

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Факультет електроніки та інформаційних технологій

Кафедра наноелектроніки

**БАКАЛАВРСЬКА РОБОТА**

зі спеціальності 153 – «Мікро- та наносистемна техніка»

на тему:

**«Дослідження кінетики процесу плавлення поверхні льоду під час тертя»**

**Лаврик Дмитро Сергійович**

**Завідувач кафедру**

\_\_\_\_\_ проф. О.Д.Погребняк

**Науковий керівник**

\_\_\_\_\_ доц. О.В. Ющенко

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

Суми 2020

## РЕФЕРАТ

Об'єктом дослідження бакалаврської роботи є процес утворення тонкого шару «рідкого» льоду під час тертя.

Мета роботи полягає у визначенні умов переходу тонкого шару льоду у стан «рідина-тверде тіло».

Під час виконання роботи використовувалися: система Лоренца для обчислювального експерименту; метод обчислення показників Ляпунова; чисельний метод розв'язування систем диференціальних рівнянь Рунге-Кутти та методи розв'язання кубічних рівнянь, а також математичний пакет MATLAB.

У даній роботі було досліджено кінетику процесу плавлення поверхні льоду під час тертя. Побудована система трьох диференціальних рівнянь, що дозволяє представити фазовий перехід. Були визначені фізичні умови, за яких такий перехід відбувається та побудовані відповідні фазові портрети.

Робота викладена на 70 сторінках, у тому числі містить 8 рисунків, 4 таблиці, список цитованої літератури із 56 джерел.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** КОЕФІЦІЄНТ ТЕРТЯ, ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ, СИСТЕМА ЛОРЕНЦА.

## ЗМІСТ

	С.
<b>ВСТУП</b> .....	4
<b>РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДОСЛІДЖЕНЬ ТЕРТЯ ЛЬОДУ</b> .....	5
1.1 Історичний аналіз досліджень тертя льоду .....	5
1.2 Застосування результатів дослідження тертя льоду в практичних сферах .....	9
<b>РОЗДІЛ 2. ОПИС КІНЕТИКИ ПРОЦЕСУ ПЛАВЛЕННЯ ЛЬОДУ ПІД ЧАС ТЕРТЯ</b> .....	16
<b>РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ТЕРТЯ ЛЬОДУ</b> .....	23
3.1 Розрахунок математичної моделі .....	23
3.2 Побудова фазових портретів.....	39
<b>РОЗДІЛ 4. ТЕХНІКА БЕЗПЕКИ ТА ОХОРОНА ПРАЦІ ПРИ РОБОТІ З ПЕРСОНАЛЬНИМ КОМП'ЮТЕРОМ</b> .....	45
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	50
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	52
<b>ДОДАТКИ</b> .....	59

## ВСТУП

Тертя – явище, яке супроводжує нас завжди і всюди. В одних випадках воно корисне, і його намагаються збільшити. В інших – шкідливе, і його намагаються зменшити. Тертя руйнує поверхні, що призводить до зношування механізмів, дозволяє зрушити з місця та гальмувати. Від тертя залежить швидкість руху рідин в судинах рослин та живих істот.

У побутовій сфері за рахунок тертя люди почали добувати вогонь, знайшли способи з'єднання деталей. У ХХ столітті дослідження в області тертя принесли так багато нової інформації, що її потрібно якось систематизувати. У результаті з'явилася ціла наука – трибологія.

Трибологія – це наука про тертя, зношування, змащування та контактну взаємодію поверхонь твердих тіл при їх відносному русі. Однак, результати досліджень вчених минулого століття дозволили констатувати, що величина коефіцієнта тертя залежить від багатьох параметрів: температури, матеріалу поверхні, сили тощо.

У техніці для зменшення впливу сил сухого тертя між поверхнями вводять мастило – в'язку рідину, яка створює тонкий шар між твердими поверхнями. Вплив мастила полягає у тому, що між тертьові поверхні вводиться шар в'язкої рідини, яка заповнює всі нерівності поверхонь і, прилипаючи до них, утворює два тертьових шари рідини. В результаті тертя ковзання замінюється рідким тертям, яке набагато менше за тертя ковзання. Застосування мастил зменшує тертя в 8-10 разів.

Талі води також відіграють роль мастила у базальному ковзанні льодовиків. Згідно з даними GPS у дослідженні руху льоду, найбільшим льодовиковий рух є влітку, коли рівень талих вод є найвищим. Чому ковзани, з легкістю сковзаючи по поверхні льоду, не сковзають по поверхні більш гладенького скла? Знайти відповідь на це та інші питання дозволили дослідження тертя льоду.

## РОЗДІЛ 1

### ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДОСЛІДЖЕНЬ ТЕРТЯ ЛЬОДУ

#### 1.1. Історичний аналіз досліджень тертя льоду

Тертя на льоду було досліджено лише протягом минулого століття. Однак, насправді дослідження тертя має довгу історію.

Перші зіткнення з силами тертя відносяться до епохи неандертальців, близько 200000 р. до н.е., коли люди використовували тепло від тертя, щоб розпалити вогонь, потерши дерево по дереву або вдаривши кремінним камінням. Перший звіт про ковзання на льоду походить зі Скандинавії близько 7000 р. до н.е. Наскальні малюнки ілюструють використання саней для перевезення важких вантажів. Наступний цікавий історичний запис датується 2400 р. до н.е. Єгипетські малюнки показують, що мастило, ймовірно, вода, була вилита перед саньми, щоб полегшити ковзання [1, 2]. Перше визначення сили тертя було знайдено у праці Арістотеля (384-322 рр. до н. е.) «*Questiones Mechanicae*» [1]. Минуло ще майже 2000 років, перш ніж вперше кількісно вивчив тертя Леонардо да Вінчі (1452-1519). Він досліджував вплив видимої зони контакту на опір тертю, розрізняв тертя кочення та ковзання, вивчав переваги мастильних матеріалів та робив перші спостереження за зносом.

Насправді він постулював два закони тертя.

1. "Тертя виробляє вдвічі більше зусиль, якщо вага подвоїться" – сила тертя прямо пропорційна прикладеному навантаженню.

2. "Тертя, зроблене однаковою вагою, матиме однаковий опір на початку свого руху, хоча контакт може бути різної ширини та довжини" – сила тертя не залежить від видимої області контакту для даного навантаження.

Однак, оскільки записи да Вінчі були опубліковані лише наприкінці 19 століття, ці закони часто називають законами Амонтонна [1,2]. Французький фізик Гійом Амонтон (1663-1705) знову відкрив і тим самим підтвердив висновки да Вінчі в 1699 році. Крім того, він визначив шорсткість як основну причину тертя і визначив тертя як силу, необхідну для підйому

взаємозалежних нерівностей одну над одною під час змінного руху [1]. Леонард Ейлер (1707-1783) сприяв дослідженням тертя з чітким розрізненням статичного та динамічного тертя та ввів символ  $\mu$  для коефіцієнта тертя [1]. У 1785 році Чарльз-Огюстен Кулон (1736-1806) дослідив п'ять основних чинників для опору тертя. Він вивчив природу матеріалів в контактних і поверхневих покриттях, ступінь площі поверхні, нормальний тиск, тривалість часу, протягом якого поверхні залишаються у контакті, і фрикційну поведінку під вакуумом, а також при несприятливих умовах навколишнього середовища, а саме, температурі та вологості.

Кулон був першим, хто сформулював силу тертя як рівняння

$$F_T = \mu F_N, \quad (1.1)$$

де  $F_T$  – сила тертя,  $F_N$  – нормальна сила, а  $\mu$  – коефіцієнт тертя, який вважався незалежним від швидкості ковзання. Це іноді називають 3-м законом тертя. Однак пізніше було встановлено, що це справедливо лише до тих пір, поки швидкість ковзання не буде занадто низькою або не надто високою [1,2].

Лід став предметом наукових досліджень лише 150 років тому. Фарадей привів у контакт два кубики льоду, які миттєво змерзлися [3]. Він зробив висновок, що крижана поверхня покрита рідким шаром. Це поклало початок дослідницьким зусиллям для розуміння льоду та ролі, яку його поверхня відіграє при терті. Незабаром після експерименту Фарадея, Томсон пояснив це, обґрунтувавши існування рідкого шару під час плавлення під тиском [3]. Рейнольдс першим систематично дослідив питання ковзання на льоду [3]. Базуючись на ідеї Томсона, він помилково приписав низьке тертя на льоду таненню під тиском. Таке пояснення легкості катання широко приймалося вченими протягом майже 40 років, поки Боуден і Хьюз не допустили, що фрикційний нагрів може бути основною причиною низького коефіцієнта тертя на льоду. Сьогодні це загальноприйнята теорія для пояснення тертя льоду [3].

Розуміння основних механізмів тертя на льоду є особливо важливим у різних сферах застосувань, таких, як моторизований рух транспортних засобів у зимових дорожніх умовах, льодовиковий рух, перевезення вантажів через північні морські шляхи, проектування морських споруд та криголамів, спорті на льоду [3;4]. Отримані знання можна застосувати до вирішення проблем у наведених сферах. Високий рівень тертя на льоду бажаний для руху автомобілів в зимових дорожніх умовах та зчеплення «взуття» на льоду для уникнення аварій. Однак у галузі перевезення вантажів північними морськими шляхами та проектуванні морських споруд бажано, щоб матеріали з низьким тертям обмежили витрати на технічне обслуговування та експлуатацію. Наприклад, 70% потужності криголама витрачається на подолання тертя льоду [5]. Зниження тертя льоду важливе також у змагальних видах спорту (Конінг, 1992; Ребш, 1991), де прагнення до більш високої швидкості є незмінним і робить цікавими спортивні змагання [6].

Помилково вважали, що низьке кінетичне тертя, яке виникає під час катання на лижах, пов'язане з таненням під тиском, тобто сніг або лід тануть під тиском, утворюючи плівку води, яка змащує систему [7]. Пізніше з'явилися переконливі докази того, що низьке тертя обумовлено частковим шаром води, утвореним при нагріванні від тертя [7]. Високопровідний ковзаючий контакт демонструє більш високе тертя, ніж добре ізольований, що свідчить про те, що теплопровідність відіграє головну роль у терті льоду. Кількісні моделі для теорії тертя нагріву були розроблені вченими та експериментально перевірені у наукових працях [7;8]. Тепло тертя передається як на ковзаючий контакт, так і на лід, тим самим піднімаючи поверхню льоду до точки плавлення. При плавленні споживається достатньо мало тепла, більша його частина відводиться. Сила тертя виникає внаслідок в'язкого зсуву шарів води між ковзаючим контактом і льодом. Реальна площа контакту між ковзаючим контактом та снігом була визначена за допомогою спостереження за поверхнею снігу через мікроскоп після ковзного експерименту та виявила його близько 4% [7]. Середній діаметр контактів, сплюснутих при терті, склав

близько 200 мкм. Товщина водяних плівок, що утворюються при ковзанні по снігу, вимірюється ємнісним зондом, вбудованим у лижу, і визначається у розмірі 5-14 мкм [7]. У більш недавньому дослідженні була застосована флуоресцентна спектроскопія в поєднанні з експериментом «Закріплення на обертовому крижаному диску» для виявлення утворення водяних плівок. При швидкостях нижче 0.1 м/с водяні плівки, якщо вони є, мають бути товщиною нижче 100 нм і, таким чином, значно тоншими, ніж було передбачено раніше [9]. У польових та лабораторних вимірах було встановлено, що тертя є найнижчим приблизно при  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$  і зростає при низьких температурах, а також при температурі, близькій до  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  [10].

Класичні закони тертя для пластично деформуючих матеріалів не мають сили для льоду. Як видно, тертя може дуже сильно залежати від навантаження, швидкості та видимої зони контакту.

Обговорення даних результатів ґрунтується на припущенні, що початковий контакт повзуна з льодом призводить до (сухого) нагрівання тертям, звільняючи талу воду, яка згодом змащує подальше проходження ковзаючого контакту. Початкове вироблення тепла  $P$  може бути виражене через швидкість тертя як

$$P = \mu \cdot F_n \cdot v = F_f \cdot v, \quad (1.2)$$

де  $F_n$  - навантаження,  $F_f$  - сила тертя, а  $v$  - швидкість. Альтернативно, загальний тепловий потік  $q'' = P/A$  через область  $A$  в ковзаючому контакті льоду можна записати як

$$q'' = v \cdot \sigma_k, \quad (1.3)$$

де  $\sigma_k$  - напруження зсуву, необхідне для ковзання двох поверхонь з відносною швидкістю  $v$ . Для оцінки, напруження зсуву записується як



$\sigma_k = \mu\sigma_0$ , де перпендикулярне напруження  $\sigma_0$  в контактному місці приймається рівним твердості проникнення льоду.

Колбек (1994) опублікував змістовний огляд тертя на снігу. Існує багато подібностей у терті снігу та льоду [11;12]. Багато експериментів щодо тертя снігу фактично проводяться на льоду, поведінка якого менш складна. Застосування досліджень тертя снігу головним чином поширюється у сферах снігових видів спорту та лавинних досліджень. Огляд багатьох різних факторів, що впливають на режими тертя льоду, надає можливість ґрунтовніше зрозуміти тертя на льоду як процес, а також зрозуміти складну структуру льоду.

## **1.2. Застосування результатів дослідження тертя льоду в практичних сферах**

Фрикційне ковзання є фундаментальним процесом при тендітній деформації льоду під час стиснення. Воно відіграє головну роль в руйнуванні арктичного морського крижаного покриву і, мабуть, активний в тектонічній еволюції позаземних крижаних тіл, таких, як Європа, місяць Юпітера, і Енцелад, супутник Сатурна [11;13-18]. Тертя визначає руйнування кінцевого матеріалу при стисненні з низьким обмеженням, де кулонівське руйнування обмежує міцність на розрив, а також є фактором, що впливає на перехід пластичності в крихкість [11;15;19-21]. Таким чином, коефіцієнт тертя є властивістю, що представляє значний інтерес, зокрема, ковзання льоду по природним розломам в діапазоні швидкостей. Наприклад, в зимовому крижаному покриві Північного Льодовитого океану швидкості ковзання варіюються від майже нульового значення до  $\sim 10 \frac{\text{км}}{\text{день}}$  ( $0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ) при змінному впливі вітру та океанічної течії [22].

Раніше вченими було виявлено з експериментів по ковзанню, виконаних з постійною швидкістю на кулонівських розривах зсуву в прісноводному

стовбчатому льоду при температурах  $\geq -40\text{ }^\circ\text{C}$ , що коефіцієнт тертя залежить від швидкості ковзання [23]. У діапазоні швидкостей від  $\sim 10^{-6}$  до  $\sim 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$  коефіцієнт спочатку збільшується, досягає максимуму, а потім зменшується зі збільшенням швидкості (рис. 1.1), що нагадує ковзання по рівним межах розриву [24]. Посилення швидкості відбувається завдяки гнучкій поведінці, яка керується повзучістю дислокацій, і уповільнення швидкості при крихкій поведінці, яка згубна локальним плавленням [23].

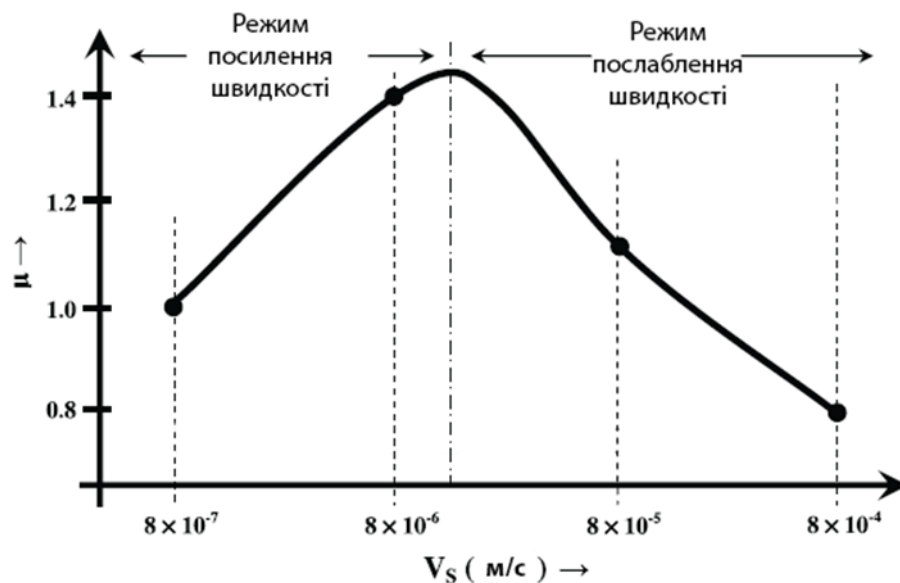


Рисунок 1.1 – Графік, що показує коефіцієнт тертя в залежності від швидкості ковзання уздовж кулонівських зсувних розломів в прісноводному льоді S2 в справжніх експериментах при  $-10\text{ }^\circ\text{C}$ . Коефіцієнти є середніми значеннями і були отримані за даними Форта і Шульсона [23].

Керуючись характером фрикційного стану гірських порід в залежності від швидкості і мотивуючи відмінною схожістю в деформації льоду та гірських порід, було представлено деякі перші результати нових експериментів, в яких швидкість ковзання «миттєво» змінюється як тільки коефіцієнт тертя розвивається до стаціонарного значення [11;21;25-26]. Такі експерименти відносно поширені в літературі з механіки гірських порід і, зазвичай, описуються в термінах феноменологічних відносин [25]:

$$\mu = \mu_0 + A \ln \left( \frac{V_s}{V_s^*} \right) + B \ln \left( \frac{V_s^* \theta}{D_c} \right), \quad (1.4)$$

де  $\mu$  – динамічний або кінетичний коефіцієнт тертя,  $\mu_0$  – номінальний коефіцієнт тертя,  $V_s$  – швидкість ковзання і  $\theta$  – змінна стану (в одиницях часу), залежна від часу і переміщення,  $A$  і  $B$  – конституційні параметри, які вимірюють відповідно ефекти швидкості та матеріального стану,  $V_s^*$  – нормалізуюча константа, а  $D_c$  – критична відстань ковзання, що визначається експериментально. Як показано на рис. 1.2, вираз  $A \ln(V_s/V_s^*)$  описує миттєвий або прямий ефект, а вираз  $B \ln(V_s^* \theta/D_c)$  (який скорочується до  $B \ln(V_s/V_s^*)$  для стаціонарного ковзання) описує ефект еволюції. Якщо сила тертя розвивається до сталого значення, яке нижче, ніж для вихідної швидкості, то поведінка називається «ослабленням швидкості». Якщо сила тертя розвивається до нового сталого значення, що перевищує вихідний сталий рівень, то поведінка називається «посиленням швидкості» [11].

$$(A - B) = (\mu_2 - \mu_1) / \ln(V_2/V_1), \quad (1.5)$$

де  $V_1$  і  $V_2$  відповідно швидкості ковзання до і після зміни швидкості, а  $\mu_1$  і  $\mu_2$  - коефіцієнти тертя стаціонарного стану до і після зміни швидкості.

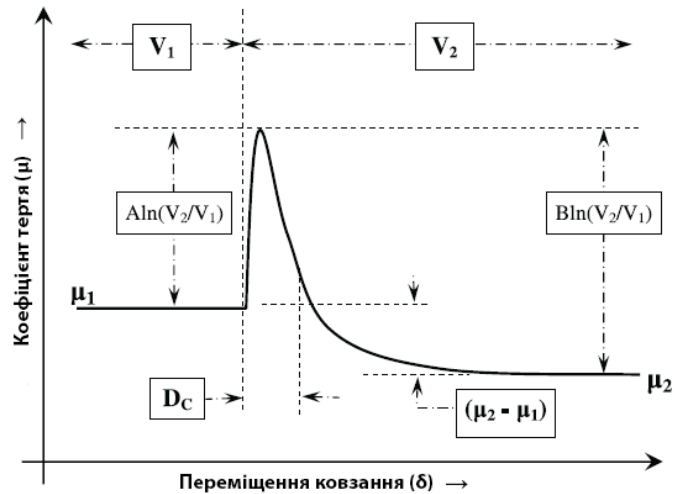


Рисунок 1.2. – Схематичний малюнок, що показує фрикційну поведінку, описану рівнянням (1.5) як функція ковзання переміщення.

Фізично (A - B) вказує на чутливість коефіцієнта тертя до зміни швидкості: негативне значення вказує на ослаблення швидкості і це призводить до нестабільного ковзання, що є істотним моментом у розумінні нестабільності розповсюдження несправностей та фізики струсу льоду; додатне значення вказує на посилення швидкості, і це призводить до стабільного ковзання.

Проте, тертя льоду також є дуже складною і суперечливою темою, що включає різні процеси, такі як повзучість, плавлення під тиском, попереднє плавлення і нагрівання тертям [3;7;27-28].

Тертя гуми на льоду є окремим і особливо важливим питанням з точки зору практики, наприклад, для динаміки автомобіля на зледенілих дорожніх поверхнях або для руху людини на зледенілих поверхнях. Проте, ця тема досить специфічна і пов'язана з розсіюванням енергії всередині гуми через пульсуючу деформацію гуми, викликану нерівностями льоду [27;29-30].

При низькій швидкості ковзання коефіцієнт тертя льоду може бути дуже великим. Наприклад, для льоду, що ковзає по льоду (рис. 1.3), при  $T = -10^\circ \text{C}$  коефіцієнт кінетичного тертя становить близько 0.6 при швидкості ковзання  $\approx 10^{-5} \text{ м/с}$ , але швидко падає при більш високих швидкостях і становить

всього  $\approx 0.06$  при  $\approx 10^{-2}$  м/с. Таке сильне зниження тертя вже при дуже низьких швидкостях ковзання не може бути пов'язано ні з розм'якшенням поверхні льоду, ні з утворенням змішаного поверхневого шару води з льодом. Якщо це однорідна молекула води, тобто вона повинна мати товщину  $\sim 1$  нм або більше. Шар води (товщина  $d$ ) призводить до коефіцієнта тертя

$$\mu \approx \eta v / d \sigma_1, \quad (1.6)$$

де  $\eta \approx 1.8 \cdot 10^{-3}$  Па·с – в'язкість води при  $T = 0^\circ\text{C}$  і де  $\sigma_1$  – нормальна напруга в областях контакту з шорсткістю. Використовуючи  $\sigma_1 \approx \sigma_Y \approx 50$  МПа (твердість льоду при проникненні),  $d = 0.5$  нм і  $v \approx 10^{-2}$  м/с, ми отримуємо коефіцієнт тертя  $\mu \approx 10^{-3}$ , який набагато менше від того, що спостерігається.

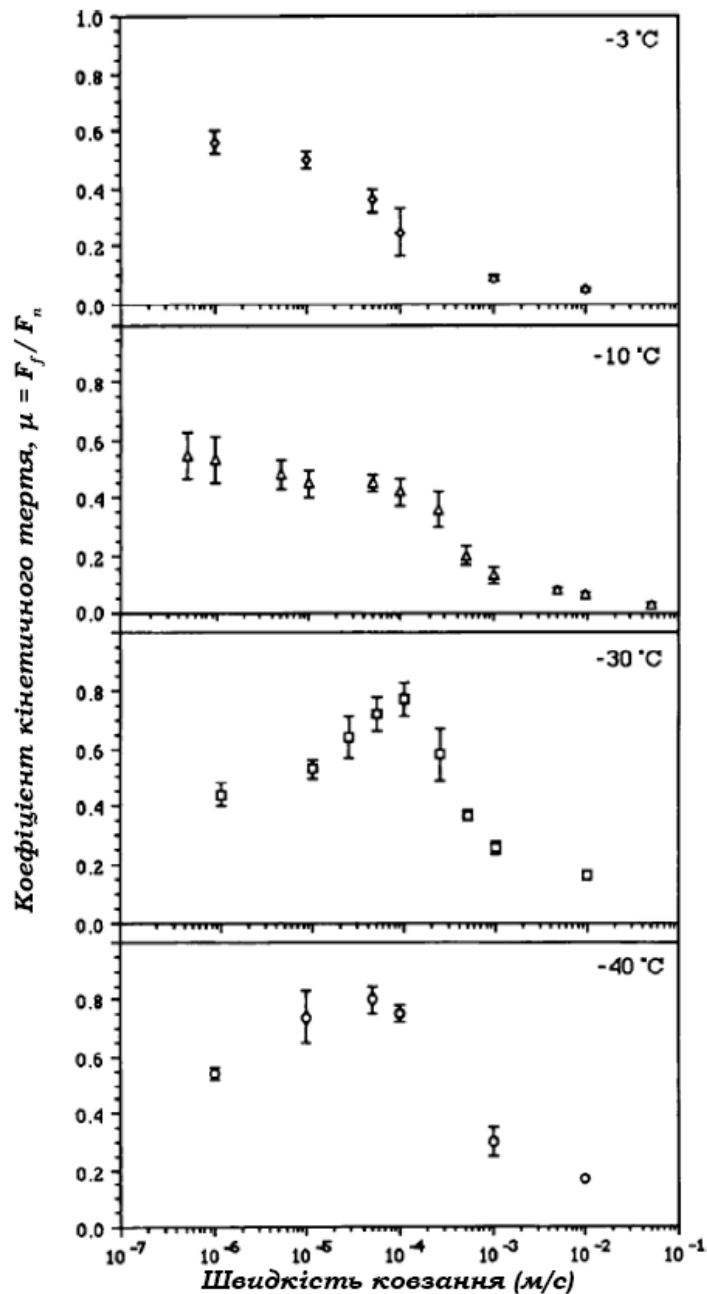


Рисунок 1.3. – Залежність кінетичного коефіцієнта тертя крижаного льоду від швидкості ковзання для кількох різних фонових температур льоду. Для прісноводного зернистого льоду при номінальному контактному тиску 0.02 МПа. Ковзаючий крижаний блок довжиною 5 см у напрямку ковзання і ковзає на крижаному блоці довжиною 22 см. Перші 7 см льодової доріжки використовуються для пробігу (без збору даних), а інші 15 см для отримання кінетичного тертя (сила тертя усереднюється по цій області).

Існує три діапазони швидкості тертя льоду, де беруть участь різні процеси:

а) При досить низькій швидкості розсіювання енергії тертя призведе до незначного нагрівання льоду і танення льоду не відбудеться. Тут динаміка тертя добре описується стандартним описом швидкості й стану, що включає повільне (логарифмічне за часом) збільшення статичного або вільного тертя з часом нерухомого контакту (наприклад, через повільне збільшення площі контакту через термічно активовану повзучість) і логарифмічне збільшення кінетичної сили тертя зі збільшенням швидкості ковзання, знову ж таки через термічно активовані процеси [31].

б) При досить високій швидкості та після досить великої відстані ковзання на поверхні ковзання утворюється тонка безперервна водна плівка через танення льоду, викликана фрикційним нагріванням. Тут тертя обумовлено в'язкістю водної плівки. Сила тертя залежить від комбінованої дії теплопередачі, тертя плавлення поверхні льоду та віджимання рідини (води) [32].

в) У проміжному інтервалі швидкостей ми постулюємо, що нагрівання тертям спричиняє зменшення тертя шляхом розм'якшення теплом поверхневого шару тонкого льоду. Тільки роблячи це припущення, можна пояснити, чому тертя льоду швидко падає зі збільшенням швидкості ковзання задовго до досягнення швидкості, коли на поверхні льоду може утворюватися тонкий рівномірний шар води через нагрівання тертям.

## РОЗДІЛ 2

### ОПИС КІНЕТИКИ ПРОЦЕСУ ПЛАВЛЕННЯ ЛЬОДУ ПІД ЧАС ТЕРТЯ

Тертя льоду і снігу має велике значення в повсякденному житті, спорті, природі та промисловості [2]. Кінетика тертя льоду визначається такими процесами, як адгезія, плавлення поверхні й плавлення під тиском, нагрівання тертям, повзучість та руйнування [33]. Питання про те, чи відіграє температура або межа текучості льоду ключову роль при терті, все ще є предметом деяких дискусій [34]. Результати досліджень вчених констатують, що причиною зниження тертя є водяна плівка, що виникає на поверхні льоду внаслідок нагрівання при терті. Певна група дослідників широко розвинули цю ідею, тому що розуміння практичних умов формування рідкої плівки необхідно для практичних застосувань [35, 36]. Попередньо розплавлений шар утворюється доменами води, які коливаються, і твердого льоду, які нагадують дефектну структуру [37]. Деякі дослідження зосереджуються на ефекті теплопровідності, який зменшується зі збільшенням швидкості ковзання [28].

Розглянемо деякі аспекти теоретичних моделей з кількісними оцінками. Загально визнано, що танення поверхні льоду під час тертя не завжди відбувається через ідеальне механічне нагрівання. Дослідниками представлені результати, які пояснили цю особливість з термодинамічних міркувань [35]. З описаного в статті [38] підходу отримані залежності коефіцієнта тертя для м'якої сталі, плексигласу та міді на льоду від швидкості ковзання, температури плавлення, навколишнього середовища та теплопровідності ковзаючого контакту. Також представлені докази того, що посилене розм'якшення льоду при температурі вище  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$  призводить до значного зносу. Це поширює теорію Еванса та його співавторів на випадок гідродинамічного мастила [38]. Крім того, виявлено дві області з різними залежностями коефіцієнта тертя від швидкості. У першій області не відбувається плавлення льоду, тоді як у другій – тертя регулюється плівкою води на контактній ділянці, що з'являється через



нагрівання тертям. При цьому, розглядалися ролі розм'якшення при зносі тертьових матеріалів, гідродинамічному терті та витісненні мастильної плівки. У наведених дослідженнях викладена теорія змащення розплаву, включаючи випадок видавлювання. Цей підхід, що враховує як гідродинамічне тертя, так і шорсткість поверхні, дозволив отримати вирази для товщини шару, коефіцієнта тертя і зносу. Колбек вважає, що кінетичне тертя на снігу визначається трьома складовими: сухим, змащеним і капілярним тертям [39]. Він побудував кілька залежностей: 1) залежність товщини плівки води для ідеально ізольованих алюмінієвих ковзаючих контактів від температури; 2) коефіцієнт змащеного тертя в залежності від швидкості при різних температурах; 3) залежність товщини плівки води від відстані уздовж змащеної ділянки для пластикових і алюмінієвих ковзаючих контактів при різних температурах; 4) загальне тертя в залежності від довжини уздовж алюмінієвого ковзаючого контакту при різних температурах. Ці розрахунки показують, що сила тертя, що впливає на ковзаючий контакт, злегка змінюється в широкому діапазоні швидкостей і температур. Ця теорія обмежена припущеннями про те, що тертя не залежить від навантаження, виняткова увага приділяється тертю на воді, приблизною оцінкою теплового струму на ковзаючому контакті тощо.

Останнім часом з'явилося атомістичне моделювання тертя льоду, що висвітлюється у наукових працях [40, 41]. Використовуючи метод молекулярної динаміки і вільну енергію Гінзбурга-Ландау (Гамільтоніан) для випадку фазового переходу першого порядку, показано, що попередньо розплавлена поверхнева плівка льоду складається з декількох молекулярних шарів та її товщина збільшується з ростом навантаження і температури [40, 41]. Це призводить до збільшення змащування і зниження тертя через ослаблення водневих зв'язків між молекулами льоду. Оскільки підвищення швидкості ковзання призводить до фрикційного нагрівання та, в кінцевому випадку, до зростання температури і товщини розм'якшеної плівки, перше підтримується постійним завдяки введенню термостата в моделювання [40].

Таким чином, розрахована залежність сили тертя від швидкості лінійно зростає у зв'язку з в'язкою складовою напруження, що виникає у рідкій плівці поверхні льоду під час зсуву.

Релаксація зсувної складової напруження відбувається з плином часу

$$\tau = \eta/G, \quad (2.1)$$

де  $\eta$  – динамічна в'язкість зсуву,  $G$  – модуль зсуву.

Основне припущення полягає в наступному: поки кінетичний ефект рідини замерзає, в'язкість  $\eta$  стає нескінченною при кінцевому модулі зсуву  $G$  [42]. Однак, ситуація протилежна звичайному фазовому переходу другого порядку, де також спостерігається нескінченне збільшення  $\tau$  в критичній точці. Фактично, переходячи від в'язкопружної рідини до загального випадку, вираз (1) набуває вигляду  $\tau = \chi/\gamma$ , де  $\chi$  – узагальнена сприйнятливості,  $\gamma$  – кінетичний коефіцієнт (в рівнянні (2.1) ці величини рівні  $G^{-1}$ ,  $\eta^{-1}$  відповідно) [43].

При фазовому переході спостерігається нескінченне збільшення сприйнятливості  $\chi$ , в той час як кінетичний коефіцієнт  $\gamma$  не має сингулярності. Це еквівалентно модулю зсуву  $G$ , який прагне до нуля при кінцевій в'язкості  $\eta$  в рівнянні (2.1). Така ситуація зустрічається при в'язкопружному переході [44-46].

Основне припущення нашого підходу полягає в тому, що розм'якшення льоду під час тертя забезпечується самоорганізацією компонентів зсуву, як напруження  $\sigma$ , так і деформації  $\varepsilon$ , з одного боку, і температури  $T$ , з іншого [47]. Взаємозв'язок між компонентами  $\sigma$  і  $\varepsilon$  добре відомий моделлю Кельвіна-Фойгта, що описує його найпростіший випадок [43]. Температурний ефект викликається критичним збільшенням модуля зсуву  $G(T)$  зі зниженням температури:  $G = 0$  для води та  $G \neq 0$  для льоду. Взаємодія згаданих факторів призводить до настання стійкого стану при надкритичному значенні теплової енергії, прикладеної до поверхневого шару, де деформація зсуву може приймати аномально великі значення.

Конфігурація, для якої нами пропонується рішення, складається з двох площин тертя льоду або площина льоду та іншого матеріалу (наприклад, твердої речовини, гуми і т. п.), розділених шаром змащуючого розм'якшеного льоду. Широко визнано, що релаксація зсувного компонента тензора деформації  $\varepsilon$  в поверхневому шарі льоду визначається рівнянням Кельвіна-Фойгта для в'язкопружного середовища [43]

$$\dot{\varepsilon} = -\varepsilon/\tau_\varepsilon + \sigma/\eta_\varepsilon, \quad (2.2)$$

де  $\tau_\varepsilon$  – час релаксації Дебая, а  $\eta_\varepsilon$  – ефективний коефіцієнт в'язкості зсуву. Другий член праворуч описує потік в'язкої рідини внаслідок дії відповідного зсувного компонента напруження  $\sigma$ . У стаціонарному стані  $\dot{\varepsilon} = 0$  рівняння (2.2) зводиться до відношення типу Гука  $\sigma = G_\varepsilon \varepsilon$ , де  $G_\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon/\tau_\varepsilon \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$  – розслаблене значення модуля зсуву ( $\omega$  – кругова частота періодичного зовнішнього ефекту).

У рамках феноменологічної теорії Ландау фазовий перехід регулюється вільною енергією  $F$ , яка розкладається в степеневий ряд за величиною  $\sigma$ , який відіграє роль параметра порядку в дослідженні [44]:

$$F = F_0 - \sigma\varepsilon = \frac{1}{2G(T)}\sigma^2 + \frac{A}{4}\sigma^4 - \sigma\varepsilon, \quad (2.3)$$

де  $G(T) \equiv G(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$  – модуль невимушеного зсуву, який залежить від температури,  $\sigma\varepsilon$  – ефект зовнішнього поля  $\varepsilon$ , а  $A$  – позитивна постійна негармонійності. Величина рівноваги  $\sigma$  визначається рівністю

$$\partial F_0/\partial \sigma = \varepsilon, \quad (2.4)$$

де  $F_0$  – вільна енергія при  $\varepsilon = 0$ . Перехід релаксації у стан рівноваги описується рівнянням типу Ландау-Халатнікова [44]

$$\dot{\sigma} = -\frac{G(T)^2}{\eta} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \sigma} - \varepsilon \right). \quad (2.5)$$

Тут  $\eta$  – кінетичний коефіцієнт, який має значення в'язкості зсуву. Якщо значення  $\sigma$  близьке до його значення рівноваги  $\sigma_0 = 0$ , то можна

використовувати лінійне наближення  $\partial F_0/\partial\sigma \approx \sigma/G(T)$ , де  $G(T) \equiv \partial\sigma/\partial\varepsilon = (\partial^2 F_0/\partial\sigma^2)^{-1}$ . Отже, рівняння релаксації (2.5) передбачає лінійну форму:

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + G(T)\varepsilon. \quad (2.6)$$

У формулі (6) перший член правої частини описує релаксацію протягом часу  $\tau_\sigma \equiv \eta/G(T)$ . У стаціонарному стані  $\dot{\sigma} = 0$  кінетичне рівняння (2.6) має вигляд закону Гука:

$$\sigma = G(T)\varepsilon. \quad (2.7)$$

Підстановка  $\varepsilon/\tau_\sigma$  для  $\partial\varepsilon/\partial t$  в рівнянні (2.6) зводить його до рівняння типу Максвелла для в'язкопружної речовини.

Звертаємо увагу, що ефективна в'язкість  $\eta_\varepsilon = \tau_\varepsilon G_\varepsilon$  і модуль релаксації  $G_\varepsilon = \eta_\varepsilon/\tau_\varepsilon$  не збігаються з реальною в'язкістю  $\eta$  і нерелаксуючим модулем  $G(T)$  відповідно. Це обумовлено різним фізичним змістом рівнянь типу Ландау-Халатникова (2.6) і Кельвіна-Фойгта (2.2) [43, 44]. Величини  $G_\varepsilon, \eta, \eta_\varepsilon$  дуже слабо залежать від температури поверхневого шару льоду  $T$ , а модуль зсуву  $G(T)$  зникає при зниженні температури до  $T_c$  [42, 48, 49]. Надалі температурні залежності використовуються для наближення:

$$G_\varepsilon(T), \eta(T), \eta_\varepsilon(T) = const,$$

$$G(T) = G_0(T/T_c - 1), \quad (2.8)$$

де  $G_0 \equiv G(T = 2T_c)$  – типове значення модуля.

Щоб уявити процес самоорганізації, кінетичне рівняння для температури  $T$  необхідне для завершення системи рівнянь (2.2) і (2.6), яка містить параметр порядку  $\varepsilon$ , поле спряження  $\sigma$  і параметр управління  $T$  [44, 49-51]. Використовуючи підхід, що ґрунтується на відносинах теорії пружності, можна отримати наступне рівняння [47]:

$$c_p \dot{T} = \kappa \nabla^2 T - \sigma \varepsilon / \tau_\varepsilon + \sigma^2 / \eta_\varepsilon, \quad (2.9)$$

де  $c_p$  – теплоємність,  $\kappa$  – теплопровідність. Останній член в правій частині формули (2.9) позначає дисипативний нагрів в'язкої рідини, що протікає під дією напруження  $\sigma$ , яким можна знехтувати у даному випадку. З іншого боку, одномодове наближення  $(\kappa/l^2)(\tau_T Q - T) \approx \kappa \nabla^2 T$  може бути використане з прийнятною точністю у рівнянні (2.9) [44, 52, 53]. Таким чином, ми розглядаємо тепловий ефект поверхонь тертя, значення яких не знижується до компонента Онзагера і фіксується зовнішніми умовами ( $l$  – шкала теплопровідності, тобто відстань, на яку тепло проникає в лід,  $\tau_T \equiv l^2 c_p / \kappa$  – час теплопровідності):

$$\tau_T \overset{\square}{T} = (\tau_T Q - T) - \frac{l^2 \sigma \varepsilon}{\kappa \tau_\varepsilon}, \quad (2.10);$$

$$Q = Q_0 + \sigma^2 / c_p \eta_\varepsilon. \quad (2.11).$$

У формулі (11)  $Q_0$  – тепловий потік від навколишніх твердих тіл до поверхневого шару. Мається на увазі, що квадратний внесок напруження включається в температуру поверхонь, що труться  $T_e = \tau_T Q$ . Очевидне врахування цього терміну призводить до значного ускладнення подальшого аналізу та перенормування величин. Отже, для нашого подальшого розгляду компонент  $T_e = \tau_T Q$  у рівнянні (2.10) вважається постійним. Варто відзначити, що під час виведення рівняння (2.10) ми прийняли значення рівноваги температури поверхневого шару льоду  $T_{00}$  рівним нулю. Очевидно, що на відміну від поверхні льоду, яка спочатку нагрівається до температури  $T_{00} \neq 0$ , член  $T_{00}/\tau_T$  повинен увійти в рівняння (2.11). Цей член описує релаксацію поточної температури поверхневого шару льоду до її рівноважного значення  $T_{00}$  при відсутності теплового потоку  $Q$  від фонових твердих тіл.

Зручно ввести такі одиниці вимірювання:

$$\sigma_s = (c_p \eta_\varepsilon T_c / \tau_T)^{1/2}, \quad \varepsilon_s = \sigma_s / G_\varepsilon, \quad T_c \quad (2.12)$$

для змінних  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  відповідно. Тоді основні рівняння (2.2), (2.6) та (2.10) зводяться до форми, яка застосовується до будь-якого в'язкопружного середовища [47]:

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + \sigma, \quad (2.13)$$

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g(T-1)\varepsilon, \quad (2.14)$$

$$\tau_T \dot{T} = (\tau_T Q - T) - \sigma\varepsilon, \quad (2.15)$$

де вводиться константа

$$g = \frac{G_0}{G_\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Рівняння (2.13) – (2.15) мають вигляд, подібний до схеми Лоренца, що дозволяє позначити термодинамічну фазу та кінетичні переходи [44, 49-51].

## РОЗДІЛ 3

### ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ТЕРТЯ ЛЬОДУ

#### 3.1. Розрахунок математичної моделі

У попередньому розділі, були описані теоретичні аспекти побудови системи рівнянь Лоренца для вирішення поставленої задачі з дослідження утворення «природного мастила». Наразі, виконаємо дослідження типу стійкості стаціонарного стану з подальшою побудовою фазових портретів.

Запишемо рівняння, яке описує релаксацію зсувної складової напруження з плином часу:

$$\tau = \frac{\eta}{G}, \quad (3.1)$$

де  $\eta$  - динамічна зсувна в'язкість,  $G$  - модуль зсуву.

Використовуючи теоретичні відомості з Розділу 2, запишемо рівняння Кельвіна-Фойгта:

$$\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\sigma}{\eta_\varepsilon}, \quad (3.2)$$

де  $\tau_\varepsilon$  - час дебаєвської релаксації,  $\eta_\varepsilon$  - ефективний коефіцієнт зсувної в'язкості. Вільна енергія, згідно з розкладом Ландау, буде дорівнювати:

$$F = F_0 - \sigma\varepsilon = \frac{1}{2G(T)}\sigma^2 + \frac{A}{4}\sigma^4 - \sigma\varepsilon \quad (3.3)$$

Тоді, умову рівноваги можна записати наступним чином:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_0}{\partial \sigma} - \varepsilon = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_0}{\partial \sigma} = \varepsilon \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \sigma} = \varepsilon \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} \cdot \sigma = \frac{\sigma}{G(T)}, \quad G(T) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}.$$

Зведемо умову до наступного рівняння:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial \sigma^2}; \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \left( \frac{\partial^2 F_0}{\partial \sigma^2} \right)^{-1}.$$

Згідно теорії Ландау-Халатнікова, можемо записати наступне рівняння для переходу з релаксаційного стану у стан рівноваги:

$$\sigma = -\frac{G(T)^2}{\eta} \left( \frac{\partial F_0}{\partial \sigma} - \varepsilon \right) \quad (3.5)$$

В рівнянні (3.5),  $\eta$  – кінетичний коефіцієнт, який має значення в'язкості зсуву.

Введемо таку величину як час релаксації, який записується у вигляді:

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{G(T)}. \quad (3.6)$$

Підставимо рівняння (3.6) у рівняння (3.5) та отримаємо:

$$\sigma = -\frac{G(T)^2}{\eta} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \sigma} + \frac{G(T)^2}{\eta} \cdot \varepsilon = -\frac{G(T)^2}{\eta} \cdot \frac{\sigma}{G(T)} + \frac{G(T) \cdot \varepsilon}{\tau_\sigma}.$$

Домножимо обидві частини попереднього рівняння на  $\tau_\sigma$ :

$$\tau_\sigma \sigma = -\sigma + G(T) \cdot \varepsilon. \quad (3.7)$$

Як можемо відмітити, рівняння релаксації (3.7) має лінійну форму.

У стаціонарному стані  $\dot{\sigma} = 0$ , рівняння (3.7) буде мати вигляд закону Гука:

$$\sigma = G(T) \cdot \varepsilon \quad (3.8)$$

Використаємо метод апроксимації для члену рівняння  $G(T)$ :

$$G(T) = G_0 \left( \frac{T}{T_e} - 1 \right) \quad (3.9)$$

Знайдемо, при якій температурі  $T$ ,  $G(T) = G_0$ . Виконаємо перетворення наступного рівняння:

$$G_0 = G_0 \left( \frac{T}{T_e} - 1 \right), \quad 1 = \frac{T}{T_e} - 1 \Rightarrow T = 2T_e, \text{ тобто } G_0 = G(T = 2T_e).$$

Використовуючи підхід, що ґрунтується на відносинах теорії пружності, можна отримати наступне рівняння:

$$c_p T = \kappa \nabla^2 T - \frac{\sigma \varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\sigma^2}{\eta_\varepsilon}, \quad (3.10)$$

де  $c_p$  - теплоємність,  $\kappa$  - теплопровідність.



Останній член у правій частині рівняння (3.10) відповідає дисипативному нагріву в'язкої рідини, що протікає під дією напруження  $\sigma$  (можемо знехтувати даним членом в умовах системи, що розглядається).

Використаємо однододове наближення. Таким чином, ми будемо розглядати тепловий ефект поверхонь тертя, значення яких не знижується до певної компоненти Онзагера:

$$\frac{\kappa}{l^2}(\tau_T Q_0 - T) \approx \kappa \cdot \nabla^2 T, \quad (3.11)$$

де  $l$  - шкала теплопровідності, тобто відстань, на яку тепло проникає в лід, а  $\tau_T = \frac{l^2 c_p}{k}$  - час теплопровідності.

Тоді, разом з  $\tau_T$  підставимо наближення (3.11) у рівняння (3.10), але спочатку домножимо у (3.10) обидві частини на  $\frac{l^2}{\kappa}$ .

$$\begin{aligned} \frac{c_p l^2}{\kappa} T &= l^2 \nabla^2 T \cdot \frac{\kappa}{\kappa} - \frac{\sigma \varepsilon}{\tau_\varepsilon} \cdot \frac{l^2}{\kappa} + \frac{\sigma^2}{\eta_\varepsilon} \cdot \frac{l^2}{\kappa}, \text{ де } \frac{c_p l^2}{\kappa} = \tau_T \\ \tau_T T &= \frac{l^2}{\kappa} \cdot \frac{\kappa}{l^2} (\tau_T Q_0 - T) - \frac{l^2 \sigma \varepsilon}{\kappa \tau_\varepsilon} + \frac{\sigma^2 l^2}{\eta_\varepsilon \kappa}; \\ \tau_T T &= (\tau_T Q_0 - T) + \frac{\sigma^2 c_p l^2}{c_p \eta_\varepsilon \kappa} - \frac{l^2 \sigma \varepsilon}{\kappa \tau_\varepsilon}; \\ \tau_T T &= \tau_T Q_0 - T + \tau_T \frac{\sigma^2}{c_p \eta_\varepsilon} - \frac{l^2 \sigma \varepsilon}{\kappa \tau_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Якщо  $Q_0$  - це потік тепла від навколишніх твердих тіл до поверхневого шару, то квадратний внесок напруження  $\sigma$  може бути включеним до температури поверхні, де відбувається тертя:

$$T_e = \tau_T Q, \quad (3.12)$$

$$\text{де } Q = Q_0 + \frac{\sigma^2}{c_p \eta_\varepsilon}.$$

В результаті, система рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{\tau_\varepsilon} + \frac{\sigma}{\eta_\varepsilon}; \\ \tau_\sigma \sigma = -\sigma + G_0 \left( \frac{T}{T_e} - 1 \right) \varepsilon; \\ \tau_T T = T_e - T - \frac{l^2 \sigma \varepsilon}{\kappa \tau_\varepsilon}. \end{cases} \quad (3.13)$$

де  $\eta_\varepsilon = \tau_\varepsilon G_\varepsilon$  - ефективна в'язкість, а  $G_\varepsilon$  - релаксаційний модуль.

Виконаємо перетворення до безрозмірної величини:

$$\tau_\varepsilon \varepsilon = -\varepsilon + \frac{\tau_\varepsilon}{\eta_\varepsilon} \sigma \quad \left| \cdot \frac{1}{\varepsilon_s} \right.;$$

$$\tau_\varepsilon \frac{d\varepsilon/\varepsilon_s}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} + \frac{\tau_\varepsilon}{\eta_\varepsilon \varepsilon_s} \cdot \sigma \quad \rightarrow \quad t_s = \tau_\varepsilon.$$

Тоді, можемо записати, що  $\sigma_s = \frac{\varepsilon_s \eta_\varepsilon}{\tau_\varepsilon} = \varepsilon_s G_\varepsilon \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{G_\varepsilon}$

У безрозмірному вигляді маємо:

$$\varepsilon = -\varepsilon + \sigma \quad (3.14)$$

Аналогічно виконаємо перетворення для другого та третього рівнянь системи:

$$\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon} \frac{d(\sigma/\sigma_s)}{d(t/\tau_\varepsilon)} = -\frac{\sigma}{\sigma_s} + G_0 \left( \frac{T}{T_e} - 1 \right) \frac{\varepsilon}{\sigma_s};$$

$$\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon} = \alpha; \quad \alpha \sigma = -\sigma + \frac{G_0}{G_\varepsilon} \left( \frac{T}{T_e} - 1 \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s};$$

$$T_s = T_e; \quad g = \frac{G_0}{G_\varepsilon};$$

$$\alpha \sigma = -\sigma + g(T-1)\varepsilon. \quad (3.15)$$

$$\frac{\tau_T}{\tau_\varepsilon} \cdot \frac{d(T/T_e)}{d(t/\tau_\varepsilon)} = \frac{T_e}{T_e} - \frac{T}{T_e} - \frac{l^2 \sigma \varepsilon}{\kappa \tau_\varepsilon T_e} \quad \frac{\tau_T}{\tau_\varepsilon} = \beta$$

$$\sigma_s \cdot \varepsilon_s = \frac{\kappa \tau_\varepsilon T_e}{l^2} = \left\{ \tau_T = \frac{l^2 c_p}{k} \Rightarrow \frac{l^2}{k} = \frac{\tau_T}{c_p} \right\} = \frac{c_p \tau_\varepsilon T_e}{\tau_T};$$

$$\sigma_s \cdot \frac{\sigma_s}{G_\varepsilon} = \frac{c_p \tau_\varepsilon T_e}{\tau_T}; \quad \sigma_s^2 = \frac{c_p \tau_\varepsilon T_e}{\tau_T} \cdot G_\varepsilon = \left\{ G_\varepsilon = \frac{\eta_\varepsilon}{\tau_\varepsilon} \right\};$$

$$\sigma_s^2 = \frac{c_p \tau_\varepsilon T_e}{\tau_T} \cdot \frac{\eta_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}; \quad \sigma_s^2 = \frac{c_p \eta_\varepsilon T_e}{\tau_T}; \quad \sigma_s = \sqrt{\frac{c_p \eta_\varepsilon T_e}{\tau_T}}.$$

Після перетворення в безрозмірні величини, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \square \\ \varepsilon = -\varepsilon + \sigma; \\ \square \\ \alpha \sigma = -\sigma + g(T-1)\varepsilon; \\ \square \\ \beta T = T_e - T - \sigma\varepsilon. \end{cases} \quad (3.16)$$

Якщо  $\alpha, \beta \ll 1$ ,  $\tau_\sigma, \tau_T \ll \tau_\varepsilon$ , то два останні рівняння в системі (3.16) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} 0 = -\sigma + g(T-1)\varepsilon &\rightarrow \sigma = g\varepsilon(T-1); \\ 0 = T_e - T - \sigma\varepsilon; \end{aligned}$$

Звідки можна знайти стаціонарне значення температури

$$\begin{aligned} T = T_e - \sigma\varepsilon = T_e - \varepsilon^2(T-1)g; & \quad T + gT\varepsilon^2 = T_e + g\varepsilon^2; \\ T(1 + g\varepsilon^2) = T_e + g\varepsilon^2; \\ T = \frac{T_e + g\varepsilon^2}{1 + g\varepsilon^2} = \frac{T_e - 1 + 1 + g\varepsilon^2}{1 + g\varepsilon^2} = 1 + \frac{T_e - 1}{1 + g\varepsilon^2}; \\ T = 1 + \frac{T_e - 1}{1 + g\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Запишемо аналогічно для другого рівняння системи (3.16) стаціонарне значення напруження:

$$\begin{aligned} \sigma = g\varepsilon(T-1) = g\varepsilon \cdot \frac{T_e - 1}{1 + g\varepsilon^2}; \\ \sigma = \frac{g\varepsilon(T_e - 1)}{1 + g\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Підставимо рівняння (3.18) у перше рівняння системи (3.16) і отримаємо:

$$\square \\ \varepsilon = -\varepsilon + \sigma = -\varepsilon + \frac{g\varepsilon(T_e - 1)}{1 + g\varepsilon^2} \quad (3.19)$$

Рівняння (3.19) має вигляд рівняння Ландау-Халатнікова

$$\square \\ \varepsilon = -\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}, \text{ тобто } \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \varepsilon - \frac{g\varepsilon(T_e - 1)}{1 + g\varepsilon^2}.$$

Виконаємо інтегрування та знайдемо величину швидкості при даному русі:

$$\begin{aligned}
 V &= \int \varepsilon d\varepsilon + (1-T_e) \int \frac{g\varepsilon d\varepsilon}{1+g\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{(1-T_e)}{2} \int \frac{d(1+g\varepsilon^2)}{1+g\varepsilon^2} \\
 V &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(1-T_e)\ln(1+g\varepsilon^2) \\
 V &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + (1-T_e)\ln(1+g\varepsilon^2)\right] \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Стационарний стан вище описаної системи визначається як:

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = 0, \tag{3.21}$$

звідки можемо отримати наступні співвідношення:

$$-\varepsilon + \frac{g\varepsilon(T_e-1)}{1+g\varepsilon^2} = 0; \quad \varepsilon \left[ -1 + \frac{g(T_e-1)}{1+g\varepsilon^2} \right] = 0.$$

Дане рівняння має два розв'язки:

$$\varepsilon = 0 \tag{3.22}$$

Рівняння (3.22) є першим розв'язком. Знайдемо другий:

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{g(T_e-1)}{1+g\varepsilon^2} \Rightarrow 1+g\varepsilon^2 = g(T_e-1); \\
 g\varepsilon^2 &= g(T_e-1)-1; & \varepsilon^2 &= T_e-1-\frac{1}{g}; \\
 \varepsilon^2 &= T_e-(1+g^{-1}); \\
 \varepsilon_0 &= \sqrt{T_e-(1+g^{-1})}. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Підставимо рішення (3.22) у рівняння (3.17) та (3.18):

$$T_0 = T(\varepsilon=0) = 1 + \frac{T_e-1}{1+0} = T_e; \quad \sigma_0 = 0.$$

Отримані точки реалізують стаціонарне значення системи.

Підставимо (3.23) у рівняння (3.17) та (3.18):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 &= T_e-(1+g^{-1}); \\
 T_{e_0} &= 1 + \frac{T_e-1}{1+g(T_e-(1+g^{-1}))} = 1 + \frac{T_e-1}{1+gT_e-g-1} = 1 + \frac{T_e-1}{g(T_e-1)} = 1 + \frac{1}{g} = 1+g^{-1};
 \end{aligned}$$

$$T_{e_0} = 1 + g^{-1}. \quad (3.24)$$

$$\sigma_0 = \frac{g\varepsilon_0(T_e - 1)}{1 + g\varepsilon_0^2} = \frac{g\varepsilon_0(T_e - 1)}{1 + g(T_e - 1 - g^{-1})} = \frac{g\varepsilon_0(T_e - 1)}{1 + gT_e - g - 1} = \frac{g\varepsilon_0(T_e - 1)}{g(T_e - 1)} = \varepsilon_0;$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0. \quad (3.25)$$

Використовуючи результати, отримані з попередніх розрахунків (3.23) – (3.25), чисельно проаналізуємо безрозмірну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \square \\ \varepsilon = -\varepsilon + \sigma, \\ \square \\ \alpha \sigma = -\sigma + g(T - 1)\varepsilon, \\ \square \\ \beta T = T_e - T - \sigma\varepsilon. \end{cases} \quad (3.26)$$

Для цього використаємо підхід Ляпунова, який полягає в аналізі поведінки фазових траєкторій поблизу стаціонарних станів. Тут аналізується невелике відхилення з амплітудами  $a, b, c$  від стаціонарних значень основних параметрів системи за значеннями показників Ляпунова  $\lambda$ . Тому скористаємося відповідною підстановкою:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + ae^{\lambda t}, \\ \sigma = \sigma_0 + be^{\lambda t}, \\ T = T_0 + ce^{\lambda t}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Тут стаціонарні значення параметрів визначаються координатами особливих точок, що знаходяться як розв'язок алгебраїчної системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = -\varepsilon + \sigma, \\ 0 = -\sigma + g(T - 1)\varepsilon, \\ 0 = T_e - T - \sigma\varepsilon. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \sigma, \\ \sigma = g\varepsilon(T - 1), \\ T = T_e - \sigma\varepsilon. \end{cases}$$

Знаходимо точки – рішення системи рівнянь

$$1) \varepsilon = g\varepsilon(T - 1), \quad \varepsilon[g(T - 1) - 1] = 0; \quad \varepsilon_0 = 0$$

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = 0; \quad T = T_e - 0 \cdot 0$$

$$m.O(0; 0; T_e) \quad (3.28)$$

$$2) 1 = g(T-1), \quad g^{-1} = T-1; \quad T_0 = 1 + g^{-1}$$

$$T_0 = 1 + g^{-1}; \quad 1 + g^{-1} = T_e - \varepsilon^2;$$

$$\varepsilon^2 = T_e - (1 + g^{-1})$$

$$\varepsilon_{01} = \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; \quad \varepsilon_{02} = -\sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}.$$

$$\sigma_{01} = \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; \quad \sigma_{02} = -\sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}$$

$$T_{01} = T_e - \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 = T_e - (T_e - (1 + g^{-1})) = 1 + g^{-1} = T_{02}$$

$$m.A \left( \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; 1 + g^{-1} \right) \quad (3.29)$$

$$m.B \left( -\sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; -\sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; 1 + g^{-1} \right) \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_0 = \pm \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; \quad \sigma_0 = \pm \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})}; \quad T_0 = 1 + g^{-1}.$$

Підставимо рівняння (3.27) у (3.26) та проведемо відповідні алгебраїчні перетворення:

$$\begin{cases} a\lambda e^{\lambda t} = -\varepsilon_0 - ae^{\lambda t} + \sigma_0 + be^{\lambda t}; \\ \alpha b\lambda e^{\lambda t} = -\sigma_0 - be^{\lambda t} + g(T_0 + ce^{\lambda t} - 1)(\varepsilon_0 + ae^{\lambda t}); \\ \beta c\lambda e^{\lambda t} = T_e - T_0 - ce^{\lambda t} - (\sigma_0 + be^{\lambda t})(\varepsilon_0 + ae^{\lambda t}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\lambda e^{\lambda t} = -\varepsilon_0 + \sigma_0 - ae^{\lambda t} + be^{\lambda t}; \\ \alpha b\lambda e^{\lambda t} = -\sigma_0 + g(T_0 - 1)\varepsilon_0 - be^{\lambda t} + g(T_0 - 1)ae^{\lambda t} + gce^{\lambda t}\varepsilon_0 + gce^{\lambda t}ae^{\lambda t}; \\ \beta c\lambda e^{\lambda t} = T_e - T_0 - \sigma_0\varepsilon_0 - ce^{\lambda t} - \sigma_0ae^{\lambda t} - \varepsilon_0be^{\lambda t} - abe^{2\lambda t}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\lambda = -a + b; \\ \alpha b\lambda = -b + g(T_0 - 1)a + gc\varepsilon_0; \\ \beta c\lambda = -c - \sigma_0a - \varepsilon_0b; \end{cases}$$

$$a[\lambda + 1] + b \cdot [-1] + c \cdot [0] = 0;$$

$$a[-g(T_0 - 1)] + b[\alpha\lambda + 1] + c[-g\varepsilon_0] = 0;$$

$$a \cdot [\sigma_0] + b[\varepsilon_0] + c[\beta\lambda + 1] = 0;$$

В результаті, отримуємо матрицю коефіцієнтів при амплітудах  $a, b, c$ , за допомогою якої можемо визначити показники Ляпунова:

$$\det \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ g(1-T_0) & \alpha\lambda+1 & -g\varepsilon_0 \\ \sigma_0 & \varepsilon_0 & \beta\lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

$$(\lambda+1)(\alpha\lambda+1)(\beta\lambda+1) + g\varepsilon_0(\sigma_0 + \varepsilon_0(\lambda+1)) + g(1-T_0)(\beta\lambda+1) = 0. \quad (3.32)$$

Підставимо координати точки  $O$  в рівняння (3.32). Тоді отримуємо рівняння (3.33):

$$(\beta\lambda+1)[\alpha\lambda^2 + (\alpha+1)\lambda + g(1-T_e)+1] = 0 \quad (3.33).$$

Знаходимо корені даного рівняння.

Перший корінь :

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\beta}; \quad (3.34).$$

Слід зауважити, що корінь (3.34) буде завжди від'ємний, що свідчить про стійкість фізичного стану системи, що реалізується в заданій точці.

Визначаємо два інші кореня з такого рівняння:

$$\begin{aligned} \alpha\lambda^2 + (\alpha+1)\lambda + g(1-T_e)+1 &= 0 \\ D &= (\alpha+1)^2 - 4\alpha[g(1-T_e)+1] = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha g + 4\alpha g T_e - 4\alpha = \\ &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4\alpha g + 4\alpha g T_e = (\alpha-1)^2 - 4\alpha g(1-T_e). \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha+1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\alpha g(1-T_e)}}{2\alpha} \quad (3.35)$$

Аналізуючи отримані результати для коренів  $\lambda_{1,2}$ , можемо констатувати, що дійсна частина їх також буде завжди від'ємна.

Виконаємо аналіз точки  $O$ . Для того, щоб розглянути всі можливі варіанти обираємо різний набір параметрів системи, як показано у таблиці 3.1. Згідно з отриманими результатами даний стан системи частіше за все є стійким зі звичайною та коливальною поведінкою. Виключенням є вісь температури, за якою спостерігається нестійка поведінка, характерна для сідлової точки.

Таблиця 3.1 – Значення координат та показників Ляпунова для точки О в залежності від параметрів  $\alpha, \beta, g, T_e$ .

	Номер параметру	1	2	3	4	5
Параметри	$\alpha$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
	$\beta$	6	6	6	6	6
	$g$	0,35	0,65	0,55	0,75	0,85
	$T_e$	0,5	5	0,1	20	10
	$\varepsilon$	0	0	0	0	0
Координати	$\sigma$	0	0	0	0	0
	$T$	20	1	15	5	10
	$\lambda_0$	-0,166666667	-0,166666667	-0,166666667	-0,166666667	-0,166666667
Показ. Ляпунова	$\lambda_1$	-0,921336981	-1,575813821	-0,6429-0,1178i	-2,691998327	-2,163799386
	$\lambda_2$	-0,364377304	0,290099535	-0,6429+0,1178i	1,406284041	0,8780851
Типи стійкості		стійкий вузол	сідло-стійкий вузол	стійкий вузол - стійкий фокус	сідло-стійкий вузол	сідло - стійкий вузол



Для точки  $A$  координати будуть визначатися рівняннями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})} \\ \sigma_0 &= \sqrt{T_e - (1 + g^{-1})} \\ T_0 &= 1 + g^{-1}.\end{aligned}$$

Використовуючи рівняння (3.32) та координати точки  $A$ , знаходимо показники Ляпунова  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}(\lambda+1)(\alpha\lambda+1)(\beta\lambda+1) + g\varepsilon_0\sigma_0 + g(\lambda+1)\varepsilon_0^2 + g(1-T_e)(\beta\lambda+1) &= 0 \\ (\lambda+1)(\alpha\lambda+1)(\beta\lambda+1) + g(T_e - (1 + g^{-1})) + g(\lambda+1)(T_e - (1 + g^{-1})) + \\ + g(1 - 1 - g^{-1})(\beta\lambda+1) &= 0\end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}(\lambda+1)(\alpha\lambda+1)(\beta\lambda+1) + gT_e - g - 1 + (\lambda+1)(gT_e - g - 1) + g \cdot (-g^{-1})(\beta\lambda+1) &= 0 \\ (\lambda+1)(\alpha\lambda+1)(\beta\lambda+1) + gT_e - g - 1 + \lambda gT_e - \lambda g - \\ - \lambda + gT_e - g - 1 - \beta\lambda - 1 &= 0\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}(\lambda+1)[\alpha\beta\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\lambda + 1] + 2[gT_e - g - 1] + \lambda[gT_e - g - 1 - \beta] - 1 &= 0 \\ \alpha\beta\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \alpha\lambda^2 + \lambda + \alpha\beta\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha\lambda + 1 + 2[gT_e - g - 1] + \lambda[gT_e - g - 1 - \beta] - 1 &= 0 \\ \alpha\beta\lambda^3 + \lambda^2(\beta + \alpha + \alpha\beta) + \lambda(1 + \beta + \alpha + gT_e - g - 1 - \beta) + 2(gT_e - g - 1) &= 0\end{aligned}$$

В результаті

$$\alpha\beta\lambda^3 + \lambda^2[\alpha + \beta + \alpha\beta] + \lambda[\alpha + g(T_e - 1)] + 2[g(T_e - 1) - 1] = 0. \quad (3.36)$$

Після алгебраїчних перетворень отримуємо кубічне рівняння вигляду:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0,$$

де

$$\left. \begin{aligned}a &= \alpha\beta; \\ b &= \alpha + \beta + \alpha\beta; \\ c &= \alpha + g(T_e - 1); \\ d &= 2[g(T_e - 1) - 1];\end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Виконаємо розрахунки для рівняння (3.36) та запишемо їх результат до таблиці 3.2.

Як видно з таблиці координати точки А для деякого набору параметрів відсутні, тобто для певних умов даний стан взагалі не реалізується (не уволюється змащувальна плівка). Але для трьох наборів параметрів дана точка існує і окрім того має стійкий характер. Це означає, що разом з твердим станом, що характеризує точка О, співіснує стан розм'якшення льоду.

За допомогою рівняння (3.37) знайдемо коефіцієнти полінома та запишемо отримані значення до таблиці 3.3. Для проведення розрахунку показників Ляпунова було використано пакет прикладних програм MATLAB (Додаток Б).

Таблиця 3.2– Значення координат та показників Ляпунова для точки А в залежності від параметрів  $\alpha, \beta, g, T_e$ .

	Номер параметру	1	2	3	4	5
<b>Параметри</b>	$\alpha$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
	$\beta$	6	6	6	6	6
	$g$	0,35	0,65	0,55	0,75	0,85
	$T_e$	0,5	5	0,1	20	10
	$\varepsilon$	-	1,5689291	-	4,203173404	2,797057277
<b>Координати</b>	$\sigma$	-	1,5689291	-	4,203173404	2,797057277
	$T$	3,85714	2,53846	2,81818	2,333333333	2,176470588
	$\lambda_0$	-1.2552	-1.3198 + 0.0000i	-1.2458	-1.4639 + 0.0000i	-1.3969 + 0.0000i
<b>Показник Ляпунова</b>	$\lambda_1$	-0.4130	-0.0663 + 0.3333i	-0.4568	0.0057 + 0.9284i	-0.0278 + 0.6728i
	$\lambda_2$	0.2159	-0.0663 - 0.3333i	0.2502	0.0057 - 0.9284i	-0.0278 - 0.6728i
	<b>Типи стійкості</b>	-	стійкий фокус	-	стійкий - нестійкий фокус	стійкий фокус

Таблиця 3.3 – Коефіцієнти полінома для відповідних значень  $\alpha, \beta, g, T_e$ .

<b>Коефіцієнт поліному</b>	<b>a</b>	21	21	21	21
	<b>b</b>	30,5	30,5	30,5	30,5
	<b>c</b>	3,325	6,1	3,005	17,75
	<b>d</b>	-2,35	3,2	-2,99	26,5

Точка  $B$  розташована симетрично початку координат до точки  $A$ , тому маємо такі значення координат точки  $B$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= -\sqrt{T_e - (1 + g^{-1})} \\ \sigma_0 &= -\sqrt{T_e - (1 + g^{-1})} \\ T_0 &= 1 + g^{-1}.\end{aligned}$$

Використовуючи рівняння (3.32) та координати точки  $B$ , знаходимо показники Ляпунова  $\lambda$ :

$$\alpha\beta\lambda^3 + \lambda^2[\alpha + \beta + \alpha\beta] + \lambda[\alpha + g(T_e - 1)] + 2[g(T_e - 1) - 1] = 0. \quad (3.38)$$

В результаті алгебраїчних перетворень (3.38) отримуємо кубічне рівняння вигляду:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0,$$

де

$$\left. \begin{aligned}a &= \alpha\beta \\ b &= \alpha + \beta + \alpha\beta \\ c &= \alpha + g(T_e - 1) \\ d &= 2[g(T_e - 1) - 1]\end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Виконаємо розрахунки для рівняння (3.38) та для коефіцієнтів поліному (3.39) аналогічним чином, як і для точки  $A$ . Результати розрахунків представлені у таблиці 3.4. Оскільки точки  $A$  та  $B$  симетричні та мають відмінності тільки за значенням (напрямок) деформації, то результати за точкою  $A$  аналогічні стану, що відповідає точці  $B$ .

Таблиця 3.4. – Значення координат та показників Ляпунова для точки  $B$  в залежності від параметрів  $\alpha, \beta, g, T_e$ .

	Номер параметру	1	2	3	4	5
Параметри	$\alpha$	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
	$\beta$	6	6	6	6	6
	$g$	0,35	0,65	0,55	0,75	0,85
	$T_e$	0,5	5	0,1	20	10
	$\varepsilon$	-	-1,568929	-	-4,203173404	-2,797057277
Координати	$\sigma$	-	-1,568929	-	-4,203173404	-2,797057277
	$T$	3,85714	2,5384615	2,818181818	2,333333333	2,176470588
	$\lambda_0$	-1.2552	-1.3198 + 0.0000i	-1.2458	-1.4639 + 0.0000i	-1.3969 + 0.0000i
Показник Ляпунова	$\lambda_1$	-0.4130	-0.0663 + 0.3333i	-0.4568	0.0057 + 0.9284i	-0.0278 + 0.6728i
	$\lambda_2$	0.2159	-0.0663 - 0.3333i	0.2502	0.0057 - 0.9284i	-0.0278 - 0.6728i
Типи стійкості		-	стійкий фокус	-	стійкий - нестійкий фокус	стійкий фокус



### 3.2 Побудова фазових портретів

Побудуємо фазові портрети (рис.3.1-3.5) для усіх наборів параметрів для точок  $O$ ,  $A$  та  $B$ . Для цього було використано метод Рунге-Кутта в рамках пакету MATLAB (Додаток А).

Для 1-го набору із таблиць 3.2 – 3.4 маємо:

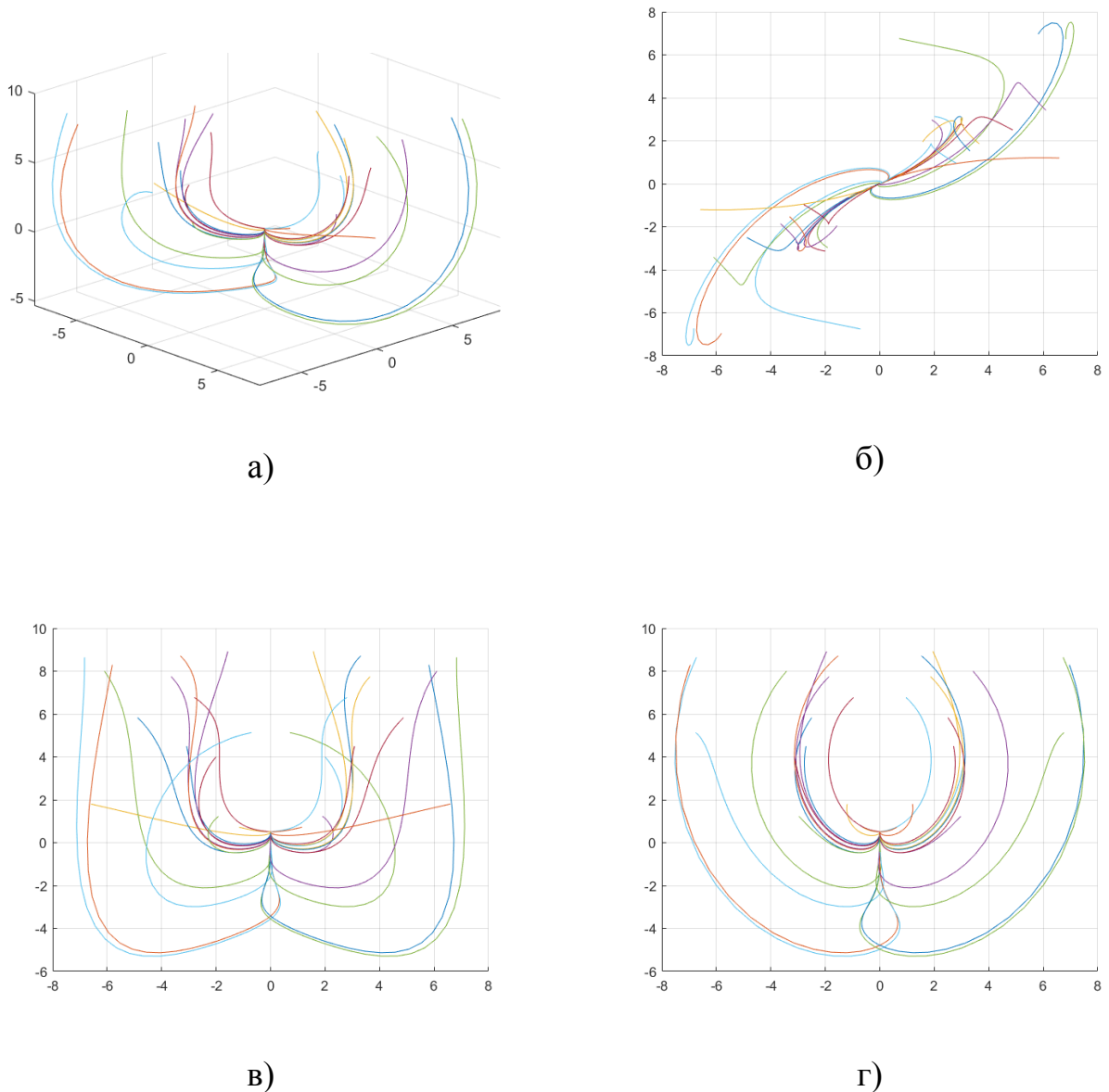
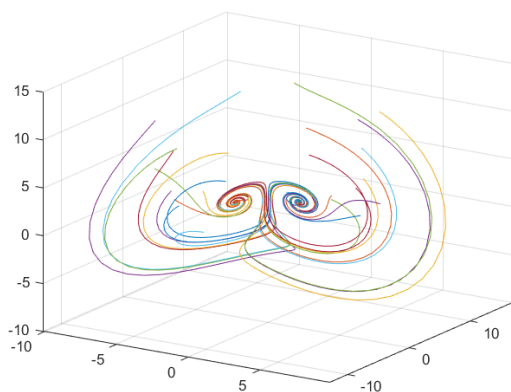


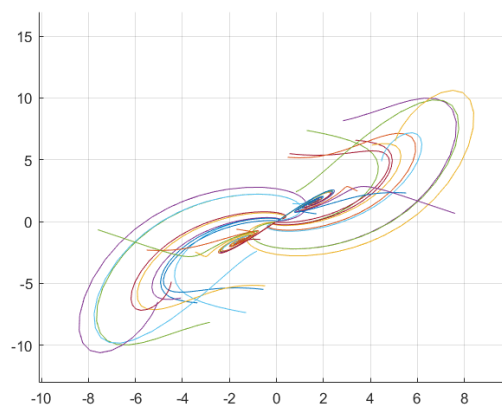
Рисунок 3.1. – Фазові портрети для набору даних  $a = 3.5, b = 6, g = 0.35, T_e = 0.5$ : а) – тривимірний портрет з координатами  $x, y, z$ ; б) – з координатами  $x, y$ ; в) – з координатами  $x, z$ ; г) – з координатами  $y, z$ .



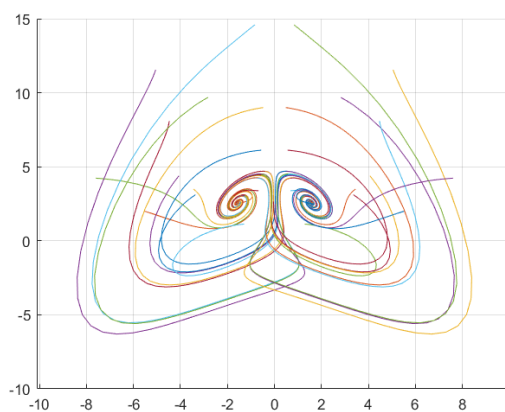
Для 2-го набору із таблиць 3.2 – 3.4 маємо:



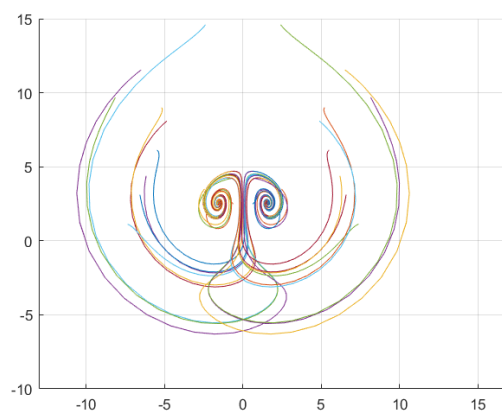
а)



б)



в)



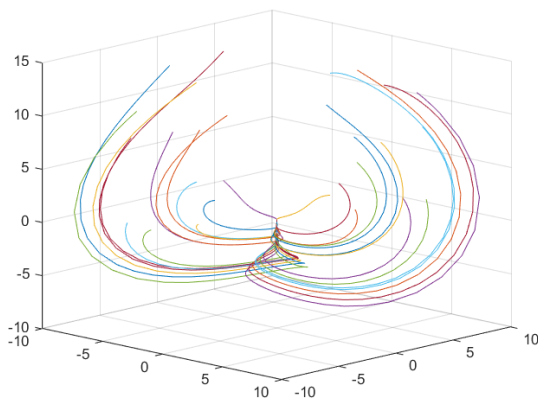
г)

Рисунок 3.2 – Фазові портрети для набору даних

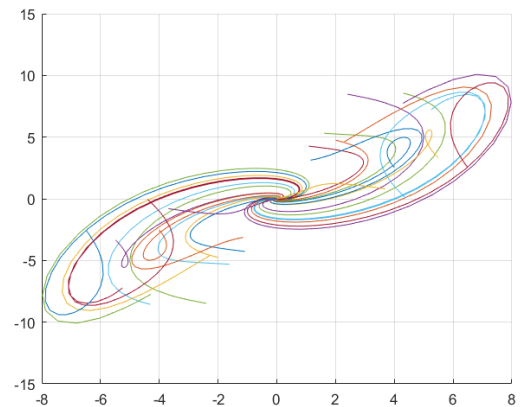
$a = 3.5, b = 6, g = 0.65, T_e = 5$ : а) – тривимірний портрет з координатами  $x, y, z$ ;

б) – з координатами  $x, y$ ; в) – з координатами  $x, z$ ; г) – з координатами  $y, z$ .

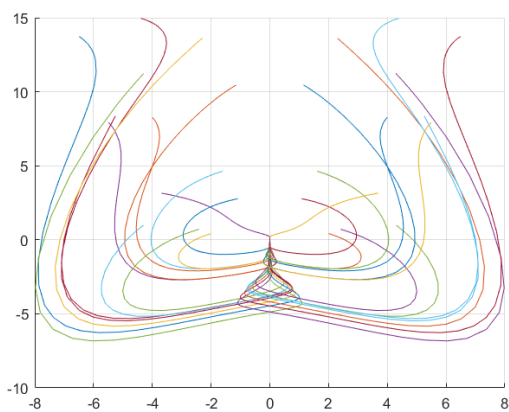
Для 3-го набору із таблиць 3.2 – 3.4 маємо:



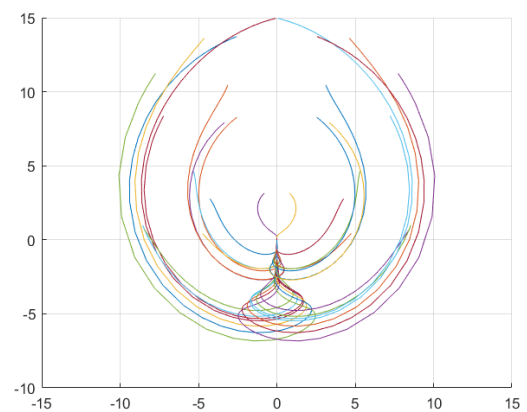
а)



б)



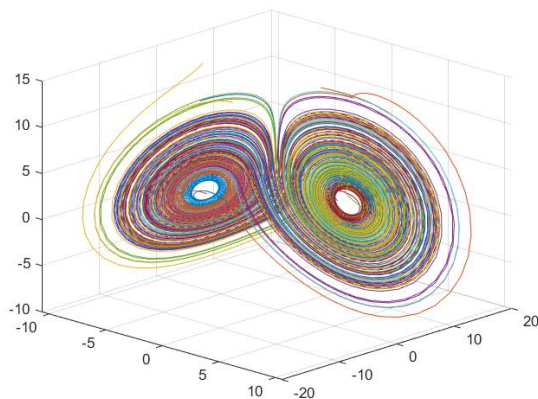
в)



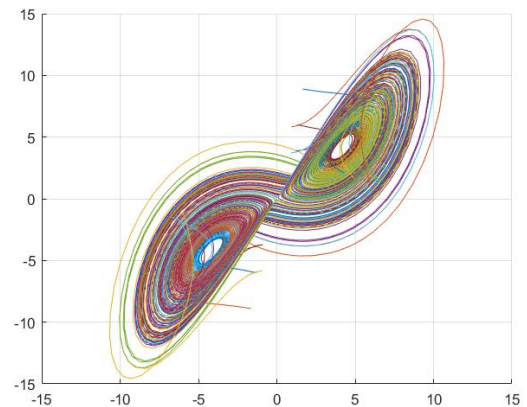
г)

Рисунок 3.3 – Фазові портрети для набору даних  
 $a = 3.5, b = 6, g = 0.55, T_e = 0.1$ : а) – тривимірний портрет з  
 координатами  $x, y, z$ ; б) – з координатами  $x, y$ ; в) – з координатами  $x, z$ ;  
 г) – з координатами  $y, z$ .

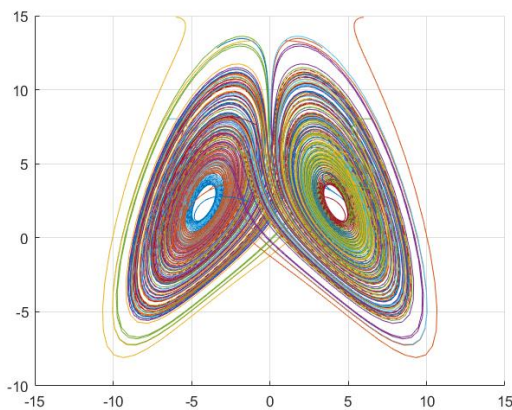
Для 4-го набору із таблиць 3.2 – 3.4 маємо:



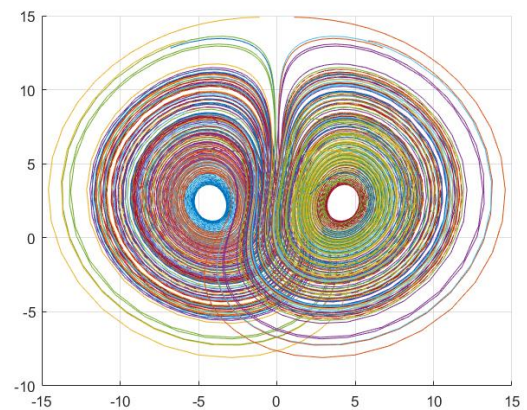
а)



б)



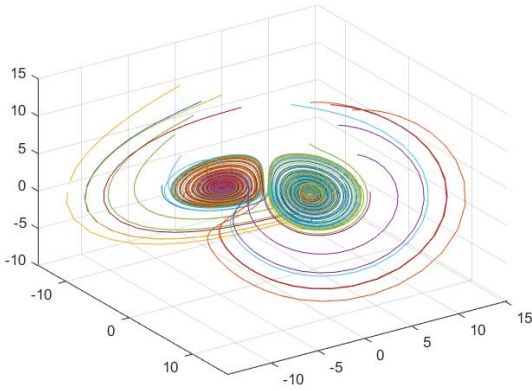
в)



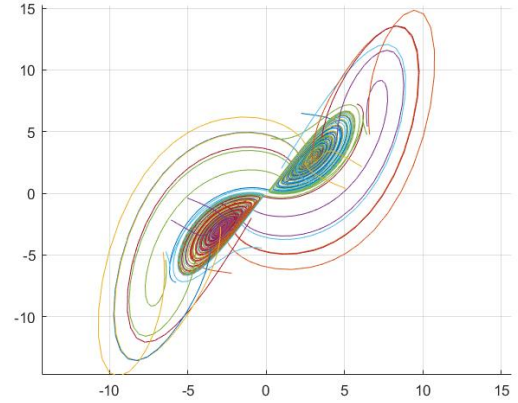
г)

Рисунок 3.4 – Фазові портрети для набору даних  
 $a = 3.5, b = 6, g = 0.75, T_e = 20$ : а) – тривимірний портрет з  
 координатами  $x, y, z$ ; б) – з координатами  $x, y$ ; в) – з координатами  $x, z$ ;  
 г) – з координатами  $y, z$ .

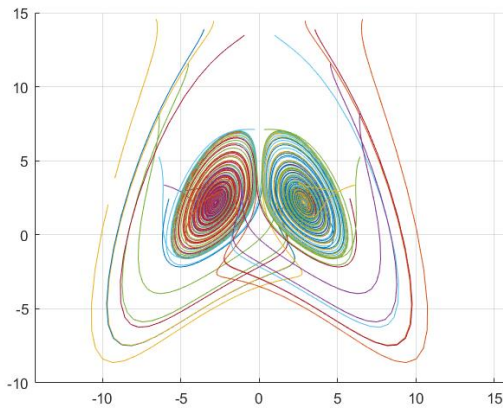
Для 5-го набору із таблиць 3.2 – 3.4 маємо:



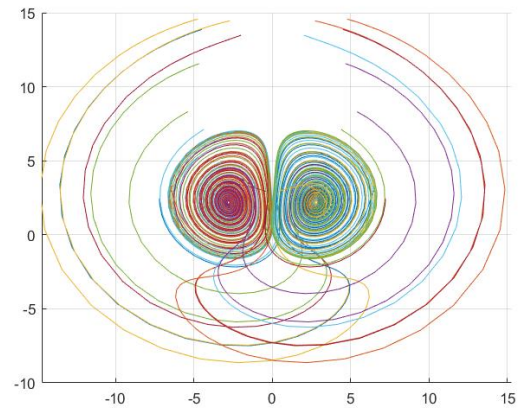
а)



б)



в)



г)

Рисунок 3.5 – Фазові портрети для набору даних  
 $a = 3.5, b = 6, g = 0.85, T_e = 10$ : а) – тривимірний портрет з  
 координатами  $x, y, z$ ; б) – з координатами  $x, y$ ; в) – з координатами  $x, z$ ;  
 г) – з координатами  $y, z$ .

Відмічаючи розв'язки, представлені у таблицях та побудованих фазових портретах, для описаної моделі ми отримали п'ять різних режимів поведінки системи, які різняться набором станів або особливих точок за типом їх стійкості.

У першій та третій області було реалізовано лише один стан нашої математичної моделі – це дві поверхні, між якими розташований тонкий шар льоду. Він залишається у твердому стані та не розм'якшується при заданих значеннях температури поверхні та навантаженні. У третій області даний стан виражено складною поведінкою – стійкий вузол-стійкий фокус (тобто присутні коливальні ефекти), в той час, як перша область має доволі простий характер – стійкий вузол.

У трьох інших областей ми можемо спостерігати по три особливі точки. Як було наведено вище, точки  $A$  та  $B$  симетричні відносно початку координат. Саме тому вони відповідають різним режимам (напрямам) деформації і характеризують стан, коли тонкий шар льоду розм'якшується. Тобто для такого набору параметрів реалізується шукана поведінка – поява змащувальної плівки (зменшення тертя).

Для набору параметрів з четвертої області ми можемо спостерігати картину, характерну дивному аттрактору Лоренца, коли основні величини дуже складним чином досягають стійкого стану. Для практичного застосування найбільш зручними є набори параметрів із третьої та п'ятої областей, де також наявні три стійкі точки. Така ситуація збігається з відомими експериментальними даними та свідчить про те, що між двома поверхнями, які труться, наявний шар льоду буде знаходитися в двох фазах одночасно: рідкій та твердій. В обох випадках рідкий стан системи відповідатиме стійкому фокусу, тобто реалізуватиметься через коливальну поведінку.

## РОЗДІЛ 4

### ТЕХНІКА БЕЗПЕКИ ТА ОХОРОНА ПРАЦІ ПРИ РОБОТІ З ПЕРСОНАЛЬНИМ КОМП'ЮТЕРОМ

Під час роботи за комп'ютером мають місце такі небезпечні та шкідливі фактори:

- фізичні;
- психофізіологічні.

До фізичних факторів відносять:

- підвищене значення напруги електричного кола;
- підвищений рівень електромагнітного випромінювання;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищений рівень іонізації повітря.

До психофізіологічних факторів відносять:

- статичні та динамічні перевантаження;
- розумове перенапруження;
- перенапруження зору при роботі за екранами пристроїв.

Усунення небезпеки ураження електричним струмом зводиться до правильного розміщення устаткування та електричних кабелів. Інші заходи щодо забезпечення електробезпеки збігаються з загальними заходами пожежо- та електробезпеки. Для забезпечення пожежної безпеки слід використовувати приховану електромережу, надійні розетки з пожежобезпечних матеріалів, силові мережі живлення устаткування виконувати кабелями, розрахованими на підключення в 3-5 разів більшого навантаження, включати й виключати живлення обладнання за допомогою штатних вимикачів. Треба регулярно робити очищення внутрішніх частин комп'ютерів, іншого устаткування від пилу, розташовувати комп'ютери на окремих столах. Для запобігання іскріння необхідно встромляти і виймати штепсельні вилки з розеток якомога рідше.

Основним обладнанням робочого місця користувача комп'ютера є монітор, системний блок та клавіатура.

Положення монітора, масштабування зображення на екрані й освітлення — це важливі фактори, що впливають на рівень комфорту й продуктивності роботи користувача [54].

Основними характеристиками монітора є розмір за діагоналлю, роздільна здатність, частота регенерації (оновлення) та клас захисту.

Монітор повинен бути розташований на робочому місці так, щоб поверхня екрана знаходилася в центрі поля зору на відстані 400-700 мм від очей користувача. Рекомендується розміщувати елементи робочого місця так, щоб витримувалася однакова відстань очей від екрана, клавіатури, тексту.

На робочому місці монітор має бути розташований на відстані не менше 1,5 м від стіни з вікнами, від інших стін на відстані 1 м, між собою на відстані не менше 1,5 м. Відносно вікон робоче місце з монітором доцільно розташовувати таким чином, щоб природне світло падало на нього збоку, переважно зліва.

Робочі місця слід розташовувати так, щоб уникнути попадання в очі прямого світла. Джерела освітлення рекомендується розташовувати з обох боків екрану паралельно напрямку погляду. Для уникнення світлових відблисків екрану, клавіатури в напрямку очей користувача, від світильників загального освітлення або сонячних променів, необхідно використовувати спеціальні фільтри для екранів, захисні козирки, на вікнах – жалюзі.

Найкращу якість зображення забезпечують скляні поляризаційні фільтри. Вони усувають практично всі відблиски, роблять зображення чітким і контрастним.

Ще одним моментом, який стосується зору, є необхідність створення неоднорідного поля зору. Для цього можна розвісити на стінах картини, виконані у спокійних тонах. При роботі з текстовою інформацією найбільш фізіологічно правильним є зображення чорних знаків на світлому фоні.

Система освітлення робочого місця з комп'ютером повинна відповідати таким вимогам:

- освітленість на робочому місці повинна відповідати характеру зорової роботи, який визначається трьома параметрами: об'єктом розрізнення – найменшим розміром об'єкта, що розглядається на моніторі ПК; фоном, який характеризується коефіцієнтом відбиття; контрастом об'єкта і фону;
- необхідно забезпечити достатньо рівномірне розподілення яскравості на робочій поверхні монітора, а також в межах навколишнього простору;
- на робочій поверхні повинні бути відсутні різкі тіні;
- в полі зору не повинно бути відблисків (підвищеної яскравості поверхонь, які світяться та викликають осліплення);
- величина освітленості повинна бути постійною під час роботи;
- слід обирати оптимальну спрямованість світлового потоку і необхідний склад світла.

Перед початком роботи необхідно дотримуватися таких вимог безпеки:

- увімкнути систему кондиціонування в приміщенні;
- перевірити надійність встановлення апаратури на робочому столі, повернути монітор так, щоб було зручно дивитися на екран – під прямим кутом (а не збоку) і трохи зверху вниз, при цьому екран має бути трохи нахиленим, нижній його край ближче до оператора;
- перевірити загальний стан апаратури, перевірити справність електропроводки, з'єднувальних шнурів, штепсельних вилок, розеток, заземлення захисного екрана;
- відрегулювати освітленість робочого місця;
- відрегулювати та зафіксувати висоту крісла, зручний для користувача нахил його спинки;
- приєднати до системного блоку необхідну апаратуру. Усі кабелі, що з'єднують системний блок з іншими пристроями, слід вставляти та виймати при вимкненому комп'ютері;



- ввімкнути апаратуру комп'ютера вимикачами на корпусах в послідовності: монітор, системний блок, принтер (якщо передбачається друкування);

- відрегулювати яскравість свічення монітора, мінімальний розмір світної точки, фокусування, контрастність.

Під час виконання роботи за комп'ютером необхідно дотримуватися таких вимог безпеки:

- необхідно стійко розташовувати клавіатуру на робочому столі;
- для забезпечення несприятливого впливу на користувача пристроїв типу "миша" належить забезпечувати вільну велику поверхню столу для переміщення "миші" і зручного упору ліктьового суглоба;

- не дозволяються сторонні розмови, подразнюючі шуми;
- періодично при вимкненому комп'ютері прибирати ледь змоченою мильним розчином бавовняною ганчіркою порох з поверхонь апаратури.

Забороняється при роботі за комп'ютером:

- класти будь-які предмети на апаратуру комп'ютера;
- закривати будь-чим вентиляційні отвори апаратури, що може призвести до її перегрівання і виходу з ладу;
- ставити принтер на системний блок;
- використовувати рідинні або аерозольні засоби очищення поверхонь комп'ютера [55].

Для зняття статичної електрики рекомендується час від часу доторкатися до металевих поверхонь.

Зручна робоча поза при роботі за комп'ютером забезпечується регулюванням висоти робочого столу, крісла та підставки для ніг. Раціональною робочою позою може вважатися таке положення, при якому ступні користувача розташовані горизонтально на підлозі або підставці для ніг, стегна зорієнтовані у горизонтальній площині, верхні частини рук – вертикальні. Кут ліктьового суглоба коливається в межах 70-90°, зап'ястя зігнуті під кутом не більше ніж 20°, нахил голови 15-20°. Важливою є форма

спинки крісла, яка повинна повторювати форму спини. Висота крісла повинна бути такою, щоб користувач не почував тиску на куприк або стегна. Крісло бажано обладнати бильцями.

Періодично користувачу необхідно рухатися, вчасно змінювати положення тіла і робити перерви у роботі. При напруженій роботі за комп'ютером щогодини необхідно робити перерву на 15 хвилин через кожен годину. Декілька разів на годину бажано виконувати серію легких вправ для розслаблення.

Щоб підвищити рівень комфорту й продуктивності роботи, регулярно потрібно змінювати положення, вставати та сідати й навпаки. Не перебувати в одній позі протягом тривалого періоду, оскільки це може призвести до виникнення надмірного напруження й дискомфорту у м'язах і суглобах.

Для нейтралізації зарядів статичної електрики в приміщенні, де виконується робота на комп'ютерах, в тому числі на принтерах, рекомендується збільшувати вологість повітря за допомогою кімнатних зволожувачів. Не рекомендується носити одяг з синтетичних матеріалів.

Наслідками регулярної роботи з комп'ютером без застосування захисних засобів можуть бути: захворювання органів зору (60% користувачів); хвороби серцево-судинної системи (20%); захворювання шлунково-кишкового тракту (10%); шкірні захворювання (5%); різноманітні пухлини.

Хоча в комп'ютерах останнього покоління використовуються досить дієві засоби захисту, тим не менш не треба обманюватися: небезпека лише зведена до можливого мінімуму. Невипадково в багатьох країнах робота за комп'ютером включена до переліку найбільш шкідливих видів діяльності [56].

## ВИСНОВКИ

Дана робота присвячена темі, яка завжди турбувала людство – послаблення сили тертя між двома поверхнями. Дослідження, які вчені роблять майже кожного дня, дозволяють нам використовувати не тільки відомі синтетичні та високотемпературні мастила, але й природні мастила, такі як лід.

У даній роботі було досліджено історію виявлення та вивчення тертя як процесу. Виконано аналіз літературних джерел, у яких описуються теоретичні аспекти тертя льоду (зміна стану з твердого на рідкий під дією плавлення під тиском), аналіз основних законів тертя, які застосовуються в сучасних роботах дослідників при роботі з льодовими покриттями. Визначено основні практичні сфери застосування результатів досліджень при використанні рідкого шару води, який утворюється в результаті танення льоду.

У рамках даного дослідження було визначено умови переходу тонкого шару льоду у рідкий стан при терті, тобто перехід у стан мастила. Це дозволить у подальшому продовжити дослідження кінетики процесу плавлення поверхні льоду під час тертя.

В бакалаврській роботі було проведено сумісний аналіз основних рівнянь теорії пружності, рівняння в'язко-пружної рідини та рівняння теплопровідності, на основі яких побудована самоузгоджена система, що дозволяє представити модель фазового переходу льоду з твердого стану у стан мастила, тобто «рідина-тверде тіло». З'ясувалося, що поведінку тонкого шару льоду можна представити за допомогою взаємного впливу деформації напруження та температури. В результаті аналітично були визначені фізичні умови, за яких відбувається перехід до розм'якшеного стану. Окрім цього було проведено числовий аналіз системи трьох диференціальних рівнянь, визначені стійкі стани системи, їх тип стійкості та залежність від температури поверхні. Кінетика системи досліджувалася шляхом побудови відповідних фазових портретів в тривимірній площині деформація-напруження-температура.

Визначені області, де реалізується розм'якшений стан льоду, перехід до якого носить коливальний характер.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Dowson D. History of Tribology, 2nd ed. – London: Professional Engineering, 1998. – 768 p.
2. Persson B. N. J. Sliding Friction: Physical Principles and Applications, 2nd ed. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 532 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04283-0/>
3. Kietzig A., Hatzikiriakos S., Englezos P. Physics of ice friction // Journal of Applied Physics. – 2010, V. 107, No. 8. <https://doi.org/10.1063/1.3340792>.
4. Higgins D., Marmo B., Jeffree C., Koutsos V., Blackford J. Morphology of ice wear from rubber–ice friction tests and its dependence on temperature and sliding velocity // Wear. – 2008, V. 265, No. 5–6 – P. 634-644. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2007.12.015> .
5. Petrenko V. F. The effect of static electric fields on ice friction // Journal of Applied Physics. – 1994, Vol. 76. <https://doi.org/10.1063/1.357850> .
6. De Koning J. J., Houdijk H., De Groot G., and Bobbert M. F. From biomechanical theory to application in top sports: the Klapskate story // Journal of Biomechanics. – 2000, V. 33, No. 10. – P. 1225-1229. [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(00\)00063-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(00)00063-4) .
7. Bäurle, L., Szabó, D., Fauve, M. *et al.* Sliding friction of polyethylene on ice: tribometer measurements // Tribology Letters. – 2006, V. 24, No. 1. – P. 77-84. <https://doi.org/10.1007/s11249-006-9147-z> .
8. Akkok M., Ettles C. M. M., Calabrese S. J. Parameters Affecting the Kinetic Friction of Ice // Journal of Tribology. – 1987, V. 109(3). – P. 552–559. <https://doi.org/10.1115/1.3261503> .
9. Strausky H., Krenn J., Leitner A., Aussenegg F. Sliding plastics on ice: fluorescence spectroscopic studies on interfacial water layers in the  $\mu\text{m}$  thickness regime // Applied Physics B. – 1998, V. 66, No. 5. – P. 599–602. <https://doi.org/10.1007/s003400050442> .

10. Buhl D., Fauve M., Rhyner H. The kinetic friction of polyethylen on snow: the influence of the snow temperature and the load // *Cold Regions Science and Technology*. – 2001, V. 33, No. 2–3. – P. 133-140.
11. Fortt A.L., Schulson E.M. Velocity-dependent friction on Coulombic shear faults in ice // *Acta Materialia*. – 2009, V. 57, No. 15. – P. 4382-4390.
12. Colbeck S. C. A review of the friction of snow skis // *Journal of Sports Sciences*. – 1994, V. 12. – P. 285-295.
13. Hibler W., Schulson E. On modeling the anisotropic failure and flow of flawed sea ice // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. – 2000, V. 105, No.7. – P. 17105-17120. <https://doi.org/10.1029/2000jc900045>
14. Schulson E.M. Compressive shear faults within arctic sea ice: Fracture on scales large and small // *Journal Geophysical Research*. – 2004, V. 109. <https://doi.org/10.1029/2003JC002108> .
15. Weiss J, Schulson E., Stern H. Sea ice rheology from in-situ, satellite and laboratory observations: Fracture and friction // *Earth and Planetary Science Letters*. – 2007, V. 255, No. 1-2. – P. 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2006.11.033>.
16. Schulson E. On the origin of a wedge crack within the icy crust of Europa // *Journal of Geophysical Research: Planets*. – 2002, V. 107, No. 11. – P. 17-1-17-9. <https://doi.org/10.1029/2001je001586>.
17. Nimmo F., Spencer J, Pappalardo R., Mullen M. Shear heating as the origin of the plumes and heat flux on Enceladus // *Nature*. – 2007, V. 447, No. 7142. – P. 289-291. <https://doi.org/10.1038/nature05783>.
18. Smith-Konter B., Pappalardo R. Tidally driven stress accumulation and shear failure of Enceladus's tiger stripes // *Icarus*. – 2008, V. 198, No. 2. – P. 435-451. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2008.07.005>.
19. Schulson E. Brittle Failure of Ice // *Reviews in Mineralogy and Geochemistry*. – 2002, V. 51, No. 1. – P. 201–252. <https://doi.org/10.2138/gsrmg.51.1.201>.
20. Schulson E., Fortt A., Iliescu D., Renshaw C. On the role of frictional sliding in the compressive fracture of ice and granite: Terminal vs. post-terminal

failure // *Acta Materialia*. – 2006, V. 54, No. 15. – P. 3923-3932.  
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2006.04.024>.

21. Renshaw C., Schulson E. Universal behaviour in compressive failure of brittle materials // *Nature*. – 2001, V. 412, No. 6850. – P. 897-900.  
<https://doi.org/10.1038/35091045>.

22. Kwok R. Deformation of the Arctic Ocean sea ice cover between November 1996 and April 1997: a qualitative survey. In: Dempsey JP, Shen HH, editors. *Scaling laws in ice mechanics*; 2001. p. 315–22.

Kwok R. Deformation of the Arctic Ocean Sea Ice Cover between November 1996 and April 1997: A Qualitative Survey. In: Dempsey J.P., Shen H.H. (eds) *IUTAM Symposium on Scaling Laws in Ice Mechanics and Ice Dynamics. Solid Mechanics and Its Applications*. – 2001, V. 94. – P. 315-322. [https://doi.org/10.1007/978-94-015-9735-7\\_26](https://doi.org/10.1007/978-94-015-9735-7_26)

23. Fortt A., Schulson E. The resistance to sliding along Coulombic shear faults in ice // *Acta Materialia*. – 2007, V. 55, No. 7. – P. 2253-2264.  
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2006.11.022>.

24. Kennedy F., Schulson E., Jones D. The friction of ice on ice at low sliding velocities // *Philosophical Magazine A*. – 2000, V. 80, No. 5. – P. 1093-1110.  
<https://doi.org/10.1080/01418610008212103>.

25. Maeno N., Arakawa M., Yasutome A., Mizukami N., Kanazawa S. Ice friction measurements, and water lubrication and adhesion-shear mechanisms // *Canadian Journal of Physics*. – 2003, V. 81, No. 1-2. – P. 241-249.  
<https://doi.org/10.1139/p03-023>.

26. Renshaw C., Schulson E. Plastic faulting: Brittle-like failure under high confinement // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2004, V. 109, No. 9.  
<https://doi.org/10.1029/2003jb002945>.

27. Persson B. Ice friction: Role of non-uniform frictional heating and ice premelting // *The Journal of Chemical Physics*. – 2015, V. 143, No.22. – P. 224701.  
<https://doi.org/10.1063/1.4936299> .

28. Kietzig A., Hatzikiriakos S., Englezos P. Ice friction: the effect of thermal conductivity // *Journal of Glaciology*. – 2010, V. 56, No. 197. – P. 473-479. <https://doi.org/10.3189/002214310792447752>.
29. Grosch K. Rubber friction and tire traction, in *The pneumatic tire*, A. Gent and J. Walter, Ed. Washington, D.C.: National Highway Traffic Safety Administration, 2006.
30. Lahayne O., Pichler B., Reihnsner R. et al. Rubber Friction on Ice: Experiments and Modeling. // *Tribology Letters*. – 2016, V. 62, No. 2. <https://doi.org/10.1007/s11249-016-0665-z>
31. Lishman B., Sammonds P., Feltham D., Wilchinsky A. The rate- and state- dependence of sea ice friction // *Proceedings of the 20th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions*, Luleå Univ. of Technol., Luleå, Sweden. – 2009.
32. Persson B., Prodanov N., Krick B. et al. Elastic contact mechanics: Percolation of the contact area and fluid squeeze-out. // *The European Physical Journal E*. – 2012, V. 35, No. 1. <https://doi.org/10.1140/epje/i2012-12005-2> .
33. Schulson E., Fortt A. Friction of ice on ice // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2012, V. 117, No. 12. <https://doi.org/10.1029/2012JB009219> .
34. Fülöp T., Tuononen A. Evolution of ice surface under a sliding rubber block // *Wear*. – 2013, V. 307, No. 1-2. – P. 52-59, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2013.08.017>.
35. Wiese K., Kessel T. M., Mundl R., Wies B. An Analytical Thermodynamic Approach to Friction of Rubber on Ice // *Tire Science and Technology*. – April-June 2012, V. 40, No. 2. – P. 124-150.
36. Bäurle L., Kaempfer T., Szabó D., Spencer N. Sliding friction of polyethylene on snow and ice: Contact area and modeling // *Cold Regions Science and Technology*. – 2007, V. 47, No. 3. – P. 276-289, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2006.10.005>.



37. Blackford J., Skouvaklis G., Purser M., Koutsos V. Friction on ice: stick and slip // *Faraday Discussions*. – 2012, V. 156. – P. 243. <https://doi.org/10.1039/c2fd00128d>.

38. Evans D., Nye J., Cheeseman K. The Kinetic Friction of Ice // *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1976, V. 347. – P. 493-512. <https://doi.org/10.1098/rspa.1976.0013>.

39. Colbeck S. The Kinetic Friction of Snow // *Journal of Glaciology*. – 1988, V. 34, No. 116. – P. 78-86. <https://doi.org/10.3189/s0022143000009096>.

40. Samadashvili N., Reischl B., Hynninen T., Ala-Nissilä T., Foster A. Atomistic simulations of friction at an ice-ice interface // *Friction*. – 201, V. 1, No. 3. – P. 242-251. <https://doi.org/10.1007/s40544-013-0021-3>.

41. Limmer D., Chandler D. Premelting, fluctuations, and coarse-graining of water-ice interfaces // *The Journal of Chemical Physics*. – 2014, V. 141, No. 18. – P. 18C505. <https://doi.org/10.1063/1.4895399>.

42. Havránek A., Marvan M. Glass transition in inorganic glasses, polymers, and crystals // *Ferroelectrics*. – 1996, V. 176, No. 1. – P. 25-32. <https://doi.org/10.1080/00150199608223597>.

43. Khomenko A., Khomenko K., Falko V. Nonlinear model of ice surface softening during friction // *Condensed Matter Physics*. – 2016, V. 19, No. 3. – P. 33002, 2016. <https://doi.org/10.5488/cmp.19.33002>.

44. Khomenko A., Yushchenko O. Solid-liquid transition of ultrathin lubricant film // *Physical Review E*. – 2003, V. 68, No. 3. <https://doi.org/10.1103/physreve.68.036110>.

45. Khomenko A. Noise influence on solid–liquid transition of ultrathin lubricant film // *Physics Letters A*. – 2004, V. 329, No. 1-2. – P. 140-147. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.06.091>.

46. Khomenko A., Lyashenko I. Melting of ultrathin lubricant film due to dissipative heating of friction surfaces // *Technical Physics*. – 2007, V. 52, No. 9. – P. 1239-1243. <https://doi.org/10.1134/s1063784207090241>.

47. Khomenko A. Self-organization of adatom adsorption structure at interaction with tip of dynamic force microscope // *Condensed Matter Physics*. – 2014, V. 17, No. 3. – P. 33401. <https://doi.org/10.5488/cmp.17.33401>.

48. Tusima K. Adhesion Theory for Low Friction on Ice in New Tribological Ways by T. Ghrib. – 1st ed. – 2011 – 498 p. <https://doi.org/10.5772/15085>.

49. Olemskoi A., Khomenko A. The synergetic theory of the glass transition in liquids // *Technical Physics*. – 2000, V. 45, No. 6. – P. 677-682. <https://doi.org/10.1134/1.1259702>.

50. Olemskoi A., Khomenko A., Kharchenko D. Self-organized criticality within fractional Lorenz scheme // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2003, V. 323. – P. 263-293. [https://doi.org/10.1016/s0378-4371\(02\)01991-x](https://doi.org/10.1016/s0378-4371(02)01991-x).

51. Olemskoi A., Khomenko A. Synergetic theory for a jamming transition in traffic flow // *Physical Review E*. – 2001, V. 63, No. 3. <https://doi.org/10.1103/physreve.63.036116>.

52. Lyashenko I., Khomenko A., Metlov L. Phenomenological theory for the melting of a thin lubricant film between two atomically smooth solid surfaces // *Technical Physics*. – 2010, V. 55, No. 8. – P. 1193-1199. <https://doi.org/10.1134/s1063784210080190>.

53. Khomenko A., Lyashenko I., Borisyuk V. Self-similar phase dynamics of boundary friction // *Ukrainian Journal of Physics*. – 2009, V.54 , No. 11. – P.1139-1148. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/16488> .

54. Посібник із безпечної та зручної роботи. Hewlett-Packard [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://h20195.www2.hp.com/v2/getpdf.aspx/4AA7-6192UKUA.pdf>

55. Слободян Ф. Охорона праці при роботі з комп'ютерною технікою / Ф. Слободян // *Охорона праці і пожежна безпека*. – 2017. - № 9. – С.31-37.

56. Селезень В. Д. Охорона праці в комп'ютерному класі / В. Д. Селезень, В. С. Трохимець // *Наукові записки [Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова]. Сер. : Педагогічні та історичні науки*. -

2014. – Вип. 121. – С. 205-210. – Режим доступу:  
[http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nzped\\_2014\\_121\\_30](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nzped_2014_121_30) .

## ДОДАТКИ

## Додаток А

Код, який використовувався для побудови фазових портретів у MATLAB

***Перша область:***

```
a1=3.5; b=6;
```

```
Te=0.5; g=0.35;
```

```
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/a1)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.81 6.96 8.29]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.81 -6.96 8.29]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.57 1.95 8.92]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.57 -1.95 8.92]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.71 6.76 5.13]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.71 -6.76 5.13]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.88 2.5 5.83]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.88 -2.5 5.83]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.59 1.2 1.8]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.59 -1.2 1.8]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.91 2.97 1.23]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.91 -2.97 1.23]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.8 0.96 6.77]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.8 -0.96 6.77]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.31 1.53 8.71]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.31 -1.53 8.71]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.65 1.86 7.74]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.65 -1.86 7.74]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.83 6.73 8.64]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.83 -6.73 8.64]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.08 2.71 4.5]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.08 -2.71 4.5]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.15 0.63 0.72]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.15 -0.63 0.72]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.1 3.42 8]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.1 -3.42 8]); hold on;
```

```

plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2 3.14 4]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2 -3.14 4]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
grid on;

```

***Друга областъ:***

```

al=3.5; b=6;
Te=5; g=0.65;
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/al)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.52 2.31 2]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.52 -2.31 2]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.06 6.18 4.39]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.06 -6.18 4.39]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.29 7.37 1.13]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.29 -7.37 1.13]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.36 6.58 3.11]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.36 -6.58 3.11]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.48 5.2 9]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.48 -5.2 9]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [7.6 0.66 4.23]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-7.6 -0.66 4.23]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.47 4.87 8.09]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.47 -4.87 8.09]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.7 0.62 2.49]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.7 -0.62 2.49]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.05 6.5 11.55]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.05 -6.5 11.55]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.83 2.4 14.59]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.83 -2.4 14.59]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.56 5.49 6.12]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.56 -5.49 6.12]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.45 2.46 3.5]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.45 -2.46 3.5]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.83 8.15 9.68]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.83 -8.15 9.68]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.68 1.45 3.38]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.68 -1.45 3.38]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
grid on;
```

***Третья область:***

```
al=3.5; b=6;
Te=0.1; g=0.55;
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/al)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4 2.55 8.27]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4 -2.55 8.27]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.49 3.34 7.92]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.49 -3.34 7.92]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.61 5.31 4.63]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.61 -5.31 4.63]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.09 4.27 2.77]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.09 -4.27 2.77]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2 4.75 0.42]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2 -4.75 0.42]); hold on;
```



```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.41 8.47 0.71]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.41 -8.47 0.71]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.39 0.06 14.96]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.39 -0.06 14.96]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.15 3.13 10.45]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.15 -3.13 10.45]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.69 0.8 3.15]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.69 -0.8 3.15]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.3 8.56 0.98]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.3 -8.56 0.98]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.49 2.56 13.73]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.49 -2.56 13.73]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.3 4.63 13.62]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.3 -4.63 13.62]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.29 7.74 11.24]); hold on;
```

```

plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.29 -7.74 11.24]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.26 7.23 8.36]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.26 -7.23 8.36]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
grid on;

```

***Четверта областъ:***

```

al=3.5; b=6;
Te=20; g=0.75;
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/al)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.65 8.9 3.74]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.65 -8.9 3.74]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.38 5.09 8.14]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.38 -5.09 8.14]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.8 1.44 3.23]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.8 -1.44 3.23]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.31 6 2.44]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.31 -6 2.44]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6 1.1 14.9]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));

```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6 -1.1 14.9]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.23 3.9 5.41]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.23 -3.9 5.41]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.89 3.73 7.65]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.89 -3.73 7.65]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.3 2.12 2.93]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.3 -2.12 2.93]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.01 1.56 5.65]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.01 -1.56 5.65]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.46 1.31 8.02]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.46 -1.31 8.02]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.1 1.73 8.15]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.1 -1.73 8.15]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.92 5.83 13.3]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.92 -5.83 13.3]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
```

```
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.73 8.94 6.12]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.73 -8.94 6.12]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.71 3.79 6.1]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.71 -3.79 6.1]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
grid on;
```

***П'ята область:***

```
al=3.5; b=6;
Te=10; g=0.85;
f = @(t,a) [-a(1)+a(2); (1/al)*(-a(2)+g*(a(3)-1)*a(1)); (1/b)*((Te-a(3))-a(2)*a(1))];
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.22 6.48 3]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.22 -6.48 3]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.05 0.39 2.92]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.05 -0.39 2.92]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.42 4.73 5.26]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.42 -4.73 5.26]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [5.77 7.21 2.45]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-5.77 -7.21 2.45]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.59 4.76 14.57]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.59 -4.76 14.57]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.44 5.4 8.31]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.44 -5.4 8.31]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.96 2.01 13.48]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.96 -2.01 13.48]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [1.36 1.77 1.33]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-1.36 -1.77 1.33]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [6.09 2.16 3.36]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-6.09 -2.16 3.36]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [0.29 4.45 7.11]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-0.29 -4.45 7.11]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [3.54 4.5 13.87]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-3.54 -4.5 13.87]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.93 2.72 14.45]); hold on;
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.93 -2.72 14.45]); hold on;
```

```
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [4.53 4.67 11.56]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-4.53 -4.67 11.56]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [2.87 0.86 3.06]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
[t,a] = ode45(f, [0 100], [-2.87 -0.86 3.06]); hold on;  
plot3(a(:,1),a(:,2),a(:,3));  
grid on;
```

## Додаток Б

Програма для знаходження розв'язків кубічного рівняння

```
p=[21 30.5 3.325 -2.35];
```

```
r=roots(p)
```

```
p=[21 30.5 6.1 3.2];
```

```
r=roots(p)
```

```
p=[21 30.5 3.005 -2.99];
```

```
r=roots(p)
```

```
p=[21 30.5 17.75 26.5];
```

```
r=roots(p)
```

```
p=[21 30.5 11.15 13.3];
```

```
r=roots(p)
```