні рівняння ($4(n-1)(k_1 + k_2)$ рівнянь)

$$Re \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n g_{jk}^{(1)}(\zeta^{(1)}(\beta_i), \zeta_0(\beta_{0l})) \Omega_{km_1}^{(1)}(\beta_i) + \right. \\ \left. + \sum_{m_2=1}^{k_2} \sum_{i=1}^n G_{jk}^{(2)}(\zeta^{(2)}, \zeta_0(\beta_{0l})) \Omega_{km_2}^{(2)}(\beta_i) \right) = nN_j^{(1)}(\zeta_0(\beta_{0l})), \zeta_0 \in \Gamma^{(1)}, \quad (60)$$

$$Re \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n G_{jk}^{(1)} \left(\zeta^{(1)}(\beta_i), \zeta_0(\beta_{0l}) \right) \Omega_{km_1}^{(1)}(\beta_i) + \right. \\ \left. + \sum_{m_2=1}^{k_2} \sum_{i=1}^n g_{jk}^{(2)} \left(\zeta^{(2)}, \zeta_0(\beta_{0l}) \right) \Omega_{km_2}^{(2)}(\beta_i) \right) = nN_j^{(2)}(\zeta_0(\beta_{0l})), \zeta_0 \in \Gamma^{(2)},$$

$$j = \overline{1,4}, l = \overline{1, n-1}, \Gamma^{(r)} = \bigcup_{m=1}^{k_r} \Gamma_m^{(r)}$$

- додаткові умови ($4(k_1 + k_2)$) рівнянь)

$$Im \sum_{k=1}^4 \left\{ \begin{array}{l} p_k \\ q_k \\ \alpha_{1k}^E \\ \alpha_{1k}^H \end{array} \right\} \sum_{i=1}^n \Omega_{km}^{(r)}(\beta_i) = 0. \quad (61)$$

Таким чином, (49)-(50) зводяться до системи з $8n(k_1 + k_2)$ лінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень функцій $\Omega_{km}^{(r)}(\beta_i)$ та $\overline{\Omega_{km}^{(r)}(\beta_i)}$ у вузлах $\beta_i (i = \overline{1, n})$ на кожному контурі.

Для дійсної та уявної частин відповідних функцій використовуємо таке:

$$Re f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, Im f(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}.$$

Система рівнянь набуває вигляду:

- алгебраїчні рівняння (59):

$$C \begin{pmatrix} \Omega_{1m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{4m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{1m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{2m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{3m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{4m_r}^{(r)}(\beta_i) \end{pmatrix} = 0 \quad (i = \overline{1, n}, r = \overline{1, 2}, m_r = \overline{1, k_r}), \quad (62)$$

$$C^{(r)} = (C_r^* | \overline{-C_r^*})$$

$$C_r^* = \begin{pmatrix} \mu_1^{(r)} \cdot A_{11}^{(r)}(1, \mu_1^{(r)}) & \mu_2^{(r)} \cdot A_{11}^{(r)}(1, \mu_2^{(r)}) & \mu_3^{(r)} \cdot A_{11}^{(r)}(1, \mu_3^{(r)}) & \mu \cdot A_{11}^{(r)}(1, \mu_4^{(r)}) \\ -A_{11}^{(r)}(1, \mu_1^{(r)}) & -A_{11}^{(r)}(1, \mu_2^{(r)}) & -A_{11}^{(r)}(1, \mu_3^{(r)}) & -A_{11}^{(r)}(1, \mu_4^{(r)}) \\ \alpha_{11}^{E(r)} & \alpha_{12}^{E(r)} & \alpha_{13}^{E(r)} & \alpha_{14}^{E(r)} \\ \alpha_{11}^{H(r)} & \alpha_{12}^{H(r)} & \alpha_{13}^{H(r)} & \alpha_{14}^{H(r)} \end{pmatrix},$$

- сингулярні інтегральні рівняння (60)

$$\sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n g^{(1)}(\zeta^{(1)}(\beta_i), \zeta_0(\beta_{0l})) \begin{pmatrix} \Omega_{1m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \Omega_{4m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{1m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{2m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{3m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{4m_1}^{(1)}(\beta_i) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m_2=1}^{k_2} \sum_{i=1}^n G^{(2)} \left(\zeta^{(2)}(\beta_i), \zeta_0(\beta_{0l}) \right) \left(\begin{array}{c} \Omega_{1m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{4m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{1m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{2m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{3m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{4m_2}^{(2)}(\beta_i) \end{array} \right) = 2nN^{(1)}(\zeta_0(\beta_{0l})), \zeta_0 \in \Gamma^{(1)}, \\
& \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n G^{(1)} \left(\zeta^{(1)}(\beta_i), \zeta_0(\beta_{0l}) \right) \left(\begin{array}{c} \Omega_{1m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \Omega_{4m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{1m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{2m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{3m_1}^{(1)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{4m_1}^{(1)}(\beta_i) \end{array} \right) + \tag{63}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m_2=1}^{k_2} \sum_{i=1}^n g^{(2)} \left(\zeta^{(2)}(\beta_i), \zeta_0(\beta_{0i}) \right) \begin{pmatrix} \Omega_{1m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{4m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{1m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_2}^{(2)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{4m_2}^{(2)}(\beta_i) \end{pmatrix} = 2nN^{(2)}(\zeta_0(\beta_{0i})), \zeta_0 \in \Gamma^{(2)}$$

де

$$g^{(r)} = (g_r^* | \overline{g_r^*}), G^{(r)} = (G_r^* | \overline{G_r^*})$$

$$g_r^*(\zeta, \zeta_0) = \left\| g_{jm}^{(r)}(\zeta, \zeta_0) \right\|_{4 \times 4}, G_r^*(\zeta, \zeta_0) = \left\| G_{jm}^{(r)}(\zeta, \zeta_0) \right\|_{4 \times 4}$$

$$(l = \overline{1, n-1}),$$

- умови однозначності (61):

$$\sum_{i=1}^n \left(m^{(r)} | - \overline{m^{(r)}} \right) \begin{pmatrix} \Omega_{1m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{4m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{1m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{2m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{3m_r}^{(r)}(\beta_i) \\ \hline \Omega_{4m_r}^{(r)}(\beta_i) \end{pmatrix} = 0m^{(r)} = \begin{pmatrix} p_1^{(r)} & p_2^{(r)} & p_3^{(r)} & p_4^{(r)} \\ q_1^{(r)} & q_2^{(r)} & q_3^{(r)} & q_4^{(r)} \\ \alpha_{11}^{E(r)} & \alpha_{12}^{E(r)} & \alpha_{13}^{E(r)} & \alpha_{14}^{E(r)} \\ \alpha_{11}^{H(r)} & \alpha_{12}^{H(r)} & \alpha_{13}^{H(r)} & \alpha_{14}^{H(r)} \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$(r = \overline{1, 2}, m_r = \overline{1, k_r}).$$

На контурах Γ_m тріщин для визначення геометричних величин використовуються наступні співвідношення:

$$\zeta(\beta) = x_1(\beta) + ix_2(\beta)$$

$$\zeta = \zeta(\beta), \zeta_0 = \zeta(\beta_0), -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1,$$

$$\zeta_v = \operatorname{Re} \zeta + \mu_v \operatorname{Im} \zeta = \zeta_v(\beta), \quad \zeta_{0v} = \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_v \operatorname{Im} \zeta_0 = \zeta_v(\beta_0),$$

$$e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi = -i \frac{d\zeta}{ds} = -i \frac{\zeta'(\beta)}{s'(\beta)}, \quad e^{i\psi_0} = -i \frac{\zeta'(\beta_0)}{s'(\beta_0)},$$

$$a_j(\psi) = \frac{d\zeta_j}{ds} = \frac{\zeta_j'(\beta)}{s'(\beta)}, \quad a_j(\psi_0) = \frac{\zeta_j'(\beta_0)}{s'(\beta_0)},$$

$$s'(\beta) = \sqrt{[x_1'(\beta)]^2 + [x_2'(\beta)]^2}$$

Для визначення значень функцій $\Omega_{km_r}^{(r)}(\beta)$ в довільній точці відрізка $[-1,1]$ скористаємось інтерполяційним многочленом Лагранжа за вузлами інтерполяції

$$\Omega_{km_r}^{(r)}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \Omega_{km_r}^{(r)}(\beta_j) \frac{T_n(\beta) \sqrt{1-\beta_j^2}}{\beta - \beta_j}, \quad -1 \leq \beta \leq 1 \quad (65)$$

Зокрема, на у вершинах тріщин при $\beta = \pm 1$

$$\begin{aligned} \Omega_{km_r}^{(r)}(1) &= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^j \Omega_{km_r}^{(r)}(\beta_j) \operatorname{ctg} \left(\frac{2j-1}{4n} \pi \right), \\ \Omega_{km_r}^{(r)}(-1) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} \Omega_{km_r}^{(r)}(\beta_j) \operatorname{tg} \left(\frac{2j-1}{4n} \pi \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Значення щільностей (66) використовуються в формулах коефіцієнтів інтенсивності для фізичних величин в вершинах тріщин, що у матричній формі обчислюються так:

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_D \\ K_B \\ K_E \\ K_H \end{pmatrix} (\pm 1) = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \left\{ A \begin{pmatrix} \Omega_{1m}^{(r)} & (\pm 1) \\ \Omega_{2m}^{(r)} & (\pm 1) \\ \Omega_{3m}^{(r)} & (\pm 1) \\ \Omega_{4m}^{(r)} & (\pm 1) \end{pmatrix} \right\}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_1(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_1) & a_2(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_2) & a_3(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_3) & a_4(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_4) \\ b_1(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_1) & b_2(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_2) & b_3(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_3) & b_4(\psi_c)A_{11}^{(r)}(1, \mu_4) \\ A_{12}^{(r)}(1, \mu_1) & A_{12}^{(r)}(1, \mu_2) & A_{12}^{(r)}(1, \mu_3) & A_{12}^{(r)}(1, \mu_4) \\ A_{13}^{(r)}(1, \mu_1) & A_{13}^{(r)}(1, \mu_2) & A_{13}^{(r)}(1, \mu_3) & A_{13}^{(r)}(1, \mu_4) \\ \alpha_{11}^{E(r)} & \alpha_{12}^{E(r)} & \alpha_{13}^{E(r)} & \alpha_{14}^{E(r)} \\ \alpha_{11}^{H(r)} & \alpha_{12}^{H(r)} & \alpha_{13}^{H(r)} & \alpha_{14}^{H(r)} \end{pmatrix}$$

За побудованим чисельним алгоритмом написано програму мовою Python, що розраховує коефіцієнти інтенсивностей фізичних полів та енергетичний критерій руйнування в поставленій задачі.

3.3 Тріангуляція Делоне

В процесі роботи було застосовано метод тріангуляції Делоне. Він дає можливість побудувати тріщини, які не будуть перетинатися.

Огляд методу [26]. Для множини точок S на площині, тріангуляція Делонé— це тріангуляція $DT(S)$, коли будь яка точка з множини S знаходиться зовні описаних навколо трикутників кіл в множині $DT(S)$. (Рисунок 4) Тріангуляція Делоне допомагає при можливості зменшити кількість малих кутів. Даний спосіб тріангуляції було винайдено в 1934 році радянським вченим Борисом Делоне.

Якщо опиратися на формулювання Делоне, можна визначити, що коло описане довкола трикутника утворене з трьох точок з вихідної множини точок є пустим тільки тоді, коли дане коло не містить більше ніж три точки трикутника які його задають.

Згідно з умовою Делоне мережа трикутників представляє з себе тріангуляцію Делоне тільки тоді, коли всі кола описані навколо трикутників є пустими. Для двовимірного простору це є початковим визначенням, яке можна застосовувати і для тривимірного простору якщо замінити описані кола на описані сфери.

В випадку коли множина точок утворює одну лінію - триангуляції Делоне для такої множини не існує. В випадку існування на одному колі чотирьох точок (для прикладу квадрат) триангуляція Делоне має два способи розділення даного чотирикутника, так щоб задовольнялися умови Делоне.

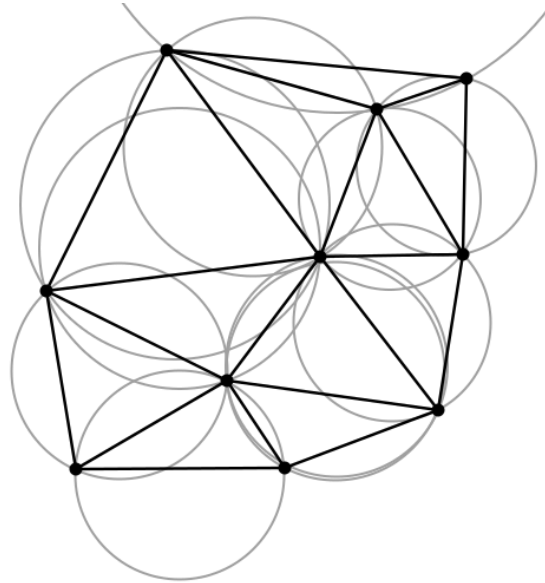


Рисунок 4 Триангуляція Делоне і описані довкола трикутників кола

Триангуляція Делоне для дискретної множини точок S (Рисунок 5) як правило є дуальним графом розбиття Вороного для множини точок S (Рисунок 6). Виняткові випадки включають в себе існування на одній прямій трьох точок, на колі – чотирьох точок.

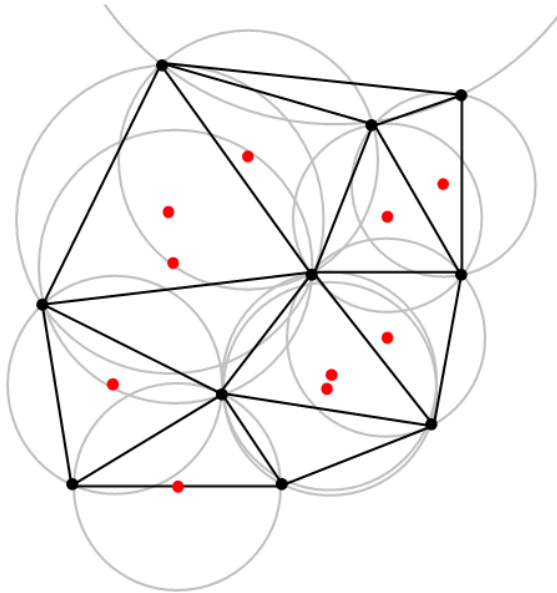


Рисунок 5 Триангуляція Делоне з всіма колами та їх центрами

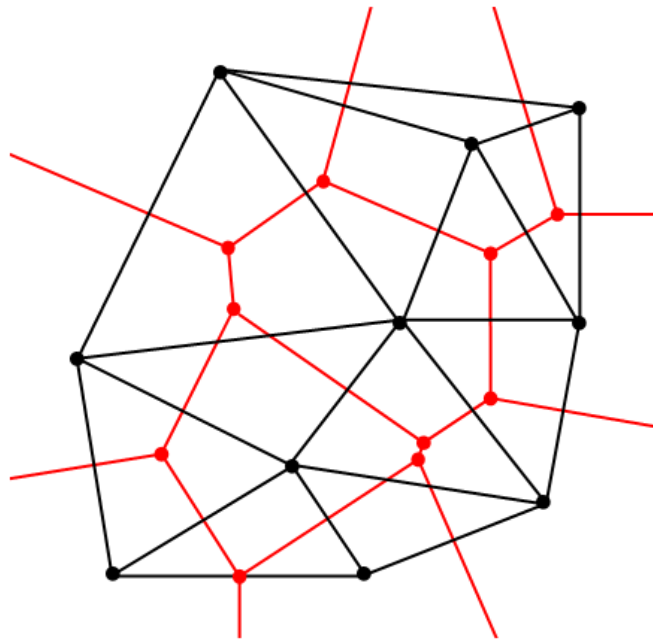


Рисунок 6 Поєднання центрів кіл описаних навколо трикутників що мають спільне ребро формує діаграму Вороного (червоним кольором)

Властивості триангуляції Делоне [26]

Нехай n — це кількість точок, d — це розмірність[1].

- Опуклу оболонку точок утворює об'єднання всіх симплексів в триангуляції.

- Не більше ніж $O(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$ симплексів містить триангуляція Делоне.
- Якщо b вершин входять до опуклої оболонки на площині ($d = 2$), то як результат будь-яка триангуляція точок буде мати не більше ніж $2n - 2 - b$ трикутників та ще одну зовнішню «грань».
- Кожна вершина на площині в середньому має по шість інцидентних трикутників.
- Триангуляція Делоне на площині збільшує найменший кут. Такий кут в триангуляції Делоне, не буде меншим порівняно з будь якою іншою триангуляцією. Щоправда, триангуляція Делоне не обов'язково зменшує максимальний кут.
- Коло, яке описане навколо довільного трикутника, не містить триангуляції всередині яких небуť інших вхідних вершин.
- Якщо коло, яке проходить через дві вхідні точки не має всередині ніяких інших, то сегмент який поєднує дві дані точки являє собою ребро триангуляції Делоне для цих точок.
- Триангуляція Делоне для множини точок в d - вимірному просторі являє собою проекцією точок опуклої оболонки на параболоїд міри $(d + 1)$.
- Самий близький сусід b довільної точки p лежить на ребрі bp триангуляції Делоне, тому що граф найближчих сусідів — це підграф триангуляції Делоне[1].

Алгоритм «Розділяй і володарюй» [28]. Цей алгоритм має за основу стандартну методику зведення складного завдання до простішого, до того моменту коли в простому рішенні не стає очевидним. Безпосередньо сам алгоритм для $N > 1$ має з 2 етапи:

- Перш за все необхідно розбити вихідну множини на декілька більш дрібних множин. Для цього необхідно провести горизонтальні або вертикальні прямі в середині цієї множини і вже потім відносно цих прямих розділяти точки на

дві частини орієнтовно по $N/2$. Далі, рекурсивно запускаємо процес ділення для кожної групи точок.

- Потім треба поєднати оптимальні триангуляції, тому для початку знаходимо дві пари точок у яких відрізки в сукупності з побудованими триангуляціями утворюють випуклу фігуру. Вони поєднуються відрізками, один із отриманих відрізків обираємо як початок для подальшого обходу. Мета обходу полягає в такому: на даному відрізку треба немов би «надути бульбашку» начеб то всередину до першої точки, котру досягне коло «бульбашки», яка роздувається. Зі знайденою точкою поєднується точка відрізка, яка не була з'єднана з нею. Отриманий відрізок перевіряємо на перетин з відрізками триангуляції які вже існують і в випадку якщо відрізки перетинаються, вже існуючі відрізки триангуляції видаляємо. Наступним кроком, приймаємо новий відрізок за початок для нової «бульбашки». Даний цикл повторюємо доти, доки початок не почне співпадати з другим відрізком із опуклої оболонки.

Складність розбиття множини $O(\log N)$, об'єднання $O(N)$ - для кожного об'єднання, фінальна складність алгоритму - $O(N \log N)$.

Приклад застосування методу. В процесі підготовки до кваліфікаційної роботи, було отримано безліч прикладів застосування методу триангуляції Делоне.

Для початку випадковим чином обирається кількість точок та їх координати. Далі ці точки з'єднуються в трикутники за допомогою методу триангуляції Делоне [27]. За допомогою відомих координат знаходимо довжини сторін трикутників, потім центри кіл вписаних в трикутники. Наступним кроком є знаходження радіусу і безпосередньо побудова кола.

Маючи ці значення, можемо побудувати прямолінійні контури за формулою

$$\zeta(\beta) = (p_1\beta + ip_2\beta^2)e^{i\alpha} + ih \quad (67)$$
$$-1 \leq \beta \leq 1; p_2 = 0$$

В результаті отримаємо:

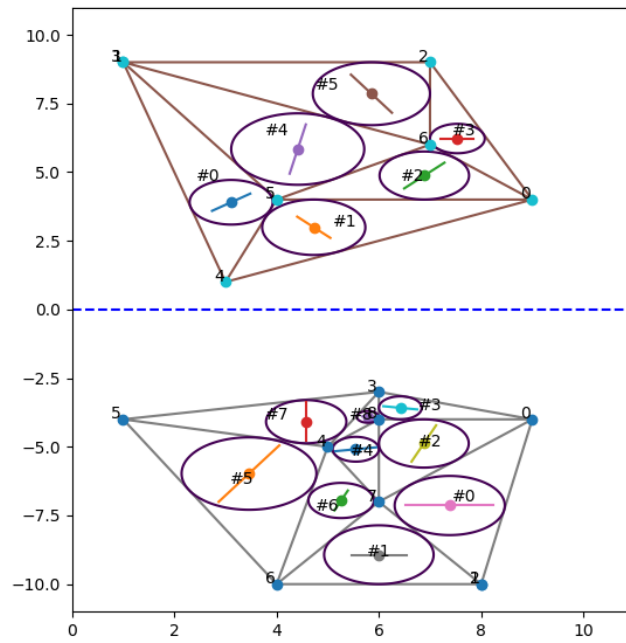


Рисунок 7 Приклад застосування триангуляції Делоне

4 Результати

4.1 Режими роботи програми

В результаті запуску програми випадковим чином обирається кількість точок та їх координати. Далі, за допомогою тріангуляції Делоне з цих точок утворюються трикутники, визначається кількість тріщин в кожній півплощині та. Наступним кроком є побудова самих тріщин.

Далі необхідно вибрати матеріал для кожної півплощини (Рисунок 8). В програмі задано декілька типів матеріалів.

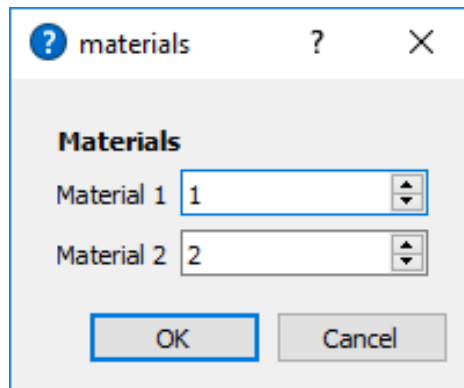


Рисунок 8 Вибір матеріалу

У наведених нижче діалогових вікнах, необхідно задати початкові значення для тисків на берегах тріщин та польові величини, що задають фізичні поля на нескінченності (Рисунок 9, Рисунок 10).

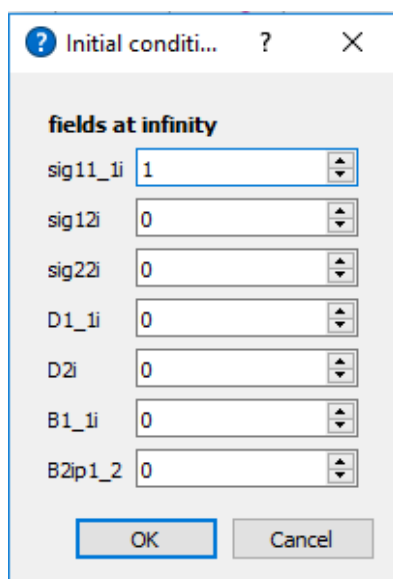


Рисунок 9

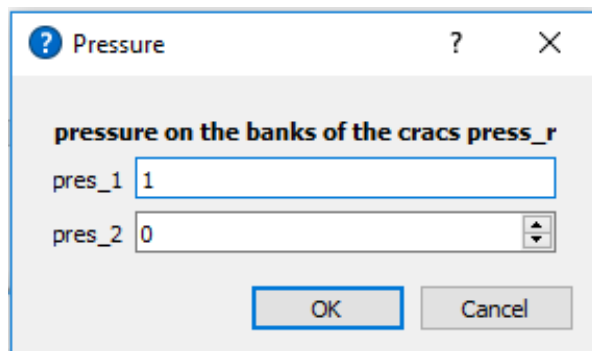


Рисунок 10

4.2 Складений простір при матеріалі M1 у верхній та матеріалі M2 нижній півплощинах

Обираємо відповідні матеріали. Для верхньої півплощини – матеріал №1, для нижньої – матеріал №2.

Наведено результати роботи програми для 4-х тріщин у верхній та 3-х тріщин у нижній напівплощинах (Рисунок 11). Параметр $\beta = 1$ відповідає вершині тріщини, що розташована далі від границі розділу півпросторів для тріщин у верхньому півпросторі, і навпаки для тріщин у нижньому півпросторі – це найближча до границі вершина (тріщина 5 паралельна границі).

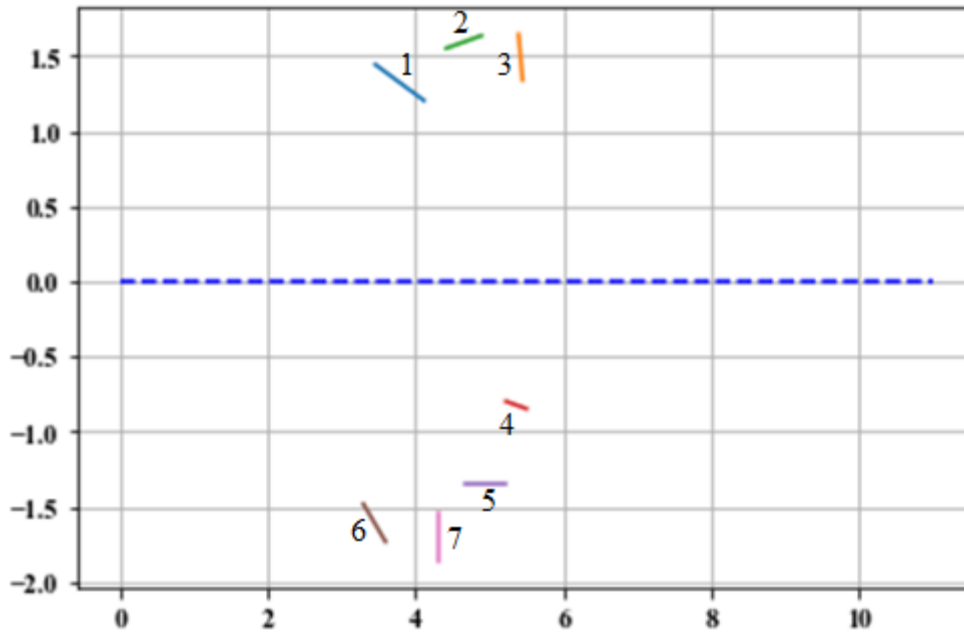


Рисунок 11 Складений простір з тріщинами

Для базового варіанту обчислені коефіцієнти інтенсивності для усіх тріщин в заданій конфігурації.

	вершина $\beta = 1$	p_1	h	α/π	$K_I(1)$	$K_{II}(1)$	$K_D(1)$	$K_B(1)$	$K_E(1)$	$K_H(1)$	$\gamma(1)$
crack ⁽¹⁾ 1	3.458000+1.443000j	0.351	3.788000+1.323000j	0.889	-1.187217	0.319673	-4.531647e-07	-0.000281	-0.080874	-0.000218	1.700720e-05
crack ⁽¹⁾ 2	5.395000+1.644000j	0.156	5.422000+1.491000j	0.556	-1.358560	0.117948	-1.806569e-07	0.000471	-0.155509	-0.000419	2.941513e-05
crack ⁽¹⁾ 3	4.893000+1.634000j	0.241	4.655000+1.592000j	0.056	-0.954803	-0.036710	1.056663e-06	0.000175	-0.023119	-0.000062	8.477680e-06
crack ⁽²⁾ 1	5.224000-0.800000j	0.141	5.363000-0.824000j	0.944	-0.043051	0.244435	-1.007713e-07	0.000036	-0.002508	-0.000035	3.530832e-07
crack ⁽²⁾ 2	5.221000-1.342000j	0.273	4.947000-1.342000j	0.000	0.023435	-0.035745	-4.427202e-06	-0.000245	-0.000361	-0.000005	1.077690e-08
crack ⁽²⁾ 3	3.297000-1.482000j	0.196	3.447000-1.608000j	0.778	-0.653776	0.784089	-6.034260e-06	-0.000469	-0.010316	-0.000143	5.976965e-06
crack ⁽²⁾ 4	4.315000-1.545000j	0.159	4.315000-1.703000j	0.500	-1.431750	-0.024729	-5.705139e-06	-0.000316	-0.014468	-0.000200	1.175297e-05

Рисунок 12 Значення коефіцієнтів в вершинах, що відповідають параметру $\beta = 1$

	вершина $\ln \beta = -1$	p_1	h	α/π	$K_I(-1)$	$K_{II}(-1)$	$K_D(-1)$	$K_B(-1)$	$K_E(-1)$	$K_H(-1)$	$\gamma(-1)$
crack ⁽¹⁾ 1	4.118000+1.202000j	0.351	3.788000+1.323000j	0.889	1.219627	-0.284969	8.132246e-07	0.000313	0.078409	0.000211	0.000017
crack ⁽¹⁾ 2	5.449000+1.338000j	0.156	5.422000+1.491000j	0.556	1.334043	-0.100341	1.090666e-07	0.000234	0.152395	0.000411	0.000028
crack ⁽¹⁾ 3	4.417000+1.550000j	0.241	4.655000+1.592000j	0.056	1.021083	0.081661	-1.131714e-06	-0.000707	0.029505	0.000080	0.000010
crack ⁽²⁾ 1	5.501000-0.849000j	0.141	5.363000-0.824000j	0.944	0.044167	-0.242260	8.692247e-08	-0.000045	0.002488	0.000034	0.002066
crack ⁽²⁾ 2	4.674000-1.342000j	0.273	4.947000-1.342000j	0.000	-0.067663	0.077616	1.550903e-05	0.000809	0.000784	0.000011	0.000196
crack ⁽²⁾ 3	3.597000-1.734000j	0.196	3.447000-1.608000j	0.778	0.635035	-0.755736	5.672949e-06	0.000427	0.009975	0.000138	0.033199
crack ⁽²⁾ 4	4.315000-1.862000j	0.159	4.315000-1.703000j	0.500	1.458300	0.037240	1.080945e-05	0.000592	0.014736	0.000204	0.072458

Рисунок 13 Значення коефіцієнтів в вершинах, що відповідають параметру $\beta = -1$

Для дослідження ефектів, змінюється кут нахилу однієї з тріщин в інтервалі $[-\pi / 4, \pi / 4]$. В такому випадку складений простір має вигляд:

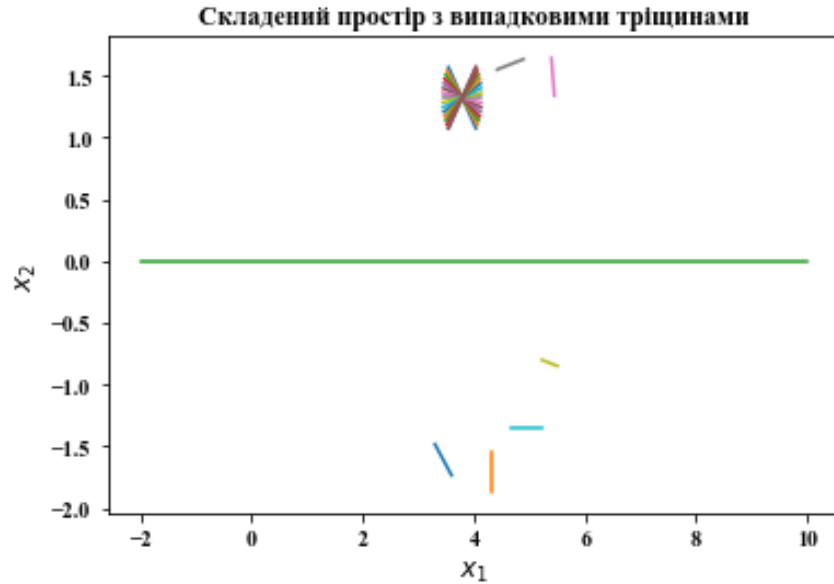


Рисунок 14 Складений простір заданої конфігурації зі зміною положення однієї з тріщин

a/π	(-1) crack ⁽¹⁾ ₁	(-1) crack ⁽¹⁾ ₂	(-1) crack ⁽¹⁾ ₃	(-1) crack ⁽²⁾ ₁	(-1) crack ⁽²⁾ ₂	(-1) crack ⁽²⁾ ₃	(-1) crack ⁽²⁾ ₄	(1) crack ⁽¹⁾ ₁	(1) crack ⁽¹⁾ ₂	(1) crack ⁽¹⁾ ₃	(1) crack ⁽²⁾ ₁	(1) crack ⁽²⁾ ₂	(1) crack ⁽²⁾ ₃	(1) crack ⁽²⁾ ₄	
0	-0.250	1.568145	1.247754	0.998526	0.042151	-0.050184	0.650062	1.460173	-1.570277	-1.286904	-0.952276	-0.041113	0.011266	-0.670743	-1.434086
1	-0.225	1.490269	1.263217	1.002514	0.043163	-0.052314	0.647590	1.459499	-1.495207	-1.299151	-0.953379	-0.042177	0.012359	-0.667742	-1.433298
2	-0.200	1.414282	1.279172	1.006739	0.043907	-0.054989	0.644934	1.458962	-1.423310	-1.311965	-0.954286	-0.042944	0.014003	-0.664626	-1.432659
3	-0.175	1.342114	1.295267	1.011068	0.044364	-0.058133	0.642161	1.458574	-1.356485	-1.325128	-0.954926	-0.043393	0.016148	-0.661473	-1.432181
4	-0.150	1.275593	1.311091	1.015305	0.044522	-0.061656	0.639343	1.458343	-1.296424	-1.338392	-0.955220	-0.043514	0.018729	-0.658360	-1.431875
5	-0.125	1.216393	1.326174	1.019192	0.044377	-0.065463	0.636550	1.458271	-1.244530	-1.351480	-0.955088	-0.043306	0.021673	-0.655363	-1.431746
6	-0.100	1.165983	1.339996	1.022404	0.043935	-0.069451	0.633853	1.458358	-1.201840	-1.364078	-0.954457	-0.042778	0.024897	-0.652556	-1.431793
7	-0.075	1.125595	1.352008	1.024576	0.043207	-0.073515	0.631319	1.458600	-1.168985	-1.375839	-0.953267	-0.041946	0.028313	-0.650008	-1.432015
8	-0.050	1.096196	1.361664	1.025344	0.042213	-0.077551	0.629011	1.458990	-1.146195	-1.386388	-0.951492	-0.040833	0.031831	-0.647781	-1.432404
9	-0.025	1.078473	1.368459	1.024413	0.040977	-0.081459	0.626988	1.459517	-1.133367	-1.395327	-0.949150	-0.039471	0.035362	-0.645931	-1.432950
10	0.000	1.072835	1.371979	1.021638	0.039528	-0.085147	0.625297	1.460169	-1.130210	-1.402255	-0.946324	-0.037892	0.038823	-0.644503	-1.433640
11	0.025	1.079419	1.371945	1.017116	0.037899	-0.088533	0.623978	1.460931	-1.136439	-1.406792	-0.943173	-0.036133	0.042137	-0.643531	-1.434461
12	0.050	1.098102	1.368248	1.011257	0.036124	-0.091550	0.623060	1.461788	-1.152000	-1.408611	-0.939936	-0.034231	0.045236	-0.643036	-1.435395
13	0.075	1.128511	1.360964	1.004817	0.034240	-0.094145	0.622558	1.462725	-1.177242	-1.407473	-0.936925	-0.032226	0.048066	-0.643028	-1.436425
14	0.100	1.170030	1.350362	0.998876	0.032288	-0.096281	0.622474	1.463725	-1.212967	-1.403263	-0.934489	-0.030159	0.050582	-0.643497	-1.437534
15	0.125	1.221785	1.336895	0.994695	0.030314	-0.097934	0.622798	1.464771	-1.260150	-1.396031	-0.932964	-0.028075	0.052747	-0.644421	-1.438702
16	0.150	1.282615	1.321186	0.993350	0.028370	-0.099087	0.623508	1.465843	-1.319117	-1.386022	-0.932578	-0.026027	0.054528	-0.645765	-1.439905
17	0.175	1.351026	1.304002	0.995135	0.026521	-0.099720	0.624580	1.466915	-1.388279	-1.373690	-0.933345	-0.024079	0.055884	-0.647485	-1.441114
18	0.200	1.425198	1.286167	0.999086	0.024831	-0.099803	0.625989	1.467956	-1.463619	-1.359655	-0.935015	-0.022298	0.056766	-0.649541	-1.442295
19	0.225	1.503079	1.268441	1.003367	0.023361	-0.099301	0.627715	1.468932	-1.540254	-1.344605	-0.937140	-0.020747	0.057123	-0.651894	-1.443410
20	0.250	1.582563	1.251405	1.006352	0.022150	-0.098190	0.629736	1.469812	-1.614797	-1.329171	-0.939253	-0.019468	0.056917	-0.654506	-1.444424

Рисунок 15 Коефіцієнти K_j в залежності від зміни положення однієї з тріщин

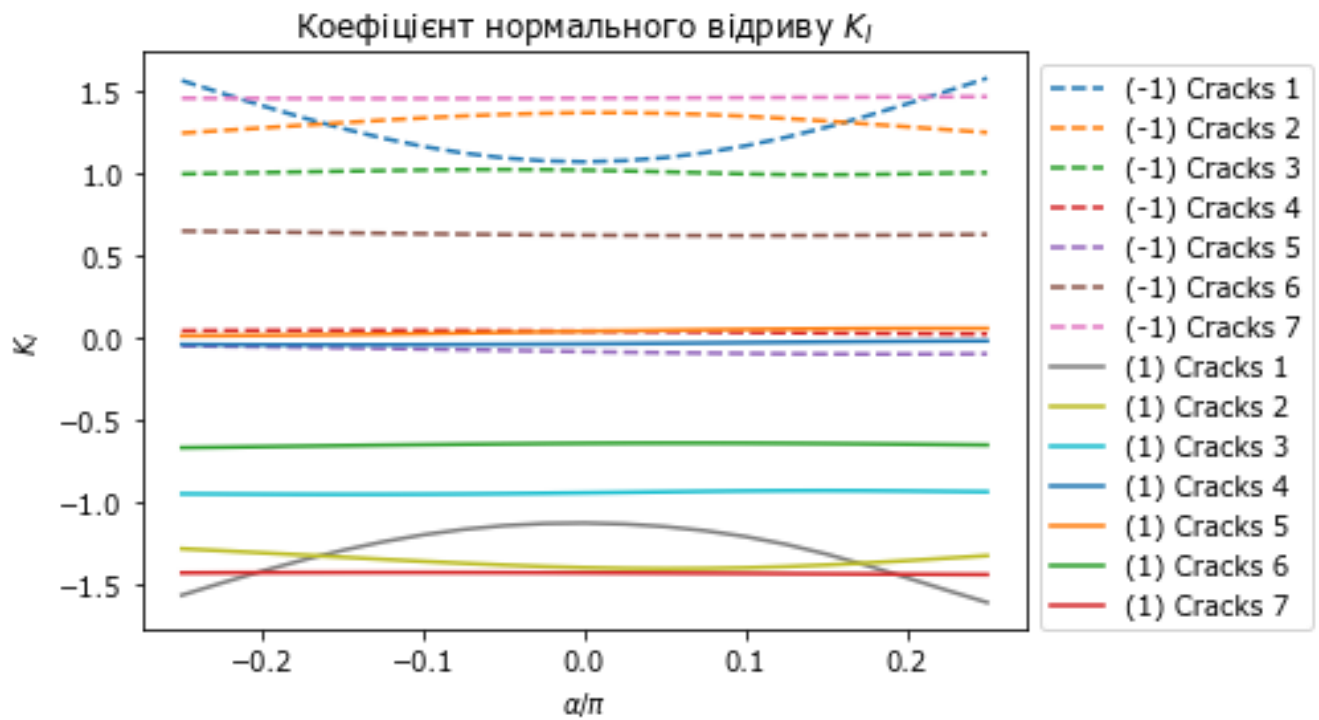


Рисунок 16 Коефіцієнт нормального відриву K_I

α/π	(-1) crack (1) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (1) ₃	(-1) crack (2) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (2) ₃	(-1) crack (2) ₄	(1) crack (1) ₁	(1) crack (1) ₂	(1) crack (1) ₃	(1) crack (2) ₁	(1) crack (2) ₂	(1) crack (2) ₃	(1) crack (2) ₄	
0	-0.250	-0.498372	-0.087579	0.137709	-0.238334	0.087866	-0.753332	0.036552	0.478990	0.119443	-0.076206	0.238242	-0.046725	0.783325	-0.023894
1	-0.225	-0.492184	-0.088719	0.128427	-0.238311	0.085715	-0.754172	0.037141	0.468145	0.118212	-0.068457	0.238586	-0.044800	0.783990	-0.024602
2	-0.200	-0.473813	-0.090355	0.118484	-0.238632	0.083640	-0.754845	0.037529	0.445502	0.117335	-0.060728	0.239307	-0.042787	0.784427	-0.025070
3	-0.175	-0.443721	-0.092509	0.108076	-0.239283	0.081694	-0.755340	0.037711	0.411887	0.116870	-0.053209	0.240378	-0.040743	0.784629	-0.025289
4	-0.150	-0.402683	-0.095186	0.097494	-0.240241	0.079923	-0.755646	0.037684	0.368471	0.116875	-0.046137	0.241764	-0.038721	0.784597	-0.025258
5	-0.125	-0.351761	-0.098369	0.087136	-0.241472	0.078371	-0.755758	0.037453	0.316717	0.117407	-0.039797	0.243419	-0.036775	0.784333	-0.024984
6	-0.100	-0.292264	-0.102014	0.077509	-0.242938	0.077072	-0.755676	0.037026	0.258291	0.118514	-0.034517	0.245290	-0.034955	0.783846	-0.024475
7	-0.075	-0.225704	-0.106040	0.069230	-0.244590	0.076056	-0.755400	0.036414	0.194951	0.120229	-0.030657	0.247318	-0.033308	0.783148	-0.023747
8	-0.050	-0.153740	-0.110327	0.063025	-0.246379	0.075348	-0.754936	0.035632	0.128397	0.122563	-0.028600	0.249444	-0.031878	0.782254	-0.022818
9	-0.025	-0.078135	-0.114717	0.059720	-0.248253	0.074962	-0.754292	0.034698	0.060121	0.125496	-0.028731	0.251606	-0.030700	0.781182	-0.021709
10	0.000	-0.000697	-0.119023	0.060223	-0.250165	0.074909	-0.753479	0.033632	-0.008712	0.128976	-0.031415	0.253748	-0.029802	0.779953	-0.020445
11	0.025	0.076753	-0.123043	0.065484	-0.252067	0.075191	-0.752513	0.032455	-0.077329	0.132913	-0.036960	0.255820	-0.029207	0.778591	-0.019051
12	0.050	0.152416	-0.126579	0.076423	-0.253923	0.075801	-0.751412	0.031191	-0.145302	0.137181	-0.045572	0.257779	-0.028923	0.777121	-0.017556
13	0.075	0.224537	-0.129458	0.093803	-0.255698	0.076724	-0.750198	0.029866	-0.212355	0.141622	-0.057285	0.259592	-0.028953	0.775575	-0.015987
14	0.100	0.291417	-0.131548	0.117950	-0.257370	0.077936	-0.748901	0.028505	-0.277974	0.146058	-0.071878	0.261238	-0.029284	0.773986	-0.014376
15	0.125	0.351409	-0.132772	0.148238	-0.258917	0.079403	-0.747552	0.027139	-0.340765	0.150290	-0.088761	0.262699	-0.029897	0.772391	-0.012756
16	0.150	0.402926	-0.133114	0.182346	-0.260321	0.081079	-0.746189	0.025800	-0.397734	0.154116	-0.106897	0.263964	-0.030760	0.770834	-0.011167
17	0.175	0.444483	-0.132619	0.215862	-0.261552	0.082912	-0.744855	0.024527	-0.444283	0.157343	-0.124834	0.265014	-0.031840	0.769358	-0.009652
18	0.200	0.474807	-0.131379	0.243423	-0.262576	0.084850	-0.743587	0.023360	-0.475952	0.159812	-0.140979	0.265819	-0.033104	0.768011	-0.008258
19	0.225	0.492993	-0.129521	0.261359	-0.263348	0.086846	-0.742422	0.022334	-0.490981	0.161431	-0.154054	0.266342	-0.034531	0.766831	-0.007029
20	0.250	0.498591	-0.127175	0.269345	-0.263831	0.088863	-0.741385	0.021480	-0.490776	0.162190	-0.163448	0.266549	-0.036101	0.765848	-0.005999

Рисунок 17 Коефіцієнти інтенсивності K_{II} в залежності від зміни положення однієї з тріщин

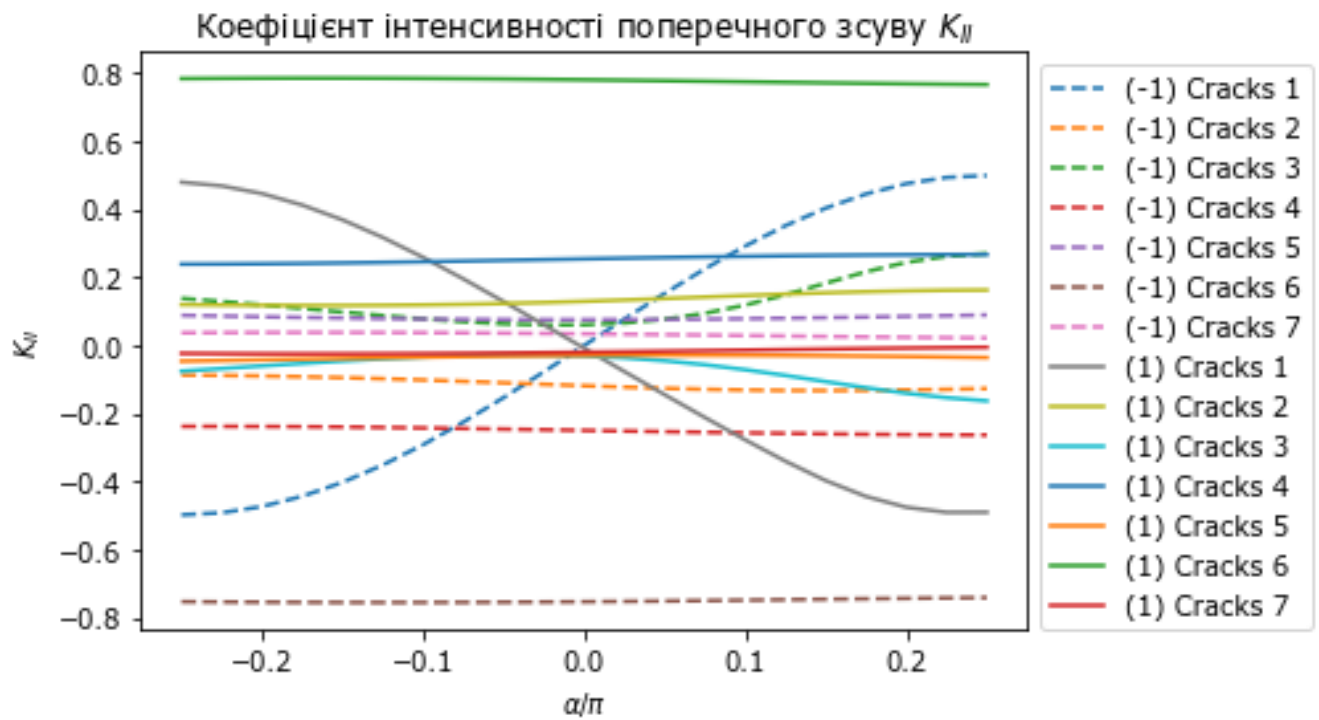


Рисунок 18 Коефіцієнт інтенсивності K_{II}

Для заданої структури механічні поля залишаються майже незмінними для усіх тріщин у нижньому півпросторі, вплив є відчутним лише у найближчому околі тріщини 1, зокрема, найбільших змін зазнають механічні поля поблизу вершини тріщини 2, що відповідає параметру $\beta = -1$.

a/π	(-1) crack (1) ₁	(-1) crack (1) ₂	(-1) crack (1) ₃	(-1) crack (2) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (2) ₃	(-1) crack (2) ₄	(1) crack (1) ₁	(1) crack (1) ₂	(1) crack (1) ₃	(1) crack (2) ₁	(1) crack (2) ₂	(1) crack (2) ₃	
0	-0.250	-1.153566e-07	2.182605e-07	-1.332574e-06	1.987568e-07	0.000013	0.000008	0.000011	3.866509e-07	-2.716533e-07	1.358421e-06	-1.779997e-07	-0.000002	-0.000008
1	-0.225	-1.763388e-07	2.106244e-07	-1.290791e-06	2.557160e-07	0.000013	0.000007	0.000011	4.706463e-07	-2.689885e-07	1.316136e-06	-2.419931e-07	-0.000003	-0.000008
2	-0.200	-2.392729e-07	1.969943e-07	-1.253605e-06	2.787752e-07	0.000013	0.000007	0.000011	5.552378e-07	-2.601508e-07	1.268853e-06	-2.719049e-07	-0.000003	-0.000007
3	-0.175	-3.025282e-07	1.778048e-07	-1.219969e-06	2.673742e-07	0.000014	0.000006	0.000011	6.374625e-07	-2.451134e-07	1.216324e-06	-2.669572e-07	-0.000003	-0.000007
4	-0.150	-3.643286e-07	1.537665e-07	-1.187694e-06	2.219124e-07	0.000015	0.000006	0.000011	7.140400e-07	-2.240819e-07	1.158269e-06	-2.274471e-07	-0.000004	-0.000008
5	-0.125	-4.228076e-07	1.258406e-07	-1.153347e-06	1.437251e-07	0.000015	0.000006	0.000011	7.813266e-07	-1.975294e-07	1.094516e-06	-1.547177e-07	-0.000004	-0.000008
6	-0.100	-4.760802e-07	9.518283e-08	-1.112325e-06	3.500701e-08	0.000016	0.000006	0.000011	8.352939e-07	-1.662059e-07	1.025195e-06	-5.107375e-08	-0.000005	-0.000008
7	-0.075	-5.223513e-07	6.304879e-08	-1.059305e-06	-1.013027e-07	0.000016	0.000005	0.000011	8.716582e-07	-1.311320e-07	9.510057e-07	8.036845e-08	-0.000005	-0.000008
8	-0.050	-5.600552e-07	3.068619e-08	-9.892617e-07	-2.616761e-07	0.000017	0.000005	0.000011	8.863352e-07	-9.356011e-08	8.735229e-07	2.358682e-07	-0.000006	-0.000008
9	-0.025	-5.880241e-07	-7.746623e-10	-8.992512e-07	-4.421747e-07	0.000018	0.000005	0.000011	8.764247e-07	-5.490243e-08	7.954868e-07	4.112759e-07	-0.000006	-0.000008
10	0.000	-6.056569e-07	-3.041181e-08	-7.908535e-07	-6.386201e-07	0.000018	0.000005	0.000011	8.417607e-07	-1.663269e-08	7.209764e-07	6.022517e-07	-0.000007	-0.000008
11	0.025	-6.130427e-07	-5.757009e-08	-6.726258e-07	-8.467469e-07	0.000019	0.000005	0.000010	7.866815e-07	1.984065e-08	6.553065e-07	8.044511e-07	-0.000007	-0.000008
12	0.050	-6.109615e-07	-8.189286e-08	-5.611467e-07	-1.062297e-06	0.000019	0.000005	0.000010	7.209956e-07	5.330717e-08	6.044741e-07	1.013657e-06	-0.000008	-0.000008
13	0.075	-6.006963e-07	-1.033493e-07	-4.787362e-07	-1.281030e-06	0.000020	0.000005	0.000010	6.586156e-07	8.288958e-08	5.740679e-07	1.225810e-06	-0.000008	-0.000008
14	0.100	-5.836262e-07	-1.222536e-07	-4.466915e-07	-1.498589e-06	0.000020	0.000005	0.000010	6.127735e-07	1.081364e-07	5.677901e-07	1.436891e-06	-0.000009	-0.000007
15	0.125	-5.607225e-07	-1.392182e-07	-4.757474e-07	-1.710204e-06	0.000020	0.000006	0.000010	5.890380e-07	1.290264e-07	5.861099e-07	1.642605e-06	-0.000009	-0.000007
16	0.150	-5.322166e-07	-1.549316e-07	-5.595352e-07	-1.910274e-06	0.000021	0.000006	0.000010	5.809180e-07	1.458170e-07	6.258566e-07	1.837920e-06	-0.000009	-0.000007
17	0.175	-4.977917e-07	-1.696776e-07	-6.779833e-07	-2.092158e-06	0.000021	0.000006	0.000010	5.739027e-07	1.587079e-07	6.813594e-07	2.016749e-06	-0.000009	-0.000008
18	0.200	-4.573340e-07	-1.828544e-07	-8.102306e-07	-2.248740e-06	0.000021	0.000007	0.000010	5.568594e-07	1.675286e-07	7.467145e-07	2.172368e-06	-0.000010	-0.000008
19	0.225	-4.116941e-07	-1.929979e-07	-9.448852e-07	-2.373837e-06	0.000021	0.000007	0.000010	5.290542e-07	1.717404e-07	8.176130e-07	2.298736e-06	-0.000010	-0.000008
20	0.250	-3.627806e-07	-1.984489e-07	-1.078358e-06	-2.463467e-06	0.000020	0.000007	0.000010	4.957183e-07	1.708023e-07	8.915215e-07	2.391795e-06	-0.000010	-0.000008

Рисунок 19 Коефіцієнти інтенсивності K_D в залежності від зміни положення однієї з тріщин

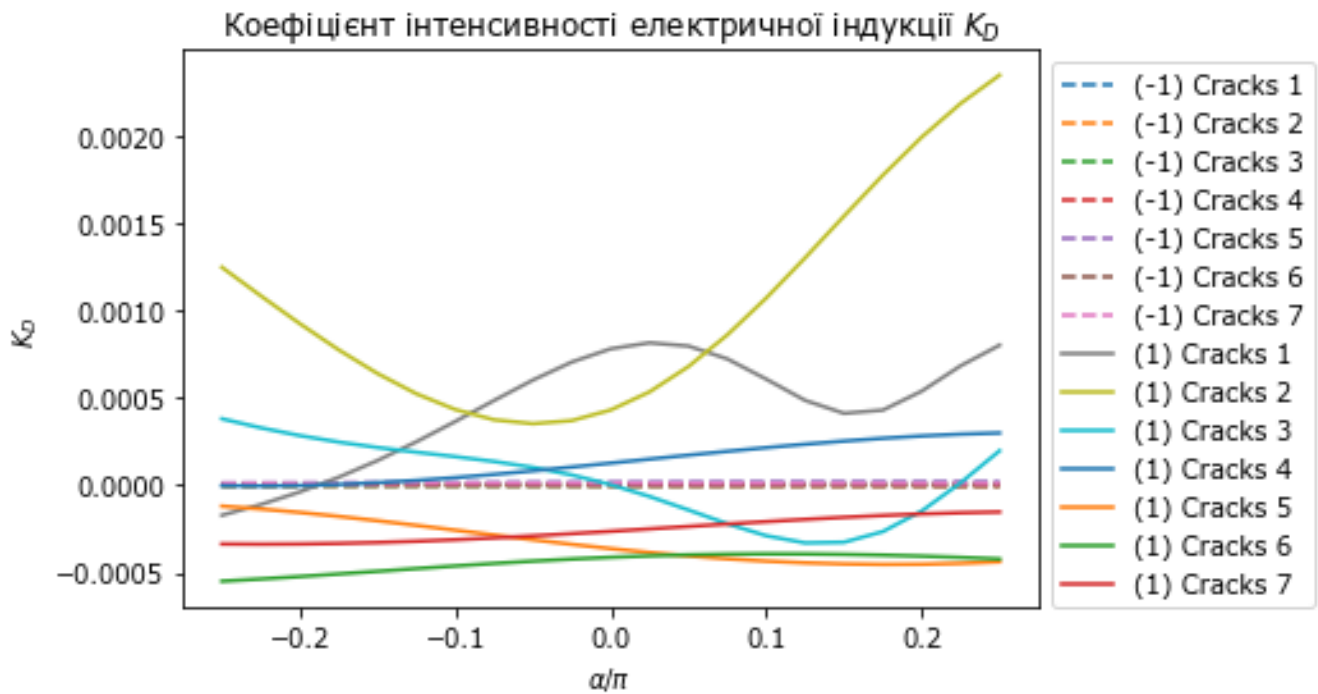


Рисунок 20 Коефіцієнт інтенсивності K_D

a/π	(-1) crack (1) ₁	(-1) crack (1) ₂	(-1) crack (1) ₃	(-1) crack (2) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (2) ₃	(-1) crack (2) ₄	(1) crack (1) ₁	(1) crack (1) ₂	(1) crack (1) ₃	(1) crack (2) ₁	(1) crack (2) ₂	(1) crack (2) ₃	(1) crack (2) ₄	
0	-0.250	-0.000040	0.000028	-0.000793	-0.000017	0.000677	0.000492	0.000606	-0.000172	0.001249	0.000381	-0.000002	-0.000119	-0.000550	-0.000336
1	-0.225	-0.000086	0.000105	-0.000727	-0.000014	0.000698	0.000483	0.000608	-0.000111	0.001085	0.000329	-0.000004	-0.000136	-0.000537	-0.000337
2	-0.200	-0.000132	0.000169	-0.000682	-0.000015	0.000720	0.000472	0.000607	-0.000038	0.000926	0.000285	-0.000002	-0.000156	-0.000523	-0.000336
3	-0.175	-0.000177	0.000217	-0.000661	-0.000019	0.000744	0.000460	0.000605	0.000045	0.000776	0.000248	0.000005	-0.000178	-0.000508	-0.000333
4	-0.150	-0.000220	0.000243	-0.000663	-0.000027	0.000769	0.000448	0.000601	0.000141	0.000640	0.000216	0.000015	-0.000203	-0.000493	-0.000328
5	-0.125	-0.000260	0.000245	-0.000686	-0.000038	0.000795	0.000434	0.000596	0.000249	0.000524	0.000190	0.000028	-0.000230	-0.000477	-0.000321
6	-0.100	-0.000296	0.000218	-0.000725	-0.000051	0.000821	0.000421	0.000589	0.000365	0.000434	0.000164	0.000044	-0.000257	-0.000462	-0.000312
7	-0.075	-0.000329	0.000161	-0.000772	-0.000068	0.000846	0.000408	0.000581	0.000486	0.000375	0.000136	0.000062	-0.000285	-0.000448	-0.000302
8	-0.050	-0.000357	0.000073	-0.000815	-0.000086	0.000869	0.000395	0.000571	0.000603	0.000353	0.000102	0.000083	-0.000312	-0.000435	-0.000290
9	-0.025	-0.000380	-0.000043	-0.000841	-0.000105	0.000891	0.000384	0.000561	0.000706	0.000371	0.000059	0.000104	-0.000338	-0.000423	-0.000277
10	0.000	-0.000397	-0.000183	-0.000836	-0.000126	0.000910	0.000373	0.000550	0.000782	0.000431	0.000004	0.000127	-0.000363	-0.000413	-0.000264
11	0.025	-0.000409	-0.000340	-0.000787	-0.000147	0.000927	0.000364	0.000539	0.000816	0.000535	-0.000064	0.000150	-0.000385	-0.000404	-0.000250
12	0.050	-0.000414	-0.000505	-0.000688	-0.000168	0.000940	0.000357	0.000528	0.000798	0.000680	-0.000142	0.000172	-0.000405	-0.000398	-0.000236
13	0.075	-0.000413	-0.000671	-0.000543	-0.000189	0.000950	0.000351	0.000516	0.000724	0.000862	-0.000221	0.000194	-0.000421	-0.000394	-0.000222
14	0.100	-0.000408	-0.000828	-0.000376	-0.000210	0.000957	0.000348	0.000505	0.000608	0.001073	-0.000289	0.000215	-0.000434	-0.000393	-0.000208
15	0.125	-0.000400	-0.000968	-0.000238	-0.000229	0.000959	0.000346	0.000494	0.000486	0.001303	-0.000330	0.000235	-0.000444	-0.000393	-0.000195
16	0.150	-0.000394	-0.001086	-0.000195	-0.000246	0.000959	0.000345	0.000484	0.000412	0.001542	-0.000326	0.000253	-0.000451	-0.000396	-0.000184
17	0.175	-0.000392	-0.001177	-0.000305	-0.000262	0.000955	0.000347	0.000475	0.000431	0.001777	-0.000265	0.000269	-0.000453	-0.000400	-0.000173
18	0.200	-0.000397	-0.001241	-0.000571	-0.000276	0.000947	0.000349	0.000468	0.000540	0.001995	-0.000147	0.000282	-0.000452	-0.000406	-0.000164
19	0.225	-0.000406	-0.001279	-0.000930	-0.000287	0.000936	0.000354	0.000462	0.000685	0.002187	0.000015	0.000293	-0.000447	-0.000413	-0.000157
20	0.250	-0.000416	-0.001295	-0.001299	-0.000294	0.000922	0.000360	0.000458	0.000802	0.002349	0.000198	0.000300	-0.000438	-0.000422	-0.000153

Рисунок 21 Коефіцієнти інтенсивності K_B в залежності від зміни положення однієї з тріщин

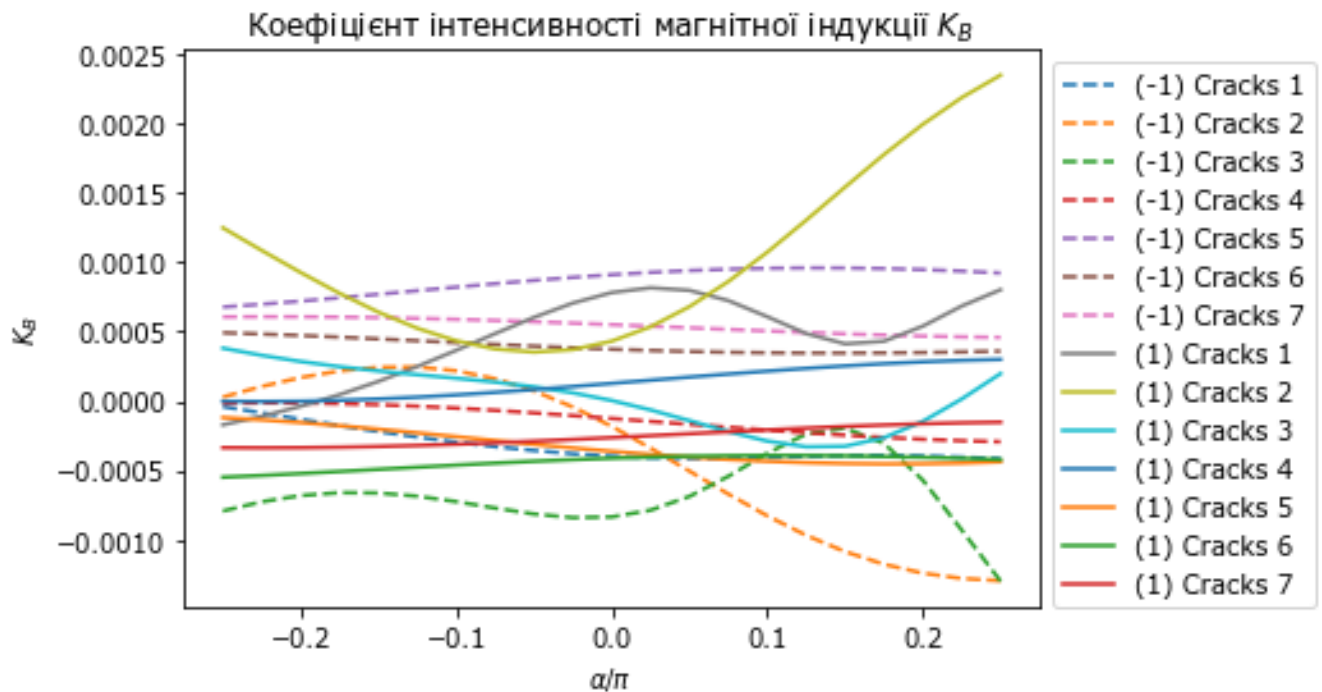


Рисунок 22 Коефіцієнт інтенсивності K_B

З рисунків 19-22 можна зробити такі висновки:

- зміни у конфігурації тріщини у верхній півплощині призводить до змін у електричній та магнітній індукціях для дефектів у нижній півплощині;
- у складеному середовищі на ефекти зв'язаності магнетоелектропружних полів впливають як фізичні характеристики матеріалів, що складають середовище, так і дефекти, що наявні в середовищі, їх кількість та розташування.

	a/π	(-1) crack (1) ₁	(-1) crack (1) ₂	(-1) crack (1) ₃	(-1) crack (1) ₄	(-1) crack (2) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (2) ₃	(-1) crack (2) ₄	(1) crack (1) ₁	(1) crack (1) ₂	(1) crack (1) ₃	(1) crack (2) ₁	(1) crack (2) ₂	(1) crack (2) ₃	(1) crack (2) ₄
0	-0.250	-0.167283	0.142413	0.035375	0.002446	0.000888	0.010054	0.014755	0.165886	-0.147460	-0.027522	-0.002443	-0.000472	-0.010420	-0.014491	
1	-0.225	-0.153644	0.144179	0.034408	0.002447	0.000866	0.010044	0.014748	0.151919	-0.148816	-0.026670	-0.002448	-0.000453	-0.010406	-0.014483	
2	-0.200	-0.139048	0.146010	0.033371	0.002452	0.000845	0.010032	0.014743	0.137034	-0.150244	-0.025817	-0.002457	-0.000432	-0.010389	-0.014477	
3	-0.175	-0.123590	0.147868	0.032284	0.002459	0.000826	0.010018	0.014739	0.121343	-0.151718	-0.024982	-0.002468	-0.000412	-0.010370	-0.014472	
4	-0.150	-0.107370	0.149705	0.031175	0.002469	0.000808	0.010002	0.014736	0.104963	-0.153214	-0.024190	-0.002482	-0.000391	-0.010350	-0.014469	
5	-0.125	-0.090493	0.151468	0.030084	0.002481	0.000792	0.009985	0.014736	0.088020	-0.154700	-0.023473	-0.002498	-0.000372	-0.010328	-0.014468	
6	-0.100	-0.073069	0.153099	0.029063	0.002495	0.000779	0.009967	0.014736	0.070638	-0.156142	-0.022865	-0.002516	-0.000353	-0.010306	-0.014468	
7	-0.075	-0.055206	0.154533	0.028173	0.002510	0.000769	0.009948	0.014739	0.052942	-0.157502	-0.022406	-0.002535	-0.000337	-0.010284	-0.014470	
8	-0.050	-0.037015	0.155707	0.027488	0.002526	0.000761	0.009929	0.014743	0.035044	-0.158738	-0.022139	-0.002554	-0.000322	-0.010263	-0.014474	
9	-0.025	-0.018604	0.156561	0.027097	0.002542	0.000757	0.009911	0.014748	0.017041	-0.159804	-0.022107	-0.002573	-0.000310	-0.010242	-0.014480	
10	0.000	-0.000080	0.157043	0.027099	0.002559	0.000757	0.009894	0.014755	-0.000997	-0.160654	-0.022354	-0.002592	-0.000301	-0.010224	-0.014487	
11	0.025	0.018455	0.157119	0.027602	0.002575	0.000760	0.009878	0.014762	-0.019033	-0.161244	-0.022916	-0.002609	-0.000295	-0.010207	-0.014495	
12	0.050	0.036899	0.156773	0.028719	0.002590	0.000766	0.009863	0.014771	-0.037060	-0.161534	-0.023823	-0.002625	-0.000292	-0.010192	-0.014504	
13	0.075	0.055154	0.156009	0.030550	0.002605	0.000775	0.009851	0.014781	-0.055100	-0.161494	-0.025084	-0.002640	-0.000293	-0.010180	-0.014515	
14	0.100	0.073119	0.154855	0.033154	0.002618	0.000788	0.009840	0.014791	-0.073175	-0.161108	-0.026680	-0.002653	-0.000296	-0.010171	-0.014526	
15	0.125	0.090692	0.153361	0.036486	0.002630	0.000802	0.009832	0.014801	-0.091247	-0.160376	-0.028553	-0.002663	-0.000302	-0.010165	-0.014538	
16	0.150	0.107760	0.151597	0.040305	0.002640	0.000819	0.009826	0.014812	-0.109127	-0.159324	-0.030590	-0.002672	-0.000311	-0.010161	-0.014550	
17	0.175	0.124198	0.149650	0.044119	0.002649	0.000838	0.009823	0.014823	-0.126407	-0.157998	-0.032628	-0.002679	-0.000322	-0.010161	-0.014562	
18	0.200	0.139875	0.147614	0.047304	0.002657	0.000857	0.009822	0.014833	-0.142566	-0.156465	-0.034481	-0.002684	-0.000335	-0.010164	-0.014574	
19	0.225	0.154667	0.145579	0.049412	0.002662	0.000878	0.009824	0.014843	-0.157256	-0.154800	-0.035998	-0.002687	-0.000349	-0.010170	-0.014585	
20	0.250	0.168468	0.143612	0.050371	0.002664	0.000898	0.009829	0.014852	-0.170444	-0.153075	-0.037099	-0.002687	-0.000365	-0.010179	-0.014596	

Рисунок 23 Коефіцієнти інтенсивності K_E в залежності від зміни положення однієї з тріщин

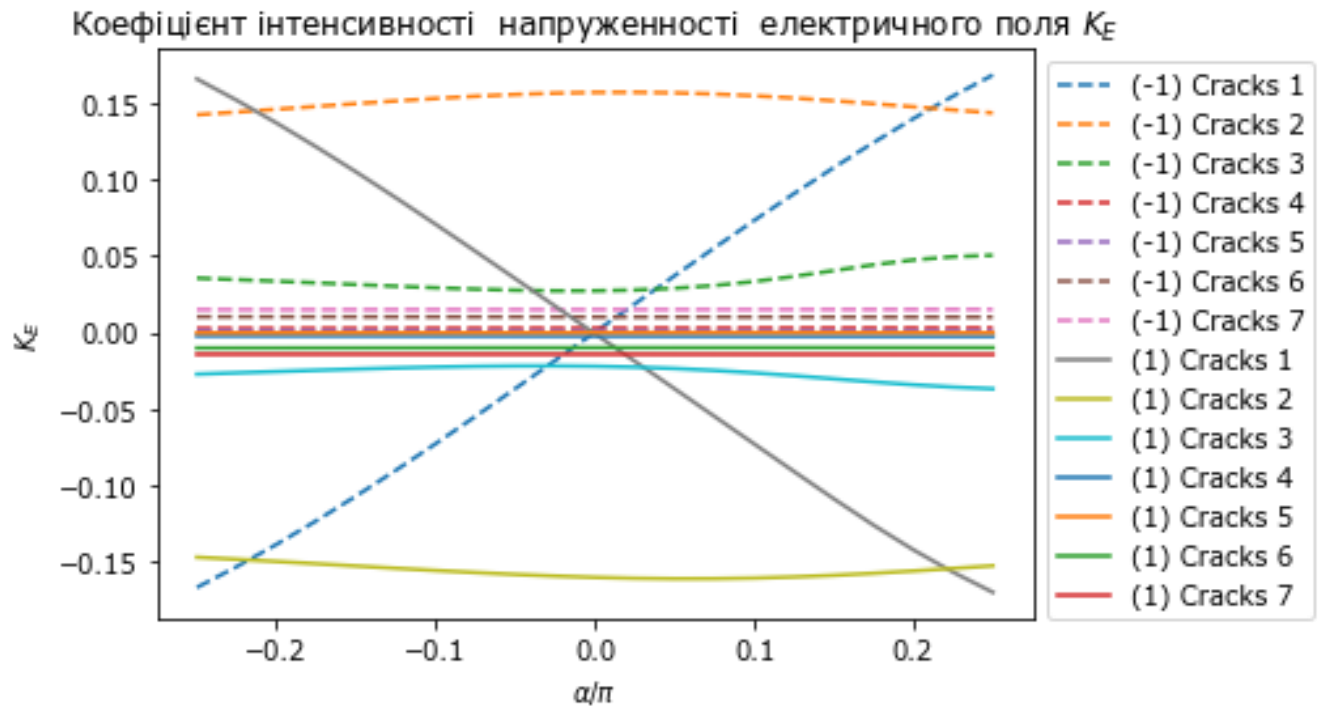


Рисунок 24 Коефіцієнт інтенсивності K_E

a/π	(-1) crack (1) 1	(-1) crack (1) 2	(-1) crack (1) 3	(-1) crack (2) 1	(-1) crack (2) 2	(-1) crack (2) 3	(-1) crack (2) 4	(1) crack (1) 1	(1) crack (1) 2	(1) crack (1) 3	(1) crack (2) 1	(1) crack (2) 2	(1) crack (2) 3	(1) crack (2)	
0	-0.250	-4.511479e-04	0.000384	0.000095	0.000034	0.000012	0.000139	0.000204	0.000447	-0.000398	-0.000074	-0.000034	-0.000007	-0.000144	-0.00021
1	-0.225	-4.143654e-04	0.000389	0.000093	-0.000034	-0.000006	-0.000144	-0.000200	0.000410	-0.000401	-0.000072	-0.000034	-0.000006	-0.000144	-0.00021
2	-0.200	-3.750024e-04	0.000394	0.000090	-0.000034	-0.000006	-0.000144	-0.000200	0.000370	-0.000405	-0.000070	-0.000034	-0.000006	-0.000144	-0.00021
3	-0.175	-3.333132e-04	0.000399	0.000087	-0.000034	-0.000006	-0.000143	-0.000200	0.000327	-0.000409	-0.000067	-0.000034	-0.000006	-0.000143	-0.00021
4	-0.150	-2.895688e-04	0.000404	0.000084	-0.000034	-0.000005	-0.000143	-0.000200	0.000283	-0.000413	-0.000065	-0.000034	-0.000005	-0.000143	-0.00021
5	-0.125	-2.440534e-04	0.000408	0.000081	-0.000035	-0.000005	-0.000143	-0.000200	0.000237	-0.000417	-0.000063	-0.000035	-0.000005	-0.000143	-0.00021
6	-0.100	-1.970599e-04	0.000413	0.000078	-0.000035	-0.000005	-0.000143	-0.000200	0.000191	-0.000421	-0.000062	-0.000035	-0.000005	-0.000143	-0.00021
7	-0.075	-1.488851e-04	0.000417	0.000076	-0.000035	-0.000005	-0.000142	-0.000200	0.000143	-0.000425	-0.000060	-0.000035	-0.000005	-0.000142	-0.00021
8	-0.050	-9.982550e-05	0.000420	0.000074	-0.000035	-0.000004	-0.000142	-0.000200	0.000095	-0.000428	-0.000060	-0.000035	-0.000004	-0.000142	-0.00021
9	-0.025	-5.017351e-05	0.000422	0.000073	-0.000036	-0.000004	-0.000142	-0.000200	0.000046	-0.000431	-0.000060	-0.000036	-0.000004	-0.000142	-0.00021
10	0.000	-2.151645e-07	0.000424	0.000073	-0.000036	-0.000004	-0.000141	-0.000200	-0.000003	-0.000433	-0.000060	-0.000036	-0.000004	-0.000141	-0.00021
11	0.025	4.977104e-05	0.000424	0.000074	-0.000036	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000051	-0.000435	-0.000062	-0.000036	-0.000004	-0.000141	-0.00021
12	0.050	9.951358e-05	0.000423	0.000077	-0.000036	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000100	-0.000436	-0.000064	-0.000036	-0.000004	-0.000141	-0.00021
13	0.075	1.487452e-04	0.000421	0.000082	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000149	-0.000436	-0.000068	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.00021
14	0.100	1.971972e-04	0.000418	0.000089	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000197	-0.000434	-0.000072	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.00021
15	0.125	2.445899e-04	0.000414	0.000098	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000246	-0.000433	-0.000077	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.00021
16	0.150	2.906197e-04	0.000409	0.000109	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000294	-0.000430	-0.000082	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.00021
17	0.175	3.349516e-04	0.000404	0.000119	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.000201	-0.000341	-0.000426	-0.000088	-0.000037	-0.000004	-0.000141	-0.00021
18	0.200	3.772318e-04	0.000398	0.000128	-0.000037	-0.000005	-0.000141	-0.000202	-0.000384	-0.000422	-0.000093	-0.000037	-0.000005	-0.000141	-0.00021
19	0.225	4.171241e-04	0.000393	0.000133	-0.000037	-0.000005	-0.000141	-0.000202	-0.000424	-0.000417	-0.000097	-0.000037	-0.000005	-0.000141	-0.00021
20	0.250	4.543433e-04	0.000387	0.000136	-0.000037	-0.000005	-0.000141	-0.000202	-0.000460	-0.000413	-0.000100	-0.000037	-0.000005	-0.000141	-0.00021

Рисунок 25 Коефіцієнти інтенсивності K_H в залежності від зміни положення однієї з тріщин

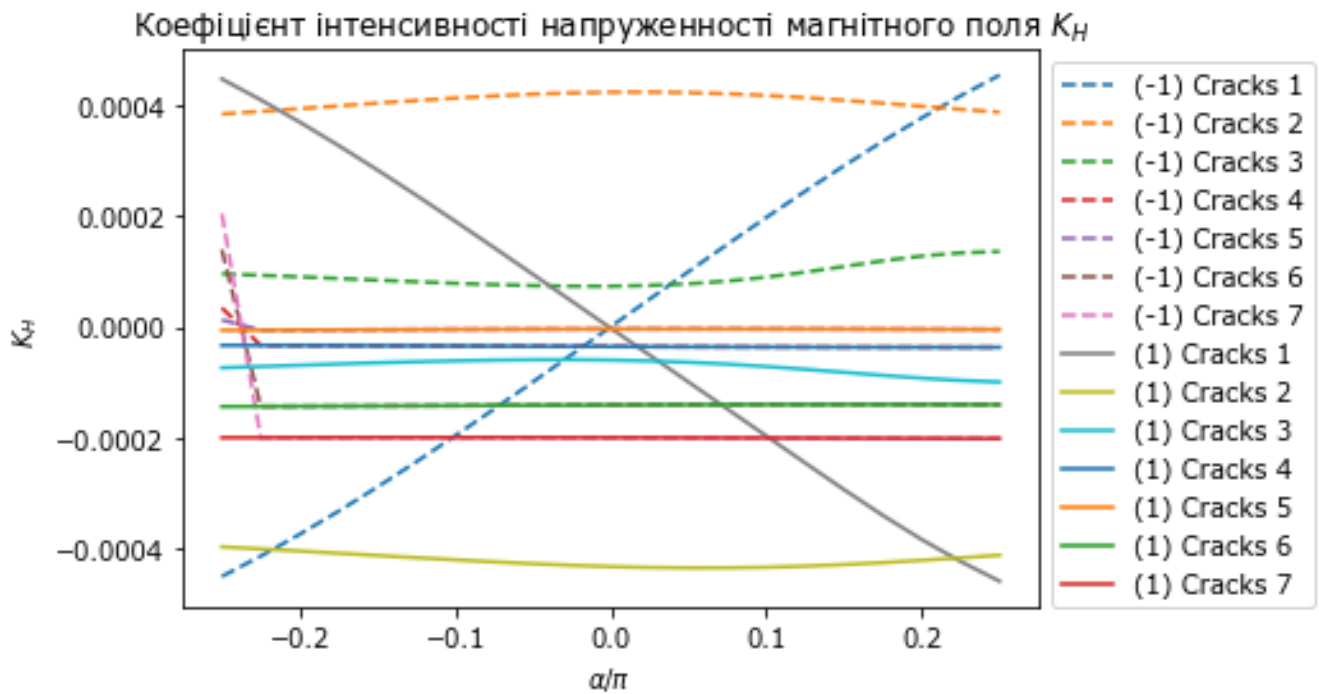


Рисунок 26 Коефіцієнт інтенсивності K_H

Індукції електричних та магнітних полів також терплять зміни найбільш відчутні у вершинах тріщин, що найменш віддалені від тріщини параметри якої змінюються.

a/π	(-1) crack ⁽¹⁾ ₁	(-1) crack ⁽¹⁾ ₂	(-1) crack ⁽¹⁾ ₃	(-1) crack ⁽²⁾ ₁	(-1) crack ⁽²⁾ ₂	(-1) crack ⁽²⁾ ₃	(-1) crack ⁽²⁾ ₄	(1) crack ⁽¹⁾ ₁	(1) crack ⁽¹⁾ ₂	(1) crack ⁽¹⁾ ₃	(1) crack ⁽²⁾ ₁	(1) crack ⁽²⁾ ₂	(1) crack ⁽²⁾ ₃	(1) crack ⁽²⁾ ₄	
0	-0.250	0.000039	0.000025	0.000010	0.001996	0.000257	0.033727	0.072645	0.000039	0.000026	0.000009	3.349862e-07	1.333262e-08	0.000006	0.000012
1	-0.225	0.000035	0.000025	0.000010	0.001999	0.000244	0.033663	0.072578	0.000034	0.000027	0.000009	3.364384e-07	1.250498e-08	0.000006	0.000012
2	-0.200	0.000030	0.000026	0.000010	0.002006	0.000232	0.033583	0.072524	0.000030	0.000027	0.000009	3.387855e-07	1.178248e-08	0.000006	0.000012
3	-0.175	0.000026	0.000027	0.000010	0.002018	0.000220	0.033488	0.072486	0.000026	0.000028	0.000009	3.419532e-07	1.121656e-08	0.000006	0.000012
4	-0.150	0.000022	0.000027	0.000010	0.002034	0.000210	0.033381	0.072463	0.000022	0.000029	0.000009	3.458476e-07	1.085386e-08	0.000006	0.000012
5	-0.125	0.000019	0.000028	0.000010	0.002054	0.000201	0.033266	0.072456	0.000019	0.000029	0.000008	3.503574e-07	1.073156e-08	0.000006	0.000012
6	-0.100	0.000016	0.000029	0.000010	0.002077	0.000193	0.033145	0.072464	0.000016	0.000030	0.000008	3.553573e-07	1.087354e-08	0.000006	0.000012
7	-0.075	0.000013	0.000029	0.000010	0.002102	0.000187	0.033021	0.072488	0.000014	0.000030	0.000008	3.607109e-07	1.128793e-08	0.000006	0.000012
8	-0.050	0.000012	0.000030	0.000010	0.002129	0.000182	0.032898	0.072527	0.000013	0.000031	0.000008	3.662755e-07	1.196617e-08	0.000006	0.000012
9	-0.025	0.000011	0.000030	0.000010	0.002157	0.000179	0.032778	0.072579	0.000012	0.000031	0.000008	3.719073e-07	1.288377e-08	0.000006	0.000012
10	0.000	0.000010	0.000030	0.000010	0.002185	0.000177	0.032663	0.072644	0.000011	0.000031	0.000008	3.774682e-07	1.400272e-08	0.000006	0.000012
11	0.025	0.000011	0.000030	0.000010	0.002213	0.000178	0.032557	0.072720	0.000012	0.000032	0.000008	3.828318e-07	1.527514e-08	0.000006	0.000012
12	0.050	0.000012	0.000030	0.000010	0.002239	0.000180	0.032462	0.072805	0.000013	0.000032	0.000008	3.878901e-07	1.664765e-08	0.000006	0.000012
13	0.075	0.000013	0.000030	0.000010	0.002264	0.000184	0.032378	0.072898	0.000014	0.000032	0.000008	3.925586e-07	1.806577e-08	0.000006	0.000012
14	0.100	0.000016	0.000029	0.000010	0.002287	0.000189	0.032308	0.072998	0.000017	0.000032	0.000008	3.967771e-07	1.947730e-08	0.000006	0.000012
15	0.125	0.000019	0.000029	0.000010	0.002308	0.000196	0.032253	0.073102	0.000020	0.000031	0.000008	4.005061e-07	2.083370e-08	0.000006	0.000012
16	0.150	0.000022	0.000028	0.000010	0.002326	0.000205	0.032214	0.073209	0.000023	0.000031	0.000008	4.037118e-07	2.208874e-08	0.000006	0.000012
17	0.175	0.000026	0.000027	0.000010	0.002342	0.000215	0.032192	0.073316	0.000027	0.000030	0.000009	4.063436e-07	2.319541e-08	0.000006	0.000012
18	0.200	0.000031	0.000026	0.000011	0.002355	0.000226	0.032187	0.073420	0.000032	0.000030	0.000009	4.083139e-07	2.410578e-08	0.000006	0.000012
19	0.225	0.000035	0.000026	0.000011	0.002364	0.000237	0.032202	0.073518	0.000036	0.000029	0.000009	4.095064e-07	2.477810e-08	0.000006	0.000012
20	0.250	0.000040	0.000025	0.000011	0.002368	0.000250	0.032235	0.073606	0.000041	0.000029	0.000009	4.098109e-07	2.518787e-08	0.000006	0.000012

Рисунок 27 Енергетичний критерій руйнування γ в залежності від зміни положення однієї з тріщин

Енергетичний критерій руйнування в цілому змінюється несуттєво.

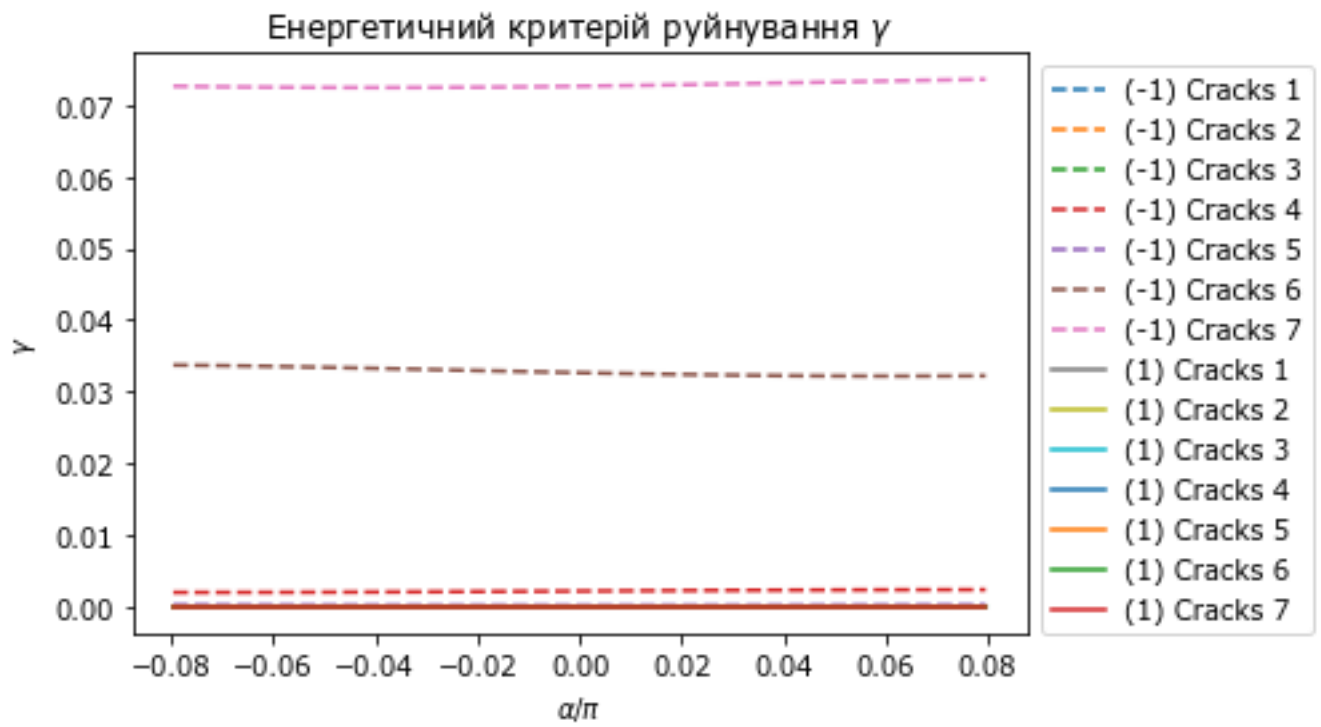


Рисунок 28 Енергетичний критерій руйнування γ

4.3 Складений простір при матеріалі M2 у верхній та матеріалі M1 у нижній півплощині

Розглянемо конфігурацію з попередньому пп. 4.2 (Рисунок 11), але для випадку, коли матеріали півпросторів оберемо у зворотній композиції.

	вершина $\beta = 1$	ρ_1	h	a/π	$K_I(1)$	$K_{II}(1)$	$K_D(1)$	$K_B(1)$	$K_E(1)$	$K_H(1)$	$\gamma(1)$
crack ⁽¹⁾ 1	3.458000+1.443000j	0.351	3.788000+1.323000j	0.889	-1.232184	0.323270	-1.266567e-05	-0.000349	-0.007328	-0.000101	7.687753e-06
crack ⁽¹⁾ 2	5.395000+1.644000j	0.156	5.422000+1.491000j	0.556	-1.406699	0.114016	-1.979982e-07	0.000036	-0.014199	-0.000196	1.138982e-05
crack ⁽¹⁾ 3	4.893000+1.634000j	0.241	4.655000+1.592000j	0.056	-0.983809	-0.026908	2.005594e-05	0.000622	-0.001994	-0.000028	4.192099e-06
crack ⁽²⁾ 1	5.224000-0.800000j	0.141	5.363000-0.824000j	0.944	-0.011928	0.058317	2.049846e-08	-0.000005	-0.006812	-0.000018	5.621185e-08
crack ⁽²⁾ 2	5.221000-1.342000j	0.273	4.947000-1.342000j	0.000	0.006198	-0.006414	-1.406443e-07	-0.000091	-0.000734	-0.000002	1.255153e-09
crack ⁽²⁾ 3	3.297000-1.482000j	0.196	3.447000-1.608000j	0.778	-0.144324	0.186335	1.628088e-07	-0.000288	-0.026961	-0.000073	8.820433e-07
crack ⁽²⁾ 4	4.315000-1.545000j	0.159	4.315000-1.703000j	0.500	-0.323686	-0.006422	-1.059478e-07	-0.000106	-0.037055	-0.000100	1.663338e-06

Рисунок 29 Значення коефіцієнтів в точці $\beta=1$

	вершина $\ln \beta = -1$	ρ_1	h	a/π	$K_I(-1)$	$K_{II}(-1)$	$K_D(-1)$	$K_B(-1)$	$K_E(-1)$	$K_H(-1)$	$\gamma(-1)$
crack ⁽¹⁾ 1	4.118000+1.202000j	0.351	3.788000+1.323000j	0.889	1.260328	-0.285388	2.608909e-05	0.000572	0.007066	0.000098	7.845216e-06
crack ⁽¹⁾ 2	5.449000+1.338000j	0.156	5.422000+1.491000j	0.556	1.378721	-0.104261	-8.210936e-07	0.000059	0.013903	0.000192	1.092919e-05
crack ⁽¹⁾ 3	4.417000+1.550000j	0.241	4.655000+1.592000j	0.056	1.043634	0.087202	-3.224776e-05	-0.000822	0.002699	0.000037	4.799815e-06
crack ⁽²⁾ 1	5.501000-0.849000j	0.141	5.363000-0.824000j	0.944	0.011543	-0.057590	-1.539340e-08	-0.000009	0.006722	0.000018	-6.050296e-11
crack ⁽²⁾ 2	4.674000-1.342000j	0.273	4.947000-1.342000j	0.000	-0.010255	0.009802	2.780942e-07	0.000183	0.001122	0.000003	5.579517e-12
crack ⁽²⁾ 3	3.597000-1.734000j	0.196	3.447000-1.608000j	0.778	0.134233	-0.173032	-9.424960e-08	0.000211	0.025052	0.000068	-8.356496e-10
crack ⁽²⁾ 4	4.315000-1.862000j	0.159	4.315000-1.703000j	0.500	0.337719	0.009966	9.611155e-08	0.000297	0.038662	0.000104	-1.995778e-09

Рисунок 30 Значення коефіцієнтів в точці $\beta=1$

Порівняння з результатами рисунків 12-13 приводить до такого висновку, що вплив комбінації матеріалів, що складають композицію – суттєвий.

a/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	(-1) crack (2) 1	(-1) crack (2) 2	(-1) crack 3	(-1) crack (2) 4	(1) crack (1) 1	(1) crack (1) 2	(1) crack (1) 3	(1) crack (2) 1	(1) crack (2) 2	(1) crack (2) 3	(1) crack (2) 4	
0	-0.250	1.615696	1.324754	1.003527	0.010076	-0.001355	0.141922	0.338579	-1.598092	-1.352022	-0.973567	-0.011047	0.001482	-0.151740	-0.324539
1	-0.225	1.537050	1.334923	1.008403	0.010900	-0.002057	0.140480	0.338317	-1.523655	-1.361413	-0.975129	-0.011797	0.001445	-0.150217	-0.324268
2	-0.200	1.460480	1.345213	1.014583	0.011492	-0.003209	0.139025	0.338098	-1.453103	-1.371272	-0.976995	-0.012297	0.001824	-0.148741	-0.324044
3	-0.175	1.387872	1.355368	1.021911	0.011835	-0.004771	0.137590	0.337926	-1.388399	-1.381392	-0.979032	-0.012534	0.002605	-0.147342	-0.323872
4	-0.150	1.321009	1.365109	1.030120	0.011921	-0.006693	0.136207	0.337805	-1.331247	-1.391531	-0.981074	-0.012501	0.003758	-0.146052	-0.323755
5	-0.125	1.261517	1.374132	1.038805	0.011748	-0.008915	0.134907	0.337735	-1.282976	-1.401421	-0.982931	-0.012204	0.005245	-0.144898	-0.323695
6	-0.100	1.210821	1.382127	1.047402	0.011325	-0.011371	0.133722	0.337719	-1.244425	-1.410764	-0.984403	-0.011654	0.007018	-0.143904	-0.323692
7	-0.075	1.170114	1.388782	1.055193	0.010665	-0.013990	0.132677	0.337756	-1.215862	-1.419248	-0.985301	-0.010871	0.009022	-0.143095	-0.323747
8	-0.050	1.140334	1.393806	1.061343	0.009790	-0.016701	0.131799	0.337844	-1.196985	-1.426555	-0.985483	-0.009880	0.011201	-0.142491	-0.323857
9	-0.025	1.122159	1.396945	1.065024	0.008722	-0.019432	0.131110	0.337983	-1.187068	-1.432381	-0.984884	-0.008711	0.013493	-0.142109	-0.324020
10	0.000	1.116020	1.398004	1.065615	0.007492	-0.022119	0.130628	0.338168	-1.185296	-1.436455	-0.983563	-0.007396	0.015842	-0.141962	-0.324234
11	0.025	1.122116	1.396869	1.062991	0.006128	-0.024703	0.130367	0.338398	-1.191272	-1.438567	-0.981727	-0.005966	0.018194	-0.142057	-0.324494
12	0.050	1.140427	1.393525	1.057766	0.004661	-0.027134	0.130330	0.338668	-1.205487	-1.438590	-0.979731	-0.004454	0.020502	-0.142392	-0.324796
13	0.075	1.170707	1.388073	1.051339	0.003124	-0.029375	0.130517	0.338974	-1.229449	-1.436497	-0.978029	-0.002893	0.022725	-0.142959	-0.325136
14	0.100	1.212441	1.380734	1.045604	0.001550	-0.031393	0.130917	0.339312	-1.265190	-1.432375	-0.977081	-0.001316	0.024827	-0.143740	-0.325508
15	0.125	1.264783	1.371836	1.042327	-0.000021	-0.033159	0.131516	0.339674	-1.314176	-1.426417	-0.977223	0.000242	0.026769	-0.144714	-0.325905
16	0.150	1.326505	1.361791	1.042450	-0.001548	-0.034643	0.132297	0.340053	-1.376115	-1.418906	-0.978559	0.001742	0.028513	-0.145853	-0.326317
17	0.175	1.395990	1.351043	1.045703	-0.002987	-0.035811	0.133240	0.340439	-1.448473	-1.410180	-0.980924	0.003142	0.030017	-0.147130	-0.326733
18	0.200	1.471308	1.340019	1.050795	-0.004297	-0.036625	0.134329	0.340819	-1.527155	-1.400598	-0.983933	0.004403	0.031237	-0.148519	-0.327141
19	0.225	1.550343	1.329091	1.056075	-0.005442	-0.037055	0.135545	0.341184	-1.607916	-1.390504	-0.987109	0.005493	0.032134	-0.149992	-0.327529
20	0.250	1.630920	1.318555	1.060181	-0.006395	-0.037074	0.136868	0.341522	-1.687441	-1.380210	-0.990008	0.006383	0.032680	-0.151519	-0.327884

Рисунок 31 Коефіцієнти інтенсивності K_I в залежності від зміни положення однієї з тріщин

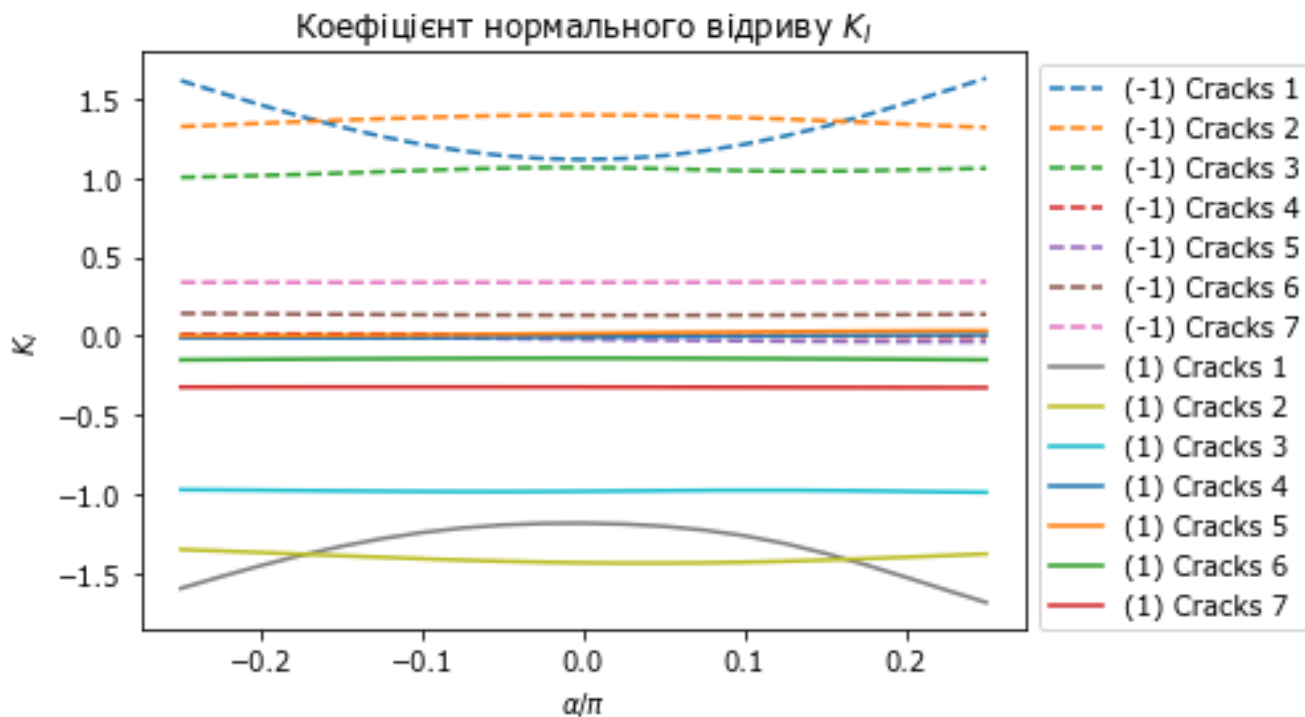


Рисунок 32 Коефіцієнт K_I

a/π	(-1) crack (1) ₁	(-1) crack (1) ₂	(-1) crack (1) ₃	(-1) crack (2) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (2) ₃	(-1) crack (2) ₄	(1) crack (1) ₁	(1) crack (1) ₂	(1) crack (1) ₃	(1) crack (2) ₁	(1) crack (2) ₂	(1) crack (2) ₃	(1) crack (2) ₄	
0	-0.250	-0.506580	-0.095488	0.156604	-0.056216	0.013677	-0.171013	0.009486	0.480624	0.116070	-0.071917	0.055991	-0.010317	0.185525	-0.005859
1	-0.225	-0.499535	-0.095770	0.145352	-0.056124	0.012875	-0.171662	0.009801	0.468835	0.114432	-0.062755	0.056035	-0.009682	0.186018	-0.006210
2	-0.200	-0.480326	-0.096608	0.133380	-0.056189	0.012096	-0.172193	0.010016	0.445377	0.113281	-0.053746	0.056258	-0.008993	0.186361	-0.006453
3	-0.175	-0.449417	-0.098027	0.120771	-0.056407	0.011360	-0.172600	0.010130	0.411221	0.112680	-0.045114	0.056651	-0.008271	0.186550	-0.006584
4	-0.150	-0.407573	-0.100032	0.107697	-0.056770	0.010687	-0.172874	0.010143	0.367715	0.112689	-0.037144	0.057200	-0.007535	0.186584	-0.006605
5	-0.125	-0.355831	-0.102603	0.094459	-0.057265	0.010093	-0.173014	0.010056	0.316501	0.113353	-0.030186	0.057886	-0.006808	0.186466	-0.006516
6	-0.100	-0.295468	-0.105696	0.081541	-0.057873	0.009591	-0.173016	0.009874	0.259403	0.114701	-0.024654	0.058684	-0.006108	0.186199	-0.006324
7	-0.075	-0.227957	-0.109236	0.069676	-0.058574	0.009193	-0.172881	0.009603	0.198226	0.116743	-0.021013	0.059569	-0.005455	0.185787	-0.006035
8	-0.050	-0.154915	-0.113119	0.059914	-0.059346	0.008906	-0.172610	0.009251	0.134511	0.119462	-0.019760	0.060514	-0.004867	0.185240	-0.005657
9	-0.025	-0.078058	-0.117217	0.053646	-0.060165	0.008737	-0.172207	0.008825	0.069268	0.122812	-0.021374	0.061490	-0.004358	0.184565	-0.005199
10	0.000	0.000843	-0.121382	0.052549	-0.061010	0.008690	-0.171676	0.008335	0.002795	0.126718	-0.026260	0.062472	-0.003941	0.183773	-0.004672
11	0.025	0.079988	-0.125458	0.058351	-0.061860	0.008762	-0.171027	0.007791	-0.065244	0.131076	-0.034655	0.063436	-0.003624	0.182877	-0.004087
12	0.050	0.157551	-0.129291	0.072406	-0.062699	0.008952	-0.170272	0.007204	-0.135361	0.135750	-0.046537	0.064366	-0.003412	0.181896	-0.003454
13	0.075	0.231679	-0.132736	0.095133	-0.063513	0.009251	-0.169428	0.006585	-0.207432	0.140577	-0.061541	0.065245	-0.003305	0.180851	-0.002788
14	0.100	0.300492	-0.135671	0.125500	-0.064290	0.009649	-0.168517	0.005948	-0.279837	0.145372	-0.078919	0.066063	-0.003298	0.179766	-0.002101
15	0.125	0.362117	-0.138001	0.160823	-0.065019	0.010130	-0.167562	0.005308	-0.349075	0.149935	-0.097582	0.066810	-0.003384	0.178670	-0.001409
16	0.150	0.414766	-0.139664	0.197145	-0.065686	0.010681	-0.166589	0.004680	-0.410299	0.154072	-0.116235	0.067474	-0.003555	0.177592	-0.000728
17	0.175	0.456865	-0.140633	0.230242	-0.066276	0.011285	-0.165622	0.004079	-0.458768	0.157612	-0.133602	0.068040	-0.003806	0.176560	-0.000076
18	0.200	0.487178	-0.140914	0.256890	-0.066774	0.011930	-0.164685	0.003522	-0.491421	0.160429	-0.148655	0.068494	-0.004130	0.175600	0.000532
19	0.225	0.504887	-0.140545	0.275637	-0.067163	0.012604	-0.163800	0.003022	-0.507512	0.162454	-0.160765	0.068821	-0.004524	0.174738	0.001080
20	0.250	0.509610	-0.139584	0.286716	-0.067430	0.013296	-0.162986	0.002591	-0.508058	0.163674	-0.169720	0.069007	-0.004984	0.173995	0.001555

Рисунок 33 Коефіцієнти інтенсивності K_{II} в залежності від зміни положення однієї з тріщин

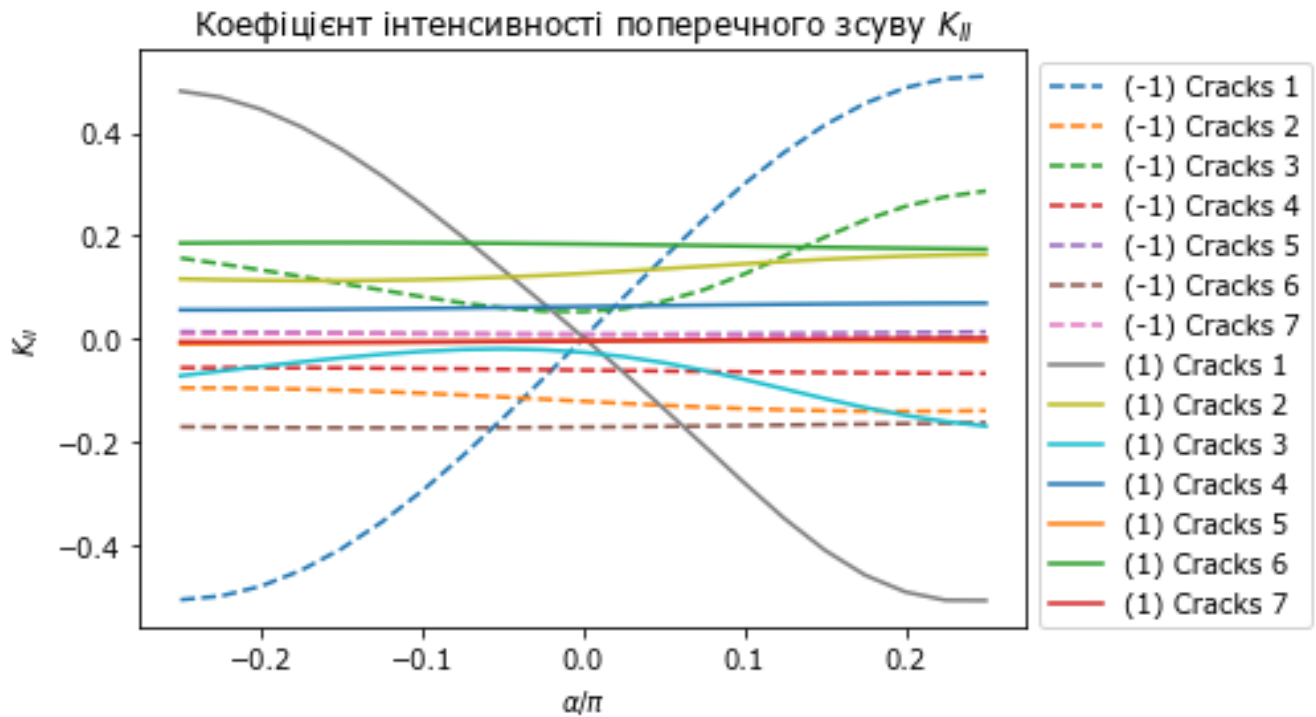


Рисунок 34 Коефіцієнт інтенсивності K_{II}

	a/x	(-1) crack (1) ₁	(-1) crack (1) ₂	(-1) crack (1) ₃	(-1) crack (2) ₁	(-1) crack (2) ₂	(-1) crack (2) ₃	(-1) crack (2) ₄	(1) crack (1) ₁	(1) crack (1) ₂	(1) crack (1) ₃	(1) crack (2) ₁	(1) crack ⁽²⁾ 2	(1) cra (2)
0	-0.250	-0.000009	-4.342632e-07	-0.000027	-3.229430e-08	1.637474e-07	-2.289824e-08	9.213798e-08	0.000017	4.113164e-06	0.000021	2.577258e-08	-5.392727e-08	8.330316
1	-0.225	-0.000010	1.138663e-07	-0.000028	-2.053935e-08	1.768828e-07	-3.528289e-08	9.615471e-08	0.000018	2.810752e-06	0.000021	1.550141e-08	-6.032325e-08	9.849006
2	-0.200	-0.000011	4.196561e-07	-0.000028	-1.247800e-08	1.939326e-07	-4.827952e-08	9.874473e-08	0.000020	1.691568e-06	0.000021	9.282918e-09	-7.128882e-08	1.137362
3	-0.175	-0.000011	4.544475e-07	-0.000029	-8.302100e-09	2.143985e-07	-6.154632e-08	9.986702e-08	0.000022	7.968750e-07	0.000021	7.237858e-09	-8.644634e-08	1.286613
4	-0.150	-0.000012	1.954519e-07	-0.000031	-8.076116e-09	2.377056e-07	-7.473216e-08	9.951551e-08	0.000024	1.672451e-07	0.000021	9.348034e-09	-1.053103e-07	1.428937
5	-0.125	-0.000012	-3.714849e-07	-0.000032	-1.173894e-08	2.632177e-07	-8.748301e-08	9.771674e-08	0.000025	-1.595512e-07	0.000020	1.546387e-08	-1.273059e-07	1.560708
6	-0.100	-0.000013	-1.249221e-06	-0.000033	-1.911375e-08	2.902528e-07	-9.944873e-08	9.452663e-08	0.000027	-1.510262e-07	0.000020	2.531873e-08	-1.517900e-07	1.678502
7	-0.075	-0.000013	-2.427131e-06	-0.000033	-2.992428e-08	3.181017e-07	-1.102916e-07	9.002681e-08	0.000028	2.173040e-07	0.000019	3.855010e-08	-1.780740e-07	1.779097
8	-0.050	-0.000013	-3.879791e-06	-0.000033	-4.381683e-08	3.460501e-07	-1.196978e-07	8.432093e-08	0.000028	9.591203e-07	0.000018	5.472594e-08	-2.054508e-07	1.859607
9	-0.025	-0.000013	-5.566825e-06	-0.000032	-6.038578e-08	3.734069e-07	-1.273942e-07	7.753147e-08	0.000028	2.074599e-06	0.000016	7.337303e-08	-2.332254e-07	1.917633
10	0.000	-0.000012	-7.434046e-06	-0.000030	-7.919924e-08	3.995374e-07	-1.331683e-07	6.979783e-08	0.000027	3.547970e-06	0.000015	9.400607e-08	-2.607471e-07	1.951477
11	0.025	-0.000012	-9.415759e-06	-0.000027	-9.981906e-08	4.238957e-07	-1.368909e-07	6.127613e-08	0.000025	5.345496e-06	0.000013	1.161501e-07	-2.874405e-07	1.960377
12	0.050	-0.000011	-1.143795e-05	-0.000022	-1.218091e-07	4.460481e-07	-1.385319e-07	5.214132e-08	0.000021	7.414152e-06	0.000011	1.393497e-07	-3.128235e-07	1.944653
13	0.075	-0.000011	-1.342210e-05	-0.000018	-1.447276e-07	4.656737e-07	-1.381611e-07	4.259046e-08	0.000017	9.681562e-06	0.000009	1.631616e-07	-3.365038e-07	1.905759
14	0.100	-0.000010	-1.528976e-05	-0.000014	-1.681064e-07	4.825347e-07	-1.359293e-07	3.284553e-08	0.000014	1.205808e-05	0.000008	1.871297e-07	-3.581476e-07	1.846029
15	0.125	-0.000009	-1.696805e-05	-0.000011	-1.914258e-07	4.964206e-07	-1.320289e-07	2.315234e-08	0.000011	1.444210e-05	0.000007	2.107567e-07	-3.774278e-07	1.768287
16	0.150	-0.000009	-1.839619e-05	-0.000010	-2.141061e-07	5.070894e-07	-1.266490e-07	1.377234e-08	0.000009	1.672928e-05	0.000007	2.334885e-07	-3.939746e-07	1.675329
17	0.175	-0.000008	-1.953161e-05	-0.000011	-2.355288e-07	5.142375e-07	-1.199432e-07	4.966907e-09	0.000009	1.882442e-05	0.000008	2.547296e-07	-4.073570e-07	1.569603
18	0.200	-0.000008	-2.035317e-05	-0.000014	-2.550883e-07	5.175242e-07	-1.120243e-07	-3.021242e-09	0.000011	2.065249e-05	0.000010	2.738916e-07	-4.171152e-07	1.453100
19	0.225	-0.000008	-2.085996e-05	-0.000017	-2.722497e-07	5.166405e-07	-1.029874e-07	-9.981786e-09	0.000013	2.216469e-05	0.000012	2.904508e-07	-4.228293e-07	1.327553
20	0.250	-0.000008	-2.106655e-05	-0.000021	-2.865865e-07	5.113823e-07	-9.294231e-08	-1.574167e-08	0.000014	2.333782e-05	0.000014	3.039873e-07	-4.241860e-07	1.194779

Рисунок 35 Коефіцієнти інтенсивності K_D в залежності від зміни положення однієї з тріщин

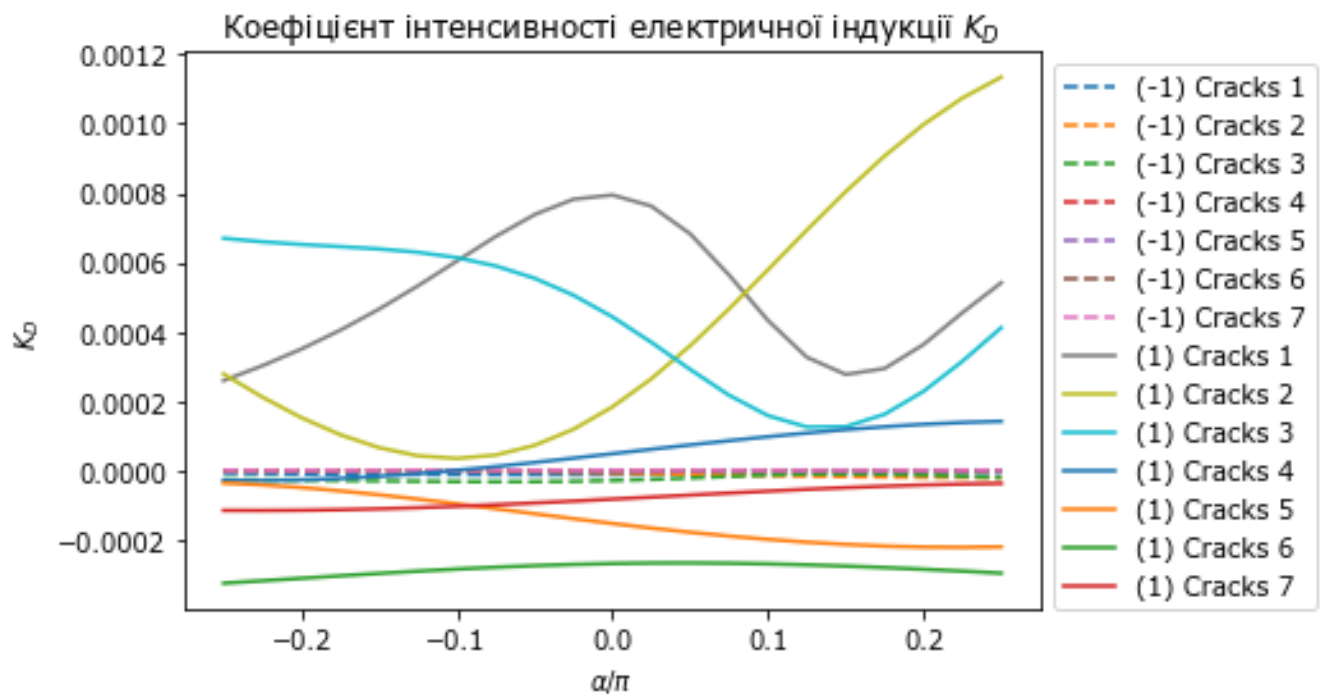


Рисунок 36 Коефіцієнт інтенсивності K_D

α/π	(-1) crack ₍₁₎₁	(-1) crack ₍₁₎₂	(-1) crack ₍₁₎₃	(-1) crack ₍₂₎₁	(-1) crack ₍₂₎₂	(-1) crack ₍₂₎₃	(-1) crack ₍₂₎₄	(1) crack ₍₁₎₁	(1) crack ₍₁₎₂	(1) crack ₍₁₎₃	(1) crack ₍₂₎₁	(1) crack ₍₂₎₂	(1) crack ₍₂₎₃	(1) crack ₍₂₎₄	
0	-0.250	-0.000215	0.000066	-0.000673	0.000010	0.000122	0.000246	0.000304	0.000259	0.000278	0.000670	-2.914591e-05	-0.000037	-0.000326	-0.000116
1	-0.225	-0.000246	0.000094	-0.000667	0.000012	0.000130	0.000240	0.000305	0.000302	0.000211	0.000659	-2.960906e-05	-0.000042	-0.000319	-0.000116
2	-0.200	-0.000274	0.000110	-0.000676	0.000011	0.000139	0.000234	0.000304	0.000350	0.000152	0.000652	-2.778216e-05	-0.000050	-0.000312	-0.000116
3	-0.175	-0.000299	0.000114	-0.000701	0.000008	0.000151	0.000227	0.000303	0.000404	0.000103	0.000646	-2.375031e-05	-0.000060	-0.000305	-0.000114
4	-0.150	-0.000321	0.000104	-0.000740	0.000003	0.000163	0.000221	0.000301	0.000465	0.000065	0.000639	-1.766428e-05	-0.000071	-0.000298	-0.000111
5	-0.125	-0.000340	0.000079	-0.000791	-0.000004	0.000176	0.000214	0.000299	0.000532	0.000042	0.000629	-9.732301e-06	-0.000083	-0.000291	-0.000108
6	-0.100	-0.000356	0.000040	-0.000848	-0.000013	0.000189	0.000208	0.000295	0.000604	0.000034	0.000614	-2.098924e-07	-0.000097	-0.000285	-0.000104
7	-0.075	-0.000368	-0.000014	-0.000903	-0.000023	0.000203	0.000202	0.000291	0.000675	0.000044	0.000590	1.061155e-05	-0.000111	-0.000280	-0.000100
8	-0.050	-0.000375	-0.000082	-0.000946	-0.000035	0.000216	0.000196	0.000287	0.000738	0.000072	0.000554	2.241718e-05	-0.000126	-0.000275	-0.000095
9	-0.025	-0.000378	-0.000161	-0.000962	-0.000047	0.000229	0.000192	0.000282	0.000782	0.000118	0.000505	3.488222e-05	-0.000140	-0.000272	-0.000089
10	0.000	-0.000376	-0.000248	-0.000939	-0.000060	0.000241	0.000188	0.000276	0.000795	0.000183	0.000443	4.768647e-05	-0.000154	-0.000269	-0.000083
11	0.025	-0.000369	-0.000341	-0.000864	-0.000073	0.000252	0.000185	0.000271	0.000763	0.000264	0.000370	6.052934e-05	-0.000167	-0.000268	-0.000078
12	0.050	-0.000357	-0.000436	-0.000739	-0.000087	0.000261	0.000183	0.000265	0.000682	0.000359	0.000291	7.314320e-05	-0.000179	-0.000268	-0.000072
13	0.075	-0.000342	-0.000529	-0.000579	-0.000099	0.000269	0.000182	0.000260	0.000564	0.000466	0.000217	8.530052e-05	-0.000190	-0.000268	-0.000066
14	0.100	-0.000327	-0.000617	-0.000420	-0.000112	0.000276	0.000182	0.000254	0.000433	0.000579	0.000158	9.680912e-05	-0.000200	-0.000270	-0.000060
15	0.125	-0.000314	-0.000695	-0.000304	-0.000123	0.000281	0.000183	0.000249	0.000326	0.000693	0.000125	1.074932e-04	-0.000208	-0.000273	-0.000055
16	0.150	-0.000305	-0.000762	-0.000270	-0.000134	0.000284	0.000185	0.000244	0.000276	0.000804	0.000126	1.171668e-04	-0.000214	-0.000277	-0.000050
17	0.175	-0.000301	-0.000815	-0.000330	-0.000144	0.000286	0.000187	0.000240	0.000294	0.000907	0.000162	1.256152e-04	-0.000219	-0.000281	-0.000046
18	0.200	-0.000301	-0.000853	-0.000469	-0.000152	0.000285	0.000190	0.000237	0.000363	0.000998	0.000228	1.326014e-04	-0.000222	-0.000286	-0.000043
19	0.225	-0.000302	-0.000876	-0.000652	-0.000158	0.000283	0.000194	0.000234	0.000455	0.001074	0.000315	1.378946e-04	-0.000223	-0.000291	-0.000040
20	0.250	-0.000302	-0.000885	-0.000844	-0.000162	0.000279	0.000199	0.000232	0.000541	0.001135	0.000412	1.413040e-04	-0.000221	-0.000297	-0.000038

Рисунок 37 Коефіцієнти інтенсивності K_B в залежності від зміни положення однієї з тріщин

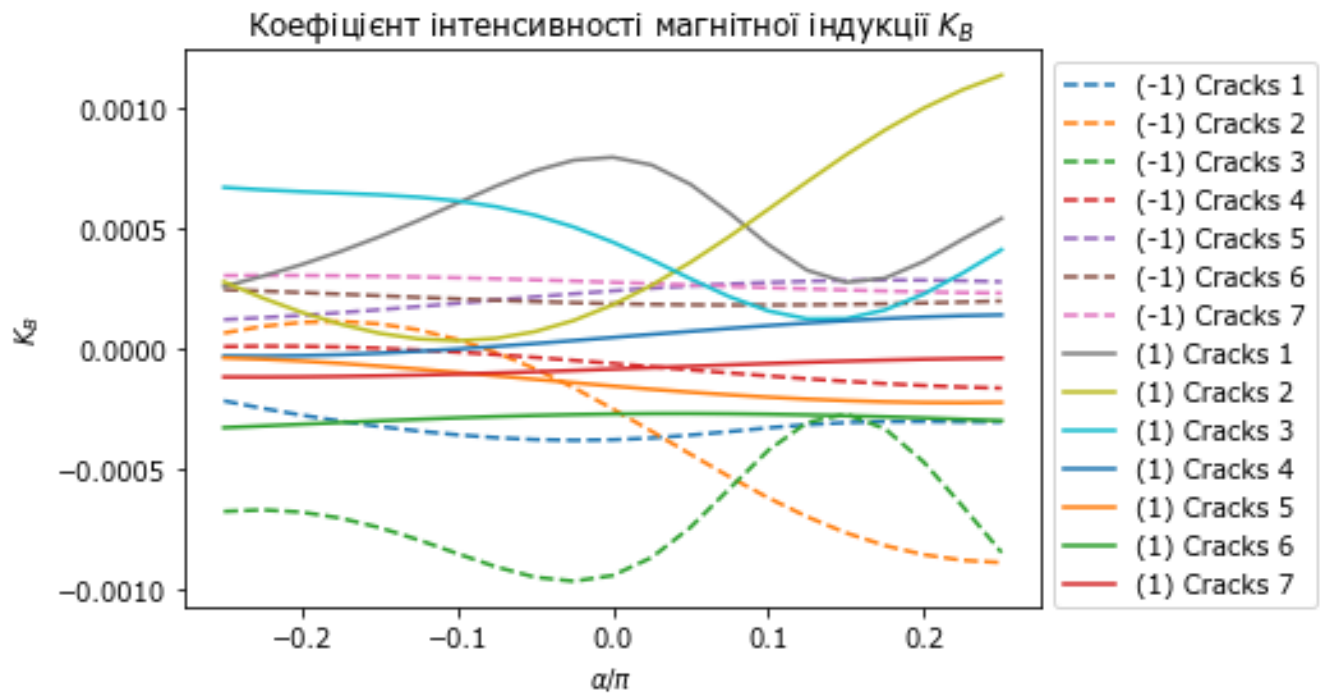


Рисунок 38 Коефіцієнт інтенсивності K_B

a/π	(-1) crack ₍₁₎₁	(-1) crack ₍₁₎₂	(-1) crack ₍₁₎₃	(-1) crack ₍₂₎₁	(-1) crack ₍₂₎₂	(-1) crack ₍₂₎₃	(-1) crack ₍₂₎₄	(1) crack ₍₁₎₁	(1) crack ₍₁₎₂	(1) crack ₍₁₎₃	(1) crack ₍₂₎₁	(1) crack ₍₂₎₂	(1) crack ₍₂₎₃	(1) crack ₍₂₎₄
0	-0.015164	0.013351	0.003319	0.006538	0.001566	0.025441	0.038760	0.014853	-0.013658	-0.002424	-0.006532	-0.001181	-0.027436	-0.037153
1	-0.013925	0.013452	0.003216	0.006544	0.001474	0.025391	0.038730	0.013602	-0.013749	-0.002336	-0.006552	-0.001108	-0.027367	-0.037122
2	-0.012601	0.013556	0.003108	0.006563	0.001385	0.025331	0.038705	0.012272	-0.013845	-0.002249	-0.006587	-0.001030	-0.027288	-0.037096
3	-0.011200	0.013660	0.002995	0.006595	0.001300	0.025261	0.038686	0.010873	-0.013944	-0.002167	-0.006636	-0.000947	-0.027202	-0.037077
4	-0.009730	0.013760	0.002879	0.006637	0.001223	0.025183	0.038672	0.009418	-0.014045	-0.002091	-0.006697	-0.000863	-0.027110	-0.037063
5	-0.008200	0.013854	0.002763	0.006690	0.001155	0.025100	0.038664	0.007916	-0.014145	-0.002025	-0.006769	-0.000779	-0.027015	-0.037056
6	-0.006620	0.013939	0.002649	0.006750	0.001098	0.025013	0.038662	0.006379	-0.014240	-0.001973	-0.006848	-0.000699	-0.026918	-0.037056
7	-0.005000	0.014012	0.002545	0.006816	0.001052	0.024924	0.038666	0.004816	-0.014328	-0.001938	-0.006932	-0.000625	-0.026823	-0.037062
8	-0.003349	0.014069	0.002459	0.006885	0.001020	0.024836	0.038676	0.003235	-0.014406	-0.001926	-0.007019	-0.000557	-0.026730	-0.037075
9	-0.001676	0.014107	0.002403	0.006956	0.001000	0.024750	0.038692	0.001639	-0.014470	-0.001941	-0.007106	-0.000499	-0.026643	-0.037094
10	0.000009	0.014125	0.002393	0.007027	0.000995	0.024668	0.038713	0.000028	-0.014517	-0.001987	-0.007190	-0.000451	-0.026563	-0.037118
11	0.001695	0.014121	0.002446	0.007096	0.001003	0.024592	0.038740	-0.001602	-0.014546	-0.002067	-0.007270	-0.000415	-0.026491	-0.037148
12	0.003375	0.014094	0.002577	0.007161	0.001025	0.024523	0.038770	-0.003257	-0.014554	-0.002182	-0.007345	-0.000391	-0.026430	-0.037182
13	0.005038	0.014046	0.002791	0.007223	0.001059	0.024462	0.038805	-0.004938	-0.014542	-0.002329	-0.007413	-0.000378	-0.026380	-0.037221
14	0.006674	0.013978	0.003084	0.007279	0.001105	0.024412	0.038844	-0.006640	-0.014509	-0.002500	-0.007474	-0.000378	-0.026342	-0.037264
15	0.008271	0.013894	0.003429	0.007330	0.001160	0.024372	0.038886	-0.008341	-0.014458	-0.002686	-0.007527	-0.000387	-0.026318	-0.037309
16	0.009820	0.013797	0.003791	0.007375	0.001223	0.024344	0.038929	-0.010007	-0.014390	-0.002874	-0.007572	-0.000407	-0.026307	-0.037357
17	0.011307	0.013691	0.004126	0.007413	0.001292	0.024329	0.038973	-0.011600	-0.014310	-0.003051	-0.007608	-0.000436	-0.026310	-0.037404
18	0.012721	0.013582	0.004400	0.007443	0.001366	0.024327	0.039017	-0.013088	-0.014219	-0.003206	-0.007635	-0.000473	-0.026328	-0.037451
19	0.014054	0.013473	0.004596	0.007464	0.001443	0.024339	0.039059	-0.014452	-0.014122	-0.003332	-0.007650	-0.000518	-0.026361	-0.037495
20	0.015295	0.013366	0.004713	0.007475	0.001522	0.024365	0.039097	-0.015687	-0.014022	-0.003426	-0.007653	-0.000571	-0.026408	-0.037536

Рисунок 39 Коефіцієнти інтенсивності K_E в залежності від зміни положення однієї з тріщин

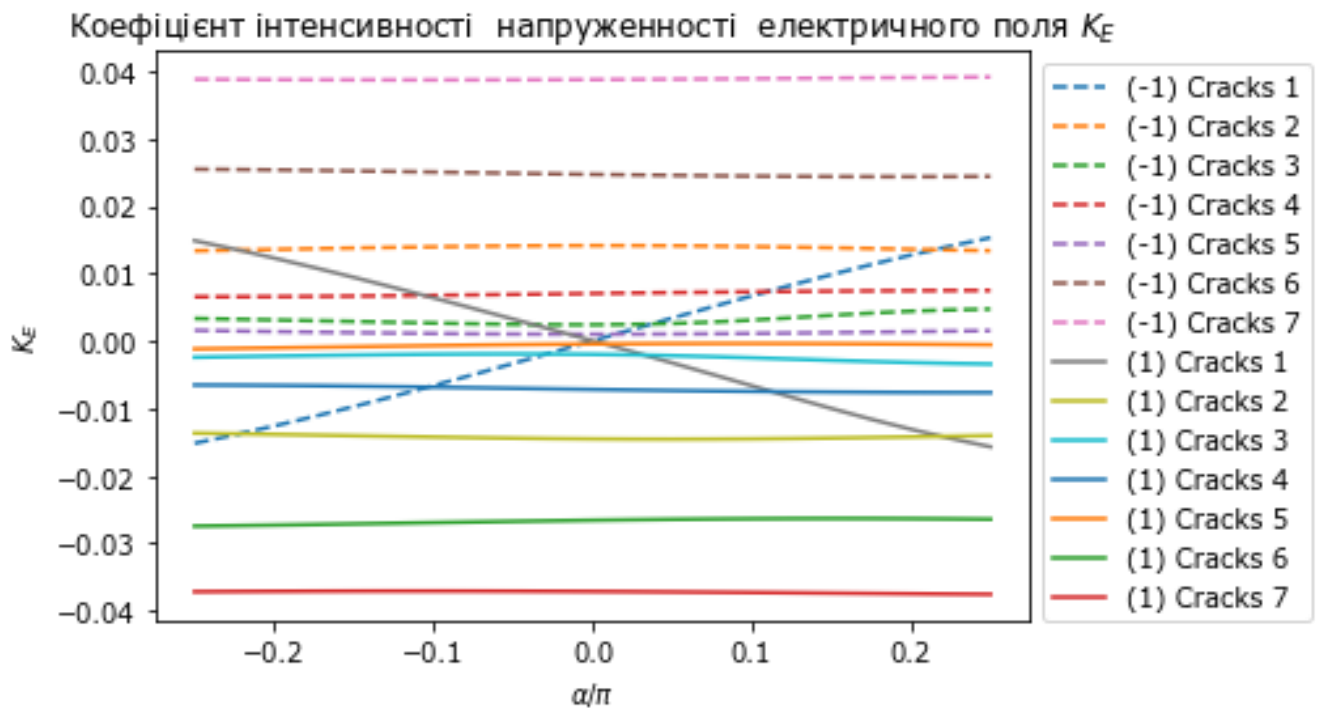


Рисунок 40 Коефіцієнт інтенсивності K_E

a/π	(-1) crack (1) 1	(-1) crack (1) 2	(-1) crack (1) 3	(-1) crack (2) 1	(-1) crack (2) 2	(-1) crack (2) 3	(-1) crack (2) 4	(1) crack (1) 1	(1) crack (1) 2	(1) crack (1) 3	(1) crack (2) 1	(1) crack (2) 2	(1) crack (2) 3	(1) crack (2) 4	
0	-0.250	-2.098082e-04	0.000185	0.000046	0.000018	0.000004	0.000069	0.000105	2.055017e-04	-0.000189	-0.000034	-0.000018	-0.000003	-0.000074	-0.000
1	-0.225	-1.926687e-04	0.000186	0.000044	-0.000018	-0.000003	-0.000074	-0.000100	1.881887e-04	-0.000190	-0.000032	-0.000018	-0.000003	-0.000074	-0.000
2	-0.200	-1.743476e-04	0.000188	0.000043	-0.000018	-0.000003	-0.000074	-0.000100	1.697884e-04	-0.000192	-0.000031	-0.000018	-0.000003	-0.000074	-0.000
3	-0.175	-1.549578e-04	0.000189	0.000041	-0.000018	-0.000003	-0.000073	-0.000100	1.504431e-04	-0.000193	-0.000030	-0.000018	-0.000003	-0.000073	-0.000
4	-0.150	-1.346188e-04	0.000190	0.000040	-0.000018	-0.000002	-0.000073	-0.000100	1.303035e-04	-0.000194	-0.000029	-0.000018	-0.000002	-0.000073	-0.000
5	-0.125	-1.134560e-04	0.000192	0.000038	-0.000018	-0.000002	-0.000073	-0.000100	1.095241e-04	-0.000196	-0.000028	-0.000018	-0.000002	-0.000073	-0.000
6	-0.100	-9.159886e-05	0.000193	0.000037	-0.000018	-0.000002	-0.000073	-0.000100	8.825524e-05	-0.000197	-0.000027	-0.000018	-0.000002	-0.000073	-0.000
7	-0.075	-6.917975e-05	0.000194	0.000035	-0.000019	-0.000002	-0.000072	-0.000100	6.663105e-05	-0.000198	-0.000027	-0.000019	-0.000002	-0.000072	-0.000
8	-0.050	-4.633206e-05	0.000195	0.000034	-0.000019	-0.000002	-0.000072	-0.000100	4.475355e-05	-0.000199	-0.000027	-0.000019	-0.000002	-0.000072	-0.000
9	-0.025	-2.318888e-05	0.000195	0.000033	-0.000019	-0.000001	-0.000072	-0.000100	2.267574e-05	-0.000200	-0.000027	-0.000019	-0.000001	-0.000072	-0.000
10	0.000	1.178882e-07	0.000195	0.000033	-0.000019	-0.000001	-0.000072	-0.000100	3.908209e-07	-0.000201	-0.000027	-0.000019	-0.000001	-0.000072	-0.000
11	0.025	2.345735e-05	0.000195	0.000034	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000100	-2.216098e-05	-0.000201	-0.000029	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000
12	0.050	4.669805e-05	0.000195	0.000036	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000100	-4.505693e-05	-0.000201	-0.000030	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000
13	0.075	6.970512e-05	0.000194	0.000039	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000100	-6.832606e-05	-0.000201	-0.000032	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000
14	0.100	9.233690e-05	0.000193	0.000043	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000100	-9.186937e-05	-0.000201	-0.000035	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000
15	0.125	1.144427e-04	0.000192	0.000047	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000101	-1.154007e-04	-0.000200	-0.000037	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000
16	0.150	1.358637e-04	0.000191	0.000052	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000101	-1.384561e-04	-0.000199	-0.000040	-0.000020	-0.000001	-0.000071	-0.000
17	0.175	1.564386e-04	0.000189	0.000057	-0.000021	-0.000001	-0.000071	-0.000101	-1.604993e-04	-0.000198	-0.000042	-0.000021	-0.000001	-0.000071	-0.000
18	0.200	1.760125e-04	0.000188	0.000061	-0.000021	-0.000001	-0.000071	-0.000101	-1.810817e-04	-0.000197	-0.000044	-0.000021	-0.000001	-0.000071	-0.000
19	0.225	1.944447e-04	0.000186	0.000064	-0.000021	-0.000001	-0.000071	-0.000101	-1.999512e-04	-0.000195	-0.000046	-0.000021	-0.000001	-0.000071	-0.000
20	0.250	2.116127e-04	0.000185	0.000065	-0.000021	-0.000002	-0.000071	-0.000101	-2.170469e-04	-0.000194	-0.000047	-0.000021	-0.000002	-0.000071	-0.000

Рисунок 41 Коефіцієнти інтенсивності K_H в залежності від зміни положення однієї з тріщин

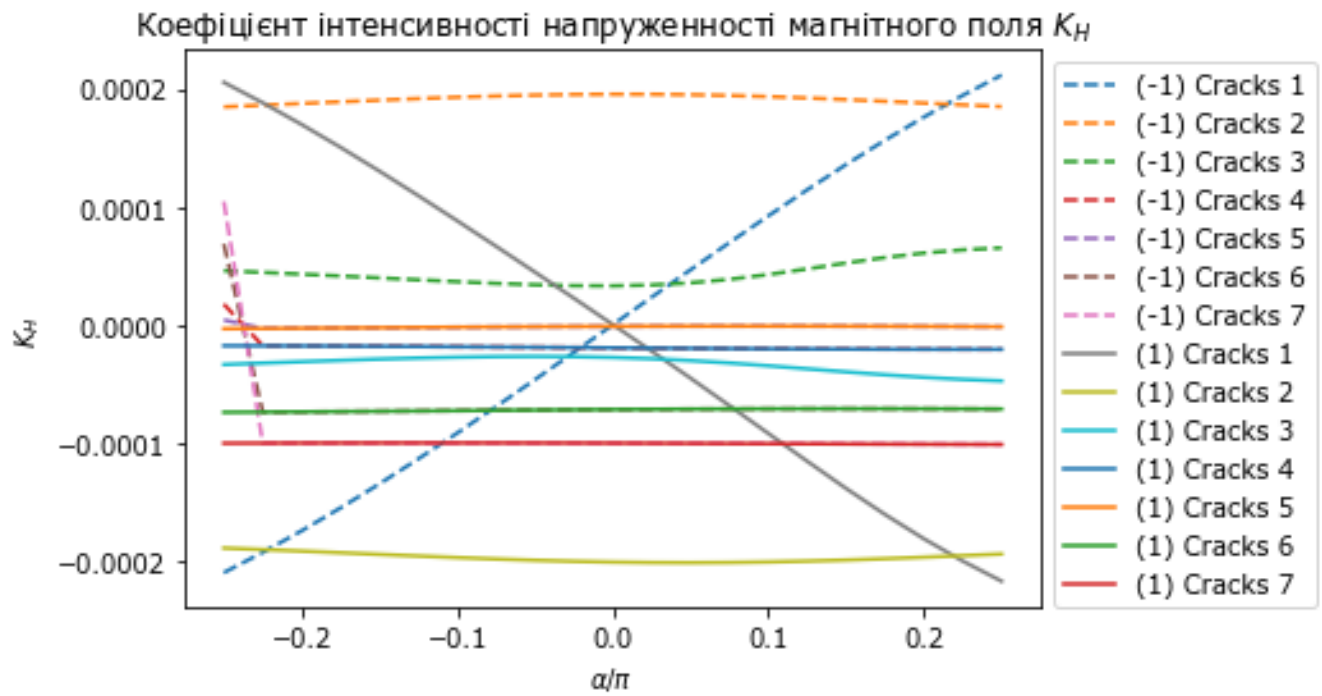


Рисунок 42 Коефіцієнт інтенсивності K_H

a/π	(-1) crack (1) 1	(-1) crack (1) 2	(-1) crack (1) 3	(-1) crack (2) 1	(-1) crack (2) 2	(-1) crack (2) 3	(-1) crack (2) 4	(1) crack (1) 1	(1) crack (1) 2	(1) crack (1) 3	(1) crack (2) 1	(1) crack (2) 2	(1) crack (2) 3	(1)	
0	-0.250	0.000016	0.000010	0.000005	-5.728767e-11	-1.743607e-12	-8.639123e-10	-2.006020e-09	0.000015	0.000011	0.000004	5.169038e-08	1.749178e-09	9.130062e-07	0.0
1	-0.225	0.000014	0.000010	0.000005	-5.738402e-11	-1.047460e-12	-8.603679e-10	-2.002703e-09	0.000013	0.000011	0.000004	5.202434e-08	1.558697e-09	9.084612e-07	0.0
2	-0.200	0.000012	0.000010	0.000005	-5.768389e-11	-1.758982e-13	-8.559644e-10	-1.999981e-09	0.000012	0.000011	0.000004	5.259836e-08	1.386532e-09	9.033094e-07	0.0
3	-0.175	0.000011	0.000011	0.000005	-5.820899e-11	9.491360e-13	-8.508445e-10	-1.997909e-09	0.000011	0.000011	0.000004	5.338804e-08	1.251824e-09	8.976795e-07	0.0
4	-0.150	0.000010	0.000011	0.000005	-5.895833e-11	2.417780e-12	-8.451696e-10	-1.996525e-09	0.000009	0.000011	0.000004	5.436821e-08	1.179546e-09	8.917047e-07	0.0
5	-0.125	0.000008	0.000011	0.000005	-5.990677e-11	4.315256e-12	-8.391132e-10	-1.995847e-09	0.000008	0.000011	0.000004	5.551355e-08	1.197012e-09	8.855201e-07	0.0
6	-0.100	0.000007	0.000011	0.000005	-6.100657e-11	6.705439e-12	-8.328545e-10	-1.995880e-09	0.000007	0.000011	0.000004	5.679857e-08	1.329991e-09	8.792608e-07	0.0
7	-0.075	0.000006	0.000011	0.000005	-6.219167e-11	9.617217e-12	-8.265724e-10	-1.996610e-09	0.000007	0.000012	0.000004	5.819727e-08	1.598994e-09	8.730605e-07	0.0
8	-0.050	0.000006	0.000011	0.000005	-6.338423e-11	1.303557e-11	-8.204390e-10	-1.998010e-09	0.000006	0.000012	0.000004	5.968272e-08	2.016279e-09	8.670502e-07	0.0
9	-0.025	0.000005	0.000011	0.000005	-6.450229e-11	1.689889e-11	-8.146135e-10	-2.000043e-09	0.000006	0.000012	0.000004	6.122711e-08	2.584043e-09	8.613560e-07	0.0
10	0.000	0.000005	0.000011	0.000005	-6.546777e-11	2.110328e-11	-8.092355e-10	-2.002663e-09	0.000006	0.000012	0.000004	6.280259e-08	3.294086e-09	8.560977e-07	0.0
11	0.025	0.000005	0.000011	0.000005	-6.621353e-11	2.551316e-11	-8.044196e-10	-2.005819e-09	0.000006	0.000012	0.000004	6.438271e-08	4.128927e-09	8.513861e-07	0.0
12	0.050	0.000006	0.000011	0.000005	-6.668891e-11	2.997557e-11	-8.002517e-10	-2.009455e-09	0.000006	0.000012	0.000004	6.594391e-08	5.063914e-09	8.473205e-07	0.0
13	0.075	0.000006	0.000011	0.000005	-6.686324e-11	3.433350e-11	-7.967891e-10	-2.013509e-09	0.000007	0.000012	0.000004	6.746586e-08	6.069411e-09	8.439868e-07	0.0
14	0.100	0.000007	0.000011	0.000005	-6.672754e-11	3.843330e-11	-7.940652e-10	-2.017910e-09	0.000008	0.000012	0.000004	6.892968e-08	7.112063e-09	8.414578e-07	0.0
15	0.125	0.000008	0.000011	0.000005	-6.629494e-11	4.212379e-11	-7.920979e-10	-2.022572e-09	0.000009	0.000012	0.000004	7.031395e-08	8.154652e-09	8.397941e-07	0.0
16	0.150	0.000010	0.000011	0.000005	-6.559989e-11	4.525026e-11	-7.908985e-10	-2.027389e-09	0.000010	0.000012	0.000004	7.158997e-08	9.155220e-09	8.390461e-07	0.0
17	0.175	0.000011	0.000011	0.000005	-6.469551e-11	4.765195e-11	-7.904772e-10	-2.032237e-09	0.000012	0.000012	0.000004	7.271913e-08	1.006725e-08	8.392552e-07	0.0
18	0.200	0.000013	0.000010	0.000005	-6.364862e-11	4.917161e-11	-7.908421e-10	-2.036982e-09	0.000013	0.000011	0.000004	7.365488e-08	1.084265e-08	8.404501e-07	0.0
19	0.225	0.000014	0.000010	0.000005	-6.253254e-11	4.967703e-11	-7.919950e-10	-2.041487e-09	0.000015	0.000011	0.000004	7.434891e-08	1.143731e-08	8.426411e-07	0.0
20	0.250	0.000016	0.000010	0.000005	-6.141944e-11	4.908547e-11	-7.939255e-10	-2.045626e-09	0.000017	0.000011	0.000004	7.475854e-08	1.181704e-08	8.458129e-07	0.0

Рисунок 43 Енергетичний критерій руйнування γ

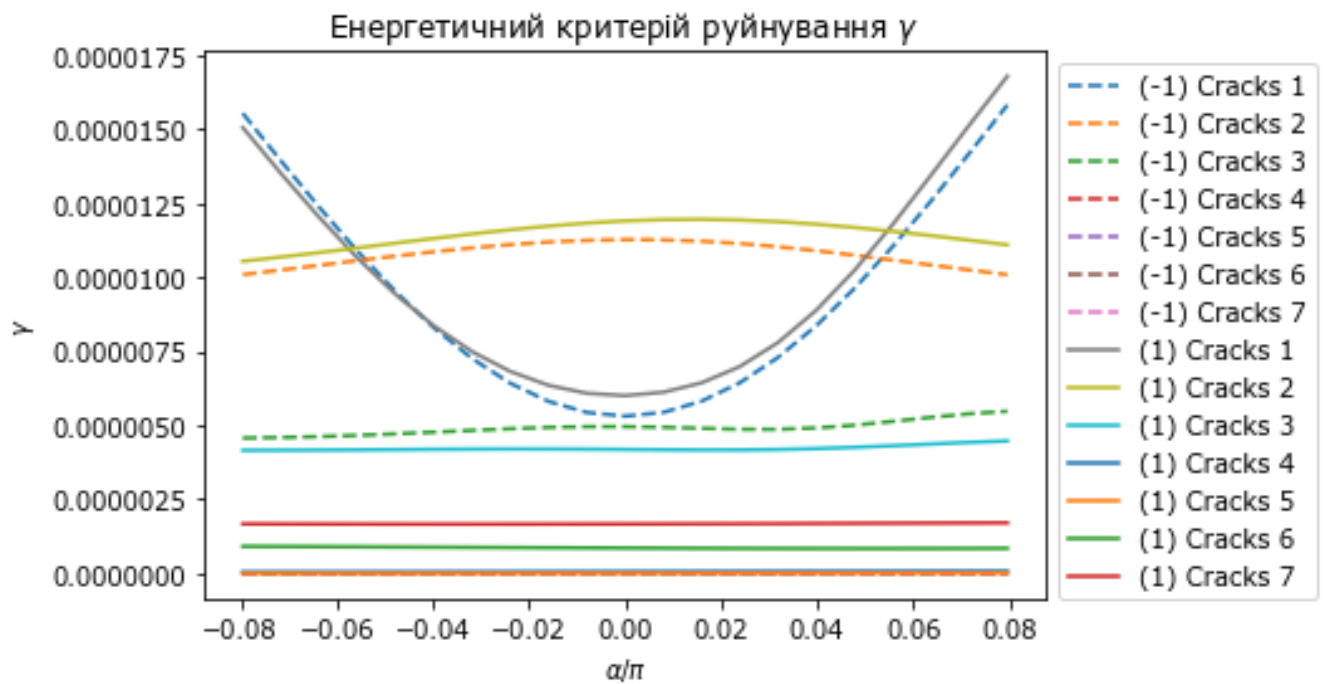


Рисунок 44 Енергетичний критерій руйнування γ

Енергетичний критерій руйнування за абсолютною величиною у цьому складеному середовищі у вершинах тріщин менший, ніж у протилежній комбінації.

ВИСНОВКИ

З використанням підходів, розвинених проф. Л. А. Фильштинським в роботі розглянуто проблему механіки зв'язаних полів для складеного МЕР середовища, що складається з двох різних за своїми властивостями півпросторів неперервно скріплених вздовж спільної границі. Методом граничних інтегральних рівнянь розглянута модель для такого середовища, що містить випадкові множинні тріщини, що не перетинаються. Проведено параметричне дослідження ефектів зв'язності МЕР полів, та залежності коефіцієнти інтенсивності польових величин ($K_I, K_{II}, K_B, K_D, K_E, K_H$) та енергетичного критерію руйнування (поток енергії в вершину тріщини) в залежності від фізичних та геометричних параметрів побудованої моделі.

Поставлене завдання виконано у такі послідовності:

- побудована модель магнетоелектропружного середовища у термінах теорії функцій комплексного змінного;
- крайова задача теорії функцій зведена до мішаної системи алгебраїчних та сингулярних інтегральних рівнянь на контурах дефектів;
- коефіцієнти інтенсивності фізичних полів в околі вершин тріщин та енергетичний критерій руйнування визначено через щільності інтегральних рівнянь;
- методом механічних квадратур побудовано алгоритм чисельного розв'язання, де параметризація контурів дефектів задається з використанням триангуляції Делоне;
- проведено ряд чисельних експериментів з метою дослідження впливу геометричних та фізичних параметрів системи на характеристики руйнування, отримані нові чисельні результати, зроблено їх аналіз.

На підставі параметричних досліджень можна зробити такі висновки:

- вплив змін у геометрії простору на розподіл механічних полів у середовищі найбільш відчутний на досить невеликій відстані від елемента, що змінюється, аналогічний висновок можна зробити і про напруженість електричних та магнітних полів;

- вплив на коефіцієнти інтенсивності електричної та магнітної індукції більш суттєвий на усі елементи системи за умови змін у геометричних параметрах однієї з тріщин;

- на коефіцієнти інтенсивності фізичних полів мають вплив як фізичні характеристики матеріалів, з яких складено середовище, так і кількість та розташування дефектів в середовищі.

Під час виконання роботи виконано великий об'єм чисельних експериментів, але збільшення кількості неоднорідностей (тріщин) в середовищі вимагає більше машинного часу, тому подальші дослідження вимагають використання паралельних обчислень і можуть бути продовжені в рамках роботи магістра, зокрема, для проведення великої кількості чисельних експериментів зі статистичною обробкою даних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Griffith A.A. The phenomena of rupture. - In: Proc. First Int. Congr. Appl. Mechanics. Delft, 1924, p.55-63.
- 2 Irwin L.R. Fracture. - In: Handbuck der Physic. Berlin, 1958, Bd 6, p.551 - 590.
- 3 Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной. - Вопр. механики реальн. твердого тела, 1964, вып. 2, с. 3-19.
- 4 Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.- М.: Наука, 1974.-640с.
- 5 Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений. - ФХММ, 1965, 1, №4, с.424-434.
- 6 Wang, B.L., Mai, Y.W., 2004. Fracture of piezoelectromagnetic materials. Mech. Res. Commun. 31, 65-73.
- 7 Li, X.F., 2005. Dynamic analysis of a cracked magneto-electroelastic medium under antiplane mechanical and inplane electric and magnetic impacts. Int. J. Solids Struct. 42, 3185-3205.
- 8 Chen, W.Q., Lee, K.Y., Ding, H., 2004. General solution for transversely isotropic magneto-electro-thermo-elasticity and the potential theory method. Int. J. Eng. Sci. 42, 1361-1379.
- 9 Hu, K.Q., Li, G.Q., 2005. Electro-magneto-elastic analysis of a piezoelectromagnetic strip with a finite crack under longitudinal shear. Mech. Mater. 37, 925-934
- 10 Guo, J.H., Lu, Z.X., 2010. Anti-plane analysis of multiple cracks originating from a circular hole in a magneto-electroelastic solid. Int. J. Solids Struct. 47, 1847-1856

- 11 Yong, H.D., Zhou, Y.H., 2007. Transient response of a cracked magneto-electro-elastic strip under anti-plane impact. *Int. J. Solids Struct.* 44, 705-717.
- 12 Zhong, X.C., 2011. Closed-form solutions for two collinear dielectric cracks in a magneto-electro-elastic solid. *Appl. Math. Model.* 35, 2930-2944.
- 13 Zhang, P.W., 2011. Dynamic fracture of a rectangular limited-permeable crack in magneto-electro-elastic media under a time-harmonic elastic P-wave. *Int. J. Solids Struct.* 48, 553-566.
- 14 Lee, J.M., Ma, C.C., 2010. Analytical solutions for an antiplane problem of two dissimilar functionally graded magneto-electro-elastic half-planes. *Acta Mech.* 212, 21-38.
- 15 Li, Y.D., Lee, K.Y., 2008. Anti-plane crack intersecting the interface in a bonded smart structure with graded magneto-electro-elastic properties. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 50, 235-242.
- 16 Rekik, M., El-Borgi, S., Ounaies, Z., 2012. An Embedded Mixed-Mode Crack in a Functionally Graded Magneto-electro-elastic Infinite Medium. *Int. J. Solids Struct.* 49, 835-845.
- 17 Ma, C.C., Lee, J.M., 2009. Theoretical analysis of in-plane problem in functionally graded nonhomogeneous magneto-electro-elastic bimetals. *Int. J. Solids Struct.* 46, 4208-4220.
- 18 Cannillo, V., Manfredini, T., Montorsi, M., Siligardi, C., Sola, A., 2006. Microstructure-based modeling and experimental investigation of crack propagation in glass-alumina functionally graded materials. *J. Eur. Ceram. Soc.* 26, 3067-3073.
- 19 Nan C.W. Magneto-electric effect composites of piezoelectric and piezomagnetic phases // *Phys. Rev. B* – 1994. – Vol 50. №22. – P.6082 – 6088.

- 20 Фильштинський Л.А., Сушко Т.С., Єременко Г.А. Плоска задача магнетоелектропружності для пластини з тріщинами // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки – 2017. - № 2. - с.290-297
- 21 Фильштинський Л.А., Сушко Т.С., Єременко Г.А. Краевая задача механики разрушения магнетоелектроупругости для конечной пластины // Вісник Херсонського національного технічного університету – 2017. – №3 (62), Т.2 – с. 215-220.
- 22 Шевченко, О.В. Моделювання зв'язаних фізичних полів у скінченій пластині з дефектами: робота на здобуття кваліфікаційного ступеня магістра; спец.: 113 - прикладна математика / О.В. Шевченко; наук. керівник . Т.С. Сушко. - Суми: СумДУ, 2019. - 90 с.
- 23 Гостев, Е.С. Моделювання зв'язаних фізичних полів у складеному середовищі з дефектами: робота на здобуття кваліфікаційного ступеня магістра; спец.: 113 – прикладна математика / Е.С. Гостев; наук. керівник Т.С. Сушко. - Суми: СумДУ, 2019. – 97 с.
- 24 Калоеров С.А. Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк, Юго – Восток. 2011. – 232 с.
- 25 Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука. 1977. – 416 с.
- 26 Триангуляція Делоне [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D1%96%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%86%D1%96%D1%8F_%D0%94%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%BD%D0%B5
- 27 `scipy.spatial.Delaunay` [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.spatial.Delaunay.html>

28 Триангуляция Делоне [Электронный ресурс] /. — Электрон. журн. — Режим доступа:

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D0%94%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%BD%D0%B5, свободный

МАТЕРІАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ
МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

В таблиці А.1 наведені характеристики таких матеріалів М1 (композит, пружні, п'єзоелектричні та електричні сталі якого відповідають $CdSe$, а п'єзомагнітні та магнітні - $BaTiO_3$; М2 (композит, пружні, п'єзоелектричні та електричні сталі якого відповідають PZT-4, а п'єзомагнітні та магнітні - $CoFe_2O_4$), М3 (композит на основі $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$)

Таблиця А.1

Величина	Матеріал		
	М1	М2	М3
$s_{11}^{DB}/s_0 = s_{33}^{DB}/s_0$	22,260	10,745	7,165
s_{22}^{DB}/s_0	14,984	7,398	6,797
$s_{44}^{DB}/s_0, s_{66}^{DB}/s_0$	47,481	7,637	19,912
s_{55}^{DB}/s_0	69,204	32,680	19,802
$s_{12}^{DB}/s_0, s_{23}^{DB}/s_0$	-6,437	-2,542	-2,337
s_{13}^{DB}/s_0	-11,942	-5,595	-2,736
$g_{16}^{\sigma,D}/g_0, g_{34}^{\sigma,D}/g_0$	109,22	2,054	2,028
$g_{21}^{\sigma,D}/g_0, g_{23}^{\sigma,D}/g_0$	-4,333	-1,159	-0,496
$g_{22}^{\sigma,D}/g_0$	8,016	2,458	1,157
$p_{16}^{\sigma,B}/p_0, p_{34}^{\sigma,B}/p_0$	268,318	98,843	1,850
$p_{21}^{\sigma,B}/p_0, p_{23}^{\sigma,B}/p_0$	17,778	12,102	0,576
$p_{22}^{\sigma,B}/p_0$	31,206	22,268	1,186
$\beta_{11}^{\sigma}/\beta_0, \beta_{33}^{\sigma}/\beta_0$	19,612	0,106	0,156

$\beta_{22}^{\sigma}/\beta_0$	10,612	0,090	0,137
$\nu_{11}^{\sigma}/\nu_0, \nu_{33}^{\sigma}/\nu_0$	213,404	-14,931	-0,190
ν_{22}^{σ}/ν_0	-5,534	-3,740	-0,185
$\chi_{11}^{\sigma}/\chi_0, \chi_{33}^{\sigma}/\chi_0$	0,590	0,805	0,336
$\chi_{22}^{\sigma}/\chi_0$	0,575	0,704	0,119

Код програми

```
import os
os.environ['QT_API'] = 'pyqt5'
import numpy as np
from numpy import pi
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patches
import matplotlib.colors as colors
from formlayout import fedit
import copy
import pandas as pd
from scipy.spatial import Delaunay
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sqrt, cos, radians, sin
import random

class Param_crack:
    def __init__(self, p1, p2, h, alf):
        self.__p1 = p1
        self.__p2 = p2
        self.__h = h
        self.__alf = alf # угол поворота

    @property
    def p1(self):
        return self.__p1

    @p1.setter
    def p1(self, p1_new):
        self.__p1 = p1_new

    @property
    def p2(self):
        return self.__p2

    @p2.setter
    def p2(self, p2_new):
        self.__p2 = p2_new

    @property
    def h(self):
        return self.__h
```

```

    @h.setter
    def h(self, h_new):
        self.__h = h_new

    @property
    def alf(self):
        return self.__alf

    @alf.setter
    def alf(self, alf_new):
        self.__alf = alf_new

    def z(self, x):
        return (self.__p1 * x + 1.j * self.__p2 * x * x) * np.exp(1.j * self.__alf) + self.__h

    def zk(self, x, mu):
        return np.array([np.real(self.z(x)) + mu_k * np.imag(self.z(x)) for mu_k in mu])

    def dz(self, x):
        return (self.__p1 + 2 * 1.j * self.__p2 * x) * np.exp(1.j * self.__alf)

    def dzk(self, x, mu):
        return np.array([np.real(self.dz(x)) + mu_k * np.imag(self.dz(x)) for mu_k in mu])

    def ds(self, x):
        return np.real(np.power(np.multiply(self.dz(x), np.conj(self.dz(x))), 1. / 2))

)   def eipsi(self, x):
)   |   return -1.j * self.dz(x) / self.ds(x)

)   def ak(self, x, mu):
)   |   return np.array([mu_k * np.real(self.eipsi(x)) - np.imag(self.eipsi(x)) for mu_k in mu])

)   def bk(self, x, mu):
)   |   return np.array([-mu_1 * np.imag(self.eipsi(x)) - np.real(self.eipsi(x)) for mu_1 in mu])

def g_jm_r(c_r, alf_r, a_kpsi0r, z_kr, z_0kr, kkk, ll):
    gjm1 = (c_r[kkk, ll] * a_kpsi0r[ll] / (z_kr[ll] - z_0kr[ll]) -
            np.conj(c_r[kkk, 0] * a_kpsi0r[0]) * alf_r[0, ll] /
            (z_kr[ll] - np.conj(z_0kr[0])) -
            np.conj(c_r[kkk, 1] * a_kpsi0r[1]) * alf_r[1, ll] /
            (z_kr[ll] - np.conj(z_0kr[1])) -
            np.conj(c_r[kkk, 2] * a_kpsi0r[2]) * alf_r[2, ll] /
            (z_kr[ll] - np.conj(z_0kr[2])) -
            np.conj(c_r[kkk, 3] * a_kpsi0r[3]) * alf_r[3, ll] /
            (z_kr[ll] - np.conj(z_0kr[3])))
)   return gjm1

```

```

def G_jm_r(c_r, alf_r, a_kpsi0r, z_kr, z_0kr, kk, ll):
    G_jm = (c_r[kk, 0] * a_kpsi0r[0] * alf_r[4, ll] / (z_kr[ll] - z_0kr[0]) +
            c_r[kk, 1] * a_kpsi0r[1] * alf_r[5, ll] / (z_kr[ll] - z_0kr[1]) +
            c_r[kk, 2] * a_kpsi0r[2] * alf_r[6, ll] / (z_kr[ll] - z_0kr[2]) +
            c_r[kk, 3] * a_kpsi0r[3] * alf_r[7, ll] / (z_kr[ll] - z_0kr[3]))
    return G_jm

def Nkr_r(field1, field2, e_ipsi):
    Nkr = -field1 * np.real(e_ipsi) - field2 * np.imag(e_ipsi)
    return Nkr

k_1 = np.random.randint(3, 10)
print('k_1 = ', k_1)
k_2 = np.random.randint(3, 10)
print('k_2 = ', k_2)

points_1 = []
points_2 = []
for i in range(k_1):
    p1 = [np.random.randint(1, 10), np.random.randint(1, 10)]
    points_1.append(p1)
points_1 = np.array(points_1)
print('points_1 :', points_1)
for i in range(k_2):
    p2 = [np.random.randint(1, 10), np.random.randint(-10, -1)]
    points_2.append(p2)
points_2 = np.array(points_2)
print('points_2 :', points_2)

tri_1 = Delaunay(points_1)
tri_2 = Delaunay(points_2)

print('trisim_1 ', tri_1.simplices)
lsimplices_1=len(tri_1.simplices)
print('lsimplices_1=', lsimplices_1)

print('trisim_2 ', tri_2.simplices)
lsimplices_2=len(tri_2.simplices)
print('lsimplices_2=', lsimplices_2)

```

```

k1_cracs = lsimplices_1
k2_cracs = lsimplices_2

def names1():
    for j, p in enumerate(points_1):
        # Нумерує точки
        plt.text(p[0]-0.03, p[1]+0.03, j, ha='right')
    for j, s in enumerate(tri_1.simplices):
        # Нумерує трикутники
        p = points_1[s].mean(axis=0)
        print(p)
        plt.text(p[0], p[1], '%d' % j, ha='center')

def names2():
    for j, p in enumerate(points_2):
        # Нумерує точки
        plt.text(p[0]-0.03, p[1]+0.03, j, ha='right')
    for j, s in enumerate(tri_2.simplices):
        # Нумерує трикутники
        p = points_2[s].mean(axis=0)
        print(p)
        plt.text(p[0], p[1], '%d' % j, ha='center')

def TriangleCoord1():
    for r, k in enumerate(tri_1.simplices):
        if r < lsimplices_1:
            TriPoints = points_1[k]
            print('#', r, ':', TriPoints)
TriangleCoord1()

def TriangleCoord2():
    for r, k in enumerate(tri_2.simplices):
        if r < lsimplices_2:
            TriPoints = points_2[k]
            print('##', r, ':', TriPoints)
TriangleCoord2()

number_of_points_on_contur = [('n=', 17), ('I am happy?', True)]
n, happy = fedit(number_of_points_on_contur, title="Кількість точок на контурі")

cracs = []
Xcen_mas = []
Ycen_mas = []
P1_koef = []
alf_mas = []

```

```

for r, k in enumerate(tri_1.simplices):
    if r < lsimplices_1:
        TriPoints = points_1[k]
        x, y = TriPoints.T
        print('x:', x, 'y:', y)
        a = sqrt((x[0] - x[1]) ** 2 + (y[0] - y[1]) ** 2)
        b = sqrt((x[0] - x[2]) ** 2 + (y[0] - y[2]) ** 2)
        c = sqrt((x[1] - x[2]) ** 2 + (y[1] - y[2]) ** 2)
        print('#', r, ':', 'a=', a, 'b=', b, 'c=', c)
        Xcenter = (a * x[2] + b * x[1] + c * x[0]) / (a + b + c)
        Ycenter = (a * y[2] + b * y[1] + c * y[0]) / (a + b + c)
        print('#', r, ':', 'Xcenter=', Xcenter, 'Ycenter=', Ycenter)
        perim = a + b + c
        print('perim:', perim)
        pperim = perim / 2
        S = sqrt(pperim * (pperim - a) * (pperim - b) * (pperim - c))
        Radius = S / pperim
        print('#', r, 'Radius', ':', Radius)
        x = np.linspace(0, 11, 1000)
        y = np.linspace(-11, 11, 1000)
        X, Y = np.meshgrid(x, y)
        F = (X - Xcenter) ** 2 + (Y - Ycenter) ** 2 - Radius ** 2

        p1 = Radius
        print('p1 =', p1)
        p2 = 0
        h = Xcenter + 1j * Ycenter
        print('h =', h)
        Angle = random.randrange(0, 180, 10)
        print('Angle =', Angle)
        alf = radians(Angle)
        print('alf =', alf)
        number = random.randrange(5, 10, 1)
        print('number', number)
        koef = number / 10
        print('koef', koef)

        Xcen_mas.append(Xcenter)
        Ycen_mas.append(Ycenter)
        P1_koef.append(p1 * koef)
        alf_mas.append(alf)

        cracs.append(Param_crack(p1 * koef, p2, h, alf))

```

```

for r, k in enumerate(tri_2.simplices):
    if r < lsimplices_2:
        TriPoints = points_2[k]
        x, y = TriPoints.T
        print('x:', x, 'y:', y)
        a = sqrt((x[0] - x[1]) ** 2 + (y[0] - y[1]) ** 2)
        b = sqrt((x[0] - x[2]) ** 2 + (y[0] - y[2]) ** 2)
        c = sqrt((x[1] - x[2]) ** 2 + (y[1] - y[2]) ** 2)
        print('#', r, ':', 'a=', a, 'b=', b, 'c=', c)
        Xcenter = (a * x[2] + b * x[1] + c * x[0]) / (a + b + c)
        Ycenter = (a * y[2] + b * y[1] + c * y[0]) / (a + b + c)
        print('#', r, ':', 'Xcenter=', Xcenter, 'Ycenter=', Ycenter)

        perim = a + b + c
        print('perim:', perim)
        pperim = perim / 2
        S = sqrt(pperim * (pperim - a) * (pperim - b) * (pperim - c))
        Radius = S / pperim
        print('#', r, 'Radius', ':', Radius)
        x = np.linspace(0, 11, 1000)
        y = np.linspace(-11, 11, 1000)
        X, Y = np.meshgrid(x, y)
        F = (X - Xcenter) ** 2 + (Y - Ycenter) ** 2 - Radius ** 2

        p1 = Radius
        print('p1 =', p1)
        p2 = 0
        h = Xcenter + 1j * Ycenter
        print('h =', h)
        Angle = random.randrange(0, 180, 10)
        print('Angle =', Angle)
        alf = radians(Angle)
        print('alf =', alf)
        number = random.randrange(5, 10, 1)
        print('number', number)
        koef = number / 10
        print('koef', koef)

        Xcen_mas.append(Xcenter)
        Ycen_mas.append(Ycenter)
        P1_koef.append(p1 * koef)
        alf_mas.append(alf)

    cracs.append(Param_crack(p1 * koef, p2, h, alf))

for k, contur in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)]))
    plt.plot(z.real, z.imag)

```

```

plt.plot([0.0, 11.0], [0.0, 0.0], color='b', linestyle='--')
plt.grid()
plt.show()

# initial part
# Materials and cracks forms
datalist1 = [(None, '<b>Materials<b>'),
             ('Material 1', 1), ('Material 2', 2)]
mat, mat_ = fedit(datalist1, title="materials")

# dictionary mater_const['key'] contains list of const for material 'key'
# s11=s33=[0], s22=[1], s44=s66=[2], s55=[3], s12=s23=[4], s13=[5]
# g16=g34=[6], g21=g23=[7], g22=[8], p16=p34=[9], p21=p23=[10], p22=[11]
# bet11=bet33=[12], bet22=[13], nu11=nu33=[14], nu22=[15], hi11=hi33=[16], hi22=[17]
# mu1=[18], mu2=[19], mu3=[20], mu4=[21]

s0 = 1.e-6; g0 = 1.e-2; p0 = 1.e-5; bt0 = 1.e3; nu0 = 1.e-1; hi0 = 1.e-1
mater_const = dict.fromkeys(['M1', 'M2', 'M3'])
mater_const['M1'] = [22.260 * s0, 14.984 * s0, 47.481 * s0, 69.204 * s0, -6.437 * s0, \
                    -11.942 * s0, 109.22 * g0, -4.333 * g0, 8.016 * g0, 268.318 * p0, \
                    17.778 * p0, 31.206 * p0, 19.612 * bt0, 10.612 * bt0, 213.404 * nu0, \
                    -5.534 * nu0, 0.590 * hi0, 0.575 * hi0, 2.89987007j, 1.25351156j, \
                    -1.67633363e-01 + 0.44518972j, 1.67633363e-01 + 0.44518972j]
mater_const['M2'] = [10.745 * s0, 7.398 * s0, 7.637 * s0, 32.680 * s0, -2.542 * s0, \
                    -5.595 * s0, 2.054 * g0, -1.159 * g0, 2.458 * g0, 98.843 * p0, \
                    12.102 * p0, 22.268 * p0, 0.106 * bt0, 0.09 * bt0, -14.931 * nu0, \
                    -3.74 * nu0, 0.805 * hi0, 0.704 * hi0, 1.7671015j, 0.99501903j, \
                    -3.93881996e-01 + 0.72471621j, 3.93881996e-01 + 0.72471621j]
mater_const['M3'] = [7.165 * s0, 6.797 * s0, 19.912 * s0, 19.802 * s0, -2.337 * s0, \
                    -2.736 * s0, 2.028 * g0, -0.496 * g0, 1.157 * g0, 1.85 * p0, \
                    0.576 * p0, 1.186 * p0, 0.156 * bt0, 0.137 * bt0, -0.190 * nu0, \
                    -0.185 * nu0, 0.336 * hi0, 0.119 * hi0, 1.3066352j, 0.92818319j, \
                    0.80544586j, 0.59523266j]
mater_correspond = {1: 'M1', 2: 'M2', 3: 'M3'}

print('You choose the material upper ', mater_correspond[mat],
      '\n You choose the material lower halfplane ', mater_correspond[mat_])

# parameters of materials save in m_p1, mp2 and correspond vectors mu1 and mu2
m_p1 = mater_const[mater_correspond[mat]]
mu1 = m_p1[18:]
m_p2 = mater_const[mater_correspond[mat_]]
mu2 = m_p2[18:]

```

```

# initial condition at infinity
# enter sig11_ri,sig12i,sig22i,D1_ri,D2i,B1_ri,B2i
datalist2 = [(None, '<b> fields at infinity <b>'),
             ('sig11_1i', 1), ('sig12i', 0), ('sig22i', 0),
             ('D1_1i', 0), ('D2i', 0), ('B1_1i', 0),
             ('B2ip1_2', 0)]
fields = fedit(datalist2, title="Initial condition at infinity")
f_inf = list()
for f_i in fields:
    f_inf.append(float(f_i))
print_('\nsolution given for \n sig11_1i=', f_inf[0], ' sig12i=', f_inf[1], \
      '\nsig22i=', f_inf[2], '\n D1_1i=', f_inf[3], ' D2i=', f_inf[4], \
      '\n B1_1i=', f_inf[5], ' B2i=', f_inf[6])
# input sig11_2i=[7],D1_2i=[8],B1_2i=[9],E2_1i=[10],E2_2i=[11],
#      H2_1i=[10],H2_2i=[11]
sig11_2 = (m_p1[0] * f_inf[0] + (m_p1[4] - m_p2[4]) * f_inf[1] + (m_p1[7] - m_p2[7]) * f_inf[4] \
          + (m_p1[10] - m_p2[10]) * f_inf[6]) / m_p2[0]
f_inf.append(sig11_2) # f_inf[7]=sig11_2
el = np.mat([[m_p2[12], m_p2[14]], [m_p2[14], m_p2[16]]]).I * \
      (np.mat([[m_p1[12], m_p1[14]], [m_p1[14], m_p1[16]]]) * \
      np.mat([[f_inf[3]], [f_inf[5]]]) + f_inf[1] * \
      np.mat([[m_p2[6] - m_p1[6]], [m_p2[9] - m_p1[9]]]))
f_inf.extend([el[0, 0], el[1, 0]]) # f_inf[8]=D1_2i, f_inf[9]=B1_2i
E2_1i = -m_p1[7] * f_inf[0] - m_p1[8] * f_inf[2] + m_p1[13] * f_inf[4] + -m_p1[15] * f_inf[6]
E2_2i = -m_p2[7] * f_inf[7] - m_p2[8] * f_inf[2] + m_p2[13] * f_inf[4] + -m_p2[15] * f_inf[6]

H2_1i = -m_p1[10] * f_inf[0] - m_p1[11] * f_inf[2] + \
        m_p1[15] * f_inf[4] + -m_p1[17] * f_inf[6]
H2_2i = -m_p2[10] * f_inf[7] - m_p2[11] * f_inf[2] + \
        m_p2[15] * f_inf[4] + -m_p2[17] * f_inf[6]
f_inf.extend([E2_1i, E2_2i, H2_1i, H2_2i])

datalist3 = [(None, '<b> pressure on the banks of the cracs press_r<b>'),
             ('pres_1', 1), ('pres_2', 0)]
press_r = fedit(datalist3, title="Pressure")
press = list()

for p_i in press_r:
    press.append(float(p_i))
print_('\nsolution given for \n press_1=', press[0], '\n press_2=', press[1])

# construct the polynoms L_ij(1,mu) from mu as function of material's constants
L11 = lambda x: np.poly1d([x[0], 0., 2 * x[4] + x[2], 0., x[1]])
L12 = lambda x: np.poly1d([-x[7] + x[6]], 0., -x[8])
L13 = lambda x: np.poly1d([-x[10] + x[9]], 0., -x[11])
L22 = lambda x: np.poly1d([-x[12], 0., -x[13]])
L23 = lambda x: np.poly1d([-x[14], 0., -x[15]])
L33 = lambda x: np.poly1d([-x[16], 0., -x[17]])
# construct the polynoms A_ij(1,mu) of mu-cofactors of matrix L as function of material's constants
A11 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L22(x), L33(x)), -np.polymul(L23(x), L23(x)))
A12 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L23(x), L13(x)), -np.polymul(L12(x), L33(x)))
A13 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L12(x), L23(x)), -np.polymul(L22(x), L13(x)))
A22 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L11(x), L33(x)), -np.polymul(L13(x), L13(x)))
A23 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L12(x), L13(x)), -np.polymul(L11(x), L23(x)))
A33 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L11(x), L22(x)), -np.polymul(L12(x), L12(x)))
# construct the matrices of constants c_1,c_2- for upper and lower halfspaces

```



```

c_1 = np.mat([[mu1[k] * A11(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
             [-A11(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
             [A12(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
             [A13(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)]]), \
            dtype=complex)
c_2 = np.mat([[mu2[k] * A11(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
             [-A11(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
             [A12(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
             [A13(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)]]), \
            dtype=complex)
# construct the matrices of constants m_1, m_2- for upper and lower halfspaces
m_1 = np.mat([[m_p1[0] * (mu1[k] ** 2) + m_p1[4] * A11(m_p1)(mu1[k]) - \
              m_p1[7] * A12(m_p1)(mu1[k]) - \
              m_p1[10] * A13(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
             [(m_p1[4] * mu1[k] + m_p1[1] / mu1[k]) * A11(m_p1)(mu1[k]) - \
              m_p1[8] / mu1[k] * A12(m_p1)(mu1[k]) - \
              m_p1[11] / mu1[k] * A13(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
             [mu1[k] * (m_p1[6] * A11(m_p1)(mu1[k]) + m_p1[12] * A12(m_p1)(mu1[k]) + \
              m_p1[14] * A13(m_p1)(mu1[k])) for k in range(4)], \
             [mu1[k] * (m_p1[9] * A11(m_p1)(mu1[k]) + m_p1[14] * A12(m_p1)(mu1[k]) + \
              m_p1[16] * A13(m_p1)(mu1[k])) for k in range(4)]]), \
            dtype=complex)
#print np.linalg.det(m_1)

m_2 = np.mat([[m_p2[0] * (mu2[k] ** 2) + m_p2[4] * A11(m_p2)(mu2[k]) - \
              m_p2[7] * A12(m_p2)(mu2[k]) - \
              m_p2[10] * A13(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
             [(m_p2[4] * mu2[k] + m_p2[1] / mu2[k]) * A11(m_p2)(mu2[k]) - \
              m_p2[8] / mu2[k] * A12(m_p2)(mu2[k]) - \
              m_p2[11] / mu2[k] * A13(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
             [mu2[k] * (m_p2[6] * A11(m_p2)(mu2[k]) + m_p2[12] * A12(m_p2)(mu2[k]) + \
              m_p2[14] * A13(m_p2)(mu2[k])) for k in range(4)], \
             [mu2[k] * (m_p2[9] * A11(m_p2)(mu2[k]) + m_p2[14] * A12(m_p2)(mu2[k]) + \
              m_p2[16] * A13(m_p2)(mu2[k])) for k in range(4)]]), \
            dtype=complex)

# solution of sistem (149)-as result matrix alf_1[k,m], alf_2[k,m] Brow, 4column
ckm_1 = np.array([[A11(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
                 [-mu1[k] * A11(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
                 [(m_p1[0] * (mu1[k] ** 2) + m_p1[4] * A11(m_p1)(mu1[k]) - \
                  m_p1[7] * A12(m_p1)(mu1[k]) - \
                  m_p1[10] * A13(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
                 [(m_p1[4] * mu1[k] + m_p1[1] / mu1[k]) * A11(m_p1)(mu1[k]) - \
                  m_p1[8] / mu1[k] * A12(m_p1)(mu1[k]) - \
                  m_p1[11] / mu1[k] * A13(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
                 [-A13(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
                 [mu1[k] * (m_p1[9] * A11(m_p1)(mu1[k]) + m_p1[14] * A12(m_p1)(mu1[k]) + \
                  m_p1[16] * A13(m_p1)(mu1[k])) for k in range(4)], \
                 [-A12(m_p1)(mu1[k]) for k in range(4)], \
                 [mu1[k] * (m_p1[6] * A11(m_p1)(mu1[k]) + m_p1[12] * A12(m_p1)(mu1[k]) + \
                  m_p1[14] * A13(m_p1)(mu1[k])) for k in range(4)]]), \
                dtype=complex)

ckm_2 = np.array([[A11(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
                 [-mu2[k] * A11(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
                 [(m_p2[0] * (mu2[k] ** 2) + m_p2[4] * A11(m_p2)(mu2[k]) - \
                  m_p2[7] * A12(m_p2)(mu2[k]) - \
                  m_p2[10] * A13(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
                 [(m_p2[4] * mu2[k] + m_p2[1] / mu2[k]) * A11(m_p2)(mu2[k]) - \
                  m_p2[8] / mu2[k] * A12(m_p2)(mu2[k]) - \
                  m_p2[11] / mu2[k] * A13(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
                 [-A13(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
                 [mu2[k] * (m_p2[9] * A11(m_p2)(mu2[k]) + m_p2[14] * A12(m_p2)(mu2[k]) + \
                  m_p2[16] * A13(m_p2)(mu2[k])) for k in range(4)], \
                 [-A12(m_p2)(mu2[k]) for k in range(4)], \
                 [mu2[k] * (m_p2[6] * A11(m_p2)(mu2[k]) + m_p2[12] * A12(m_p2)(mu2[k]) + \
                  m_p2[14] * A13(m_p2)(mu2[k])) for k in range(4)]]), \
                dtype=complex)

```

```

# solve the sistem for first half medium  $Ckm * alf_1 = Bkm$ 
Ckm_ = np.mat(np.hstack((np.conj(ckm_1), ckm_2)))
Bkm = np.mat(ckm_1)
alf_1 = Ckm_.I * Bkm
# solve the sistem for second half medium  $Ckm * alf_2 = Bkm$ 
Ckm_ = np.mat(np.hstack((np.conj(ckm_2), ckm_1)))
Bkm = np.mat(ckm_2)
alf_2 = Ckm_.I * Bkm

)for k,contur in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)]))
)    plt.plot(z.real,z.imag)
plt.plot(np.linspace(0,10,n),np.zeros(n))
plt.xlabel('$x_1$', fontsize='large')
plt.ylabel('$x_2$', fontsize='large')
plt.title('Складений простір з випадковими тріщинами', fontsize='large')

# get a matrix of system and right part of equation  $AA*W=BB$ 

field_11 = np.array([[press[0] + f_inf[0]], [f_inf[1]], [f_inf[3]], [f_inf[5]]])
field_21 = np.array([[f_inf[1]], [press[0] + f_inf[2]], [f_inf[4]], [f_inf[6]]])
field_12 = np.array([[press[1] + f_inf[7]], [f_inf[1]], [f_inf[8]], [f_inf[9]]])
field_22 = np.array([[f_inf[1]], [press[1] + f_inf[2]], [f_inf[4]], [f_inf[6]]])

# interpolation points  $T_n(bt)=0$ 
bet = [np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)]
# colocation points  $U_{(n-1)}(bt_0)=0$ 
bet0 = [np.cos(pi * (l + 1) / n) for l in range(n - 1)]
# first integral equation
)for k0, cont0 in enumerate(copy.deepcopy(cracs[:k1_cracs])):
|     for bt0 in bet0:
|         for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs[:k1_cracs])):
|             for bt in bet:
|                 g_11 = np.zeros((4, 4), 'complex')
|                 for jj in range(4):
|                     for mm in range(4):
|                         g_11[jj, mm] = G_jm_r(c_1, alf_1, cont0.ak(bt0, mu1), cont.zk(bt, mu1), cont0.zk(bt0, mu1), jj,
|                                     mm)
|                 if k == 0 and bt == bet[0]:
|                     gg_1 = np.hstack((g_11, np.conj(g_11)))
|                 else:
|                     gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((g_11, np.conj(g_11))))))
|         for cont in copy.deepcopy(cracs[k1_cracs:]):
|             for bt in bet:
|                 G_12 = np.zeros((4, 4), 'complex')
|                 for jj in range(4):
|                     for mm in range(4):
|                         G_12[jj, mm] = G_jm_r(c_1, alf_2, cont0.ak(bt0, mu1), cont.zk(bt, mu2), cont0.zk(bt0, mu1), jj,
|                                     mm)
|                 gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((G_12, np.conj(G_12))))))
|         N_1 = Nk_r(field_11, field_21, cont0.eipsi(bt0))
|
|         if k0 == 0 and bt0 == bet0[0]:
|             AA = copy.deepcopy(gg_1)
|             BB = copy.deepcopy(N_1)
|         else:
|             AA = np.vstack((AA, gg_1))
|             BB = np.vstack((BB, N_1))

```

```

# second integral equation
for cont0 in copy.deepcopy(cracs[k1_cracs:]):
    for bt0 in bet0:
        for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs[:k1_cracs])):
            for bt in bet:
                G_21 = np.zeros((4, 4), 'complex')
                for jj in range(4):
                    for mm in range(4):
                        G_21[jj, mm] = G_jm_r(c_2, alf_1, cont0.ak(bt0, mu2), cont.zk(bt, mu1), cont0.zk(bt0, mu2), jj,
                                                mm)
                if k == 0 and bt == bet[0]:
                    gg_1 = np.hstack((G_21, np.conj(G_21)))
                else:
                    gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((G_21, np.conj(G_21)))))
            for cont in copy.deepcopy(cracs[k1_cracs:]):
                for bt in bet:
                    g_22 = np.zeros((4, 4), 'complex')
                    for jj in range(4):
                        for mm in range(4):
                            g_22[jj, mm] = g_jm_r(c_2, alf_2, cont0.ak(bt0, mu2), cont.zk(bt, mu2), cont0.zk(bt0, mu2), jj,
                                                    mm)
                    gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((g_22, np.conj(g_22)))))
                N_2 = Nk_r(field_12, field_22, cont0.eipsi(bt0))
                AA = np.vstack((AA, gg_1))
                BB = np.vstack((BB, N_2))

# additional conditions
for i in range(n):
    if i == 0:
        g_11 = np.hstack((m_1, -np.conj(m_1)))
        g_22 = np.hstack((m_2, -np.conj(m_2)))
    else:
        g_11 = np.hstack((g_11, m_1, -np.conj(m_1)))
        g_22 = np.hstack((g_22, m_2, -np.conj(m_2)))
for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs[:k1_cracs])):
    GG = np.hstack(
        (np.zeros((4, 8 * k * n), 'complex'), g_11, np.zeros((4, 8 * n * (k1_cracs - 1 - k + k2_cracs)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))
for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs[k1_cracs:])):
    GG = np.hstack(
        (np.zeros((4, 8 * n * (k + k1_cracs)), 'complex'), g_22, np.zeros((4, 8 * n * (k2_cracs - 1 - k)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))

# algebraic equations
for i in range(n):
    if i == 0:
        g_11 = np.hstack((c_1, -np.conj(c_1), np.zeros((4, 8 * (n - 1))))))
        g_22 = np.hstack((c_2, -np.conj(c_2), np.zeros((4, 8 * (n - 1))))))
    else:
        g_11 = np.vstack((g_11, np.hstack((np.zeros((4, 8 * i)), c_1, -np.conj(c_1), np.zeros((4, 8 * (n - i - 1)))))))
        g_22 = np.vstack((g_22, np.hstack((np.zeros((4, 8 * i)), c_2, -np.conj(c_2), np.zeros((4, 8 * (n - i - 1)))))))

for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs[:k1_cracs])):
    GG = np.hstack((np.zeros((4 * n, 8 * k * n), 'complex'), g_11,
                    np.zeros((4 * n, 8 * n * (k1_cracs - 1 - k + k2_cracs)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))

```



```

bt0 = -1.
for k, cont in enumerate(cracs[:k1_cracs]):
    d_1_ = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu1) * A11(m_p1)(mu1),
        cont.bk(bt0, mu1) * A11(m_p1)(mu1),
        [A12(m_p1)(mu_) for mu_ in mu1],
        [A13(m_p1)(mu_) for mu_ in mu1],
        [mu_ * (m_p1[6] * A11(m_p1)(mu_) + m_p1[12] * A12(m_p1)(mu_) +
        m_p1[14] * A13(m_p1)(mu_)) for mu_ in mu1],
        [mu_ * (m_p1[9] * A11(m_p1)(mu_) + m_p1[14] * A12(m_p1)(mu_) +
        m_p1[16] * A13(m_p1)(mu_)) for mu_ in mu1]])
    # d_1_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
    d_1_1 = np.real(d_1_ * np.mat(omeg_kr_1_1[k, :4]).T)
    # gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(c_1*omeg11.T).T*omeg11.T)
    gamma_1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(c_1 * np.mat(omeg_kr_1_1[k, :4]).T)).T)
        * np.mat(omeg_kr_1_1[k, :4]).T)
    d_1_1 = np.vstack((np.array(d_1_1), np.array(gamma_1)))
    if k == 0:
        koef_1_1 = d_1_1
    else:
        koef_1_1 = np.vstack((koef_1_1, d_1_1))
koef_1_1 = koef_1_1.reshape([-1, 7])

if k2_cracs != 0:
    # характеристики руйнування в вершинах тріщин +-1, що розташовані у нижній напівплощині
    bt0 = 1.
    for k, cont in enumerate(cracs[k1_cracs:]):
        d_11 = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
            cont.bk(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
            [A12(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
            [A13(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
            [mu_ * (m_p2[6] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[12] * A12(m_p2)(mu_) +
            m_p2[14] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2],
            [mu_ * (m_p2[9] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[14] * A12(m_p2)(mu_) +
            m_p2[16] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2]])
        # d_11=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
        d_11 = np.real(d_11 * np.mat(omeg_kr_21[k, :4]).T)
        gamma1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_2.T * np.real(c_2 * np.mat(omeg_kr_21[k, :4]).T)).T *
            np.mat(omeg_kr_21[k, :4]).T)
        d_11 = np.vstack((np.array(d_11), np.array(gamma1)))
        if k == 0:
            koef_21 = d_11
        else:
            koef_21 = np.vstack((koef_21, d_11))
koef_21 = koef_21.reshape([-1, 7])

# at the tip bt0=-1

```

```

bt0 = -1.
for k, cont in enumerate(cracs[k1_cracs:]):
    d_1_ = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
                                                cont.bk(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
                                                [A12(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
                                                [A13(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
                                                [mu_ * (m_p2[6] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[12] * A12(m_p2)(mu_) +
                                                  m_p2[14] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2],
                                                [mu_ * (m_p2[9] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[14] * A12(m_p2)(mu_) +
                                                  m_p2[16] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2]])

    # d_1_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
    d_1_1 = np.real(d_1_ * np.mat(omeg_kr_2_1[k, :4]).T)
    # gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(c_2*omeg_kr_2_1.T).T*omeg11.T
    gamma_1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(c_2 * np.mat(omeg_kr_2_1[k, :4]).T)).T
                                                * np.mat(omeg_kr_2_1[k, :4]).T)

    d_1_1 = np.vstack((np.array(d_1_1), np.array(gamma_1)))
    if k == 0:
        koef_2_1 = d_1_1
    else:
        koef_2_1 = np.vstack((koef_2_1, d_1_1))
    koef_2_1 = koef_2_1.reshape([-1, 7])

index1 = ['crack ' + '${(1)}$' + str(k) for k in range(1, k1_cracs + 1)]
index1.extend(['crack ' + '${(2)}$ ' + str(k) for k in range(1, k2_cracs + 1)])

df1 = pd.DataFrame(np.vstack((koef_1_1, koef_2_1)),
                   columns=('$K_I(1)$', '$K_{II}(1)$', '$K_D(1)$', '$K_B(1)$', '$K_E(1)$', '$K_H(1)$', '$\gamma(1)$'),
                   index=index1)
df_1 = pd.DataFrame(np.vstack((koef_1_1, koef_2_1)),
                   columns=('$K_I(-1)$', '$K_{II}(-1)$', '$K_D(-1)$', '$K_B(-1)$', '$K_E(-1)$', '$K_H(-1)$', '$\gamma(-1)$'),
                   index=index1)
df_1.insert(0, 'вершина \n $\beta=-1$', [np.around(cont.z(-1), 3) for cont in cracs])
df1.insert(0, 'вершина $\beta=1$', [np.around(cont.z(1), 3) for cont in cracs])
df_1.insert(1, '$p_1$', [np.around(cont.p1, 3) for cont in cracs])
df1.insert(1, '$p_1$', [np.around(cont.p1, 3) for cont in cracs])
df_1.insert(2, '$h$', [np.around(cont.h, 3) for cont in cracs])
df1.insert(2, '$h$', [np.around(cont.h, 3) for cont in cracs])
df_1.insert(3, '$\alpha/\pi$', [np.around(cont.alf / pi, 3) for cont in cracs])
df1.insert(3, '$\alpha/\pi$', [np.around(cont.alf / pi, 3) for cont in cracs])

df1
df_1

count=15
plt.rc('font',**{'family':'Times New Roman'})
for k,contur in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    for alf in np.linspace(-pi/4,pi/4,count):
        if k ==0:
            contur.alf= alf
            z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)]))
            plt.plot(z.real,z.imag)
        z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)]))
        plt.plot(z.real,z.imag)
plt.plot(np.linspace(-2,10,n),np.zeros(n))
plt.xlabel('$x_1$', fontsize='large')
plt.ylabel('$x_2$', fontsize='large')
plt.title('Складений простір з випадковими тріщинами', fontsize='large')
plt.show()

```

```

# кількість позицій повороту тріщини
count = 21
# interpolation points  $T_n(bt)=0$  on the crack
bet = np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)])
# colocation points  $U_{(n-1)}(bt_0)=0$  on the crack
bet0 = np.array([np.cos(pi * (l + 1) / n) for l in range(n - 1)])
cracs1 = copy.deepcopy(cracs)
# get a matrix of system and right part of equation  $AA*W=BB$ 

field_11 = np.array([[press[0] + f_inf[0]], [f_inf[1]], [f_inf[3]], [f_inf[5]]])
field_21 = np.array([[f_inf[1]], [press[0] + f_inf[2]], [f_inf[4]], [f_inf[6]]])
field_12 = np.array([[press[1] + f_inf[7]], [f_inf[1]], [f_inf[8]], [f_inf[9]]])
field_22 = np.array([[f_inf[1]], [press[1] + f_inf[2]], [f_inf[4]], [f_inf[6]]])

for k_alf, alf in enumerate(np.linspace(-pi / 4, pi / 4, count)):
    cracs1[0].alf = alf
    # first integral equation
    for k0, cont0 in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[:k1_cracs])):
        for bt0 in bet0:
            for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[:k1_cracs])):
                for bt in bet:
                    g_11 = np.zeros((4, 4), 'complex')
                    for jj in range(4):
                        for mm in range(4):
                            g_11[jj, mm] = g_jm_r(c_1, alf_1, cont0.ak(bt0, mu1), cont.zk(bt, mu1), cont0.zk(bt0, mu1),
                                                    jj, mm)
                    if k == 0 and bt == bet[0]:
                        gg_1 = np.hstack((g_11, np.conj(g_11)))
                    else:
                        gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((g_11, np.conj(g_11))))))
                for cont in copy.deepcopy(cracs1[k1_cracs:]):
                    for bt in bet:
                        G_12 = np.zeros((4, 4), 'complex')
                        for jj in range(4):
                            for mm in range(4):
                                G_12[jj, mm] = G_jm_r(c_1, alf_2, cont0.ak(bt0, mu1), cont.zk(bt, mu2), cont0.zk(bt0, mu1),
                                                        jj, mm)
                        gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((G_12, np.conj(G_12))))))
                N_1 = Nk_r(field_11, field_21, cont0.eipsi(bt0))
                if k0 == 0 and bt0 == bet0[0]:
                    AA = copy.deepcopy(gg_1)
                    BB = copy.deepcopy(N_1)
                else:
                    AA = np.vstack((AA, gg_1))
                    BB = np.vstack((BB, N_1))

# second integral equation
for cont0 in copy.deepcopy(cracs1[k1_cracs:]):
    for bt0 in bet0:
        for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[:k1_cracs])):
            for bt in bet:
                G_21 = np.zeros((4, 4), 'complex')
                for jj in range(4):
                    for mm in range(4):
                        G_21[jj, mm] = G_jm_r(c_2, alf_1, cont0.ak(bt0, mu2), cont.zk(bt, mu1), cont0.zk(bt0, mu2),
                                                jj, mm)
                if k == 0 and bt == bet[0]:
                    gg_1 = np.hstack((G_21, np.conj(G_21)))
                else:
                    gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((G_21, np.conj(G_21))))))

```

```

        for cont in copy.deepcopy(cracs1[k1_cracs:]):
            for bt in bet:
                g_22 = np.zeros((4, 4), 'complex')
                for jj in range(4):
                    for mm in range(4):
                        g_22[jj, mm] = g_jm_r(c_2, alf_2, cont0.ak(bt0, mu2), cont0.zk(bt, mu2), cont0.zk(bt0, mu2),
                                                jj, mm)
                    gg_1 = np.hstack((gg_1, np.hstack((g_22, np.conj(g_22))))))
                N_2 = Nk_r(field_12, field_22, cont0.eipsi(bt0))
                AA = np.vstack((AA, gg_1))
                BB = np.vstack((BB, N_2))

# additional conditions
for i in range(n):
    if i == 0:
        g_11 = np.hstack((m_1, -np.conj(m_1)))
        g_22 = np.hstack((m_2, -np.conj(m_2)))
    else:
        g_11 = np.hstack((g_11, m_1, -np.conj(m_1)))
        g_22 = np.hstack((g_22, m_2, -np.conj(m_2)))
for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[:k1_cracs])):
    GG = np.hstack((np.zeros((4, 8 * k * n), 'complex'), g_11,
                    np.zeros((4, 8 * n * (k1_cracs - 1 - k + k2_cracs)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))
for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[k1_cracs:])):
    GG = np.hstack((np.zeros((4, 8 * n * (k + k1_cracs)), 'complex'), g_22,
                    np.zeros((4, 8 * n * (k2_cracs - 1 - k)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))

# algebraic equations
for i in range(n):
    if i == 0:
        g_11 = np.hstack((c_1, -np.conj(c_1), np.zeros((4, 8 * (n - 1))))))
        g_22 = np.hstack((c_2, -np.conj(c_2), np.zeros((4, 8 * (n - 1))))))
    else:
        g_11 = np.vstack(
            (g_11, np.hstack((np.zeros((4, 8 * i)), c_1, -np.conj(c_1), np.zeros((4, 8 * (n - i - 1)))))))
        g_22 = np.vstack(
            (g_22, np.hstack((np.zeros((4, 8 * i)), c_2, -np.conj(c_2), np.zeros((4, 8 * (n - i - 1)))))))

for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[:k1_cracs])):
    GG = np.hstack((np.zeros((4 * n, 8 * k * n), 'complex'), g_11,
                    np.zeros((4 * n, 8 * n * (k1_cracs - 1 - k + k2_cracs)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))

if k2_cracs != 0:
    for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1[k1_cracs:])):
        GG = np.hstack((np.zeros((4 * n, 8 * n * (k + k1_cracs)), 'complex'), g_22,
                        np.zeros((4 * n, 8 * n * (k2_cracs - 1 - k)), 'complex')))
        AA = np.vstack((AA, GG))

AA = np.mat(AA)
# right part
BB = np.mat((np.vstack((BB, np.zeros((4 * (n + 1) * (k1_cracs + k2_cracs), 1), 'complex')))) * 2 * n)
W = AA.I * BB
omeg = np.array(W[:8 * n]).reshape(n, -1)
for k in range(1, k1_cracs + k2_cracs):
    omeq = np.hstack((omeq, np.array(W[8 * n * k:8 * n * (k + 1)]).reshape(n, -1)))

# розділимо масив на частини, що відповідають лише щільностям у верхній півплощині і у нижній окремо
omeq_kr_1 = omeq[:, :8 * k1_cracs]

omeq_kr_2 = omeq[:, 8 * k1_cracs:]

```



```

# value of functions  $\omega_{\text{meg}}(1), \omega_{\text{meg}}(-1)$ 
ctan1 = np.array([(-1) ** (k + 2) / np.tan((2 * (k + 1) - 1) * pi / 4 / n) / n for k in range(n)])
tan_1 = np.array([(-1) ** (k + 1 + n) * np.tan((2 * (k + 1) - 1) * pi / 4 / n) / n for k in range(n)])

omeg_kr_11 = np.dot(ctan1, omeq_kr_1).reshape(-1, 8)
omeg_kr_1_1 = np.dot(tan_1, omeq_kr_1).reshape(-1, 8)

omeg_kr_21 = np.dot(ctan1, omeq_kr_2).reshape(-1, 8)
omeg_kr_2_1 = np.dot(tan_1, omeq_kr_2).reshape(-1, 8)

# характеристики руйнування в вершинах трищип +-1, що розташовані у верхній напівплощині
bt0 = 1.
for k, cont in enumerate(cracs1[:k1_cracs]):
    d_11 = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu1) * A11(m_p1)(mu1),
                                                cont.bk(bt0, mu1) * A11(m_p1)(mu1),
                                                [A12(m_p1)(mu_) for mu_ in mu1],
                                                [A13(m_p1)(mu_) for mu_ in mu1],
                                                [mu_ * (m_p1[6] * A11(m_p1)(mu_) + m_p1[12] * A12(m_p1)(mu_) +
                                                  m_p1[14] * A13(m_p1)(mu_)) for mu_ in mu1],
                                                [mu_ * (m_p1[9] * A11(m_p1)(mu_) + m_p1[14] * A12(m_p1)(mu_) +
                                                  m_p1[16] * A13(m_p1)(mu_)) for mu_ in mu1]])

    # d_11=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
    d_11 = np.real(d_11 * np.mat(omeg_kr_11[k, :4]).T)

    # gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(c_1*omeg11.T).T*omeg11.T
    gamma1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(c_1 * np.mat(omeg_kr_11[k, :4]).T)).T *
                                                np.mat(omeg_kr_11[k, :4]).T)

    d_11 = np.vstack((np.array(d_11), np.array(gamma1)))
    if k == 0:
        koef_11 = d_11
    else:
        koef_11 = np.vstack((koef_11, d_11))
koef_11 = koef_11.reshape([-1, 7])

# at the tip bt0=-1

bt0 = -1.
for k, cont in enumerate(cracs1[:k1_cracs]):
    d_1_ = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu1) * A11(m_p1)(mu1),
                                                cont.bk(bt0, mu1) * A11(m_p1)(mu1),
                                                [A12(m_p1)(mu_) for mu_ in mu1],
                                                [A13(m_p1)(mu_) for mu_ in mu1],
                                                [mu_ * (m_p1[6] * A11(m_p1)(mu_) + m_p1[12] * A12(m_p1)(mu_) +
                                                  m_p1[14] * A13(m_p1)(mu_)) for mu_ in mu1],
                                                [mu_ * (m_p1[9] * A11(m_p1)(mu_) + m_p1[14] * A12(m_p1)(mu_) +
                                                  m_p1[16] * A13(m_p1)(mu_)) for mu_ in mu1]])

    # d_1_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
    d_1_1 = np.real(d_1_ * np.mat(omeg_kr_1_1[k, :4]).T)
    # gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(c_1*omeg11.T).T*omeg11.T
    gamma_1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(c_1 * np.mat(omeg_kr_1_1[k, :4]).T)).T *
                                                * np.mat(omeg_kr_1_1[k, :4]).T)

    d_1_1 = np.vstack((np.array(d_1_1), np.array(gamma_1)))
    if k == 0:
        koef_1_1 = d_1_1
    else:
        koef_1_1 = np.vstack((koef_1_1, d_1_1))
koef_1_1 = koef_1_1.reshape([-1, 7])

```

```

if k2_cracs != 0:
    # характеристики руйнування в вершинах тріщин +-1, що розташовані у нижній напівплощині
    bt0 = 1.
    for k, cont in enumerate(cracs1[k1_cracs:]):
        d_11 = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
                                                    cont.bk(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
                                                    [A12(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
                                                    [A13(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
                                                    [mu_ * (m_p2[6] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[12] * A12(m_p2)(mu_) +
                                                    m_p2[14] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2],
                                                    [mu_ * (m_p2[9] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[14] * A12(m_p2)(mu_) +
                                                    m_p2[16] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2]])

        # d_11=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
        d_11 = np.real(d_11 * np.mat(omeg_kr_21[k, :4]).T)
        gamma1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_2.T * np.real(c_2 * np.mat(omeg_kr_21[k, :4]).T)).T *
                                                np.mat(omeg_kr_21[k, :4]).T)
        d_11 = np.vstack((np.array(d_11), np.array(gamma1)))
        if k == 0:
            koef_21 = d_11
        else:
            koef_21 = np.vstack((koef_21, d_11))
    koef_21 = koef_21.reshape([-1, 7])

    # at the tip bt0=-1

    bt0 = -1.
    for k, cont in enumerate(cracs1[k1_cracs:]):
        d_1_1 = np.sqrt(pi / cont.ds(bt0)) * np.mat([cont.ak(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
                                                    cont.bk(bt0, mu2) * A11(m_p2)(mu2),
                                                    [A12(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
                                                    [A13(m_p2)(mu_) for mu_ in mu2],
                                                    [mu_ * (m_p2[6] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[12] * A12(m_p2)(mu_) +
                                                    m_p2[14] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2],
                                                    [mu_ * (m_p2[9] * A11(m_p2)(mu_) + m_p2[14] * A12(m_p2)(mu_) +
                                                    m_p2[16] * A13(m_p2)(mu_)) for mu_ in mu2]])

        # d_1_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH] bt=1
        d_1_1 = np.real(d_1_1 * np.mat(omeg_kr_2_1[k, :4]).T)
        # gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(c_2*omeg_kr_2_1.T).T*omeg11.T)
        gamma_1 = pi / 4 / cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(c_2 * np.mat(omeg_kr_2_1[k, :4]).T)).T *
                                                * np.mat(omeg_kr_2_1[k, :4]).T)
        d_1_1 = np.vstack((np.array(d_1_1), np.array(gamma_1)))
        if k == 0:
            koef_2_1 = d_1_1
        else:
            koef_2_1 = np.vstack((koef_2_1, d_1_1))
    koef_2_1 = koef_2_1.reshape([-1, 7])

    dis1 = [np.abs(cracs1[k].z(1) - cracs1[0].z(1)) for k in range(k1_cracs + k2_cracs)]
    dis2 = [np.abs(cracs1[k].z(1) - cracs1[0].z(-1)) for k in range(k1_cracs + k2_cracs)]
    dis = np.array([min(dis1[k], dis2[k]) for k in range(k1_cracs + k2_cracs)]).reshape([-1, 1])
    dis1 = [np.abs(cracs1[k].z(-1) - cracs1[0].z(1)) for k in range(k1_cracs + k2_cracs)]
    dis2 = [np.abs(cracs1[k].z(-1) - cracs1[0].z(-1)) for k in range(k1_cracs + k2_cracs)]
    dis_ = np.array([min(dis1[k], dis2[k]) for k in range(k1_cracs + k2_cracs)]).reshape([-1, 1])

```

```

if k_alf == 0:
    dist1 = np.vstack((alf / pi, dis))
    k_alf1_KI = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 0].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 0].reshape([-1, 1])))
    k_alf1_KII = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 1].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 1].reshape([-1, 1])))
    k_alf1_KD = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 2].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 2].reshape([-1, 1])))
    k_alf1_KB = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 3].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 3].reshape([-1, 1])))
    k_alf1_KE = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 4].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 4].reshape([-1, 1])))
    k_alf1_KH = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 5].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 5].reshape([-1, 1])))
    k_alf1_gam = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 6].reshape([-1, 1]), koef_21[:, 6].reshape([-1, 1])))
    dist_1 = np.vstack((alf / pi, dis_))
    k_alf_1_KI = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 0].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 0].reshape([-1, 1])))
    k_alf_1_KII = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 1].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 1].reshape([-1, 1])))
    k_alf_1_KD = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 2].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 2].reshape([-1, 1])))
    k_alf_1_KB = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 3].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 3].reshape([-1, 1])))
    k_alf_1_KE = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 4].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 4].reshape([-1, 1])))
    k_alf_1_KH = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 5].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 5].reshape([-1, 1])))
    k_alf_1_gam = np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 6].reshape([-1, 1]), koef_2_1[:, 6].reshape([-1, 1])))

else:
    dist1 = np.hstack((dist1, np.vstack((alf / pi, dis))))
    k_alf1_KI = np.hstack((k_alf1_KI, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 0].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 0].reshape([-1, 1])))))
    k_alf1_KII = np.hstack((k_alf1_KII, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 1].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 1].reshape([-1, 1])))))
    k_alf1_KD = np.hstack((k_alf1_KD, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 2].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 2].reshape([-1, 1])))))
    k_alf1_KB = np.hstack((k_alf1_KB, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 3].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 3].reshape([-1, 1])))))
    k_alf1_KE = np.hstack((k_alf1_KE, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 4].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 4].reshape([-1, 1])))))
    k_alf1_KH = np.hstack((k_alf1_KH, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 5].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 5].reshape([-1, 1])))))
    k_alf1_gam = np.hstack((k_alf1_gam, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_11[:, 6].reshape([-1, 1]),
                                                koef_21[:, 6].reshape([-1, 1])))))

    dist_1 = np.hstack((dist_1, np.vstack((alf / pi, dis_))))
    k_alf_1_KI = np.hstack((k_alf_1_KI, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 0].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 0].reshape([-1, 1])))))
    k_alf_1_KII = np.hstack((k_alf_1_KII, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 1].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 1].reshape([-1, 1])))))
    k_alf_1_KD = np.hstack((k_alf_1_KD, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 2].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 2].reshape([-1, 1])))))
    k_alf_1_KB = np.hstack((k_alf_1_KB, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 3].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 3].reshape([-1, 1])))))
    k_alf_1_KE = np.hstack((k_alf_1_KE, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 4].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 4].reshape([-1, 1])))))

    k_alf_1_KH = np.hstack((k_alf_1_KH, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 5].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 5].reshape([-1, 1])))))
    k_alf_1_gam = np.hstack((k_alf_1_gam, np.vstack((np.array(alf / pi), koef_1_1[:, 6].reshape([-1, 1]),
                                                koef_2_1[:, 6].reshape([-1, 1])))))

col = []
col.append('$\alpha/\pi$')
col.extend(['(-1) crack ' + '${(1)}$' + str(k) for k in range(1, k1_cracs + 1)])
col.extend(['(-1) crack ' + '${(2)}$' + str(k) for k in range(1, k2_cracs + 1)])
col.extend(['(1) crack ' + '${(1)}$' + str(k) for k in range(1, k1_cracs + 1)])
col.extend(['(1) crack ' + '${(2)}$' + str(k) for k in range(1, k2_cracs + 1)])

```

```

df_dist = pd.DataFrame(np.hstack((dist_1.T, dist1.T[:, 1:])), columns=col)
df_KI = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KI.T, k_alf1_KI.T[:, 1:])), columns=col)
df_KII = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KII.T, k_alf1_KII.T[:, 1:])), columns=col)
df_KD = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KD.T, k_alf1_KD.T[:, 1:])), columns=col)
df_KB = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KB.T, k_alf1_KB.T[:, 1:])), columns=col)
df_KE = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KE.T, k_alf1_KE.T[:, 1:])), columns=col)
df_KH = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KH.T, k_alf1_KH.T[:, 1:])), columns=col)
df_gam = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_gam.T, k_alf1_gam.T[:, 1:])), columns=col)

```

```
df_dist
```

```

plt.rc('font', **{'family': 'verdana'})
#plot
k=1
for dst in dist1[2:, :]:
    plt.plot(dist1[0, :].T, dst.T, ':', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for dst1 in dist_1[2:, :]:
    plt.plot(dist_1[0, :].T, dst1.T, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor = (1,1))
plt.xlabel('$alpha$')
plt.ylabel('$distance$')
plt.title('Відстань до вершини тріщини, що обертається')
plt.show()

```

```
print('Коефіцієнт нормально відриву $K_{I}$')
```

```
df_KI
```

```

k=1
for KI in k_alf_1_KI[1:, :]:
    plt.plot(k_alf_1_KI[0, :].T, KI, '--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KI in k_alf1_KI[1:, :]:
    plt.plot(k_alf1_KI[0, :].T, KI, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor = (1,1))
plt.xlabel('$\\alpha/\\pi$')
plt.ylabel('$K_{I}$')
plt.title('Коефіцієнт нормального відриву $K_{I}$')
plt.show()

```

```
print('Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву '+'$K_{II}$')
```

```
df_KII
```

```

k=1
for KII in k_alf_1_KII[1:, :]:
    plt.plot(k_alf_1_KII[0, :].T, KII, '--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1

```

```

k=1
for KII in k_alf1_KII[1:,:]:
    plt.plot(k_alf1_KII[0,:].T,KII, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor=(1,1))
plt.xlabel('\alpha/\pi')
plt.ylabel('$K_{II}$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву $K_{II}$')
plt.show()

print('Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D$')
df_KD

k=1
for KD_ in k_alf_1_KD[1:,:]:
    plt.plot(k_alf_1_KD[0,:].T,KD_,'--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KD in k_alf1_KB[1:,:]:
    plt.plot(k_alf1_KD[0,:].T,KD, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor=(1,1))
plt.xlabel('\alpha/\pi')
plt.ylabel('$K_D$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D$')
plt.show()

print('Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_B$')
df_KB

k=1
for KB_ in k_alf_1_KB[1:,:]:
    plt.plot(k_alf_1_KB[0,:].T,KB_,'--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KB in k_alf1_KB[1:,:]:
    plt.plot(k_alf1_KB[0,:].T,KB, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor=(1,1))
plt.xlabel('\alpha/\pi')
plt.ylabel('$K_B$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_B$')
plt.show()

print('Коефіцієнт інтенсивності напруженності електричного поля $K_E$')
df_KE

k=1
for KE_ in k_alf_1_KE[1:,:]:
    plt.plot(k_alf_1_KE[0,:].T,KE_,'--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1

```

```

for KE in k_alf1_KE[1:,]:
    plt.plot(k_alf1_KE[0,:].T,KE, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor = (1,1))
plt.xlabel('\alpha/\pi')
plt.ylabel('$K_E$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності напруженності електричного поля $K_E$')
plt.show()

print('Коефіцієнт інтенсивності напруженності магнітного поля $K_H$')
df_KH

k=1
for KH_in k_alf_1_KH[1:,]:
    plt.plot(k_alf_1_KH[0,:].T,KH_,'--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KH in k_alf1_KH[1:,]:
    plt.plot(k_alf1_KH[0,:].T,KH, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor = (1,1))
plt.xlabel('\alpha/\pi')
plt.ylabel('$K_H$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності напруженності магнітного поля $K_H$')
plt.show()

print('Енергетичний критерій руйнування $\gamma$')
df_gam

k=1
for gam_in k_alf_1_gam[1:,]:
    plt.plot(k_alf_1_gam[0,:].T/pi,gam_,'--',label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for gam in k_alf1_gam[1:,]:
    plt.plot(k_alf1_gam[0,:].T/pi,gam,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(bbox_to_anchor = (1,1))
plt.xlabel('\alpha/\pi')
plt.ylabel('$\gamma$')
plt.title('Енергетичний критерій руйнування $\gamma$')
plt.show()

```